ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

P. GRISVARD

Équations opérationnelles abstraites dans les espaces de Banach et problèmes aux limites dans des ouverts cylindriques

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 21, nº 3 (1967), p. 307-347

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1967_3_21_3_307_0>

EQUATIONS OPERATIONNELLES ABSTRAITES DANS LES ESPACES DE BANACH ET PROBLEMES AUX LIMITES DANS DES OUVERTS CYLINDRIQUES

P. GRISVARD

PLAN :

1. Introduction.

Ce travail est consacré à l'étude d'équations opérationnelles de la forme

$$Au - Bu = f \tag{1,1}$$

où A et B sont deux opérateurs linéaires non bornés, de domaines respectifs D_A et D_B dans l'espace de Banach E, où f est donné dans E et u est cherché dans $D_A \cap D_B$.

Les résultats ainsi obtenus sont appliqués à une classe de problèmes aux limites de type mixte dans un ouvert cylindrique, pour des opérateurs différentiels ; cette classe est décrite au n^0 4; elle contient en particulier les problèmes mixtes « usuels » pour des opérateurs paraboliques, même d'ordre supérieur à un par rapport à la « variable de temps ».

On n'a nullement cherché à faire une étude systématique des problèmes de la forme (1,1); les hypothèses sont choisies en vue des applications aux problèmes aux limites ; elles portent essentiellement sur l'ensemble résolvant de A et B et sur le comportement asymptotique des opérateurs $(A - z)^{-1}$

Pervenuto alla Redazione il 10 Novembre 1966.

et $(B - z)^{-1}$ à l'intérieur de ces ensembles résolvants. Ces hypothèses permettent de construire la solution de (1,1) sous la forme

$$u = 1/2\,\pi i \int_\gamma (A - z)^{-1} (B - z)^{-1} f \, dz$$

où γ est un contour d'intégration convenablement choisi. Avec ce procédé, on obtient une construction de couples d'espaces de Banach contenus dans E, tels que $A - B$ soit un isomorphisme de l'un sur l'autre, on utilise pour cela les espaces $D_A(s\,;q)$ (et $D_B(s\,;q)$) « intermédiaires » entre D_A et E, qui ont été étudiés systématiquement dans Grisvard [7], et qui ont été utilisés également par Sobolevskii [13] dans l'étude de certaines équations d'évolution.

Un problème aux limites de type mixte dans un ouvert cylindrique $I \times \Omega$ $(I \subset R_t,\ \Omega \subset R_x^n)$ pour une équation du premier ordre en t, se met de manière évidente sous la forme (1,1), mais cela est possible également pour les équations d'ordre supérieur en t, grâce au classique procédé de la réduction de l'ordre. L'opérateur B est alors la dérivation par rapport à t: $\partial/\partial t$ dans un espace fonctionnel convenable et l'opérateur A est un système différentiel ; on fera sur cet opérateur des hypothèses de « nature elliptique », de manière à pouvoir utiliser certains résultats de la théorie spectrale des opérateurs elliptiques (1) pour déterminer les propriétés spectrales de A.

On obtient ceci : Pour f donné dans un espace fonctionnel convenable F, défini dans $I \times \Omega$, il existe une solution unique du problème (2)

$$\mathcal{A}(x\,; D_x, D_t)\, u = \sum_{k=0}^{l} \mathcal{A}_k(x\,; D_x)\, D_t^k\, u = f,$$

(avec $\mathcal{A}_k$ opérateur d'ordre $\leq 2m(1 - k/l)$) dans $I \times \Omega$, vérifiant certaines conditions aux limites sur la frontière de $I \times \Omega$, u ayant toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre de l'opérateur $\mathcal{A}$ (i. e. l par rapport à t et $2m$ par rapport à x) dans l'espace F. Il est important de remarquer que ce résultat est du même type en ce qui concerne la régularité de la solution obtenue, que celui de Agmon-Douglis-Niremberg [2] dans le cas des équations elliptiques, où F est l'espace $L_p(\Omega)$.

L'espace F que nous utilisons ici est un espace de fonctions vérifiant une condition de Hölder par rapport à t dans $L_q(I\,; L_p(\Omega))$; l'énoncé obtenu

(1) Résultats de Agmon [1], Agmon-Niremberg [3], Agranovič-Višik [4] et une extension de ces résultats démontrée dans l'appendice.

(2) Dans tout ce travail on a $D_t = \partial/\partial t$ et $D_x = (\partial/\partial x_1, \ldots \partial/\partial x_n)$.

ici est une conséquence directe des résultats sur l'équation abstraite (1,1). Le cas — plus compliqué — où $F = L_q(I; L_p(\Omega))$ sera détaillé dans un article ultérieur.

Signalons encore que les conditions aux limites par rapport à t que nous imposons, ne sont pas nécessairement des conditions initiales ; dans le cas où $I =]a, b[$ intervalle fini, on peut imposer des conditions aux limites à la fois pour $t = a$ et $t = b$.

Il serait possible d'étendre les résultats énoncés ici à des systèmes, en partant des travaux sur la théorie spectrale des systèmes elliptiques de Geymonat. Il serait également possible d'utiliser les théorèmes abstraits pour résoudre d'autres types de problèmes, notamment quasi-elliptiques.

Signalons enfin que nous nous sommes limités dans l'étude du problème (1,1) au cas où A et B commutent en un certain sens ; ceci n'est pas indispensable et la même méthode convenablement modifiée peut encore s'appliquer dans d'autres cas. Ce point de vue sera développé ailleurs. Les résultats de ce travail ont été annoncés dans une note aux C. R. [8].

2. Quelques rappels.

2.1 *Sur les opérateurs linéaires « non bornés ».*

Pour A opérateur non borné dans l'espace de Banach E [3], on désigne par D_A le domaine de A. On considérera toujours D_A comme muni de la « norme du graphe ».

$$x \longmapsto |x|_E + |Ax|_E .$$

Lorsque de plus A est fermé, D_A est alors un espace de Banach, on désigne par ϱ_A l'ensemble résolvant de A et par σ_A son spectre.

Dans la suite de ce point 2.1 on considère un opérateur A fermé, tel que ϱ_A contienne l'axe réel négatif ($]-\infty, 0[$) et qui vérifie :

(H) *Il existe* $C_A \in R$, *tel que* $|(A + t)^{-1}|_{E \mapsto E} \leq C_A/t$, *pour* $t > 0$.

A un tel opérateur, on peut associer une famille d'espaces de Banach, selon la

DÉFINITION 2.1 : *Pour* $0 < s < 1$, $1 \leq q \leq +\infty$, *on désigne par* $D_A(s; q)$, *le sous-espace de E formé des x tels que*

$$|x|'_{s,q} = \left(\int_0^{+\infty} |t^s A (A + t)^{-1} x|_E^q \, dt/t\right)^{1/q} < +\infty$$

---

(3) Espace de Banach complexe, de norme $x \mapsto |x|_E$.

c'est un espace de Banach pour la norme

$$x \longmapsto |x|_E + |x|'_{s,q} \text{ (4)}.$$

On peut formellement considérer cet espace comme domaine de la puissance s de l'opérateur A ; ceci est rigoureux lorsque E est de Hilbert, $q = 2$ et A est autoadjoint « positif ».

