ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

E. J. AKUTOWICZ

Sur certaines équations d'évolution

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 21, nº 3 (1967), p. 401-419

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1967_3_21_3_401_0>

SUR CERTAINES EQUATIONS D'EVOLUTION

par E. J. AKUTOWICZ

Introduction.

En août 1965, au cours d'une réunion à Oberwolfach, D. V. Widder m'a proposé de chercher les equations dans un demi-plan interpolant l'équation de Laplace et celle de la chaleur. Ceci est l'origine des considérations développées dans le présent Mémoire. Ajoutons tout de suite que nous n'apportons rien aux problèmes difficiles de représentation et d'unicité dans le cadre classique où opère M. Widder. De telles questions ne sont pas encore entièrement résolues même pour l'équation de la chaleur.

La théorie des distributions s'est avérée très utile pour la recherche des classes d'unicité pour les équations à dérivées partielles (Gelfand et Silov [11]; voir aussi leur livre [7], Chapitre 2). Dans le chapitre I nous construisons un espace convenable de distributions, dual d'un espace $\Psi_{\lambda'}$ de fonctions entières d'ordre $\lambda' > 1$. Dans l'espace $\Psi_{\lambda'}$ on définit l'opérateur :

$$\psi \longrightarrow M_\mu * \psi,$$

où

$$M_\mu * \psi(x) = c_\mu \int_0^\infty \frac{dr}{r^{\mu+1}} \left\{ \psi(x+r) + \psi(x-r) - 2 \sum_{k=0}^{m-1} \psi^{(2k)}(x)\, r^{2k} / \underline{|2k} \right\},$$

$$2m - 2 < \mu < 2m, \qquad (m \text{ entier})$$

qu'on transpose alors au dual de l'espace $\Psi_{\lambda'}$. Le résultat principal du chapitre I est un théorème (§ 4) d'unicité et regularité pour les solutions du problème de Cauchy associé à l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = M_\mu * u, \tag{1}$$

avec les données $u_{t=0} = u_0$, dans l'espace dual $\Psi'_{\lambda'}$.

Pervenuto alla Redazione il 14 Gennaio 1967

L'équation de la propagation de la chaleur est étroitement liée au mouvement brownien. En effet, la solution fondamentale de l'équation de la chaleur est en même temps la densité de la probabilité de passage dans le mouvement brownien. Les équations de A. Kolmogoroff [15] et W. Feller [9] correspondent aux processus markoviens plus généraux. Or, si $0 < \mu < 2$, la solution fondamentale de l'équation (1) n'est autre que la densité

$$S_\mu(y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi - t|\xi|^\mu} d\xi ,$$

de la loi stable symétrique à paramètre μ. Les processus stables joueront donc pour l'équation (1) le rôle du mouvement brownien pour l'équation de la chaleur, malgré le fait que les trajectoires de processus stables $(0 < \mu < 2)$ soient presque sûrement discontinues [16].

Le chapitre II est consacré à l'étude de l'équation perturbée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = M_\mu * u + V(x, t)u. \tag{2}$$

Nous ferons usage des processus stables pour obtenir une solution fondamentale E de l'équation (2) sous la forme d'esperance conditionnelle :

$$E(x, t) = \mathcal{E}\left[\exp\left(-\int_0^t V(\beta(u), u)\, du\right) \middle| \beta(t) = x\right].$$

Une question restée ouverte est de savoir si la fonction E est indéfiniment dérivable en x.

Chapitre I

UNICITÉ ET RÉGULARITÉ DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION D'ÉVOLUTION

1. Certains espaces fondamentaux.

Fixons $\lambda > 1$. Alors pour un entier positif m on a $2m - 2 < \lambda \leq 2m$. Désignons par $\Phi_\lambda^{\alpha, \beta, \gamma}$ l'ensemble de toutes les fonctions continues φ définies sur la droite réelle R telles que les deux premières dérivées φ' et φ'' existent presque partout, partout dans un voisinage de $\pm\infty$, et satisfont aux inégalités

$$\sup_x |\varphi(x)| \exp(\alpha |x|^\lambda) < \infty, \qquad \operatorname*{ess\,sup}_x |\varphi'(x)| \exp(\beta |x|^\lambda) < \infty, \tag{1.1}$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_x |\varphi''(x)| \exp(\gamma |x|^\lambda) < \infty,$$

pour trois constantes positives α, β, γ. Munissons $\Phi_\lambda^{\alpha,\beta,\gamma}$ de la norme

$$\|\varphi\|_{\alpha,\beta,\gamma} = \sup |\varphi(x)| \exp(\alpha |x|^\lambda) + \operatorname{ess\,sup} |\varphi'(x)| \exp(\beta |x|^\lambda) + \\ + \operatorname{ess\,sup} |\varphi''(x)| \exp(\gamma |x|^\lambda)$$

pour en obtenir un espace de Banach. Désignons par Φ_λ la partie commune,

$$\Phi_\lambda = \bigcap_{\alpha,\beta,\gamma} \Phi_\lambda^{\alpha,\beta,\gamma},$$

munie de la topologie limite projective des topologies induites sur Φ_λ de $\Phi_\lambda^{\alpha,\beta,\gamma}$. Chaque ensemble borné de l'espace Φ_λ est alors contenu dans un ensemble de la forme

$$\{\varphi : \|\varphi\|_{\alpha,\beta,\gamma} \leq c_{\alpha,\beta,\gamma} < \infty, \ \alpha, \beta, \gamma \text{ arbitraires}\}.$$

