ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

JINDŘICH NEČAS

Sur la régularité des solutions variationnelles des équations elliptiques non-linéaires d'ordre $2k$ en deux dimensions

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 21, nº 3 (1967), p. 427-457

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1967_3_21_3_427_0>

SUR LA RÉGULARITÉ DES SOLUTIONS VARIATIONNELLES DES ÉQUATIONS ELLIPTIQUES NON-LINÉAIRES D'ORDRE $2k$ EN DEUX DIMENSIONS

JINDŘICH NEČAS, Prague

1. Introduction.

On considère la régularité à l'intérieur du domaine plan de la solution du problème variationnel:

$$(1.1) \qquad \min_{u-u_0 \in \overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega)} \left(\int_\Omega F(x, D^i u)\, dx - \int_\Omega \sum_{|i| \leq k} D^i u f_i \, dx. \right. \text{(1)}$$

$\overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega)$ est la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$, de l'espace des fonctions indéfiniment continûment différentiables à support compact, dans l'espace de Sobolev $W_m^{(k)}(\Omega)$, $1 < m < \infty$. Sous certaines conditions pour $F(x, \xi_i), f_i$, il existe pour chaque sous-domaine $\Omega' \subset \overline{\Omega}' \subset \Omega$, un nombre $\mu(\Omega')$, $0 < \mu(\Omega') < 1$, tel que la solution u appartient à $C^{(k),\mu}(\overline{\Omega}')$. À plus forte raison, nous démontrerons que pour $\Omega_d = \{x \in \Omega, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > d\}$, il existe $p(d) > 2$ de sorte que pour $|i| = k + 1$:

$$\| D^i u \|_{L_{p(d)}(\Omega_d)} \leqq c(d).$$

Il en suit que la fonction $D^i u, |i| = k$ est höldérienne sur $\overline{\Omega}_d$ avec $\mu = 1 - 2/p(d)$.

Pervenuto alla Redazione il 6 Febbraio 1967.

(1) C'est le problème de Dirichlet. Les problèmes aux limites, formulés par exemple au travail [14] de l'auteur, se ramènent, pour les questions de régularité, facilement au problème de Dirichlet. On utilise la notation usuelle $D^i = \dfrac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_N^{i_N}}$.

Si les donnés du problème (1.1) sont assez régulières, on obtient de notre résultat que la solution appartient à l'espace $C^{(k+l),\mu}(\overline{\Omega}')$ avec l, un entier non-négatif, $0 < \mu \leqq 1$. Cf. par exemple S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg [1].

Nous avons évité au travail présent quelques généralisations des hypothèses garantissant encore nos résultats pour ne pas compliquer les démonstrations. Ce sont les conditions (2.7), (2.13), (2.19), par exemple, qu'on peut omettre ou les remplacer par autres. L'unicité de la solution peut disparaître. Encore, il n'y a pas au fond des choses que la solution en question rend minimum une certaine fonctionnelle. La méthode variationnelle peut être remplacée par la méthode de Minty-Browder, cf. F. E. Browder [2].

Pour $k = 1$ et la dimension $N \geqq 2$, le théorème sur l'appartenance de la solution faible dans l'espace $C^{(1),\mu}(\overline{\Omega}')$ ou même $C^{(1),\mu}(\overline{\Omega})$ est à plusieurs auteurs, cf. par exemple C. B. Morrey [9], [10], E. R. Buley [4], P. Hartman, G. Stampacchia [6], G. Stampacchia [16], O. A. Ladyzenskaja, N. N. Uralceva [7]. Tous ces travaux utilisent les résultats de De Giorgi-Nash, cf. E. De Giorgi [5]. La situation pour le cas $k = 1$ est $N = 2$ est moins compliquée, ce qui a permis à C. B. Morrey de démontrer pour $m = 2$ ce résultat plus avant, au travail [11].

Pour $k \geqq 1$, $N = 2$ et $m = 2$, un tel résultat a été annoncé par l'auteur dans [12] avec un théorème du à J. Kadlec, J. Nečas, jouant le rôle du théorème de De Giorgi. Un procédé analogue est utilisé au travail présent pour le cas $1 < m < \infty$, $N = 2$. Encore ici, un théorème sur la régularité de la solution faible du problème elliptique linéaire

$$\sum_{|i|=|j|=k} D^i (A_{ij} D^j u) = \sum_{|i|=k} D^i f_i$$

est démontré. Les coefficients $A_{ij} \in L_\infty(K)$, où K est la boule unité. Si $f_i \in L_p(K)$, $p > 2$, p n'étant pas trop éloigné de 2, la solution u appartient dans $W_p^{(k)}(K)$. Pour le cas $k = 1$, cf. N. G. Meyres [8]. Les démonstrations des lemmes et théorèmes sont faites pour la dimension $N \geqq 2$. On se borne au cas $N = 2$, si la démonstration ne marche pas pour le cas général.

2. Hypothèses.

Le domaine Ω en question soit à frontière lipschitzienne. On suppose $\Omega \subset E_N$, $N \geqq 2$. On note par $W_m^{(k)}(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles, dont les dérivées au sense des distributions jusqu'à l'ordre k sont de m-ème puissance sommable sur Ω, muni de la norme

$$\| u \|_{W_m^{(k)}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} | D^i u(x) |^m \, dx \right)^{\frac{1}{m}}.$$

On note par $C^{(k),\mu}(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions, dont les dérivées jusqu'à l'ordre k sont μ-höldériennes dans $\bar{\Omega}$, muni de la norme

$$\| u \|_{C^{(k),\mu}(\bar{\Omega})} = \max_{x \in \bar{\Omega}} \sum_{|\alpha| = k} | D^\alpha u(x) | + \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in \bar{\Omega}}} \sum_{|\alpha| = k} \frac{| D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y) |}{| x - y |^\mu}.$$

On désigne par $\mathcal{E}(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions réelles, indéfiniment continûment différentiables dans $\bar{\Omega}$.

Nous utiliserons les théorèmes de l'immersion, cf. par exemple J. Nečas [13]:

Lemme 2.1. *Soit $\Omega \subset E_N$, $N \geqq 2$, un domaine à frontière lipschitzienne. Alors $\overline{\mathcal{E}(\bar{\Omega})} = W_m^{(k)}(\Omega)$. Si $km < N$, $W_m^{(k)}(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ algébriquement et topologiquement avec $1/q = 1/m - k/N$. Si $1/q > 1/m - k/N$ l'application identique de $W_m^{(k)}(\Omega)$ dans $L_q(\Omega)$ est complètement continue. Si $km = N$, $W_m^{(k)}(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ algébriquement et topologiquement pour chaque q, $1 \leqq q < \infty$ et l'application identiqne de $W_m^{(k)}(\Omega)$ dans $L_q(\Omega)$ est complètement continue. Si $km > N$ et: $\mu = k - N/m$ si $k - N/m < 1$, $\mu < 1$ si $k - N/m = 1$ et $\mu = 1$ si $k - N/m > 1$, $W_m^{(k)}(\Omega) \subset C^{(0),\mu}(\bar{\Omega})$ algébriquement et topologiquement.*

Soit $F(x, \zeta_\alpha)$ une fonction réelle, définie pour $x \in \bar{\Omega}$,

$$-\infty < \zeta_\alpha < \infty \ (\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N), \ |\alpha| \leqq k),$$

continue avec les dérivées $\dfrac{\partial F}{\partial x_l}, \dfrac{\partial F}{\partial \zeta_i}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i \, \partial x_l}$ pour $x \in \bar{\Omega}$, $|\zeta_\alpha| < \infty$. Soit M un sousensemble des indices $|\alpha| \leqq k$ contenant tous les indices $|\alpha| = k$. Nous supposerons:

$$| F(x, \zeta_\alpha) | \leqq C \left(1 + \sum_{\alpha \in M} | \zeta_\alpha |\right)^m \ (^2) \tag{2.1}$$

$$F(x, \zeta_\alpha) \geqq C_1 \left(1 + \sum_{\alpha \in M} | \zeta_\alpha |\right)^m - C_2, \tag{2.2}$$

$$(1 < m < \infty).$$

---

(2) Les constantes positives seront indiquées par le même symbole c. Au cas nécéssaire, on utilisera des indices. Les constantes avec la signification pour tout le travail présent, seront indiquées par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$

Si $m = 2$, on supposera encore

$$\left|\frac{\partial F}{\partial \zeta_i}(x, \zeta_\alpha)\right| \leqq C\,(1 + \sum_{\alpha \in M} |\zeta_\alpha|), \tag{2.3}$$

$$\left|\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i\, \partial x_l}(x, \zeta_\alpha)\right| \leqq c\,(1 + \sum_{\alpha \in M} |\zeta_\alpha|), \tag{2.4}$$

$$\left|\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i\, \partial \zeta_j}(x, \zeta_\alpha)\right| \leqq C\,, \tag{2.5}$$

$$\gamma_1 |\xi|^2 \leqq \sum_{|i| = |j| = k} \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i\, \partial \zeta_j}(x, \zeta_\alpha) \xi_i \xi_j \leqq \gamma_2 |\xi|^2, \tag{2.6}$$

$$\sum_{\substack{|i| \leqq k \\ |j| \leqq k}} \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i\, \partial \zeta_j}(x, \zeta_\alpha)\, \xi_i\, \xi_j \geqq 0. \tag{2.7}$$