On utilisera aussi les puissances entières de A définies comme suit pour k entier > 1.

$$D_{A^k} = \{x \in D_A \cdot ; Ax, \dots A^{k-1} x \in D_A\}$$

$$A^k x = \underbrace{A \dots Ax}_{k \text{ fois}} \quad \text{pour } x \in D_{A^k}.$$

2.2 *Sur les espaces de Sobolev.*

Ce point comme le précédent, a surtout pour but de fixer le notations. On utilisera deux sortes d'espaces de Sobolev, soit de fonctions à valeurs scalaires, soit de fonctions à valeurs vectorielles.

Fixons un ouvert $\Omega \subset R^n$ (variable $x = \{x_1, \dots x_n\}$) et un espace de Banach (complexe X). Nous utiliserons les notations suivantes : $L_p(\Omega; X)$ $(1 \leq p < +\infty)$ espace des fonctions mesurables à valeurs dans X, et de « puissance p » sommable pour la mesure de Lebesgue dans Ω (5). $W_p^\sigma(\Omega; X)$ $(1 \leq p < +\infty, 0 < \sigma < 1)$ espace des u dans $L_p(\Omega; X)$ telles que

$$\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|_X^p}{|x - y|^{n+\sigma p}} dx\, dy < +\infty.$$

$W_p^k(\Omega; X)$ $(1 \leq p < +\infty, k \text{ entier} \geq 1)$ espace des u dans $L_p(\Omega; X)$ telles que les dérivées partielles de u jusqu'à l'ordre k soient dans $L_p(\Omega; X)$.
$W_p^s(\Omega; X)$ $(1 \leq p < +\infty, s = k + \sigma; k \text{ entier} \geq 1, 0 < \sigma < 1)$ espace des u dans $W_p^k(\Omega; X)$ telles que $D_x^\alpha u \in W_p^\sigma(\Omega; X)$ pour $|\alpha| = k$ (6) (7).

On peut définir des espaces analogues pour $p = +\infty$ en remplaçant les normes L_p par la norme du maximum, on obtient ainsi les classiques

---

(4) Avec les modifications évidentes lorsque $q = +\infty$.

(5) On notera aussi $W_p^0(\Omega; X)$ au lieu de $L_p(\Omega; X)$.

(6) $\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_n)$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, α_i entiers, $D_x^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

(7) on notera $W_p^s(\Omega) = W_p^s(\Omega; C)$.

espaces de Hölder. Pour V variété compacte m fois différentiable, de dimension n, on définit facilement $W_p^s(V;X)\,(0\leq s\leq m)$ par cartes locales, à partir de l'espace $\dot{W}_p^s(R^n;X)$. Ceci permet d'énoncer un théorème de traces: On suppose que Ω vérifie (C^m) *Ω est un ouvert borné de R^n; sa frontière Γ est une variété m fois différentiable, de dimension $n-1$, plongée dans R^n, Ω étant d'un seul côté de Γ.*

On peut alors définir une normale à Γ intérieure à Ω, notée ν et une opération (dérivation normale à Γ)

$$u \longmapsto \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}$$

qui à $u\in C^k(\bar{\Omega};X)$ fait correspondre $\dfrac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\in C^{k-j}(\Gamma;X)$ (8) $(k\leq m,\ 0\leq j\leq k)$; on a le

THÉORÈME : *L'opération* $u\longmapsto\left\{\dfrac{\partial^j u}{\partial\nu^j}\right\}_{j=0}^k$, *qui est définie pour* $u\in C^m(\bar{\Omega};X)$ *se prolonge par continuité en un opérateur linéaire continu surjectif de*

$$W_p^s(\Omega;X)\ \textit{sur}\ \prod_{j=0}^{k} W_p^{s-j-1/p}(\Gamma;X)$$

pour k entier, $0\leq k<s-1/p$, $1<p<+\infty$, $s-1/p$ non entier, $1/p<s\leq m$.

On désignera par $\overset{\circ}{W}{}_p^s(\Omega;X)$ le noyau de $u\longmapsto\left\{\dfrac{\partial^j u}{\partial\nu^j}\right\}_{j=0}^k$ avec k partie entière de $s-1/p$.

2.3 *Sur l'interpolation.*

L'interpolation est pour nous un outil commode (9) pour expliciter les espaces $D_A(s;q)$ dans les cas concrets; en particulier lorsque D_A est un sous-espace fermé d'un espace $W_p^s(\Omega;X)$ défini par des conditions aux limites, cas qui se présentera dans la suite.

On fixe un couple X, Y d'espaces de Banach avec $X\subset Y$ (l'injection de X dans Y étant continue); à un tel couple on peut associer une famille d'espaces de Banach selon la

---

(8) $C^k(\bar{\Omega}:X)$ est l'espace des fonctions k fois différentiables définies dans $\bar{\Omega}$, à valeurs dans X; signification analogue pour $C^{k-j}(\Gamma;X)$; $C^k(\bar{\Omega};X)$ est dense dans $W_p^k(\Omega;X)$, $1<p<+\infty$.

(9) mais pas indispensable.

DÉFINITION 2.2 : *Pour $0<\theta<1$, $1\leq q\leq+\infty$, on désigne par $(X;Y)_{\theta,q}$ le sous-espace de Y formé des x qui peuvent s'écrire sous la forme*

$$x=\int_0^{+\infty} u(t)\,dt/t \tag{2,1}$$

avec $t\longmapsto u(t)$ fonction mesurable à valeurs dans X, telle que

$$N_{\theta,q}(u)=\Big(\int_0^{+\infty}|t^\theta u(t)|_X^q\,dt/t\Big)^{1/q}+\Big(\int_0^{+\infty}|t^{\theta-1}u(t)|_Y^q\,dt/t\Big)^{1/q}<+\infty\,;$$

c'est un espace de Banach pour la norme

$$x\longmapsto \text{Inf. } N_{\theta,q}(u)$$

le Inf. étant pris par rapport à l'ensemble des u qui vérifient (2,1).

Ces espaces ont été étudiés systématiquement dans [11]; pour nous les deux résultats suivants sont importants :

THÉORÈME 2.2 : *Si A vérifie l'hypothèse (H) on a l'identité*

$$(D_A\,,E)_{\theta,q}=D_A(s\,;q)$$

avec $s=1-\theta$.

Ce théorème est démontré dans [7].