On désignera par $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ la transformation de Fourier et son inverse :

$$\mathcal{F}\psi(x) = \varphi(x) = \int \psi(s)\, e^{ixs}\, ds\,;$$

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi(s) = \psi(s) = \frac{1}{2\pi} \int \varphi(x)\, e^{-isx}\, dx.$$

Posons

$$\Psi_{\lambda'} = \mathcal{F}^{-1}\, \Phi_\lambda, \qquad \lambda' = \lambda/(\lambda - 1).$$

On transpose la topologie de l'espace Φ_λ à son image $\Psi_{\lambda'}$. C'est-à-dire, les ouverts de $\Psi_{\lambda'}$ sont, par définition, les images par $\mathcal{F}^{-1}$ des ouverts de Φ_λ.

L'espace $\Psi_{\lambda'}$ consiste en des fonctions entières $\psi(s)$ telles que

$$\sup_{s \in \mathbb{C}} |s^2 \psi(s)| \exp(-b\, |\operatorname{Im} s|^{\lambda'}) < \infty \tag{1.2}$$

pour tout $b > 0$.

En effet, pour $\varphi \in \Phi_\lambda$, on a

$$\psi(s) = \int_R e^{ixs} \varphi(x)\, dx, \qquad s \in \mathbb{C},$$

donc

$$|\psi(s)| \leq \int_R |\varphi(x)|\, e^{-\tau x}\, dx, \qquad s = \sigma + i\tau,$$

$$\leq c_\alpha \int_R \exp(-\alpha\, |x|^\lambda - \tau x) \cdot \exp(-|x|^\lambda)\, dx$$

$$\leq c_\alpha \exp(\sup_{x \in R}(-\alpha\, |x|^\lambda - \tau x))$$

$$= c_\alpha \exp\left((\alpha\lambda)^{-1/(\lambda-\ )} \cdot (\lambda - 1)/\lambda \cdot |\tau|^{\lambda/(\lambda-1)}\right). \tag{1.3}$$

La condition (1.2) résulte de (1.3) et du fait que

$$\int_R \varphi''(x)\, e^{isx}\, dx = -s^2 \int_R \varphi(x)\, e^{isx}\, dx, \qquad s \in \mathbb{C}. \tag{1.4}$$

REMARQUE. Réciproquement, si une fonction entière ψ satisfait à (1.2) pour tout $b > 0$, alors $\varphi = \mathcal{F}\psi$ existe et satisfait à la première inégalité (1.1) pour tout $\alpha > 0$. Cependant, on est loin d'un théorème du type de Paley-Wiener.

2. Une équation d'évolution.

Soit μ un nombre réel, $1 \leq \mu < \lambda$, (λ est déjà fixé au numéro 1). Soit c_μ la constante

$$c_\mu = -\left\{ \int_0^\infty \frac{dr}{r^{\mu+1}} \left(e^{ir} + e^{-ir} - 2 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(ir)^{2k}}{\underline{|2k}} \right) \right\}^{-1},$$

et posons

$$M_\mu(r) = c_\mu\, r^{-\mu-1}, \qquad r > 0.$$

On va étudier l'opérateur $M_\mu *$ défini dans l'espace $\Psi_{\lambda'}$ d'après la formule

$$M_\mu * \psi(x) = c_\mu \int_0^\infty \frac{dr}{r^{\mu+1}} \left\{ \psi(x+r) + \psi(x-r) - 2 \sum_{k=0}^{m-1} \psi^{(2k)}(x)\, r^{2k} / \underline{|2k} \right\} \tag{2.1}$$

pour $2m - 2 < \mu < 2m$.

L'opérateur $M_\mu *$ se transpose à l'espace dual $\Psi'_{\lambda'}$:

$$\langle M_\mu * u, \psi \rangle = \langle u, M_\mu * \psi \rangle, \qquad u \in \Psi'_{\lambda'},\ \psi \in \Psi_{\lambda'}\,. \tag{2.2}$$

On considère dans ce chapitre l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = M_\mu * u, \tag{2.3}$$

où une solution u sera une fonction $t \longrightarrow u(t)$ à valeurs dans l'espace $\Psi'_{\lambda'}$ définie pour $t > 0$ et qui tend dans la topologie forte de $\Psi'_{\lambda'}$ (convergence uniforme sur les ensembles bornés de $\Psi_{\lambda'}$) vers un élément donné u_0 lorsque t tend vers 0. Dire qu'une telle fonction est une solution faible de l'équation (2.3), c'est dire que la forme bilinéaire $\langle u, \psi \rangle$ est, pour chaque élément $\psi \in \Psi_{\lambda'}$ une fonction dérivable de $t > 0$ telle que

$$\frac{d}{dt}\langle u, \psi \rangle = \langle M_\mu * u, \psi \rangle .$$

3. Quelques propositions auxiliaires.

Le contenu essentiel de ce chapitre se trouve dans ce numéro.