Si $m > 2$, posons $\sigma = \left[\dfrac{m}{2}\right]$, $h = \dfrac{m-2}{\sigma}$. On supposera l'existence d'une fonction $F(x, \zeta_\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_\sigma)$, définie pour $x \in \bar{\Omega}$,

$$|\zeta_\alpha| < \infty\ (|\alpha| \leqq k),\ 0 \leqq \lambda_l \leqq 1 \qquad (l = 1, 2, \dots, \sigma)$$

continue au domaine de définition avec les dérivées $\dfrac{\partial F}{\partial \zeta_i}$, $\dfrac{\partial F}{\partial x_l}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i\, \partial x_l}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i\, \partial \zeta_j}$ et telle que $F(x, \zeta_\alpha) = F(x, \zeta_\alpha, 0, \dots, 0)$. Soit $1 \leqq \tau \leqq \sigma$ et considérons

$$F(x, \zeta_\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0).$$

On supposera :

$$|F(x, \zeta_\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0)| \leqq \tag{2.8}$$
$$\leqq C\,(1 + \sum_{\alpha \in M} |\zeta_\alpha|)^m \prod_{l=1}^{\tau} (1 + \lambda_l \sum_{\alpha \in M} |\zeta_\alpha|)^{-h},$$

$$F(x, \zeta_\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0) \geqq \tag{2.9}$$
$$\geqq C_1\,(1 + \sum_{\alpha \in M} |\zeta_\alpha|)^m \prod_{l=1}^{\tau} (1 + \lambda_l \sum_{\alpha \in M} |\zeta_\alpha|)^{-h} - C_2,$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial \zeta_i}(x, \zeta_\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0)\right| \leqq \tag{2.10}$$
$$\leqq C\,(1 + \sum_{\alpha \in M} |\zeta_\alpha|)^{m-1} \prod_{l=1}^{\tau} (1 + \sum_{\alpha \in M} |\zeta_\alpha|)^{-h},$$

(2.11) $$\left| \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i \, \partial x_l} (x, \zeta_\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0) \right| \leqq$$

$$\leqq C (1 + \sum_{\alpha \in M} | \zeta_\alpha |)^{m-1} \prod_{l=1}^{\tau} (1 + \sum_{\alpha \in M} | \zeta_\alpha |)^{-h},$$

(2.12a) $$\gamma_1 (1 + \sum_{\alpha \in M} | \zeta_\alpha |)^{m-2} \prod_{l=1}^{\tau} (1 + \lambda_l \sum_{\alpha \in M} | \zeta_\alpha |)^{-h} | \xi |^2 \leqq$$

$$\leqq \sum_{|i|=|j|=k} \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i \, \partial \zeta_j} (x, \zeta_\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0) \, \xi_i \, \xi_j \leqq$$

$$\leqq \gamma_2 (1 + \sum_{\alpha \in M} | \zeta_\alpha |)^{m-2} \prod_{l=1}^{\tau} (1 + \lambda_l \sum_{\alpha \in M} | \zeta_\alpha |)^{-h} | \xi |^2,$$

(2.12b) $$\left| \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i \, \partial \zeta_j} (x, \zeta_\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0) \right| \leqq$$

$$\leqq C (1 + \sum_{\alpha \in M} | \zeta_\alpha |)^{m-2} \prod_{l=1}^{\tau} (1 + \lambda_l \sum_{\alpha \in M} | \zeta_\alpha |)^{-h},$$

(2.13) $$\sum_{|i|, |j| \leqq k} \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i \, \partial \zeta_j} (x, \zeta_\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0) \, \xi_i \, \xi_j \geqq 0.$$

Si $1 < m < 2$, on supposera l'existence d'une fonction $F(x, \zeta_\alpha, \lambda)$, définie pour $x \in \bar{\Omega}$, $| \zeta_\alpha | < \infty$ $(| \alpha | \leqq k)$, $0 \leqq \lambda \leqq 1$, continue avec les dérivées $\frac{\partial F}{\partial \zeta_i}$, $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i \, \partial \zeta_j}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i \, \partial x_l}$ au domaine de définition, et telle que $F(x, \zeta_\alpha, 0) = F(x, \zeta_\alpha)$. On supposera encore :

(2.14) $$| F(x, \zeta_\alpha, \lambda) | \leqq C (1 + \sum_{\alpha \in M} | \zeta_\alpha |)^m (1 + \lambda \sum_{\alpha \in M} | \zeta_\alpha |)^{2-m},$$

(2.15) $$F(x, \zeta_\alpha, \lambda) \geqq C_1 (1 + \sum_{\alpha \in M} | \zeta_\alpha |)^m (1 + \lambda \sum_{\alpha \in M} | \zeta_\alpha |)^{2-m} - C_2,$$

(2.16) $$\left| \frac{\partial F}{\partial \zeta_i} (x, \zeta_\alpha, \lambda) \right| \leqq C (1 + \sum_{\alpha \in M} | \zeta_\alpha |)^{m-1} (1 + \lambda \sum_{\alpha \in M} | \zeta_\alpha |)^{2-m},$$

(2.17) $$\left| \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i \, \partial x_l} (x, \zeta_\alpha, \lambda) \right| \leqq C (1 + \sum_{\alpha \in M} | \zeta_\alpha |)^{m-1} (1 + \lambda \sum_{\alpha \in M} | \zeta_\alpha |)^{2-m},$$

(2.18a) $$\gamma_1 (1 + \sum_{\alpha \in M} | \zeta_\alpha |)^{m-2} (1 + \lambda \sum_{\alpha \in M} | \zeta_\alpha |)^{2-m} | \xi |^2 \leqq$$

$$\leqq \sum_{|i|=|j|=k} \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i \, \partial \zeta_j} (x, \zeta_\alpha, \lambda) \, \xi_i \, \xi_j \leqq$$

$$\leqq \gamma_2 (1 + \sum_{\alpha \in M} | \zeta_\alpha |)^{m-2} (1 + \lambda \sum_{\alpha \in M} | \zeta_\alpha |)^{2-m} | \xi |^2,$$

$$\left| \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i \, \partial \zeta_j} (x, \zeta_\alpha, \lambda) \right| \leq C (1 + \sum_{\alpha \in M} | \zeta_\alpha |)^{m-2} (1 + \sum_{\alpha \in M} | \zeta_\alpha |)^{2-m}, \tag{2.18b}$$

$$\sum_{|i|, |j| \leqq k} \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i \, \partial \zeta_j} (x, \zeta_\alpha, \lambda) \, \xi_i \, \xi_j \geqq 0. \tag{2.19}$$

EXEMPLE. Si $F(x, \zeta_\alpha) = (1 + \sum_{|\alpha| = k} \zeta_\alpha^2)^{\frac{m}{2}}$ et si nous posons pour

$$m > 2: \quad F(x, \zeta_\alpha, \lambda_1, \ldots, \lambda_\sigma) = (1 + \sum_{|\alpha| = k} \zeta_\alpha^2)^{\frac{m}{2}} \prod_{l=1}^{\sigma} (1 + \lambda_l \sum_{|\alpha| = k} \zeta_\alpha^2)^{-\frac{h}{2}}$$

et pour $1 < m < 2$:

$$F(x, \zeta_\alpha, \lambda) = (1 + \sum_{|\alpha| = k} \zeta_\alpha^2)^{\frac{m}{2}} (1 + \lambda \sum_{|\alpha| = k} \zeta_\alpha^2)^{1 - \frac{m}{2}}$$

les conditions (2.1)-(2.19) sont satisfaites.

Soit encore pour $m \geqq 2$, $|i| \leqq k$:

$$f_i \in L_2(\Omega) \tag{2.20}$$

et pour $1 < m < 2$:

$$f_i \in L_{m/(m-1)}(\Omega). \tag{2.20bis}$$

Désignons par $\varrho(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Nous supposerons pour $m \geqq 2$:

$$\int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right|^{p_0} \varrho^{kp_0} \, dx \leqq C, \quad 2 < p_0 \tag{2.21}$$

et pour $m < 2$:

$$\int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_l} \right|^{m/(m-1)} \varrho^{km/(m-1)} \, dx \leqq C. \tag{2.22}$$

Enfin, soit pour $m \geqq 2$:

$$u_0 \in W_m^{(k)}(\Omega) \tag{2.23}$$

et pour $1 < m < 2$:

$$u_0 \in W_2^{(k)}(\Omega). \tag{2.23bis}$$

Considérons le problème variationnel : on cherche $u \in W_m^{(k)}(\Omega)$ de sorte que

$$u - u_0 \in \overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega), \tag{2.24}$$

$$\Phi(u) \equiv \int_\Omega F(x, D^\alpha u)dx - \sum_{|i| \leq k} \int_\Omega D^i u f_i \, dx \tag{2.25}$$

atteint son minimum pour u.

Définissons encore la différentielle de Gateaux de $\Phi(u_0 + v)$ au point v de $\overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega)$ comme

$$\lim_{t \to 0} t^{-1} (\Phi(u_0 + v + t\tilde{v}) - \Phi(u_0 + v)) \equiv D\Phi(v, \tilde{v})$$

et supposons que $D\Phi(v, \cdot)$ appartient à $(\overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega))'$, au dual de $\overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega)$.

Il suit des résultats de J. Nečas [14] ou de F. E. Browder [3] le lemme suivant, facile, que nous redémontrerons pour la commodité du lecteur :

Lemme 2.2. *Les hypothèses* (2.1), (2.2), (2.10), (2.12a), (2.12b), (2.13) *pour* $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\sigma = 0$ *soient satisfaites. Nous prenons* $1 < m < \infty$. *Supposons* (2.20bis), (2.23) ; *alors il existe une solution du problème* (2.24), (2.25). *Cette solution satisfait à l'équation d'Euler : pour chaque* $v \in \overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \sum_{|i| \leq k} \frac{\partial F}{\partial \zeta_i}(x, D^\alpha u) D^i v \, dx = \int_\Omega \sum_{|i| \leq k} D^i v f_i \, dx. \tag{2.26}$$

La fonction u, *satisfaisant* (2.24), (2.26) *est determinée de la façon unique.*

Démonstration. Il suit de (2.1) que la fonctionnelle $\Phi(u_0 + v)$ pour $v \in \overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega)$ est définie et il suit de (2.2) que

$$\lim_{\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega)} \to \infty} \Phi(u_0 + v) = \infty.$$

D'autre part, on tire de (2.10), (2.12a), l'existence de $D\Phi(v, \tilde{v})$, $D^2\Phi(v, h, k)$ et on a :

$$D^2\Phi(v, h, h) \geqq 0 \tag{2.13}$$

pour $h \in \overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega)$. Cela entraîne la continuité faible inférieurement de $\Phi(u_0 + v)$ cf. M. M. Vajnberg [17], d'où l'existence. (2.26) s'obtient de la manière standarte. L'unicité de la solution (2.24), (2.26) s'obtient facilement de (2.12b), (2.13) et de (2.27).