THÉORÈME 2.3 : *Si Ω vérifie l'hypothèse (C^m) on a les identités*

$$(W_p^k(\Omega\,;X),\ W_p^0(\Omega\,;X))_{\theta,p}=W_p^{k(1-\theta)}(\Omega\,;X) \tag{2,2}$$

pour k entier, $0\leq k\leq m$, $0<\theta<1$, $k(1-\theta)$ non entier et $1<p<+\infty$

$$(\mathring{W}_p^k(\Omega\,;X),\ W_p^0(\Omega\,;X))_{\theta,p}=\mathring{W}_p^{k(1-\theta)}(\Omega\,;X) \tag{2,3}$$

pour k entier, $0\leq k\leq m$, $0<\theta<1$, $k(1-\theta)$ non entier, $k(1-\theta)-1/p$ non entier et $1<p<+\infty$.

Ce théorème est démontré dans [10].

3. Un théorème d'isomorphisme pour les équations abstraites.

3.1 *Enoncé du théorème.*

3.1.1 La situation est la suivante : On donne un espace de Banach (complexe) E et deux opérateurs A et B fermés, non bornés dans E ; on fixe F sous-espace vectoriel fermé [10] dans E et k entier ≥ 1 et on fait les hypothèses suivantes :

(i) *L'origine et le secteur* $\{z\,;\,|\arg. z| < \theta_A\}$ $(0 < \theta_A \leq \pi)$ *sont dans* ϱ_A, *et pour tout* θ *avec* $|\theta| < \theta_A$, *il existe une constante* $C_A(\theta)$ *telle que*

$$|(A - z)^{-1}|_{E \to E} \leq C_A(\theta)\,(1 + |z|^{k-2}) \tag{3,1}$$

$$|(A - z)^{-1}|_{F \to E} \leq C_A(\theta)\,|z|^{-1} \tag{3,2}$$

pour $\arg. z = \theta$.

(ii) *Le secteur* $\{z\,;\,\theta_B < \arg. z < 2\pi - \theta_B\}$ $(0 \leq \theta_B < \theta_A)$ *est dans* ϱ_B, *et pour* θ *avec* $\theta_B < \theta < 2\pi - \theta_B$, *il existe une constante* $C_B(\theta)$ *telle que*

$$|(B - z)^{-1}|_{E \to E} \leq C_B(\theta)\,|z|^{-1} \tag{3,3}$$

pour $\arg. z = \theta$. *De plus on a*

$$\begin{aligned} &B(D_B \cap F) \subset F \\ &(B - z)^{-1} F \subset F \end{aligned} \tag{3,4}$$

pour $\arg. z = \theta$.

(iii) *Les opérateurs* (*continus*) $(A - z)^{-1}$ *et* $(B - y)^{-1}$ *commutent entre eux pour tout* $z \in \varrho_A$ *et tout* $y \in \varrho_B$.

Il suffit évidemment pour cela qu'il commutent pour un $z \in \varrho_A$ et un $y \in \varrho_B$.

3.1.2. Notre but est le suivant : Pour f donné dans F, trouver $u \in D_A \cap D_B$ solution de

$$Au - Bu = f. \tag{3,5}$$

Nos hypothèses sont suffisantes pour assurer l'unicité de la solution si elle existe :

THÉORÈME 3.1 : *Sous les hypothèses* (i), (ii), *et* (iii), *le problème*

$$u \in D_A \cap D_B\,,\ Au = Bu$$

a pour seule solution $u = 0$.

Pour obtenir l'existence, il faut une hypothèse supplémentaire de régularité sur f et une hypothèse de densité. On fixe s et q avec $0 < s < 1$, $1 \leq q \leq +\infty$:

---

[10] F a ici une signification différente de celle qu'il avait dans l'Introduction.

Théorème 3.2 : *Sous les hypothèses* (i), (ii), (iii) *et*

(iv) $D_{A^k} \cap D_{B^k} \cap F$ *est dense dans* $D_B(s, q) \cap F$,

alors il existe un opérateur S *linéaire continu de* $D_B(s, q) \cap F$ *dans* $D_A \cap D_B$, *tel que*

1) AS *et* BS *sont linéaires continus de* $D_B(s\,; q) \cap F$ *dans* $D_B(s\,; q)$.

2) $ASf - BSf = f$, *pour* $f \in D_B(s\,; q) \cap F$.

Pour les applications, il pourra être plus commode d'exprimer ces deux résultats sous la forme suivante : On désigne par $W(s\,; q)$ le sous-espace de $D_A \cap D_B$ formé des u tels que

$$Au, Bu \in D_B(s\,; q) \quad \text{et} \quad Au - Bu \in F\,;$$

c'est un espace de Banach pour la norme

$$u \mapsto |u|_E + |Au|_E + |Bu|_E + |Au|'_{s,q} + |Bu|'_{s,q}$$

ceci posé, *sous les hypothèses* (i) *à* (iv), $A - B$ *est un isomorphisme de* $W(s\,;q)$ *sur* $D_B(s\,; q) \cap F$, d'inverse S.

3.1.3. La démonstration des théorèmes 3.1 et 3.2 repose sur une construction explicite de l'opérateur S, que nous allons indiquer à présent : Fixons θ_0 avec $\theta_B < \theta_0 < \theta_A$; alors d'après les hypothèses (i) et (ii) les rayons $\{z; z \neq 0, \arg.z = \pm\,\theta_0\}$ sont contenus en entier dans $\varrho_A \cap \varrho_B$. Comme A est inversible et ϱ_A est ouvert, ϱ_A contient un voisinage de 0 dans C; par conséquent il existe $r_A > 0$ tel que ϱ_A contienne le disque $\{z; |z| < r_A\}$; fixons r_0 avec $0 < r_0 < r_A$; nous désignerons par γ le contour formé des arcs suivants

$$\gamma_1 = \{|z| \geq r_0\,; \arg.z = \theta_0\}$$

$$\gamma_2 = \{|z| \geq r_0\,; \arg.z = -\,\theta_0\}$$

$$\gamma_3 = \{|z| = r_0\,; \theta_0 \leq \arg.z \leq 2\pi - \theta_0\}\,.$$

On choisit sur γ l'orientation telle que l'origine soit à « l'extérieur » de γ. Le contour ainsi construit est contenu en entier dans $\varrho_A \cap \varrho_B$; σ_A est à l'intérieur de γ et σ_B est à l'extérieur de γ. La fonction

$$z \mapsto (A - z)^{-1}(B - z)^{-1}$$

est holomorphe à valeurs dan $\mathcal{L}(E, E)$ (11) dans un voisinage de γ ; de plus

(11) De manière générale si X et Y sont deux espaces de Banach, on désigne par $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y.

comme fonction à valeurs dans $\mathcal{L}(F, E)$, elle admet sur γ une majoration en $|z|^{-2}$ lorsque $|z| \to +\infty$. Nous pouvons donc définir S par l'identité

$$(3,6) \qquad Sf = (1/2\pi i) \int_\gamma (A - z)^{-1} (B - z)^{-1} f \, dz$$

ponr $f \in F$ et il est évident que S est lineaire continu de F dans E.