Proposition 1. *Pour chaque fonction ψ de l'espace $\Psi_{\lambda'}$ on a*

$$\mathcal{F}(M_\mu * \psi) = \mathcal{F}M_\mu \cdot \mathcal{F}\psi = -\,|\,\xi\,|^\mu \cdot \mathcal{F}\psi.$$

Démonstration. Il s'agit de calculer la transformée de Fourier de

$$\int_0^\infty \frac{dr}{r^{\mu+1}} \left\{ \psi(x+r) + \psi(x-r) - 2 \sum_{k=0}^{m-1} \psi^{(2k)}(x)\, r^{2k} / \underline{|2k} \right\} \tag{3.1}$$

lorsque $\psi \in \Psi_{\lambda'}$. On peut représenter la fonction $\psi(x)$ par l'intégrale de Cauchy prise sur les droites $L_1 : y = 2$ et $L_2 : y = -2$ dans le plan de la variable $x + iy$:

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - x}\, d\zeta. \tag{3.2}$$

On vérifie tout de suite que toutes les dérivées $\psi^{(k)}(x)$ appartiennent à L^1.

D'après la formule de Taylor pour le reste, la quantité entre crochets dans (3.1) peut être écrite sous la forme :

$$\text{(3.3)} \qquad \frac{r^{2m-1}}{\underline{|2m-1}} \int_0^1 (1-t)^{2m-1} \left[\psi^{(2m)}(x+tr) - \psi^{(2m)}(x-tr)\right] dt$$

$$= r^{2m-1} \int_0^1 (1-t)^{2m-1}\, dt \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \left[\frac{1}{(w-x-tr)^{2m+1}} - \frac{1}{(w-x+tr)^{2m+1}}\right] \psi(w)\, dw.$$

Donc pour $r \leq 1$, la valeur absolue de (3.3) est inférieure à

$$C^{te}\, r^{2m} \int_{L_1+L_2} |\,\psi(w)\,|\,|\,dw\,| \int_0^1 \frac{|\,P(w-x,t,r)\,|}{|\,(w-x)^2 - t^2 r^2\,|^{2m+1}}\, dt = C^{te}\, r^{2m}\, G(x),$$

où P désigne un polynôme de degré $2m$ en $w-x$, de degré $2m+1$ en t, de degré $2m$ en r et $G(x)$ est dans L^1 sur R. On voit donc que

$$\int_0^1 \frac{dr}{r^{\mu+1}}\,|\,\{''\}\,| \leq C^{te}\, G(x) \cdot \int_0^1 r^{2m-\mu-1}\, dr \leq C^{te}\, G(x),$$

puisque $\mu < 2m$. D'autre part, puisque $2m-2 < \mu$, l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{dr}{r^{\mu+1}}\,\{''\}$$

coïncide avec une combinaison linéaire de fonctions de L^1 en x. Donc

$$\int_0^\infty \frac{dr}{r^{\mu+1}}\,|\,\{''\}\,|$$

appartient à L^1 en x et il en résulte que

$$\mathcal{F}(M_\mu * \psi)(\xi) = c_\mu \int_0^\infty \frac{dr}{r^{\mu+1}}\, \mathcal{F}\left\{\psi(x+r) + \psi(x-r) - 2\sum_{k=0}^{m-1} \psi^{(2k)}(x)\, r^{2k}/\underline{|2k}\right\}(\xi)$$

$$= c_\mu \int_0^\infty \frac{dr}{r^{\mu+1}} \left\{e^{ir\xi} + e^{-ir\xi} - 2\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(ir\xi)^{2k}}{\underline{|2k}}\right\} \cdot \mathcal{F}\psi(\xi) = -\,|\,\xi\,|^{\mu} \cdot \mathcal{F}\psi(\xi),$$

C.Q.F.D.

vu la définition de c_μ.

PROPOSITION 2. *L'application*

$$\psi \longrightarrow M_\mu * \psi$$

de $\Psi_{\lambda'}$ dans $\Psi_{\lambda'}$ est continue.

DÉMONSTRATION. D'après la Proposition 1, il revient au même de dire que l'opérateur de multiplication,

$$\mathcal{F}\psi \longrightarrow -|x|^\mu \cdot \mathcal{F}\psi,$$

envoie Φ_λ dans Φ_λ et est continu. Or, il est évident que $\mathcal{F}\psi \in \Phi_\lambda$ entraîne $-|x|^\mu . \mathcal{F}\psi \in \Phi_\lambda$. En outre, chaque ensemble borné de l'espace Φ_λ est contenu dans un ensemble défini par des inégalités

$$\| \varphi \|_{\alpha, \beta, \gamma} \leq c_{\alpha, \beta, \gamma} < \infty.$$

Mais alors

$$\| -|x|^\mu \cdot \varphi \|_{\alpha, \beta, \gamma} \leq c'_{\alpha, \beta, \gamma} < \infty,$$

pour certaines constantes $c'_{\alpha, \beta, \gamma}$, ce qui veut dire que $M_\mu *$ envoie chaque ensemble borné de $\Psi_{\lambda'}$ dans un ensemble borné du même espace. C.Q.F.D.