REMARQUE 2.1. Nous avons utilisé dans la démonstration du lemme 2.2., et nous utiliserons dans la suite le fait facile suivant : dans $\overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega)$, ($\Omega$ borné) les normes

$$\left(\int_\Omega \sum_{|i|\leqq k} |D^i u(x)|^m \, dx\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \left(\int_\Omega \sum_{|i|=k} |D^i u(x)|^m \, dx\right)^{\frac{1}{m}}$$

sont équivalentes. Cf. par exemple, J. Nečas [13].

3. Lemmes sur la solution faible de l'équation linéaire, $N \geqq 2$.

Soit $K_d = \{x \in E_N, \ |x| < d\}$ et considérons dans K_d un opérateur linéaire d'ordre $2k$:

$$\sum_{|i|=|j|=k} (-1)^k D^i (A_{ij} D^j u)$$

avec $A_{ij} = A_{ji}$, réelles, $A_{ij} \in L_\infty(K_d)$, et tel que :

$$\gamma_1 |\xi|^2 \leqq \sum_{|i|=|j|=k} A_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leqq \gamma_2 |\xi|^2 \tag{3.1}$$

pour ξ_i réels. Soient encore $f_i \in L_p(K_d)$, $|i| = k$, $p > 2$ et $\omega \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(K_d)$, une solution faible de l'équation

$$\sum_{|i|=|j|=k} D^i(A_{ij} D^j \omega) = \sum_{|i|=k} D^i f_i,$$

à savoir une fonction telle que pour chaque $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(K_d)$:

$$\int_{K_d} \sum_{|i|=|j|=k} A_{ij} D^i v \, D^j \omega \, dx = \int_{K_d} \sum_{|i|=k} D^i v f_i \, dx. \tag{3.2}$$

THÉORÈME 1. *Soit ω une solution faible de* (3.2), $2 < p \leqq \varrho + 2$. *Alors il existe deux constantes $\gamma_3(\varrho) > 1$, $\gamma_4(\varrho) > 1$, telles que pour p satisfaisant*

$$p \left(1 - \log\left(\frac{1 - \frac{1}{2}\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}{1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}}\right) \Big/ \log \gamma_3 \right) \leqq 2$$

on a :

$$\left(\int\limits_{K_d} \sum_{|i|=k} |D^i \omega|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \frac{2}{\gamma_1} \gamma_4^{\frac{p-2}{2}} \left(\int\limits_{K_d} \sum_{|i|=k} |f_i|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration. Soit d'abord $d = 1$ et supposons que $A_{ij} \in \mathcal{E}(\overline{K}_1)$. Soit $\delta_{ij} = 1$ pour $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, $|i| = |j| = k$ et $w \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(K_1)$ une solution faible du problème

$$\sum_{|i|=|j|=k} D^i (\delta_{ij} D^j w) = \sum_{|i|=k} D^i g_i$$

avec $g_i \in L_p(K_1)$. Si $p = 2 + \varrho$, nous avons d'après un théorème, qu'on trouve par exemple dans le travail [1]:

$$\left(\int\limits_{K_1} \sum_{|i|=k} |D^i w|^{2+\varrho} \, dx\right)^{\frac{1}{2+\varrho}} \leqq C_1(\varrho) \left(\int\limits_{K_1} \sum_{|i|=k} |g_i|^{2+\varrho} \, dx\right)^{\frac{1}{2+\varrho}}. \tag{3.3}$$

On obtient trivialement:

$$\left(\int\limits_{K_1} \sum_{|i|=k} (D^i w)^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \left(\int\limits_{K_1} \sum_{|i|=k} g_i^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.4}$$

D'après le théorème de Riesz-Thorin, cf. par exemple A. Zygmund [18], nous avons pour $2 \leqq p \leqq 2 + \varrho$:

$$\left(\int\limits_{K_1} \sum_{|i|=k} |D^i w|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqq C_1(\varrho)^{1-\frac{2}{p}} \left(\int\limits_{K_1} \sum_{|i|=k} |g_i|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.5}$$

A_{ij} étant dans $\mathcal{E}(\overline{K}_1)$, $g_i \in L_p(K_1)$, la solution ω de (3.2) appartient à $\overset{\circ}{W}{}_p^{(k)}(K_1)$; cela suit du théorème déjà cité de [1]. Nous avons pour $\varphi \in \mathcal{D}(K_1)$:

$$\int\limits_{K_1} \sum_{|i|=|j|=k} \delta_{ij} D^i \varphi \, D^j \omega \, dx = \int\limits_{K_1} \sum_{|i|=|j|=k} (\delta_{ij} - \gamma_2^{-1} A_{ij}) D^i \varphi \, D^j \omega \, dx + \tag{3.6}$$

$$+ \gamma_2^{-1} \int\limits_{K_1} \sum_{|i|=k} D^i \varphi f_i \, dx.$$

On a pour $q = p/(p-1)$:

$$\left(\int_{K_1} \sum_{|i|=k} \Big| \sum_{|j|=k} (\delta_{ij} - \gamma_2^{-1} A_{ij}) D^j \omega \Big|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \sup_{\sum_{|i|=k} \|h_i\|^q_{L_q(K_1)}=1} \int_{K_1} \sum_{|i|=|j|=k} (\delta_{ij} - \gamma_2^{-1} A_{ij}) h_i D^j \omega \, dx \leqq$$

$$\leqq \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) \sup \int_{K_1} \Big(\sum_{|i|=k} h_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{|i|=k} (D^i \omega)^2\Big)^{\frac{1}{2}} dx \leqq$$

$$\leqq \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) \sup \left(\int_{K_1} \Big(\sum_{|i|=k} h_i^2\Big)^{q/2} dx\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_{K_1} \Big(\sum_{|i|=k} (D^i \omega)^2\Big)^{p/2} dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqq$$

$$\leqq \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) c_2^{\frac{p-2}{p}} \left(\int_{K_1} \sum_{|i|=k} | D^i \omega |^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

alors on en obtient, en tenant compte de (3.5):

$$\text{(3.7)} \qquad \left(\int_{K_1} \sum_{|i|=k} | D^i \omega |^p dx\right)^{1/p} \leqq C_1 (\varrho)^{1-2/p} \gamma_2^{-1} \left(\int_{K_1} \sum_{|i|=k} | f_i |^p dx\right)^{1/p} +$$

$$+ c_1 (\varrho)^{1-2/p} c_2^{1-2/p} \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) \left(\int_{K_1} \sum_{|i|=k} | D^i \omega |^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si nous posons $\gamma_3 = C_1(\varrho)\, C_2$, $\gamma_4 = C_1(\varrho)$, nous obtenons pour $2 \leqq p \leqq 2 + \varrho$, satisfaisant

$$p \left(1 - \log \left(\frac{1 - \frac{1}{2} \frac{\gamma_1}{\gamma_2}}{1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}}\right) \Big/ \log \gamma_3 \right) \leqq 2:$$

$$\gamma_3^{1-2/p} \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) \leqq \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right),$$

d'où l'assertion pour $d = 1$. Nous pouvons maintenant trouver $A_{ij}^n \in \mathcal{E}(\overline{K}_1)$ de sorte que $A_{ij}^n \to A_{ij}$ en mesure, $| A_{ij}^n (x) | \leqq C$ et que la condition (3.1) est satisfaite. Soit ω_n la solution de (3.2) correspondant à A_{ij}^n. Il suit du théorème de J. Nečas, cf. [13], chap. 3, que $\omega_n \to \omega$ dans $W_2^{(k)}(K_1)$, d'où le lemme pour $d = 1$. La transformation $y = x/d$ ramène la cas général au cas $d = 1$, d'où le théorème.

LEMME 3.1. *Soit* $g \in L_q(K_d)$, $1 < q < \infty$, $0 \leqq l \leqq k - 1$. *Alors pour* $\varphi \in \mathcal{D}(K_d)$ *on a pour* $|i| = l$:

$$\int_{K_d} D^i \varphi \, g \, dx = \int_{K_d} \sum_{|j|=k} D^j \varphi \, g_j \, dx$$

avec

$$\| g_j \|_{L_p(K_d)} \leqq C d^{k-l+N/p-N/q} \| g \|_{L_q(K_d)}, \tag{3.8}$$

où $1/p \geqq 1/q - (k-l)/N$ *pour* $(k-l)\, q > N$ *et* $\infty > p \geqq 1$ *pour* $(k-l)\, q \leqq N$.

DÉMONSTRATION. Par la transformation $y = x/d$, on se ramène au cas $d = 1$. Soit $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(K_1) \cap W_q^{(2k)}(K_1)$ la solution de l'équation

$$\sum_{|i|=k} D^{2i} u = g$$

dans K_1. On a d'après le travail [1]:

$$\| u \|_{W_q^{(2k)}(K_1)} \leqq C \| g \|_{L_q(K_1)}. \tag{3.9}$$

Si nous posons

$$(-1)^{k-l} D^{i+j} u = g_j,$$

nous obtenons, en vertu du lemme 2.1, l'assertion.