3.2. *Quelques lemmes.*

3.2.1.

LEMME 3.1 : *Soit B un opérateur linéaire, non borné, fermé dans E; alors pour $z \in \varrho_B$, n entier ≥ 1 et $f \in D_{B^n}$, on a l'identité*

$$(3,7) \qquad (B - z)^{-1} f = z^{-n} (B - z)^{-1} B^n f - \sum_{l=0}^{n-1} z^{-l-1} B^l f.$$

Démonstration: Elle se fait par récurrence sur n; lorsque $n = 1$, c'est l'identité suivante (évidente) pour $f \in D_B$

$$(3,8) \qquad (B - z)^{-1} f = z^{-1} (B - z)^{-1} Bf - z^{-1} f.$$

Si on suppose (3,7) vraie avec n remplacé par $n - 1$, on a

$$(B - z)^{-1} f = z^{-n+1} (B - z)^{-1} B^{n-1} f - \sum_{l=0}^{n-2} z^{-l-1} B^l f$$

mais d'après (3,8) où f est remplacé par $B^{n-1} f$, on a

$$(B - z)^{-1} B^{n-1} f = z^{-1} (B - z)^{-1} B^n f - z^{-1} B^{n-1} f$$

d'où (3,7).

3.2.2.

LEMME 3.2: *Soit un opérateur linéaire B, non borné, fermé dans E et vérifiant l'hypothèse* (ii); *alors pour tout θ avec $\theta_B < \theta < 2\pi - \theta_B$, il existe une constante $C(\theta)$ telle que*

$$\left(\int_0^{+\infty} | t^s B (B - te^{i\theta})^{-1} f |_E^q \, dt/t \right)^{1/q} \leq C(\theta) \, |f|'_{s,q}$$

pour tout $f \in D_B(s; q)$.

Démonstration : Il suffit d'écrire

$$t^s B(B-te^{i\theta})^{-1}f = B(B-te^{i\theta})^{-1}\, t^s B(B+t)^{-1}f + t(B-te^{i\theta})^{-1}\, t^s B(B+t)^{-1}f$$

d'où

$$|\, t^s B(B-te^{i\theta})^{-1} f\,|_E \leq (2C_B(\theta)+1)\,|\, t^s B(B+t)^{-1} f\,|_E\,;$$

ceci prouve le lemme et donne même une estimation de $C(\theta)$.

3.2.3

LEMME 3.3 : *Pour* $f \in F$ *et sous les hypothèses* (i), (ii) *et* (iii) *on a*

$$B(B+t)^{-1}\, Sf = (1/2\pi i)\int_\gamma z(z+t)^{-1}(A-z)^{-1}(B-z)^{-1} f\, dz$$

pour $t > r_0$ (r_0 défini en 3.1.3).

Démonstration : On désigne par γ' un contour qui joint $\infty e^{i(2\pi-\theta_0)}$ à $\infty e^{i\theta_0}$ en demeurant dans $\varrho_A \cap \varrho_B$ et à l'extérieur de γ, tel que σ_B soit à l'extérieur de γ' et σ_A à l'intérieur. On a

$$(B+t)^{-1} = (1/2\pi i)\int_{\gamma'} (y+t)^{-1}(B-y)^{-1}\, dy$$

d'où

$$(B+t)^{-1}\, Sf = (1/2\pi i)^2 \int_{\gamma'}\int_\gamma (y+t)^{-1}(B-y)^{-1}(A-z)^{-1}(B-z)^{-1} f\, dz\, dy\,.$$

Utilisant l'identité de la résolvante pour B et l'hypothèse (iii) on en déduit

$(B+t)^{-1}\, Sf =$

$$(1/2\pi i)^2 \int_\gamma\int_{\gamma'} (y+t)^{-1}(z-y)^{-1}\{(B-z)^{-1}-(B-y)^{-1}\}(A-z)^{-1} f\, dy\, dz =$$

$$(1/2\pi i)\int_\gamma \Big\{(1/2\pi i)\int_{\gamma'} (y+t)^{-1}(z-y)^{-1}\, dy\Big\}(B-z)^{-1}(A-z)^{-1} f\, dz \,-$$

$$(1/2\pi i)\int_\gamma \Big\{(1/2\pi i)\int_{\gamma'} (y+t)^{-1}(z-y)^{-1}(B-y)^{-1}\, dy\Big\}(A-z)^{-1} f\, dz =$$

$$- (1/2\pi i) \int_\gamma (z + t)^{-1} \{(B + t)^{-1} - (B - z)^{-1}\} (A - z)^{-1} f \, dz =$$

$$(1/2\pi i) \int_\gamma (z + t)^{-1} (B - z)^{-1} (A - z)^{-1} f \, dz \, .$$

Pour calculer $B(B + t)^{-1} Sf$ on écrit

$$B(B + t)^{-1} Sf = Sf - t(B + t)^{-1} Sf =$$

$$(1/2\pi i) \int_\gamma \{1 - t(z + t)^{-1}\} (A - z)^{-1} (B - z)^{-1} f \, dz =$$

$$(1/2\pi i) \int_\gamma z(z + t)^{-1} (A - z)^{-1} (B - z)^{-1} f \, dz.$$

3.2.4

LEMME 3.4 : *Soient A et B deux opérateurs fermés non bornés dans E, de résolvantes non vides et vérifiant* (iii) *; alors pour tout $z \in \varrho_B$ $(B - z)^{-1}$ est un opérateur linéaire continu de D_A dans lui-même et on a l'identité*

$$A(B - z)^{-1} x = (B - z)^{-1} Ax$$

pour tout $x \in D_A$.

Démonstration : On fixe $x \in D_A$, $y \in \varrho_A$ et on pose

$$\xi = Ax - yx$$

on a par hypothèse

$$(B - z)^{-1} x = (B - z)^{-1} (A - y)^{-1} \xi = (A - y)^{-1} (B - z)^{-1} \xi,$$

donc $(B - z)^{-1} x \in D_A$ et

$$A(B - z)^{-1} x = A(A - y)^{-1} (B - z)^{-1} \xi = (B - z)^{-1} \xi + y(A - y)^{-1} (B - z)^{-1} \xi =$$

$$(B - z)^{-1} (Ax - yx) + y(A - y)^{-1} (B - z)^{-1} (Ax - yx) = (B - z)^{-1} Ax \, ;$$

on a ainsi tout prouvé sauf la continuité de $(B - z)^{-1}$ comme opérateur dans D_A ; pour cela on écrit :

$$|(B - z)^{-1} x|_{D_A} = |(B - z)^{-1} x|_E + |A(B - z)^{-1} x|_E \leq$$

$$|(B - z)^{-1}|_{E \to E} (|x|_E + |Ax|_E) = |(B - z)^{-1}|_{E \to E} |x|_{D_A} \, .$$

3.3 *Démonstration des théorèmes* 3.1 *et* 3.2.