PROPOSITION 3. *La transformée de Fourier de $M_\mu * u$, $u \in \Psi'_{\lambda'}$, est donnée par*

$$\mathcal{F}(M_\mu * u) = -|x|^\mu \cdot \mathcal{F}u. \tag{3.4}$$

DÉMONSTRATION. Rappelons que, pour un vecteur u de l'espace dual $\Psi'_{\lambda'}$, $M_\mu * u$ est défini par

$$\langle M_\mu * u, \psi \rangle = \langle u, M_\mu * \psi \rangle, \qquad \psi \in \Psi_{\lambda'}.$$

Vu la Proposition 2,

$$u \longrightarrow M_\mu * u$$

est une application continue du dual $\Psi'_{\lambda'}$ dans lui-même. La Proposition 3 est alors une conséquence immédiate de la Proposition 2. En effet, d'après la définition de la transformée de Fourier dans l'espace dual, on a

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(M_\mu * u), \mathcal{F}\psi \rangle &= 2\pi \langle M_\mu * u, \psi \rangle \\
&= 2\pi \langle u, M_\mu * \psi \rangle \\
&= \langle \mathcal{F}u, \mathcal{F}(M_\mu * \psi) \rangle \\
&= \langle \mathcal{F}u, -|x|^\mu \cdot \mathcal{F}\psi \rangle \\
&= \langle -|x|^\mu \mathcal{F}u, \mathcal{F}\psi \rangle,
\end{aligned}$$

identiquement en $\psi \in \Psi_{\lambda'}$, ce qui entraîne bien (3.4). C.Q.F.D.

Proposition 4. *Si u est une solution faible de l'équation,*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = M_\mu * u,$$

à valeurs dans l'espace dual $\Psi'_{\lambda'}$, alors la transformée de Fourier $U = \mathcal{F}u$ est une solution faible de l'équation,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\,|\,x\,|^\mu \cdot U, \tag{3.6}$$

dans le dual Φ'_λ, et réciproquement.

Démonstration. Il s'agit de vérifier l'égalité

$$\frac{d}{dt}\langle\, U, \varphi \,\rangle = \langle\, -\,|\,x\,|^\mu \cdot U, \varphi \,\rangle \tag{3.7}$$

pour chaque élément $\varphi \in \Phi_\lambda$. Vu (3.4), (3.7) est équivalent à l'hypothèse, à savoir,

$$\frac{d}{dt}\langle\, u, \psi \,\rangle = \langle\, M_\mu * u, \psi \,\rangle$$

identiquement en ψ dans $\Psi_{\lambda'}$. C. Q. F. D.

Proposition 5. *Si la fonction $t \longrightarrow U(t)$ à valeurs dans le dual Φ'_λ satisfait à l'èquation* (3.6), *alors l'élément*

$$\mathcal{F}^{-1}\,(e^{t\,|\,\xi\,|^\mu} \cdot U)$$

appartient au dual $\Psi'_{\lambda'}$ et ne dépend pas de t ; autrement dit,

$$\mathcal{F}^{-1}\,(e^{t\,|\,\xi\,|^\mu} \cdot U) = u_0\,,$$

où u_0 est le vecteur initial.

Démonstration. Notons que, pour chaque $t > 0$, les opérateurs de multiplication

$$\varphi \longrightarrow e^{t\,|\,\xi\,|^\mu} \cdot \varphi \longrightarrow |\,\xi\,|^\mu \cdot e^{t\,|\,\xi\,|^\mu} \cdot \varphi$$

sont des transformations continues de l'espace Φ_λ dans lui-même. Ici l'hypothèse $\lambda > \mu$ est indispensable. Donc

$$e^{t|\xi|^\mu} \cdot U \in \Phi'_\lambda, \qquad (t > 0)$$

et

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{t|\xi|^\mu} \cdot U) \in \Psi'_{\lambda'}, \qquad (t > 0).$$

En outre,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle -|\xi|^\mu U + |\xi|^\mu U, e^{t|\xi|^\mu}\varphi \rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial U}{\partial t}, e^{t|\xi|^\mu}\varphi \right\rangle + \langle |\xi|^\mu \cdot U, e^{t|\xi|^\mu}\varphi \rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial U}{\partial t}, e^{t|\xi|^\mu}\varphi \right\rangle + \langle U, |\xi|^\mu e^{t|\xi|^\mu}\varphi \rangle \\ &= \frac{d}{dt}\langle U, e^{t|\xi|^\mu}\varphi \rangle \\ &= \frac{d}{dt}\langle e^{t|\xi|^\mu} U, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

4. Un théorème d'unicité et régularité.

Les résultats du numéro 3 entraînent la conclusion suivante.

THÉORÈME. *Soit u une solution faible dans l'espace dual $\Psi'_{\lambda'}$ de*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = M_\mu * u, \qquad u|_{t=0} = u_0, \tag{4.1}$$

où la transformée de Fourier de u_0 est une fonction mesurable sur R telle que

$$\mathcal{F}u_0(\xi) = \mathcal{O}(e^{\varepsilon|\xi|^\mu}), \qquad (|\xi| \to \infty), \tag{4.2}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Alors u est une fonction indéfiniment dérivable $u(t, x)$ de t, x $(t > 0, x \in R)$ donnée par l'intégrale,

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi}\int_R e^{-ix\xi - t|\xi|^\mu}\mathcal{F}u_0(\xi)\, d\xi.$$

Démonstration. D'après les Propositions 4 et 5, l'élément $\mathcal{F}^{-1}(e^{t|\xi|^\mu}\mathcal{F}u)$ appartient à $\Psi'_{\lambda'}$ et ne dépend point de $t > 0$. Donc

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{t|\xi|^\mu}\mathcal{F}u) = \lim_{t\to 0} \mathcal{F}^{-1}(e^{t|\xi|^\mu}\mathcal{F}u) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}u_0 = u_0,$$

d'où il vient

$$\mathcal{F}u = e^{-t|\xi|^\mu}\mathcal{F}u_0,$$

donc

$$u = u(t, x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-ix\xi - t|\xi|^\mu}\mathcal{F}u_0(\xi)\,d\xi.$$

C. Q. F. D.

Remarque 1. Pour $\mu = 1$ chaque solution de (4.1) et (4.2) est harmonique dans le demi-plan $t > 0$. Toutefois, l'équation (4.1) ne se réduit pas à l'équation de Laplace, car la fonction $u(t, x) \equiv t$ ne la satisfait pas.