LEMME 3.2. *Soit* $u \in W_p^{(1)}(K_d)$, $p > N$. *Alors*

$$|u(0)| \leqq C d^{1-N/p} \left(\frac{1}{p-N}\right)^{1-1/p} \left(\sum_{|i|=1}^{N} \int_{K_d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(z) \right|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} + C d^{-N} \int_{K_d} |u(z)| \, dz. \tag{3.10}$$

DÉMONSTRATION. En vertu du lemme 2.1, nous pouvons supposer $u \in \mathcal{E}(\overline{K}_d)$. Nous avons

$$u(y) - u(0) = \int_0^1 \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(ty)\, y_i \, dt,$$

d'où

$$\left| u(0) - (\operatorname{mes} K_d)^{-1} \int_{K_d} u(y)\, dy \right| \leqq \tag{3.11}$$

$$\leqq (\operatorname{mes} K_d)^{-1} \int_{K_d} \sum_{i=1}^N \left(\int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(ty) \right| |y_i| \, dt \right) dy.$$

Posons $ty = z$; nous obtenons de (3.11):

$$\left| u(0) - (\operatorname{mes} K_d)^{-1} \int_{K_d} u(y)\, dy \right| \leqq$$

$$\leqq (\operatorname{mes} K_d)^{-1} \int_0^1 \frac{dt}{t^{1+N}} \int_{K_{dt}} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(z) \right| |z| \, dz =$$

$$= (\operatorname{mes} K_d)^{-1} \sum_{i=1}^N \int_{K_d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(z) \right| |z| \, dz \int_{|z|/d}^1 \frac{dt}{t^{1+N}} \leqq$$

$$\leqq \frac{2d^N}{N \operatorname{mes} K_d} \sum_{i=1}^N \int_{K_d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(z) \right| |z|^{1-N} \, dz \leqq$$

$$\leqq C \left(\sum_{i=1}^N \int_{K_d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(z) \right|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^d r^{(1-N)p/(p-1)+N-1} \, dr \right)^{1-1/p} \leqq$$

$$\leqq \frac{c d^{1-N/p}}{(p-N)^{1-1/p}} \left(\sum_{i=1}^N \int_{K_d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(z) \right|^p dz \right)^{\frac{1}{p}},$$

d'où la démonstration.

4. Un lemme sur la régularité de la solution au cas non-linéaire, $N \geqq 2$.

Nous démontrerons un lemme étroitement lié aux théorèmes sur la régularité du travail de l'auteur [14].

Soit $F(x, \zeta_\alpha)$ la fonction de la section 2, satisfaisant (2.1), (2.2) avec $m \geqq 2$ et encore (2.10), (2.11), (2.12b) pour $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\sigma = 0$ (l'existence de la fonction $F(x, \zeta_\alpha, \lambda_1, \ldots, \lambda_\sigma)$ ne se suppose pas dans ce paragraphe). On supposera encore (2.20bis), (2.23); au cas présent pour $m \geqq 2$ et

$$\int_\Omega \varrho^{2k} \sum_{|i| \leq k} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_l}\right)^2 dx \leqq C, \qquad l = 1, 2, \ldots, N. \tag{4.1}$$

Ω étant un domaine à frontière lipschitzienne, il est démontré aux travaux de l'auteur [13], [14bis], l'existence d'une fonction σ de $\mathcal{E}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ équivalente à $\varrho(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ et telle que $|D^i \sigma| \leqq C \sigma^{1-|i|}$, et d'une suite croissante des sous domaines $\Omega^n \subset \overline{\Omega^n} \subset \Omega$ telle que $\lim_{n \to \infty} \Omega^n = \Omega$ et telle que les σ_n correspondant satisfont à $|D^i \sigma_n| \leqq C \sigma_n^{1-|i|}$ avec une constante C indépendant de n.

Soit $h = (0, \ldots, 0, \tau, 0, \ldots, 0)$ avec τ sur l-ème place, tel que $|\tau| < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, $\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$. Soit $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega)$ avec $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} \varphi, \partial\Omega) < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

Désignons par $\Delta_h u(x) = \tau^{-1}(u(x+h) - u(x))$. Nous avons, cf. L. Nirenberg [15]:

Lemme 4.1. *Soit Ω un domaine borné, $\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$, $k \geqq 1$, $p \geqq 1$. On a $u \in W_p^{(k)}(\Omega) \Longleftrightarrow \Delta_h u \in W_p^{(k-1)}(\Omega')$ pour chaque Ω' avec $\|\Delta_h u\|_{W_p^{(k-1)}(\Omega')} \leqq C$. On a*

$$\|\Delta_h u\|_{W_p^{(k-1)}(\Omega')} \leqq C \|u\|_{W_p^{(k)}(\Omega)},$$

$$\|u\|_{W_p^{(k)}(\Omega)} \leqq C \sup_{\Omega'} \|\Delta_h u\|_{W_p^{(k-1)}(\Omega')},$$

$$\lim_{\tau \to 0} \Delta_h u = \frac{\partial u}{\partial x_l}$$

dans $W_p^{(k-1)}(\Omega')$.

THÉORÈME 2. *Les conditions* $m \geqq 2$, (2.10), (2.11), (2.12a), (2.12*b*), (2.20 bis), (2.23), (4.1) *soient satisfaites pour une fonction* $F(x, \zeta_\alpha)$ *de la section* 2, *où on pose formellement dans les* (2.10) - (2.12 bis) $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_\sigma = 0$. *Soit* $u \in W_m^k(\Omega)$ *une solution de l'équation* (2.26). *Alors*

$$\int_\Omega \varrho^{2k} (1 + \sum_{\alpha \in M} | D^\alpha u(x) |)^{m-2} \sum_{|i| = k+1} (D^i u(x))^2 \, dx \leqq C. \tag{4.1bis}$$

DÉMONSTRATION. Posons pour $x \in \Omega^n$: $v(x) = \sigma_n^{2k} \Delta_h u(x)$ et pour $x \notin \Omega^n$: $v(x) = 0$. On a $v \in \mathring{W}_m^{(k)}(\Omega)$, cf. [13], chap. 2. Soit $w \in \mathring{W}_m^{(k)}(\Omega)$ avec dist (supp w, $\partial\Omega) \leqq$ dist $(\Omega^n, \partial\Omega)$. Il suit de (2.26)

$$\int_\Omega \sum_{|i|, |j| \leqq k} \left(\int_0^1 \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i \, \partial \zeta_j} (x + th, (1+t) D^\alpha u(x) + t D^\alpha u(x+h)) \, dt \right) D^i w(x) D^j \Delta_h u(x) \, dx \tag{4.2}$$

$$+ \int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} \left(\int_0^1 \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i \, \partial x_l} (x + th, (1 - t) D^\alpha u(x) + t D^\alpha u(x + h) \right) dt \; D^i w(x) \, dw$$

$$= \int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} D^i w(x) \, \Delta_h f_i(x) \, dx.$$

Posons $w = v$,

$$J = \int_\Omega \sigma_n^{2k} \sum_{|k| = k} \left(\int_0^1 (1 + \sum_{\alpha \in M} | (1 - t) D^\alpha u(x) + \right.$$

$$\left. + t D^\alpha u(x + h) |)^{m-2} \, dt \right) (D^i \Delta_h u(x))^2 \, dx.$$

Il suit de (4.2) l'inégalité :

$$J \leqq C_1 J^{\frac{1}{2}} \| u \|_{W_m^{(k)}}^{\frac{m}{2}} + C_2 \| u \|_{W_m^{(k)}}^m +$$

$$+ C_3 \left(\int_\Omega \sigma_n^{2k} \sum_{|i| \leqq k} (\Delta_h f_i(x))^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} (J^{\frac{1}{2}} + \| u \|_{W_m^{(k)}}),$$

d'où découle

$$(4.3)\qquad J^{\frac{1}{2}} \leqq C_4 \left(\| u \|^{\frac{m}{2}}_{W_m^{(k)}} + \left(\int_\Omega \sigma_n^{2k} \sum_{|i| \leqq k} (\Delta_h f_i(x))^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} + \| u \|_{W_m^{(k)}} \right).$$

Il en suit, en vertu du lemme de Fatou :

$$(4.3\text{bis})\qquad \int_\Omega \sigma_n^{2k} (1 + \sum_{\alpha \in M} | D^\alpha u(x) |)^{m-2} \sum_{|i| = k+1} (D^i u(x))^2 \, dx \leqq C(n).$$

Si nous laissons tendre $|h| \to 0$ dans (4.3) et après $n \to \infty$ nous obtenons le résultat.

5. Régularité de la solution, le cas $m = 2$.

Soit u une solution satisfaisant (2.24), (2.26) et $F(x, \zeta_\alpha)$ satisfasse (2.3)-(2.6). Il suit du théorème 2 et de (4.2) que pour $h \to 0$, $w \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$(5.1)\qquad \int_\Omega \sum_{|i|, |j| \leqq k} \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i \, \partial \zeta_j} (x, D^\alpha u(x)) \, D^i w(x) \, D^j \frac{\partial u}{\partial x_l} \, dx +$$

$$+ \int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i \, \partial x_l} (x, D^\alpha u(x)) \, D^i w(x) \, dx = \int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} D^i w(x) \frac{\partial f_i}{\partial w_j} (x) \, dx.$$

Désignons dans la suite par $K(x_0) \equiv \{x \in \Omega, |x - x_0| < d, \ \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega) = 2d\}$.

Nous avons :

Lemme 5.1. *Soit $\varphi \in \mathcal{D}(K(w_0))$, u, la solution audessus définie, f_i sattisfasse* (2.21), $N = 2$. *Alors*

$$(5.2)\qquad \int_{K(x_0)} \sum_{|i| = |j| = k} \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i \, \partial \zeta_j} (x, D^\alpha u(x)) \, D^i \varphi \, D^j \frac{\partial u}{\partial x_l} \, dx = \int_{K(x_0)} \sum_{|i| = k} D^i \varphi \, g_i \, dx$$

avec $\| g_i \|_{L_{p_0}(K(x_0))} \leqq C d^{-k}$, *où* $d = \frac{1}{2}$ *dist* $(x_0, \partial\Omega)$.