3.3.1 La démonstration du théorème 3.1 se fait en deux étapes. Dans la première étape on montre que pour $v \in D_{A^k} \cap D_{B^k}$, tel que $Av - Bv \in F$, on a

$$v = S(Av - Bv).$$

En effet on a

$$S(Av - Bv) = (1/2\pi i) \int_\gamma u(z)\, dz$$

avec

$$u(z) = (A - z)^{-1} (B - z)^{-1} (Av - Bv) = (B - z)^{-1} v - (A - z)^{-1} v$$

et d'après le lemme 3.1, c'est encore

$$z^{-k} \{(B - z)^{-1} B^k v - (A - z)^{-1} A^k v\} + \sum_{l=1}^{k-1} z^{-l-1} \{A^l v - B^l v\}$$

et par conséquent on a

$$S(Av - Bv) =$$

$$- \left\{(1/2\pi i) \int_\gamma (A - z)^{-1} z^{-k} dz\right\} A^k v + \left\{(1/2\pi i) \int_\gamma (B - z)^{-1} z^{-k}\, dz\right\} B^k v$$

$$+ \sum_{l=1}^{k-1} \left\{(1/2\pi i) \int_\gamma z^{-l-1}\, dz\right\} (A^l v - B^l v);$$

on remarque que la seconde intégrale converge grâce à (3,1) et par ailleurs on a

$$\int_\gamma (B - z)^{-1} z^{-k}\, dz = 0$$

d'où

$$S(Av - Bv) = (1/2\pi i) \int_C (A - z)^{-1} A^k v\, z^{-k}\, dz$$

où C est un cercle centré à l'origine, de rayon $< r_0$ et orienté dans le sens direct ; c'est encore

$$\frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (A - z)^{-1} A^k v\, |_{z=0} = (A - z)^{-k} A^k v\, |_{z=0} = v\,.$$

La seconde étape consiste à montrer par approximation que pour $u \in D_A \cap D_B$ tel que $Au - Bu = 0$, on a $u = 0$: Pour cela on construit une suite $u_n \in D_{A^k} \cap D_{B^k}$ telle que $Au_n - Bu_n = 0$ (donc $\in F$) et que $u_n \to u$ dans E lorsque $n \to +\infty$; d'après la première étape de la démonstration on aura

$$u_n = S\,(Au_n - Bu_n) = 0$$

donc $u = \lim. 0 = 0$, et le théorème sera démontré.

On peut prendre pour u_n l'élément

$$n^{k-1}\,(B + n)^{-k+1}\,u.$$

Comme $u \in D_A \cap D_B$ on a aussi d'après le lemme 3.4 $u_n \in D_A \cap B_B$ et

$$Au_n - Bu_n = n^{k-1}\,(B + n)^{-k+1}\,(Au - Bu) = 0\,;$$

ensuite pour voir que $u_n \to u$, on écrit

$$n\,(B + n)^{-1} = 1 - B\,(B + n)^{-1}$$

d'où

$$u_n = \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-l}{l} \{ - B\,(B + n)^{-1} \}^l\, u = u + \sum_{l=1}^{k-1} \binom{k-1}{l} (-1)^l\, B^{l-1}\,(B + n)^{-l} Bu$$

donc

$$|\, u_n - u\,|_E \leq \sum_{l=1}^{k-1} \binom{k-1}{l} [C_B\,(\pi) + 1]^{l-1}\; C_B\,(\pi)\,(1/n)\,|\, Bu\,|_E = K\,(1/n)\,|\, Bu\,|_E$$

ce qui prouve que $u_n \to u$ dans E lorsque $n \to +\infty$. Il est évident que $u_n \in D_{B^k}$, il reste donc à vérifier que $u_n \in D_{A^k}$; pour cela il suffit de voir par récurrence sur $l = 0, \ldots k-1$, que $u_n \in D_{A^l}$, et que

$$A^l\,u_n = n^{k-1}\,[1 - n\,(B - n)^{-1}]^l\,(B + n)^{-k+l+1}\,u$$

en utilisant l'identité $Bu = Au$ et le lemme 4.1.

Le théorème 3.1 est complétement démontré.

3.3.2 La démonstration du théorème 3.2 se fait en trois parties.

a) Pour commencer on va voir que lorsque $f \in D_{A^k} \cap D_{B^k} \cap F$, on a $u = Sf \in D_A \cap D_B$ et $Au - Bu = f$.

D'abord il est évident que $u \in D_B$, car la fonction

$$B\,(A - z)^{-1}\,(B - z)^{-1} f = (A - z)^{-1}\,(B - z)^{-1}\,Bf$$

admet sur γ une majoration en $|z|^{-2}$, grâce à (3,2) et (3,4) (car $(B-z)^{-1}Bf \in F$). Pour voir que $u \in D_A$, on approche u par

$$u_n = (1/2\pi i)\int_{\gamma_n} u(z)\,dz$$

avec $\gamma_n = \gamma \cap \{z\,;\,|z| \leq n\}$, $u(z) = (A-z)^{-1}(B-z)^{-1}f$; grâce au lemme 3.1 et à l'hypothèse (iii) on a $u(z) \in D_A$ et

$$Au(z) = Bu(z) + z^{-k}\{(B-z)^{-1}B^k f - (A-z)^{-1}A^k f\} + \sum_{l=1}^{k-1} z^{-l-1}\{A^l f - B^l f\}$$

par conséquent on a $u_n \in D_A$ et

$$Au_n = (1/2\pi i)\int_{\gamma_n} Au(z)\,dz \longrightarrow$$

$$(1/2\pi i)\int_{\gamma} Bu(z)\,dz + (1/2\,\pi i)\int_{\gamma}(B-z)^{-1}B^k f z^{-k}\,dz - (1/2\pi i)\int_{\gamma}(A-z)^{-1}A^k f z^{-k}\,dz$$

$$+\sum_{l=1}^{k-1}(1/2\pi i)\int_{\gamma} z^{-l-1}\,dz\,\{A^l f - B^l f\} =$$

$$Bu - (1/2\pi i)\int_{\gamma}(A-z)^{-1}A^k f z^{-k}\,dz = Bu + f$$

lorsque $n \longrightarrow +\infty$ (comme en (3.3.1). En résumé on a donc $u_n \in D_A$, $u_n \longrightarrow u$, $Au_n \longrightarrow Bu + f$ dans E, lorsque $n \longrightarrow +\infty$; comme A est fermé, cela prouve que $u \in D_A$ et $Au = Bu + f$.