Remarque 2. L'équation de la chaleur, qui correspond formellement à $\mu = 2$, est exclue de l'analyse précédente. Voir la définition (2.1) de l'opérateur $M_\mu *$.

On doit souligner que dans notre théorème d'unicité nous avons imposé deux sortes de réstrictions, à savoir, que u appartienne à $\Psi'_{\lambda'}$ pour chaque $t > 0$ et que la condition (4.2) soit remplie pour $t = 0$.

Chapitre II

SOLUTION D'UNE ÉQUATION PERTURBÉE

La solution d'une équation perturbée d'évolution ayant la forme,

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = M_\mu * u + V(x, t)\,u, \qquad 0 < \mu < 2,$$

où $M_\mu *$ est l'opérateur étudié au chapitre I et V est une fonction réelle de x et t, continue et bornée inférieurement, est étroitement liée au processus markovien stable de paramètre μ. Un tel processus peut être identifié avec une certaine mesure de probabilité dans un espace fonctionnel $\mathcal{M}$. Une solution fondamentale de l'équation (1) s'exprime alors comme une intégrale par rapport à cette mesure. L'idée de telles applications de la théorie de l'intégration remonte au physicien R. P. Feynman. Pour plus de détails, on pourra consulter les travaux de M. Kac [13], [14], Yu. L. Daletski [6], E. Nelson [18]. Nous ne ferons pas ici l'historique de la question.

Un processus aléatoire stable de paramétre μ est une famille de variables alèatoires réelles $\beta(t)$, paramètrée par les points $t \geq 0$ de la demi-droite R_+, telles que, si

$$0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n,$$

les accroissements

$$\beta(t_k) - \beta(t_{k-1}), \qquad k = 1, \dots, n,$$

soient indépendants, la loi de répartition de $\beta(t)$ étant

$$\operatorname{Prob}(\beta(t) < a) = \int_{-\infty}^{a} S_\mu(y, t)\, dy,$$

où

$$S_\mu(y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi - t|\xi|^\mu}\, d\xi, \qquad t > 0. \tag{2}$$

On supposera ces processus séparables (voir Doob [7]), de sorte que la probabilité de certains évènements dépendant de toutes les valeurs de t sur un intervalle puisse être approchée par la probabilité des évenements dépendant d'une suite finie de valeurs de t de plus en plus dense sur l'intervalle en question. Les limites à gauche $\beta(t-)$ et à droite $\beta(t+)$ des trajectoires $\beta(t)$ existent, et il est loisible de supposer $\beta(t) = \beta(t-)$, aussi bien que $\beta(0) = 0$. On désignera par $\mathcal{M}$ l'ensemble des trajectoires du processus (1).

1. Déduction d'une équation intégrale [8].

Pour un élément arbitraire $\beta \in \mathcal{M}$ posons

$$W(t) = W(t, \beta) = \int_0^t V(\beta(u), u)\, du.$$

On voit immédiatement que la fonction $W(t)$ satisfait à

$$\int_0^t V(\beta(u), u)\, e^{-W(u)}\, du = 1 - e^{-W(t)}, \tag{1.1}$$

(1) Les propriétés des trajectoires des processus stables ont été étudiées dans les travaux [1], [2], [3], [4], [16], [17], [19].

car la fonction $e^{-W(t)}$ est absolument continue, donc égale à l'intégrale de sa dérivée. La mesure de probabilité P qui existe dans $\mathcal{M}$ nous permet d'écrire l'esperance conditionnelle de

$$V(\beta(u), u)\, e^{-W(u, \beta)}$$

quand $\beta(t) = x$ sous la forme

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(V(\beta(u), u)\, e^{-W(u,\beta)} \mid \beta(t) = x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(V(\beta(u), u)\, e^{-W(u)} \mid \beta(u) = y) \cdot S(x-y, t-u)\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} V(y, u)\, \Psi(y, u)\, S(x-y, t-u)\, dy,\end{aligned}$$

où

$$\Psi(y, u) = \mathcal{E}(e^{-W(u,\beta)} \mid \beta(u) = y). \tag{1.2}$$

En faisant appel au théorème de Fubini, en appliquant $\mathcal{E}(\ldots \mid \beta(t) = x)$ aux deux membres, on obtient de (1.1):

$$\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} V(y, \tau)\, \Psi(y, \tau)\, S(x-y, t-\tau)\, dy = \Psi(x, t) - S(x, t). \tag{1.3}$$

Dans la suite nous allons étudier la liaison entre les équations (1) et (1.3).