En effet: on part de (5.1), utilise (4.1bis), d'où il suit pour

$$|i| \leqq k : \sigma^k D^i u(x) \in W_2^{(1)}(\Omega)$$

d'où d'après le lemme 2.1 :

$$\left(\int_{K(x_0)} |D^i u(x)|^{p_0} dx\right)^{1/p_0} \leqq Cd^{-k}. \tag{5.3}$$

Puis, on tient compte plusieurs fois du lemme 2.1, de (4.1bis) et du lemme 3.1, d'où l'assertion.

Soit $\psi \in \mathcal{D}(K_1)$ telle que $\psi(x) = 1$ pour $|x| \leqq \frac{1}{2}$ et posons

$$w(x) = \frac{\partial u}{\partial x_l}(x)\, \psi\left(\frac{x - x_0}{d}\right) \tag{5.3bis}$$

dans $K(x_0)$.

Nous avons

LEMME 5.2. *Soit w audessus introduite, $\varphi \in \mathcal{D}(K(x_0))$. Alors*

$$\int_{K(x_0)} \sum_{|i|=|j|=k} \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i\, \partial \zeta_j} D^i \varphi\, D^j w\, dx = \int_{K(x_0)} \sum_{|i|=k} D^i \varphi\, n_i\, dx, \tag{5.4}$$

$$\| n_i \|_{L_{p_0}(K(x_0))} \leqq Cd^{-k-1}. \tag{5.5}$$

En effet, on part de (5.2) et on obtient

$$\int_{K(x_0)} \sum_{|i|=|j|=k} \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i\, \partial \zeta_j} D^i \varphi\, D^j w\, dx = \int_{K(x_0)} \sum_{|i|=k} D^i (\varphi\psi)\, g_i\, dx + R(\varphi)$$

où $R(\varphi)$ est la somme des intégrales du type

$$\int_{K(x_0)} a D^{\tilde{i}} \varphi D^{\tilde{\tilde{i}}} \psi D^j \omega\, dx$$

avec $k = |j| = |\tilde{i} + \tilde{\tilde{i}}|$, $1 \leqq |\tilde{i}| \leqq k$, $a \in L_\infty(\Omega)$

et du type

$$\int_{K(x_0)} a D^i \varphi\, D^{\tilde{j}} \omega D^{\tilde{\tilde{j}}} \psi\, dx$$

avec $a \in L_\infty(\Omega)$, $k = |i| = |\tilde{j} + \tilde{\tilde{j}}|$, $|\tilde{j}| \leqq k - 1$.

Il suffit d'utiliser (5.3) et le lemme 3.1, d'où l'assertion.

On désigne dans la suite

$$L(x_0) = \left\{ x \in \Omega, \mid x - x_0 \mid < \frac{d}{2}, \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega) = 2d \right\}.$$

THÉORÈME 3. *Soit* $F(x, \zeta_\alpha)$ *une fonction réelle, satisfaisant pour* $m = 2$ (2.3)-(2.6), f_i *satisfasse* (2.20), (2.21) *et soit* $N = 2$. *Soit* $u \in W_2^{(k)}(\Omega)$ *une solution de l'équation* (2.26) *et* $K(x_0)$ *audessus défini. Alors il existe* $p_1 > 2$, *de sorte que pour* $\mid i \mid = k + 1$

$$\| D^i u \|_{L_{p_1}(K(x_0))} \leqq C d^{-k-1}. \tag{5.6}$$

La fonction $D^i u$, $\mid i \mid = k$, *est sur chaque compact de* Ω *höldérienne avec* $\mu = 1 - 2/p_1$.

DÉMONSTRATION. Il suit de (5.4), (5.5) et du lemme 3.1, avec la notation du lemme 5.2 que

$$\left(\int_{K(x_0)} \sum_{\mid i \mid = k} \mid D^i \omega \mid^{p_1} dx \right)^{1/p_1} \leqq C d^{-k-1}$$

avec $2 < p_1 \leqq p_0$,

$$p_1 \left(1 - \log \left(\frac{1 - \dfrac{1}{2} \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}}{1 - \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}} \right) \Bigg/ \log \gamma_3 \right) \leqq 2,$$

d'où (5.6). Il faut encore tenir compte du lemme 2.1.

On désigne par

$$C_\varkappa^{(k)}(\Omega) \equiv \{ u \in C^{(k)}(\Omega), \sup_{d > 0} d^\varkappa \, (\max_{x \in \bar{\Omega}_d} \sum_{\mid \alpha \mid \leqq k} \mid D^\alpha u(x) \mid) < \infty \},$$

où

$$\Omega_d \equiv \{ x \in \Omega, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > d \}.$$

Voici une conséquence du théorème 3, importante pour la suite :

Conséquence 5.1. On conserve les hypothèses du théorème 3. Alors $u \in C_{k+1}^{(k)}(\Omega)$. En effet, il suffit de tenir compte de (5.6) et du lemme 3.2.

6. Régularité de la solution, le cas $m > 2$.

LEMME 6.1. *Soit $f(d)$ une fonction réelle, définie pour $0 < d < d_0$ et telle que pour $\alpha \geqq 0$*

$$\sup_{0<d<d_0} d^\alpha f(d) \equiv A < \infty .$$

Soit pour $\varkappa \geqq 0$, $\lambda < 1$, $\alpha \leqq \dfrac{\varkappa}{1-\lambda}$:

$$f(2d) \leqq C_1\, d^{-\varkappa} f(d)^\lambda + C_1\, d^{-\varkappa} .$$

Alors pour $\beta \geqq \dfrac{\varkappa}{1-\lambda}$, on a

$$\sup_{0<d<d_0} d^\beta f(d) \leqq C(\beta, \varkappa, \lambda, C_1).$$

La démonstration est immédiate.

Considérons le problème auxiliaire : trouver minimum de la fonctionnelle

$$\int_\Omega F(x, D^\alpha u, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0)\, dx - \int_\Omega \sum_{|i|\leqq k} D^i u f_i\, dx$$

dans la classe $u - u_0 \in W^{(k)}_{m-\tau h}$ avec f_i satisfaisant (2.20) et avec $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0, \dots, \lambda_\tau > 0$. D'après le lemme 2.2, un tel minimum existe uniquement. Supposons encore (2.21) et notons notre minimum par $u(x, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0)$.

Nous avons :

LEMME 6.2. *Indépendant de λ_τ, $0 < \lambda_\tau \leqq 1$ on a*

$$\begin{aligned}(6.1)\qquad &\int_\Omega \Big(1 + \sum_{|\alpha|\leqq k} |D^\alpha u(x, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0)|\Big)^{m-(\tau-1)h} \cdot \\ &\cdot \Big(1 + \lambda_\tau \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u(x, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0)|\Big)^{-h} dx \leqq C(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}).\end{aligned}$$

En effet, on a pour le minimum $u(\lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0)$:

$$\int_\Omega F(x, D^\alpha u(x, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0)\, dx \leqq \int_\Omega \sum_{|i|\leqq k} D^i u(x, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0) f_i\, dx + C_1$$

d'où d'après (2.9):

$$\int_\Omega (1+\sum_{\alpha\in M}|D^\alpha u(x,\lambda_1,\dots,\lambda_\tau,0,\dots 0)|)^{m-(\tau-1)h}(1+\lambda_\tau \sum_{\alpha\in M}|D^\alpha u(x,\lambda_1,\dots,\lambda_\tau,0,\dots,0)|)^{-h}\,dx$$

$$\leqq C_2(\lambda_1,\dots,\lambda_{\tau-1})+C_3(\lambda_1,\dots,\lambda_{\tau-1})\left(\int_\Omega \sum_{|i|\leqq k} f_i^2\,dx\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega \sum_{|i|\leqq k}(D^i u(x,\lambda_1,\dots,\lambda_\tau,0,\dots,0))^2\,dx\right)^{\frac12}\leqq$$

$$\leqq C_4(\lambda_1,\dots,\lambda_{\tau-1})+C_3(\lambda_1,\dots,\lambda_{\tau-1})\left(\int_\Omega \sum_{|i|\leqq k} f_i^2\,dx\right)^{\frac12}\cdot$$

$$\cdot\left(\int_\Omega \sum_{|i|\leqq k}(D^i u(x,\lambda_1,\dots,\lambda_\tau,0,\dots,0)-D^i u_0(x))^2\,dx\right)^{\frac12}\leqq$$

$$\leqq C_5(\lambda_1,\dots,\lambda_{\tau-1})+C_6(\lambda_1,\dots,\lambda_{\tau-1})\left(\int_\Omega \sum_{|i|\leqq k} f_i^2\,dx\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega \sum_{|i|=k}(D^i u(x,\lambda_1,\dots,\lambda_\tau,0,\dots,0))^2\,dx\right)^{\frac12},$$

d'où suit facililment l'assertion. Nous avons utilisé la remarque 2.1.

LEMME 6.3. *Supposons* (2.20), (2.21). *On a pour* $u(\lambda_1,\dots,\lambda_\tau,0,\dots 0)$, $0<\lambda_\tau\leqq 1$:

$$\int_\Omega \varrho^{2k}(1+\sum_{\alpha\in M}|D^\alpha u(x,\lambda_1,\dots,\lambda_\tau,0,\dots,0)|)^{m-2-(\tau-1)h}\cdot \tag{6.2}$$

$$\cdot(1+\lambda_\tau\sum_{\alpha\in M}|D_\alpha u(x,\lambda_1,\dots,\lambda_\tau,0,\dots,0)|)^{-h}\cdot\sum_{|i|=k+1}(D^i u(x,\lambda_1,\dots,\lambda_\tau,0,\dots,0))^2\,dx\leqq C(\lambda_1,\dots,\lambda_{\tau-1}).$$

DÉMONSTRATION. Nous avons d'après le théorème 2:

$$\int_\Omega \varrho^{2k}(1+\sum_{\alpha\in M}|D^\alpha u(x,\lambda_1,\dots,\lambda_\tau,0,\dots,0)|)^{m-\tau h-2}\sum_{|i|=k+1}(D^i u(x,\lambda_1,\dots,\lambda_\tau,0,\dots,0))^2\,dx\leqq C(\lambda_1,\dots,\lambda_{\tau-1})$$

et de (5.1), où nous posons $w(x)=\sigma^{2k}\dfrac{\partial u}{\partial x_l}$ nous obtenons par les raisonements de la démonstration du théorème 2, avec

$$J = \int_{\Omega} \sigma^{2k} (1 + \sum_{\alpha \in M} | D^{\alpha} u (x, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0) |)^{m-2-(\tau-1)h} \cdot$$

$$\cdot (1 + \lambda_\tau \sum_{\alpha \in M} | D^{\alpha} u (x, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0) |)^{-h} \sum_{|i| = k+1} (D^{i} u (x, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0))^2 \, dx :$$

$$J \leqq C_1 (\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}) J^{\frac{1}{2}} + C_2 (\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}),$$

d'où l'assertion.