b) On considère à présent $f \in D_B(s\,;\,q) \cap F$; on vérifie pour commencer que $u = Sf \in D_B$; B étant fermé il suffit de voir que

$$z \longrightarrow B(A-z)^{-1}(B-z)^{-1}f = (A-z)^{-1}B(B-z)^{-1}f$$

est intégrable sur γ. Comme $f \in F$, donc aussi $B(B-z)^{-1}f \in F$, on a

$$|(A-z)^{-1}B(B-z)^{-1}f|_E \leq C_A(\theta)\,|z|^{-1}\,|B(B-z)^{-1}f|_E$$

pour $\arg.z = \theta\,(\theta_B < |\theta| < \theta_A)$; et par conséquent on a

$$\int\limits_{\gamma \cap \{z\,;\,|z| \geq r_0\}} |(A-z)^{-1} B(B-z)^{-1} f|_E \, |dz| \leq$$

$$C_A(\theta_0) \int\limits_{r_0}^{+\infty} |B(B-te^{i\theta_0})^{-1} f|_E \, dt/t + C_A(-\theta_0) \int\limits_{r_0}^{+\infty} |B(B-te^{-i\theta_0})^{-1} f|_E \, dt/t$$

$$\leq \Bigg\{ C_A(\theta_0) \left(\int\limits_0^{+\infty} |t^s B(B-te^{i\theta_0})^{-1} f|_E^q \, dt/t \right)^{1/q}$$

$$+ C_A(-\theta_0) \left(\int\limits_0^{+\infty} |t^s B(B-te^{-i\theta_0})^{-1} f|_E^q \, dt/t \right)^{1/q} \Bigg\} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{r_0}^{+\infty} t^{-sq'} \, dt/t \right\}^{1/q'} \leq K |f|'_{s,q} < +\infty$$

grâce au lemme 3.2. On a donc $u \in D_B$ et de plus il existe une constante C_0 telle que

$$|u|_{D_B} \leq C_0 |f|_{D_B(s\,;\,q)} .$$

Maintenant, il faut voir que $Bu \in D_B(s\,;\,q)$; d'après le lemme 3.3 on a

$$B(B+t)^{-1} Sf = (1/2\pi i) \int\limits_{\gamma} z(z+t)^{-1} (A-z)^{-1} (B-z)^{-1} f \, dz$$

d'où

$$B(B+t)^{-1} Bu = (1/2\pi i) \int\limits_{\gamma} z(z+t)^{-1} (A-z)^{-1} B(B-z)^{-1} f \, dz \,;$$

comme $z(A-z)^{-1} B(B-z)^{-1} f$ reste borné lorsque $z \to 0$ $(\theta_0 \leq \arg.z \leq 2\pi - \theta_0)$, on peut déformer le contour d'intégration pour intégrer sur

$$\Gamma = \{z\,;\,\arg.z = -\theta_0\} \cup \{z\,;\,\arg.z = +\theta_0\} \,;$$

on a donc

$$|B(B+t)^{-1} Bu|_E \leq C_A(\theta_0)/2\pi \int\limits_0^{+\infty} r\,|re^{i\theta_0} + t|^{-1} \, |B(B-re^{i\theta_0})^{-1} f|_E \, dr/r$$

$$+ C_A(-\theta_0)/2\pi) \int_0^{+\infty} r\,|\,re^{-i\theta_0} + t\,|^{-1}\,|\,B(B - re^{-i\theta_0})^{-1} f\,|_E\, dr/r \leq$$

$$C_1 \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{r}\right)^{-1} |\,B(B - re^{i\theta_0})^{-1} f\,|_E\, dr/r + C_1 \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{r}\right)^{-1} |\,B(B - re^{-i\theta_0})^{-1} f\,|_E\, dr/r;$$

pour étudier ces intégrales, on les considère comme des produits de composition sur le groupe multiplicatif $R_+ =]\,0, +\infty\,[$, avec la mesure de Haar $r \longrightarrow dr/r$; on obtient ainsi :

$$\left(\int_0^{+\infty} |\,t^s B(B + t)^{-1} Bu\,|_E^q\, dt/t\right)^{1/q} \leq$$

$$C_1 \left(\int_0^{+\infty} t^s (1 + t)^{-1}\, dt/t\right) \left\{ \left(\int_0^{+\infty} |\,t^s B(B - te^{i\theta_0})^{-1} f\,|_E^q\, dt/t\right)^{1/q} \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^{+\infty} |\,t^s B(B - te^{-i\theta_0})^{-1} f\,|_E^q\, dt/t\right)^{1/q} \right\} \leq C_2\,|\,f\,|'_{s\,;\,q}$$

grâce au lemme 3.1 et à l'inégalité $0 < s < 1$; ceci prouve que $Bu \in D_B(s;q)$, mais aussi que $f \longrightarrow Bu$ est linéaire continu de $D_B(s\,;q)$ dans lui-même.

c) Maintenant en supposant toujours que $f \in D_B(s\,;q) \cap F$ et pour prouver que $Au \in D_B(s, q)$, on utilise l'hypothèse (iv) : Soit $f_n \in D_{A^k} \cap D_{B^k} \cap F$ une suite telle que

$$f_n \longrightarrow f$$

dans $D_B(s\,;q)$; on pose $u = Sf$ et $u_n = Sf_n$. D'après les parties a) et b) de cette démonstration, on sait que

$$u_n \in D_A \cap D_B\,,\ Au_n - Bu_n = f_n$$

$$u \in D_B\,,\ Bu \in D_B(s\,;q),\ Bu_n \longrightarrow Bu \text{ dans } E,$$

et il est évident que $u_n \longrightarrow u$ dans E ; on en déduit que

$$Au_n \longrightarrow f + Bu$$

dans E et par conséquent comme A est fermé, on a

$$u \in D_A\,,\ Au = f + Bu$$

donc aussi $Au \in D_B(s\,;q)$; de plus d'après le point b) $f \longrightarrow f + Bu$ est linéaire continu de $D_B(s, q)$ dans lui-même ; on a donc démontré à la fois les affirmations 1) et 2) du théorème 3.2.

3.4 *Extensions des résultats précédents.*

3.4.1 Il est clair d'après les démonstrations, que S a les propriétés voulues pourvu que l'on puisse choisir un contour γ qui sépare σ_A et σ_B et sur lequel les fonctions

$$z \longrightarrow (A - z)^{-1} \quad \text{et} \quad z \longrightarrow (B - z)^{-1}$$

commutent et ont des propriétés de décroissance convenables.

Par exemple les théorèmes 3.1 et 3.2 sont encore vrais si on remplace (i) et (ii) par les hypothèses (i)′ et (ii)′ ci-après :

(i)′ *L'origine et les secteurs* $\{z\,;\theta_A''(i) < \arg.z < \theta_A'(i+1)\}$, $i = 1, \dots l$ *sont dans* ϱ_A, *et pour tout* θ *avec* $\theta_A''(i) < \theta < \theta_A'(i+1)$, *pour un i, il existe une constante* $C_A(\theta)$ *telle que* (3,1) *et* (3,2) *aient lieu pour* $\arg.z = \theta$.