2. Une inégalité de type de Tchebichev dans l'espace $\mathcal{M}$.

Désignons par $\mathcal{M}_{x,t}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M}_{x,t} = \{\beta \in \mathcal{M}, \beta(t) = x\},$$

par $P_{x,t}$ la probabilité conditionnelle quand $\beta(t) = x$. Nous allons évaluer le produit

$$V(x, t)\, \Psi(x, t) = V(x, t) \int_{\mathcal{M}_{x,t}} e^{-W(t,\beta)}\, dP_{x,t}(\beta)$$

lorsque $|x| \to \infty$. Nous considérerons $x \to +\infty$, le cas où $x \to -\infty$ étant tout à fait semblable. Posons pour $0 < \delta = \delta(x, t) < t$,

$$\mathcal{A}_{\delta, x, t} = \left\{ \beta \in \mathcal{M}_x, \ , \beta(\tau) \geq \frac{x}{2} \quad \text{pour } \delta \leq \tau \leq t \right\}$$

et partageons $\mathcal{M}_{x,t}$:

$$\mathcal{M}_{x,t} = \mathcal{A}_{\delta, x, t} \cup \complement \mathcal{A}_{\delta, x, t},$$

de sorte que

$$V\Psi = V \int_{\mathcal{A}_{\delta, x, t}} e^{-W} \, dP_{x,t} + V \int_{\complement \mathcal{A}_{\delta, x, t}} e^{-W} \, dP_{x,t} = I_1 + I_2 \, .$$

Alors, puisque la fonction V est bornée inférieurement,

$$|I_1| \leq C^{te} |V| \exp(-(t - \delta) V_*(x, t)) \cdot P_{x,t}(\mathcal{A}_{\delta, x, t}),$$

où

$$V_*(x, t) = \inf_{\xi \geq \frac{x}{2}, \, \delta \leq \tau \leq t} V(\xi, \tau).$$

En ce qui concerne la quantité $P_{x,t}(\mathcal{A}_{\delta, x, t})$, on a, pour les grandes valeurs de x :

$$\begin{aligned} P_{x,t}(\mathcal{A}_{\delta, x, t}) &\leq P_{x,t}\left(\left\{ \beta \in \mathcal{M}_{x,t}, \beta(\tau_1) \geq \frac{x}{2} \text{ pour } un \ \tau_1, \delta < \tau_1 < t \right\} \right) \\ &= \int_{\xi_1 > \frac{x}{2}} S(\xi_1, \tau_1) \, S(x - \xi_1, t - \tau_1) \, d\xi_1 \\ &\leq \sup_{\xi_1 > \frac{x}{2}} S(\xi_1, \tau_1) \cdot \int_{\xi_1 > \frac{x}{2}} S(x - \xi_1, t - \tau_1) \, d\xi_1 \\ &= O\left(\frac{\tau_1}{x^{\mu+1}} \cdot \frac{t - \tau_1}{x^{\mu}} \right), \qquad x \to +\infty, \\ &= O\left(\frac{t^2}{x^{2\mu+1}} \right). \end{aligned}$$

Donc

$$|I_1| = O(t^2 |V(x, t)| \exp(-(t - \delta) V_*(x, t)) / x^{2\mu+1}), \qquad x \to +\infty. \tag{2.1}$$

Passons à l'intégrale I_2. Remarquons d'abord que chaque élément β de $\mathcal{M}$ est déterminé sans ambiguité par ses valeurs prises en n'importe quel ensemble dense et dénombrable du demi-axe $t > 0$. Considérons alors une suite d'ensembles cylindriques $\Omega_{n, \delta, x, t}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ définie à partir d'une suite quelconque de partitions de l'intervalle (δ, t),

$$\delta = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{n-1}^{(n)} < t_n^{(n)} = t,$$

telle que $\max (t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}) \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$, par la condition que voici:

$$\Omega_{n, \delta, x, t} = \left\{ (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) : \text{ au moins un composant } \xi_i \text{ est } < \frac{x}{2} \right\}.$$

On a alors, grâce à la séparabilité de notre processus,

$$\begin{aligned} P_{x,t}(\mathcal{A}_{\delta, x, t}) &= \lim_{n \to \infty} P_{x,t}(\Omega_{n, \delta, x, t}) \\ &= \lim_{n \to \infty} \int \cdots \int_{\Omega_{n, \delta, x, t}} S(\xi_1 - \xi_0\, t_1^{(n)} - t_0^{(n)}) \ldots \\ &\qquad\qquad \ldots S(x - \xi_{n-1}, t - t_{n-1}^{(n)})\, d\xi_0 \ldots d\xi_{n-1} \\ &\leq \overline{\lim_{n \to \infty}} \int_{\xi_j < \frac{x}{2}} S(x - \xi_j, t - t_j^{(n)})\, d\xi_j \\ &= \overline{\lim_{n \to \infty}} \int_{\eta_j > \frac{x}{2}} S(\eta_j, t - t_j^{(n)})\, d\eta_j \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{t - \delta}{x^\mu}\right), \qquad\qquad x \longrightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Donc

$$(2.2) \qquad | I_2 | = \mathcal{O}\left(\frac{(t - \delta) \mid V(x, t) \mid}{| x |^\mu}\right), \qquad | x | \longrightarrow + \infty.$$

3. Solution fondamentale de l'équation perturbée.

Notre but principal dans ce numéro sera de montrer que la fonction Ψ définie par (1.2) est une solution fondamentale de l'équation perturbée,

$$(3.1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = M_\mu * u + V(x, t) \cdot u, \qquad 0 < \mu < 2,$$

comme distribution de l'espace dual $\Psi'_{\lambda'}$, où

$$\max(1, \mu) < \lambda, \quad \lambda' = \lambda/(\lambda - 1).$$

Il n'est pas exclu que Ψ soit en réalité indéfiniment dérivable, mais même la preuve que Ψ soit assez régulière pour que $M_\mu * \Psi$ existe au sens de (2.1), Chapitre I, avec $m = 1$, nous échappe complètement.