LEMME 6.4. *On conserve les hypothèses du lemme précédent et soit avec la notation precédénte pour* $0 < \lambda_\tau \leqq 1$, $u (x, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0) \in C_{\varkappa}^{(k)} (\Omega)$, $N = 2$. *Notons* $A_d = 1 + \| u \|_{C^{(k)} (\Omega_d)}$. *Alors pour* $\varphi \in \mathcal{D} (K (x_0))$ *on a*

$$\int_{K (x_0)} \sum_{|i| = |j| = k} \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i \, \partial \zeta_j} D^{i} \varphi \, D^{j} \frac{\partial u}{\partial x_l} \, dx = \int_{K (x_0)} \sum_{|i| = k} D^{i} \varphi \, g_i \, dx \tag{6.3}$$

avec

$$\| g_i \|_{L_{p_0} (K (x_0))} \leqq C \, d^{-k} A_d^{m-2} ,$$

ou $d = \frac{1}{2}$ *dist* $(x_0, \partial\Omega)$.

DÉMONSTRATION. Pour chaque $\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$, nous obtenons facilement de (4.3 bis) que pour P mesurable, $P \subset \Omega'$,

$$\int_P \sum_{|i| = k+1} \int_0^1 (1 + \sum_{\alpha \in M} | (1 - t) D^{\alpha} u (x, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0) +$$

$$+ t D^{\alpha} u (x, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0) |) \, dt \, | D^{i} \Delta_h u (x, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0) | \, dx \leqq$$

$$\leqq C (\Omega', \lambda_1, \dots, \lambda_\tau) \operatorname{mes} (P)^{2/(m-\tau h)},$$

d'où, en vertu de (6.1), suit la possibilité de faire tendre $h \longrightarrow 0$ dans (4.2) et on obtient (5.1). Maintenant, on raisonne comme dans la démonstration du lemme 5.1, en utilisant (6.1), (6.2), (5.3) et le lemme 3.2.

On démontre comme le lemme 5.2 :

LEMME 6.5, *On conserve les hypothèses du lemme précédent et la notation du lemme* 5.2. *Alors pour* $\varphi \in \mathcal{D}(K(x_0))$ *on a*

$$\int\limits_{K(x_0)} \sum_{|i|=|j|=k} \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_i \, \partial \zeta_j} D^i \varphi D^j w \, dx = \int\limits_{K(x_0)} \sum_{|i|=k} D^i \varphi \, n_i \, dx \tag{6.4}$$

avec

$$\| n_i \|_{L_{p_0}(K(x_0))} \leqq C d^{-k-1} A_d^{m-2}, \tag{6.5}$$

où

$$\alpha = \frac{1}{2} \, dist \, (x_0, \partial \Omega).$$

LEMME 6.6. *On conserve les hypotèses du lemme précédent. Il existe* $C(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1})$ *de sorte que si*

$$p = 2 + C(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}) A_d^{2-m+(\tau-1)h} \tag{6.5bis}$$

alors pour $d = \dfrac{1}{2} \, dist \, (x_0, \partial \Omega)$, $|i| = k+1$:

$$\| D^i u(x, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0) \|_{L_p(L(x_0))} \leqq C_1(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}) \, d^{-k-1} A_d^{m-2}. \tag{6.6}$$

DÉMONSTRATION. Il suit de (2.12), (6.4), (6.5) et du lemme 3.1 avec la notation du lemme 6.5

$$\left(\int\limits_{K(x_0)} \sum_{|i|=k} |D^i \omega|^p \, dx \right)^{1/p} \leqq C(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}) \, d^{-k-1} A_d^{m-2}$$

pour $2 < p \leqq p_0$ tel que

$$p \left(1 - \log \left(\frac{1 - \dfrac{1}{2} \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} A_d^{2-m+(\tau-1)h}}{1 - \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} A_d^{2-m+(\tau-1)h}} \right) \Big/ \log \gamma_3 \right) \leqq 2.$$

Si nécéssaire, nous prenons γ_2 assez grand pour obtenir (6.5bis) de la serie de Taylor pour log $(1 + z)$.

LEMME 6.7. *On conserve les hypothèses du lemme* 6.4 *et soit* $\varkappa = \dfrac{2(1+k)}{1 - \dfrac{h}{2}}$.

Alors pour $u(x, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0)$, $0 < \lambda_1, 0 < \lambda_2, \dots, 0 < \lambda_\tau$, *on a*

$$\| u(x, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0) \|_{C_\varkappa^{(k)}(\Omega)} \leqq C(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}). \tag{6.7}$$

DÉMONSTRATION Les paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\tau$ fixés, posons

$$m(x) = (1 + \sum_{|\alpha|=k} (D^\alpha u(x, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0))^2)^{\frac{m}{4} - \tau\frac{h}{4}}.$$

Il suit de (6.2) pour $x_0 \in \Omega$ l'estimation

$$\left(\int_{K(x_0)} \left[\left(\frac{\partial m}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqq C_1(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}) d^{-k}, \tag{6.8}$$

où $\frac{1}{2}\operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega) = d$; de 6.1 :

$$\left(\int_{K(x_0)} m^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqq C_2(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}),$$

d'où et de (6.8) et du lemme 2.1 suit

$$\left(\int_{K(x_0)} | m |^p \, dx \right)^{1/p} \leqq C_3(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}) d^{-k+\frac{2}{p}-1} \tag{6.9}$$

avec $p > 2$. Il en suit

$$\left(\int_{K(x_0)} \sum_{|\alpha|=k} | D^\alpha u(x, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0) |^p \, dx \right)^{1/p} \leqq C_4(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}) d^{-\frac{k+1-2/p}{m/2-\tau h/2}} \tag{6.10}$$

et d'après le lemme 2.1, on obtient

$$\left(\int_{K(x_0)} \sum_{|\alpha|<k} | D^\alpha u(x, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0) |^p \, dx \right)^{1/p} \leqq C_5,$$

d'où et de (6.10) suit d'après le lemme 2.1 finalement

$$\sum_{|\alpha|<k} | D^\alpha u(x_0, \lambda_1, \dots, \lambda_\alpha, 0, \dots, 0) | \leqq C_6(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}) d^{-\frac{k+1-2/p}{m/2-\tau h/2} - \frac{2}{p}}. \tag{6.11a}$$

Il en suit évidemment pour $d > 0$:

$$(6.11\text{b})\qquad 1 + \max_{x \in \bar{\Omega}_{2d}} \sum_{|\alpha|<k} |D^\alpha u(x, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0)| \leqq C_7(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1})\, d^{-\frac{k+1-2/p}{m/2-\tau h/2} - \frac{2}{p}}.$$

Soit maintenent $p = 2 + C_8(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1})\, A_d^{2-m+(\tau-1)h}$ du lemme 6.6. Nous avons d'après ce lemme :

$$(6.12)\qquad \left(\int_{L(x_0)} \sum_{i=1}^{2} \left|\frac{\partial m}{\partial x_i}\right|^p dx\right)^{1/p} \leqq C_9(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1})\, A_d^{3\left(\frac{m}{2}-1\right)}\, d^{-k-1},$$

où $d = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{dist}\,(x_0, \partial\Omega)$. Posons $1/p_1 = a/p + b/2$ avec $a + b = 1,\ 0 < a < 1$.

Nous obtenons en vertu de (6.2) :

$$(6.13)\qquad \left(\int_{L(x_0)} \sum_{i=1}^{2} \left|\frac{\partial m}{\partial x_i}\right|^{p_1} dx\right)^{1/p_1} \leqq C_{10}(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1})\, d^{-k-1}\, A_d^{3a\left(\frac{m}{2}-1\right)}.$$

Nous obtenons facilement que

$$(6.14)\qquad p_1 \geqq 2 + [a/(1 + C_8(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}))]\, A_d^{2-m+(\tau-1)h}.$$

Nous avons encore

$$(6.15)\qquad d^{-2}\int_{L(x_0)} |m(x)|\, dx \leqq C(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1})\, d^{-1}.$$

Il suit de (6.13), (6.14), (6.15) et du lemme 3.2, appliqué pour $L(x_0)$,

$$(6.16)\qquad |m(x_0)| \leqq C(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1})\, a^{-1}\, d^{-k-1}\, A_d^{(m-2-(\tau-1)h)\frac{1}{2} + 3a\left(\frac{m}{2}-1\right) + \frac{a}{6}(m-2)}.$$

Il suit de (6.16) pour $d > 0$:

$$(6.17)\qquad \max_{x \in \bar{\Omega}_{2d}} \Big(1 + \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u(x, \lambda_1, \dots, \lambda_\tau, 0, \dots, 0)|\Big)^{\frac{m}{2} - \frac{\tau h}{2}} \leqq$$

$$\leqq C(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1})\, a^{-1}\, d^{-k-1}\, A_d^{(m-2-(\tau-1)h)\frac{1}{2} + a(2m-4)}$$

alors on tire de (6.11b) et (6.17) finalement

$$(6.18)\quad A_{2d} \leqq C(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1})\, a^{-1/\left(\frac{m}{2}-\frac{\tau h}{2}\right)}\, d^{-(k+1)/\left(\frac{m}{2}-\frac{\tau h}{2}\right)}\, A_a^{1-\left(1-\frac{h}{2}+2a(m-2)\right)/\left(\frac{m}{2}-\frac{\tau h}{2}\right)}.$$

Si nous prenons maintenant a tel que $1 - h/2 + 2a\,(m-2) = \frac{1}{2}(1 - h/2)$, nous obtenons du lemme 5.1

$$(6.19)\qquad A_\alpha \leqq C(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1})\, d^{-2\frac{1+k}{1-\frac{h}{2}}},$$

d'où l'assertion.