(ii)′ *Les secteurs* $\{z\,;\theta_B'(i) < \arg.z < \theta_B''(i)\}$, $i = 1, \dots l$ *sont dans* ϱ_B *et pour tout* θ *avec* $\theta_B'(i) < \theta < \theta_B''(i)$, *pour un i, il existe une constante* $C_B(\theta)$ *telle que* (3,3) *ait lieu pour* $\arg.z = \theta$, *et de plus on a* (3,4).

Ici les nombres θ sont supposés tels que

$$\theta_A'(i) \leq \theta_A''(i) < \theta_B''(i) \leq \theta_B'(i+1) < \theta_A'(i+1),\ i = 1, \dots l\ ({}^{12}).$$

3.4.2 On peut également utiliser les théorèmes 3.1 et 3.2 sous les hypothèses (i) à (iii) modifiées comme suit : On ne suppose pas que $0 \in \varrho_A$, mais on suppose que $0 \in \varrho_B$.

Nous terminerons ce n⁰ par la

REMARQUE 3.1 : Lorsque $F = E$ (et donc $k = 1$) et $q < +\infty$, l'hypothèse (iv) du théorème 3.2 peut être remplacée par l'hypothèse plus simple

(iv)′ D_A *est dense dans* E.

Il suffit de voir que (iv)′ implique (iv), c'est à dire la densité de $D_A \cap D_B$ dans $D_B(s, q)$; en fait comme D_B est dense dans $D_B(s\,;q)$ pour $q < +\infty$ c.f. [7], il suffit même de voir que $D_A \cap D_B$ est dense dans D_B. Pour cela on fixe $x \in D_B$ et on vérifie que

$$x_n = - n (A - n)^{-1} x$$

est une suite de $D_A \cap D_B$ qui approche x dans D_B lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

---

(12) On pose $\theta_A'(l+1) = \theta_A'(1)$, $\theta_B'(l+1) = \theta_B'(1)$.

Il est évident que $x_n \in D_A$, et le lemme 3.4 montre que $x_n \in D_B$ et

$$Bx_n = -n(A-n)^{-1} Bx ;$$

on va voir que $x_n \longrightarrow x$ et que $Bx_n \longrightarrow Bx$ dans E, lorsque $n \longrightarrow +\infty$, ce qui résulte du fait général (et classique) suivant

$$-n(A-n)^{-1} y \longrightarrow y$$

dans E, lorsque $n \longrightarrow +\infty$ et $y \in E$ [13].

4. Application aux problemes aux limites dans un ouvert cylindrique.

4.1 *Position du problème.*

4.1.1 On se place dans un ouvert Ω de R^n vérifiant l'hypothèse (C^{2m}) de 2.2. Soit

$$\mathcal{A}(x ; \xi, q) = \sum_{k=0}^{l} \mathcal{A}_k(x ; \xi) q^k \qquad (\mathcal{A}_l = 1)$$

une fonction qui pour chaque $x \in \overline{\Omega}$ est un polynôme en $\xi \in C^n$ et $q \in C$, et soit

$$\mathcal{B}_j(x ; \xi, q) = \sum_{k=0}^{l-1} \mathcal{B}_{j,k}(x ; \xi) q^k$$

une famille de m fonctions ($j = 1, \dots m$) qui pour chaque $x \in \overline{\Omega}$ sont des polynômes en ξ et q.

On va étudier les problèmes aux limites (qui seront posés dans un sens précis plus loin) pour l'équation

$$\mathcal{A}(x ; D_x, D_t) u = f \quad \text{dans } I \times \Omega \tag{4,1}$$

où $I =]a, b[$, intervalle en la variable t (a fini ou $= -\infty$, b fini ou $= +\infty$, $a < b$). Les conditions aux limites seront les suivantes :

$$\mathcal{B}_j(x ; D_x, D_t) u = 0 \quad \text{sur } I \times \Gamma, j = 1, \dots m \tag{4,1)'$$

---

[13] C'est une conséquence de la densité de D_A dans E et du théorème de Banach-Steinhaus.

et de plus pour $k = 0, \dots l-1$, on imposera *l'une* des conditions suivantes :

$$(4,1)'' \qquad \begin{cases} D_t^k u(a, x) = 0 \text{ si } a \text{ est fini} \\ \text{aucune condition si } a \text{ est infini} \end{cases}$$

$$(4,1)''' \qquad \begin{cases} D_t^k u(b, x) = 0 \text{ si } b \text{ est fini} \\ \text{aucune condition si } b \text{ est infini.} \end{cases}$$

4.1.2. Il sera plus commode d'exprimer les conditions $(4,1)''$ et $(4,1)'''$ en introduisant une famille $\varepsilon_0, \dots \varepsilon_{l-1}$ de l nombres prenant soit la valeur $+1$ soit la valeur -1 ; on peut alors reécrire les conditions (4,1) à $(4,1)'''$ sous la forme

$$(4.2) \qquad \begin{cases} \mathcal{A}(x\,; D_x, D_t)\, u = f \text{ dans } I \times \Omega \\ \mathcal{B}_j(x\,; D_x, D_t)\, u = 0 \text{ sur } I \times \Gamma, j = 1, \dots m \\ (1 + \varepsilon_k)\, D_t^k u(a\,; x) = 0 \text{ dans } \Omega,\ k = 0, \dots l-1, \text{ si } a > -\infty \\ (1 - \varepsilon_k)\, D_t^k u(b\,; x) = 0 \text{ dans } \Omega,\ k = 0, \dots l-1, \text{ si } b < +\infty\ ^{(14)}. \end{cases}$$

4.1.3 On précise maintenant les classes de fonctions auxquelles f et u doivent appartenir. Pour commencer il faut quelque hypothèses sur $\mathcal{A}$ et les $\mathcal{B}_j$. On pose $d = 2m/l$ et *on suppose que d est entier*; on suppose en plus que

(E_1) *$\mathcal{A}(x\,; \xi, q^d)$ est un polynôme d'ordre $2m$ en ξ et q et par conséquent $\mathcal{A}_k(x, \xi)$ est un polynôme d'ordre $\leq 2m - kd$ en ξ, $k = 0, \dots l$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$.*

(E_2) *Les coefficients du polynôme $\mathcal{A}(x\,; \xi, q^d)$ sont des fonctions mesurables et bornées dans $\overline{\Omega}$; les coefficients de la partie homogène d'ordre $2m$, étant de plus continus dans $\overline{\Omega}$.*

(F_1) *$\mathcal{B}_j(x\,; \xi, q^d)$ est un polynôme d'ordre m_j en ξ et q ($m_j \leq 2m - 1$), et par conséquent $\mathcal{B}_{j,k}(x\,; \xi)$ est un polynôme d'ordre $m_j - kd$, $k = 0, \dots l-1$, $j = 1, \dots m$* (i. e. nul pour $kd > m_j$), *pour tout $x \in \overline{\Omega}$.*

(F_2) *Les coefficients du polynôme $\mathcal{B}_j(x\,; \xi, q^d)$ sont des fonctions $2m - m_j$ fois continûment dérivables dans $\overline{\Omega}$, $j = 1, \dots m$.*

Dans ces conditions, cela a un sens de chercher à résoudre le problème (4,2) en se donnant

$$(4,3) \qquad f \in L_q(I\,; L_p(\Omega))$$

---

(14) Lorsque $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \dots \varepsilon_{l-1} = +1$ et $a > -\infty$, c'est un problème de Cauchy.

et en cherchant

$$(4,4) \qquad u \in \bigcap_{j=0}^{l} W_q^j(I;\, W_p^{2m-jd}(\Omega))$$

avec $1 < p < +\infty$, $1 \leq q < +\infty$.