Réstrictions imposées à la fonction $V(x, t)$. La classe des perturbations admissibles $V(x, t)$ est assez large ; toutefois, on exige que $V(x, t)$ soit une fonction continue et bornée inférieurement ($t \geq 0, x \in R$). En outre, concernant le comportement de $V(x, t)$ en fonction de x, on suppose qu'il existe une fonction $\delta = \delta(x, t)$, $0 < \delta(x, t) < t$, telle que

$$\overline{\lim_{|x| \to \infty}} (t - \delta(x, t)) \frac{|V(x, t)|}{|x|^\mu} < \infty \tag{3.2}$$

et

$$\overline{\lim_{|x| \to \infty}} \frac{|V(x, t)|}{|x|^{2\mu+1}} \exp[-(t - \delta(x, t)) V_*(x, t)] < \infty, \tag{3.3}$$

où

$$V_*(x, t) = \inf_{|\xi| \geq \frac{x}{2},\, \delta(x, t) \leq \tau \leq t} V(\xi, \tau).$$

Théorème. *Dans les hypothèses énumérées, l'esperance conditionnelle* $\Psi(x, t)$ *définie par* (1.2) *est une solution fondamentale de l'équation* (3.1).

Soit ψ une fonction arbitraire de l'espace $\Psi_{\lambda'}$. En tenant compte des inégalités (2.1) et (2.2) on trouve que

$$\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dx \, |\psi(x) \, V(\xi, \tau) \, \Psi(\xi, \tau)| \, S(x - \xi, \; t - \tau) < \infty,$$

ce qui justifiera les changements de l'ordre d'intégration à suivre.

En effet, on a

$$\Big\langle \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \; V(\xi, \tau) \, \Psi(\xi, \tau) \, S(x - \xi, \; t - \tau), \; \psi(x) \Big\rangle = \tag{3.4}$$

$$= \Big\langle S(x, t - \tau), \int d\xi \; V \, \Psi \, \psi_x \Big\rangle,$$

où ψ_x désigne la translatée de ψ : $\psi_x(\xi) = \psi(\xi - x)$. Il s'ensuit

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \; V \Psi \, S(x - \xi, t - \tau), \; \psi(x) \right\rangle =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t d\tau \left\langle S(x, t - \tau), \int d\xi \; V \Psi \, \psi_x \right\rangle$$

$$= \left\langle \delta(x), \int d\xi \; V \Psi \, \psi_x \right\rangle + \int_0^t d\tau \left\langle M_\mu * S(x, t - \tau), \int d\xi \; V \Psi \, \psi_x \right\rangle$$

$$= \langle V \Psi, \psi \rangle + \int_0^t d\tau \left\langle S(x, t - \tau), \; M_\mu * \int d\xi \; V \Psi \, \psi_x \right\rangle$$

$$= \langle V \Psi, \psi \rangle + \int_0^t d\tau \left\langle S(x, t - \tau), \int d\xi \; V \Psi \, M_\mu * \psi_x \right\rangle$$

$$= \langle V \Psi, \psi \rangle + \int_0^t d\tau \left\langle S(x, t - \tau), \int d\xi \; V \Psi \, M_\mu * \psi(\xi - x) \right\rangle$$

$$= \langle V \Psi, \psi \rangle + \int_0^t d\tau \int d\xi \; V \Psi \left\langle S(x, t - \tau), \; M_\mu * \psi(\xi - x) \right\rangle$$

$$= \langle V \Psi, \psi \rangle + \int_0^t d\tau \int d\xi \; V \Psi \left\langle S(x - \xi, t - \tau), \; M_\mu * \psi(x) \right\rangle$$

$$= \langle V \Psi, \psi \rangle + \left\langle \int_0^t d\tau \int d\xi \; V \Psi \, S(x - \xi, t - \tau), \; M_\mu * \psi(x) \right\rangle$$

$$= \langle V \Psi, \psi \rangle + \left\langle M_\mu * \int_0^t d\tau \int d\xi \; V \Psi \, S(x - \xi, t - \tau), \; \psi(x) \right\rangle;$$

on a donc bien l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial t}(K(\Psi)) = V \Psi + M_\mu * K(\Psi) \tag{3.5}$$

dans le dual $\Psi'_{\lambda'}$. Ici nous avons posé

$$K(\Psi)(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \; V(\xi,\tau)\, \Psi(\xi,\tau)\, S(x-\xi,\; t-\tau). \tag{3.6}$$

Puisque, vu (1.3),

$$K(\Psi) = \Psi - S,$$

(3.5) se transforme en

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = V\Psi + M_\mu * \Psi\,;$$

c'est-à-dire, la fonction Ψ satisfait à l'équation (3.1).

Notons que la masse totale de la probabilité conditionnelle $P_{x,t}$ égale $S(x,t)$:

$$\int_{\mathfrak{M}_{x,t}} dP_{x,t}(\beta) = S(x,t).$$

Il s'ensuit sans aucune difficulté que $\Psi(x,t)$ tend, dans $\Psi'_{\lambda'}$, vers la mesure de Dirac à l'origine lorsque $t \to 0$. $\Psi(x,t)$ est donc une solution fondamentale de (3.1).