On désigne par

$$W^{(k)}_{\infty,\varkappa}(\Omega) = \{u, \sup_{d>0} (\operatorname{supess}_{x \in \Omega_d} \sum_{|\alpha| \leqq k} |\, D^\alpha u\,(x)\,|\,)\, d^\varkappa < \infty\},\ \varkappa \geqq 0.$$

LEMME 6.8. *On conserve les hypothèses du lemme précédent. Alors, on peut trouver une suite des* $\lambda^n_\tau \to 0$ *telle que*

$$D^\alpha u\,(x, \lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}, \lambda^n_\tau\, 0, \dots, 0) \to D^\alpha u\,(x, \lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}, 0, \dots, 0)$$

presque partout dans Ω *pour* $|\,\alpha\,| \leqq k$. *On a*

$$(6.20)\qquad \|\, u\,(x, \lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}, 0, \dots, 0)\,\|_{W^{(k)}_{\infty,\,2(1+k)/(1-h/2)}} \leqq C(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}).$$

DÉMONSTRATION. Il suit de (6.2) et du lemme 2.1, qu'il existe une fonction u de $W^{(k)}_p(\Omega')$ pour chaque $\Omega' \subset \bar{\Omega}' \subset \Omega$, $p > m$, et une suite $\lambda^n_\tau \to 0$ de sorte que $D^\alpha u\,(x, \lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}, \lambda^n_\tau, 0, \dots, 0) \to D^\alpha u\,(x, \lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}, 0, \dots, 0)$ presque partout dans Ω et $u\,(x, \lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}, \lambda^n_\tau, 0, \dots, 0) \to u\,(x, \lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}, 0, \dots, 0)$ dans $W^{(k)}_p(\Omega')$ pour chaque $\Omega' \subset \bar{\Omega}' \subset \Omega$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$, M, un ensemble mesurable dans Ω'. On a

$$\int_M \sum_{|\alpha| \leqq k} |\, D^\alpha u\,(x, \lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}, \lambda^n_\tau, 0, \dots, 0)\,|^m\, dx \leqq C(\Omega')\,(\text{mes}\, M)^{1-m/p},$$

d'où suit (2.26) pour u. D'autre part, il suit du lemme de Fatou et de (6.1) que $u \in W^{(k)}_{m-(\tau-1)h}(\Omega)$; ayant

$$\|\, u\,(x, \lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}, \lambda^n_\tau, 0, \dots, 0)\,\|_{W^{(k)}_{m-\tau h}(\Omega)} \leqq C(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}),$$

on obtient finalement (2.24) pour u. D'après l'unicitè de la solution de (2.24), (2.26) pour $F(x, \zeta_\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}, 0, \dots, 0)$ on a $u = u(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}, 0, \dots, 0)$, d'où (6.20) et la démonstration.

THÉORÈME 4. *Soit* $m > 2$, $N = 2$, *u la solution du problème* (2.24), (2.25). *On suppose* (2.8)-(2.13), (2.20), (2.21). *Alors*

(6.21) $$\sup_{x \in \Omega_d} \sum_{|\alpha| \leqq k} |D^\alpha u(x)| \leqq C d^{-2(1+k)/(1-h/2)},$$

où $\sigma = \left[\dfrac{m}{2}\right]$, $h = (m-2)/\sigma$. *Posons*

$$A_d = 1 + \sup_{x \in \Omega_d} \sum_{|\alpha| \leqq k} |D^\alpha u(x)| \,.$$

Il existe $1 \geqq C_1 > 0$ *de sorte que si* $p = 2 + C_1 A_d^{2-m}$, *alors pour* $|\alpha| = k+1$:

(6.22) $$\| D^\alpha u \|_{L_p(L(x_0))} \leqq C_2\, d^{-k-1-2(1+k)(m-2)/(1-h/2)} \,;$$

ici

$$d = \frac{1}{2}\, dist\,(x_0, \partial\Omega),$$

$$L(x_0) = \left\{ x \in \Omega, |x - x_0| < \frac{1}{4}\, dist\,(x_0, \partial\Omega) \right\}.$$

Sur chaque $\Omega' \subset \overline{\Omega}' \subset \Omega$, *la fonction* $u \in C^{(k), \mu(\Omega')}(\overline{\Omega}')$.

DÉMONSTRATION. Considérons d'abord la solution $u(x, \lambda_1, \dots, \lambda_\sigma)$ pour $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_\sigma > 0$ correspondant à la fonction $F(x, \zeta_\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_\sigma)$. On a $m - \sigma h = 2$, alors il suit de la conséquence 5.1 que $u(x, \lambda_1, \dots, \lambda_\sigma) \in$ $\in W^{(k)}_{\infty, 2(1+k)/(1-h/2)}$. Il suit du lemme 6.8 que

$$\| u(x, \lambda_1, \dots, \lambda_{\sigma-1}, 0 \|_{W^{(k)}_{\infty, 2(k+1)/(1-h/2)}} \leqq C(\lambda_1, \dots, \lambda_{\sigma-1}),$$

$$\| u(x, \lambda_1, \dots, \lambda_{\sigma-2}, 0, 0) \|_{W^{(k)}_{\infty, 2(k+1)/(1-h/2)}} \leqq C(\lambda_1, \dots, \lambda_{\sigma-2}),$$

jusqu'à

$$\| u \|_{W^{(k)}_{\infty, 2(k+1)/(1-h/2)}} \leqq C,$$

d'où (6.21). Nous avons pour la solution u:

(6.23) $$\| u \|_{W^{(k)}_m} \leqq C$$

et (4.1). Nous obtenons comme audessus, l'équation (6.4) avec (6.5), d'où comme au lemme 6.6, suit (6.22). L'appartenance de la solution à l'espace $C^{(k),\,\mu(\Omega')}(\bar{\Omega}')$ suit du lemme 2.1, d'où la démonstration.

7. Régularité de la solution, le cas $1 < m < 2$.

Considèrons d'abord un problème auxiliare: trouver minimum de la fonctionnelle:

$$\int_\Omega F(x, D^\alpha u, \lambda)\, dx - \int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} D_i u f_i\, dx,\ 0 < \lambda \leqq 1,$$

dans la classe des fonctions $u - u_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(\Omega)$. On désigne cette solution par $u(\lambda)$ et la solution $u(0)$ par u. Supposons dans ce paragraphe sans le répéter: (2.14)-(2.19), (2.20), (2.22), (2.23bis), $N = 2$.

Nous avons:

LEMME 7.1. *Soit $N = 2$. Indépendant de λ, $0 < \lambda \leqq 1$ on a*

$$\int_\Omega (1 + \sum_{|\alpha| \leqq k} |D^\alpha u(x, \lambda)|)^m (1 + \lambda \sum_{|\alpha| \leqq k} |D^\alpha u(x, \lambda)|)^{2-m}\, dx \leqq C, \tag{7.1}$$

$$\int_\Omega \varrho^{2k} (1 + \sum_{\alpha \in M} |D^\alpha u(x,\lambda)|)^{m-2} (1 + \lambda \sum_{\alpha \in M} |D^\alpha u(x,\lambda)|)^{2-m} \sum_{|i| = k+1} (D^i u(x, \lambda))^2 dx \leqq C. \tag{7.2}$$

DÉMONSTRATION. En effet, on a pour $u(\lambda)$:

$$\int_\Omega F(x, D^\alpha u(x, \lambda), \lambda)\, dx \leqq \int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} D^i u(x, \lambda) f_i\, dx + C_1,$$

d'où et de (2.15) suit

$$\int_\Omega (1 + \sum_{\alpha \in M} |D^\alpha u(x, \lambda)|)^m (1 + \lambda \sum_{\alpha \in M} |D^\alpha u(x, \lambda)|)^{2-m}\, dx \leqq$$

$$\leqq C_2 \left(\int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} |f_i|^{m/(m-1)}\, dx \right)^{\frac{m-1}{m}} \left(\int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} |D^i u(x, \lambda)|^m\, dx \right)^{\frac{1}{m}} + C_2 \leqq$$

$$\leqq C_2 \left(\int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} |f_i|^{m/(m-1)} dx \right)^{\frac{m-1}{m}} \left(\int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} | D^i u(x, \lambda) - D^i u_0(x) |^m dx \right)^{\frac{1}{m}} + C_3 \leqq$$

$$\leqq C_4 \left(\int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} |f_i|^{m/(m-1)} dx \right)^{\frac{m-1}{m}} \left(\int_\Omega \sum_{|i| = k} | D^i u(x, \lambda) |^m dx \right)^{\frac{1}{m}} + C_5 \leqq$$

$$\leqq C_6 \left(\int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} |f_i|^{m/(m-1)} dx \right)^{\frac{m-1}{m}} \cdot \left(\int_\Omega (1 + \right.$$

$$\left. + \sum_{\alpha \in M} | D^\alpha u(x, \lambda) |) \right)^m (1 + \lambda \sum_{\alpha \in M} | D^\alpha u(x, \lambda) |)^{2-m} dx)^{\frac{1}{m}} + C_5 ,$$

d'où suit

$$\int_\Omega (1 + \sum_{\alpha \in M} | D^\alpha u(x, \lambda) |)^m (1 + \lambda \sum_{\alpha \in M} | D^\alpha u(x, \lambda) |)^{2-m} dx \leqq C ;$$

nous avons utilisé la remarque 2.1. Mais cela nous donne encore que

$$\left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| < k} | D^\alpha u(x, \lambda) |^m dx \right)^{1/m} \leqq C,$$

d'où et du lemme 2.1 suit finalement (7.1). Considérons (7.2). Posons

$$J = \int_\Omega \sigma^{2k} (1 + \sum_{\alpha \in M} | D^\alpha u(x, \lambda) |)^{m-2} (1 + \lambda \sum_{\alpha \in M} | D^\alpha u(x, \lambda) |)^{2-m} \cdot$$

$$\cdot \sum_{|i| = k+1} (D^i u(x, \lambda))^2 dx.$$

Nous savons d'après le théorème 2 (qu'on utilise pour $m = 2$) que $J < \infty$ et qu'on a (5 1), où nous posons $w = \sigma^{2k} \dfrac{\partial u}{\partial x_l}$. Nous en obtenons: $J \leqq$ $\leqq C_1 J^{\frac{1}{2}} + C_2$, d'où l'assertion.