4. Des cas particuliers.

Soit $G = G(x,t)$ une fonction indéfiniment dérivable en x et bornée en x, t telle que

$$\frac{\partial G}{\partial t} = M_\mu * G, \tag{4.1}$$

pour un μ, $0 < \mu < 2$. Si le potentiel V reste borné, on peut obtenir à partir de la fonction G une solution de l'équation perturbée,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = M_\mu * u + Vu,$$

sous la forme d'une série infinie de puissances de l'opérateur K défini par (3.6):

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} K^n(G)(x,t), \qquad (K^0(G) = G). \tag{4.2}$$

En effet, il est évident que

$$| K^n(G)(x, t) | \leq \frac{t^n}{\underline{|n}} \sup_{\xi, \tau} | V(\xi, \tau) G(\xi, \tau) |^n ,$$

ce qui garantit la sommabilité de la série (4.2), uniformément en x, $x \in R$. On montre, comme tout à l'heure, que

$$\frac{\partial}{\partial t}(K(G)) = V \cdot G + M_\mu * K(G), \tag{4.3}$$

dans le dual Ψ'_x. Mais grâce à l'hypothèse faite sur G, $K(G)$ et $M_\mu * K(G)$ existent comme fonctions indéfiniment dérivables, et l'égalité (4.3) subsiste comme égalité ponctuelle entre fonctions. Ensuite,

$$\frac{\partial}{\partial t}(K^n(G)) = V \cdot K^{n-1}(G) + M_\mu * K^n(G),$$

de sorte que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{n=0}^{\infty} K^n(G)\right) = V \cdot \sum_{n=0}^{\infty} K^n(G) + M_\mu * \sum_{n=0}^{\infty} K^n(G),$$

compte tenu de (4.1).

Le cas particulier $V(x, t) = | x |$, $\mu = 1$. Il s'agit de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\pi} x^{-2} * u + | x | \cdot u. \tag{4.4}$$

Si l'on fait Fourier, on tombe sur

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - | \sigma | \cdot U - \frac{1}{\pi} \sigma^{-2} * U, \qquad (U = \mathcal{F}u) ;$$

donc cette méthode ne mène nulle part. Néanmoins, l'intégrale fonctionnelle, construite à partir de la loi de probabilité de Cauchy,

$$S_1(x, t) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + x^2}, \tag{4.5}$$

donne une solution fondamentale de (4.4), car la loi (4.5) correspond à la valeur $\mu = 1$ du paramètre μ paraissant dans l'équation (2).

Faculté des Sciences,
Montpellier

BIBLIOGRAPHIE

[1] AKUTOWICZ E. J., *Remarque sur la définition et sur les propriétés des lois stables de probabilité.* (à paraître dans Illinois J. Math.).

[2] BLUMENTHAL R. M. and GETOOR R. K., *Some theorems on stable processes.* Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), p. 263-273.

[3] BLUMENTHAL R. M. and GETOOR R. K., *A dimension theorem for sample functions of stable processes.* Ill. J. Math. 4 (1960), p. 370-375.

[4] BOCHNER S., *Harmonic Analysis and Probability Theory.* Berkeley and Los Angeles, 1955.

[5] BOCHNER S., *Diffusion equations and stochastic processes.* Proc. Nat. Acad. Sci. Washington, 35, (1949), p. 368-370.

[6] DALETSKI YU. L., *Intégrales fonctionnelles liées aux équations opérationnelles d'évolution.* Usp. Mat. Naouk, T. XVII, N^0 5, (1962), p. 3-115. (en Russe).

[7] DOOB J. L., *Stochastic Processes,* New-York, 1955.

[8] DYNKIN E. V., *Fonctionnelles des trajectoires des processus stochastiques markoviens.* Doklady Akad. Naouk, T. 104, (1955), p. 691-694). (en Russe).

[9] FELLER W., *Zur Theorie der stochastischen Prozesse* (Existenz-und Eindeutigkeitssätze). Math. Ann. 113 (1936), p. 113-160.

[10] FELLER W., *On a generalization of Marcel Riesz' potentials and the semi-groups generated by them.* Meddelanden Från Lunds Universitets Matematiska Seminarium, Festskrift tillägnad Marcel Riesz, Lund, (1952), p. 73-81.

[11] GELFAND I. M. & CHILOV G. E., *Transformées de Fourier des fonctions rapidement croissantes et questions d'unicité des solutions du problème de Cauchy.* Usp. Mat. Naouk, T. 8, N^0 6, (1953), p. 3-54. (en Russe).

[12] GELFAND I. M. & CHILOV G. E.., *Certaines questions de la théorie des équations différentielles. Fonctions généralisées.* Tome III, Moscou, (1958). (en Russe).

[13] KAC M., *On some connections between probability theory and differential equations.* Proc. 2$^{\text{nd}}$ Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability Theory, Berkeley, (1951), p. 189-215.

[14] KAC M., *Wiener and integration in function space,* Bull. Amer. Mat. Soc., Vol. 72 (N^0 1, part. II), Jan. 1966, p. 52-68.

[15] KOLMOGOROFF A. N., *Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Math. Ann., 104 (1931), p. 415-458.

[16] LÉVY P., *L'addition des variables aléatoires.* Gauthier-Villars, Paris, (1937).

[17] MCKEAN H. P., *Sample functions of stable processes.* Ann. Math. (2) 61, (1955), p. 564-579.

[18] NELSON E., *Feynman integrals and the Schrödinger equation.* J. Math. Phys. 5, (1964), p. 332-343.

[19] SKOROHOD A. V., *Processus aléatoires aux accroissements indépendants,* Moscou, (1964), (en Russe).