Nous avons d'après le théorème 3: $u(\lambda) \in W^{(k)}_{\infty, 1+k}(\Omega)$, de plus, nous obtenons

LEMME 7.2. *Soit* $w = \dfrac{\partial u(\lambda)}{\partial x_l}\,\psi$ *de* (5.2bis). *Nous avons pour* $\varphi \in \mathcal{D}(K(x_0))$:

$$\int_{K(x_0)} \sum_{|i|=|j|=k} \frac{\partial^2 F}{\partial\zeta_i\,\partial\zeta_j} D^i\varphi\, D^j w\, dx = \int_{K(x_0)} \sum_{|i|=k} D^i\varphi\, n_i\, dx\,; \tag{7.3}$$

où

$$\| n_i \|_{L_{m/(m-1)}(K(x_0))} \leqq C d^{-k-1} A_d^{2-m}, \quad d = \frac{1}{2}\, dist\,(x_0, \partial\Omega).$$

En effet, il vaut (5.1), et par un calcul immédiat, nous obtenons pour $\dfrac{\partial u}{\partial x_l}$ l'équation (6.3) avec

$$\| g_i \|_{L_{m/(m-1)}(K(x_0))} \leqq C d^{-k} A_d^{2-m} \tag{7.4}$$

et après l'équation (6.4) avec (7.4).

Nous obtenons maintenant de (5.2), (7.4) et du lemme 3.1 de la même façon comme le lemme 6.6 :

LEMME 7.3. *Il existe* $C > 0$ *tel que* $2 + CA_d^{m-2} \leqq 3$,

$$\Big(\int_{L(x_0)} \sum_{|i|=k+1} | D^i u(x,\lambda)|^p\, dx\Big)^{1/p} \leqq C d^{-k-1} A_d^{4-2m}, \tag{7.5}$$

pour $p = 2 + CA_d^{m-2}$; *on suppose* $2 + CA_d^{m-2} \leqq m/(m-1)$.

Nous avons maintenant:

LEMME 7.4. *Soit* $\varkappa = \dfrac{2(1+k)}{m-1}$. *Alors*

$$\| u(\lambda) \|_{W^{(k)}_{\infty,\, 2(1+k)/(m-1)}} \leqq C. \tag{7.6}$$

DÉMONSTRATION. Posons

$$m(x) = \Big(1 + \sum_{|\alpha| \leqq k} (D^\alpha u(x,\lambda))^2\Big)^{\frac{m}{4}}.$$

Il suit de (7.2) que

$$\left(\int_{L(x_0)} \left[\left(\frac{\partial m}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial x_2}\right)^2\right] dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqq C d^{-k} \tag{7.7}$$

où $d = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Nous avons avec p de (7.5):

$$\left(\int_{L(x_0)} \left[\left| \frac{\partial m}{\partial x_1} \right|^p + \left| \frac{\partial m}{\partial x_2} \right|^p \right] dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqq C d^{-k-\cdot} A_d^{2(2-m)} \tag{7.8}$$

d'où pour $1/p_1 = a/p + b/2$ avec $a + b = 1$, $0 < a < 1$, il suit:

$$\left(\int_{L(x_0)} \left[\left| \frac{\partial m}{\partial x_1} \right|^{p_1} + \left| \frac{\partial m}{\partial x_2} \right|^{p_1} \right] dx \right)^{1/p_1} \leqq C d^{-k-1} A_d^{2a(2-m)}. \tag{7.9}$$

Puis, nous tirons de (7.1):

$$d^{-2} \int_{L(x_0)} | m(x) | \, dx \leqq C d^{-1}. \tag{7.10}$$

Il suit du lemme 3.2 et de (7.9), (7.10):

$$| m(x_0) | \leqq C d^{-k-1} a^{-1} A_d^{1-m/2+3a(2-m)},$$

d'où

$$A_{2d}^{\frac{m}{2}} \leqq C d^{-k-1} a^{-1} A_d^{1-m/2+3a(2-m)} \tag{7.11}$$

pour $d > 0$. Si nous posons $a = (m-1)/6(2-m)$ nous obtenons

$$A_{2d} \leqq C d^{-2(1+k)/m} a^{-2/m} A_d^{1-(m-1)/m}.$$

Il suit du lemme 6.1 l'assertion.

Nous démontrons maintenant comme le lemme 6.8:

LEMME 7.5. *On peut trouver une suite $\lambda^n \to 0$ telle que $D^\alpha u(\lambda^n) \to D^\alpha u$ presque partout dans Ω pour $|\alpha| \leqq k$, et on a*

$$\| u \|_{W^{(k)}_{\infty, 2(1+k)/(m-1)}} \leqq C. \tag{7.12}$$

Nous avons finalement:

THÉORÈME 5. *Soit $1 < m < 2$, $N = 2$, u la solution du problème* (2.24), (2.25). *On suppose* (2.14)-(2.19), (2.20bis), (2.22), (2.23bis). *Alors*

$$\sup_{x \in \Omega_d} \sum_{|\alpha| \leqq k} | D^\alpha u(x) | \leqq C d^{-2(1+k)/(m-1)}. \tag{7.13}$$

Posons

$$A_d = 1 + \sup_{x \in \Omega_d} \sum_{|\alpha| \leqq k} | D^\alpha u(x) | \, .$$

Il existe $0 < C < 1$ *de sorte que si* $p = 2 + CA_d^{m-2}$, *alors pour* $|\alpha| = 1 + k$

$$\| D^\alpha u \|_{L_p(L(x_0))} \leqq Cd^{-(1+k)[1+4(2-m)/(m-1)]} \, . \tag{7.14}$$

Ici

$$L(x_0) = \left\{ x \in \Omega, \ | x - x_0 | < \frac{1}{4} dist\,(x_0 \, , \, \partial\Omega) = 2d \right\} .$$

sur chaque $\Omega' \subset \bar{\Omega}' \subset \Omega$ *la fonction* $u \in C^{(k),\, \mu(\Omega')}(\bar{\Omega}')$.

DÉMONSTRATION. (7.13): c'est (7.12). Cela étant, nous obtenons l'inégalité (7.14) par le passage à la limite $\lambda^n \longrightarrow 0$ du lemme 7.5 en tenant compte de (7.5), (7.6) et du fait qu'on peut choisir de la suite λ^n une suite, pour laquelle $D^i u(\lambda^n) \longrightarrow D^i u$ $(|i| = k + 1)$, faiblement dans $L_p(L(x_0))$, c. q. f. d.

BIBLIOGRAFIE

[1] S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG : *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I,* Comm. Pure Appl. Math. XII (1959), 623-727.

[2] F. E. BROWDER : *Séminaire de mathématiques supérieures,* Montreal 1965.

[3] F. E. BROWDER : *Variational methods for nonlinear elliptic eigenvalue problems,* Bull. Amer. Soc. 71 (1965), 176-183.

[4] E. R. BULEY : *The differentiability of solutions of certain variational problems for multiple integrals,* Technical Report 16 (1960), Univ. Berkeley.

[5] E. DE GIORGI : *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari,* Mem. Accad. Sci. Torino 3 (1957), 25-43.

[6] P. HARTMAN, G. STAMPACCHIA : *On some non-linear elliptic differential functional equations,* Acta Math. Uppsala 115 (1966) 271-310.

[7] O. A. LADYZENSKAJA, N. N. URALCEVA : *Linejnyje i kvazilinejnyje uravnenija ellipticeskovo tipa,* Izd. Nauka, Moskva 1964.

[8] N. G. MEYERS : *On L_p estimates for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 17 (1963), 189-206.

[9] C. B. MORREY : *Quelques résultats récents du calcul des variations,* Colloque CNRS, Paris 1962.

[10] C. B. MORREY : *Multiple integrals in the calculus of variations,* Springer 1966.

[11] C. B. MORREY : *Existence and differentiability theorems for the solutions of variational problems for multiple integrals,* Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940), 439-458.

[12] J. NEČAS : *Sur l'existence et le régularité des solutions des équations non-linéaires du type elliptique,* Proc. Equadiff II, Bratislava 1966.

[13] J. NEČAS : *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques,* Praque 1967.

[14] J. NEČAS : *Sur la méthode variationnelle pour les équations aux dérivées partielles non-linéaires du type elliptique,* CMUC 7, 3, (1966), 301-317.

[14bis] J. NEČAS : *Sur les domaines du type N,* Czechslovak Math. Journ. 12 (1962), 274-287.

[15] L. NIRENRERG : *Remarks on strongly elliptic partial differential equations,* Comm. Pure Appl. Math. 8 (1955), 648-674.

[16] G. STAMPACCHIA : *Séminaire de mathématiques supérieures,* Montréal 1965.

[17] M. M. VAJNBERG : *Variacionnyje metody issledovanija nelinejnych operatorov,* Moskva 1956.

[18] A. ZYGMUND : *Trigonometrical series,* Cambridge 1959.