4.1.4 Pour pouvoir appliquer la théorie du n⁰ 3 il nous faut encore faire quelques hypothèses : On pose

$$(4,5) \qquad \widetilde{\mathscr{A}}(x\,;\xi, z) = \sum_{k=0}^{l} \widetilde{\mathscr{A}}_k(x\,;\zeta)\, q^k$$

$$(4,5)' \qquad \widetilde{\mathscr{A}}_k(x\,;\xi) = \varepsilon_0 \ldots \varepsilon_{k-1}\, \mathscr{A}_k(x\,;\xi),\ k = 1\,, \ldots\, l$$

$$(4,5)'' \qquad \widetilde{\mathscr{A}}_0(x\,;\xi) = \mathscr{A}_0(x\,;\xi)$$

$$(4,6) \qquad \widetilde{\mathscr{B}}_j(x\,;\xi, z) = \sum_{k=0}^{l-1} \widetilde{\mathscr{B}}_{j,\,k}(x\,;\xi)\, z^k$$

$$(4,6)' \qquad \widetilde{\mathscr{B}}_{j,\,k}(x\,;\xi) = \varepsilon_0 \ldots \varepsilon_{k-1}\, \mathscr{B}_{j,\,k}(x\,;\xi),\ k = 1\,, \ldots\, l$$

$$(4,6)'' \qquad \widetilde{\mathscr{B}}_{j,\,0}(x\,;\xi) = \mathscr{B}_{j,\,0}(x\,;\xi)$$

et on suppose que (la valeur de ζ sera précisée plus loin)

(E ; ζ) $\widetilde{\mathscr{A}}(x;\, D_x\,,\, \zeta\, D_t^d)$ *est elliptique dans* $R \times \Omega$ (*proprement elliptique si* $n = 1$) [15]

(F ; ζ) *Le système des* $\widetilde{\mathscr{B}}_j(x\,;D_x\,,\zeta\, D_t^d)$ *vérifie la condition complémentaire par rapport à* $\widetilde{\mathscr{A}}(x\,;\, D_x\,,\, \zeta\, D_t^d)$, *relativement à l'ouvert* $R \times \Omega$[16].

Pour préciser les valeurs de ζ pour lesquelles on fait les hypothèses (E ; ζ) et (F ; ζ), on introduit l'intervalle

$$J_d = [-\pi/2 - d\pi/2,\ +\pi/2 - d\pi/2]$$

lorsque d est pair et

$$J_d =]-\pi/2 - d\pi/2,\ +\pi/2 - d\pi/2]$$

lorsque d est impair, et on note Z_d l'ensemble des ζ de la forme e^{iy} avec $y \in J_d$.

---

(15) (16) c. f. [1], [2], [3] ou [4].

Enfin dans nos hypothèses nous aurons à considérer le problème suivant :

$$(4,7) \qquad \begin{cases} v_0 \in W_p^{2m}(\Omega) \\ \widetilde{\mathscr{A}}(x\,;D_x,z)\,v_0 = \varphi \text{ dans } \Omega \\ \widetilde{\mathscr{B}}_j(x\,;D_x,z)\,v_0 = \psi_j \text{ sur } \Gamma, j = 1,\dots m. \end{cases}$$

4.1.5 Le but de ce n^0 est de démontrer les deux théorèmes suivants

THÉORÈME 4.1 : *Si les hypothèses* (E_1) (E_2), (F_1) (F_2) *et* ($E\,;\zeta$), ($F\,;\zeta$) *sont vérifiées pour tout* $\zeta \in Z_d$ [17] *et si le problème* (4,7) *n'a pas de valeurs propres dans le demi-plan* $\operatorname{Re} z \geq 0$, *alors pour*

$$f \in W_q^s(I\,;L_p(\Omega))$$

$(0 < s < 1/q, 1 \leq q < +\infty, 1 < p < +\infty)$, *le problème* (4,2) *admet une solution unique vérifiant* (4,4) *et de plus on a*

$$u \in \bigcap_{j=0}^{l} W_q^{s+j}(I\,;W_p^{2m-jd}(\Omega)).$$

Lorsque $b - a < +\infty$, on peut se passer de l'hypothèse sur les valeurs propres du problème (4,7) et on a ainsi le

THÉORÈME 4.2 : *Si les hypothèses* (E_1), (E_2), (F_1), (F_2) *et* ($E\,;\zeta$), ($F\,;\zeta$) *sont vérifiées pour tout* $\zeta \in Z_d$ *et si* $b - a < +\infty$, *le problème* (4,2) *avec*

$$f \in W_q^s(I, L_p(\Omega))$$

$(0 < s < 1/q, 1 \leq q < +\infty, 1 < p < +\infty)$, *admet une solution unique vérifiant* (4,4) *et de plus on a*

$$u \in \bigcap_{j=0}^{l} w_q^{s+j}(I\,;W_p^{2m-jd}(\Omega)).$$

---

[17] Remarqnons que les hypothéses ($E\,;\zeta$) et ($F\,;\zeta$) font intervenir les nombres ε_k (dans la définition des polynômes $\widetilde{\mathscr{A}}$ et $\widetilde{\mathscr{B}}_j$).

4.2 *Réduction à la forme opérationnelle.*

4.2.1 On effectue sur le problème (4,2) la classique réduction de l'ordre par rapport à t: On pose

$$u_k = D_t^k u, k = 0, \dots l-1. \tag{4,8}$$

Il revient au même de chercher u solution de (4,2), (4,4) ou

$$\vec{u} = \{u_0, \dots u_{l-1}\}$$

solution de

$$u_k \in W_q^0(I; W_p^{2m-kd}(\Omega)) \cap W_q^1(I; W_p^{2m-(k+1)d}(\Omega)) \tag{4,9}$$

pour $k = 0, \dots l-1$, et de

$$\begin{cases} u_{k+1} = D_t u_k, k = 0, \dots l-2 \\ \sum_{k=0}^{l-1} \mathcal{A}_k(x; D_x) u_k + D_t u_{l-1} = f \end{cases} \tag{4,9$'$}$$

dans $I \times \Omega$, avec

$$\sum_{k=0}^{l-1} \mathcal{B}_{j,k}(x, D_x) u_k = 0 \; j = 1, \dots m \text{ sur } I \times \Gamma \tag{4,9$''$}$$

et

$$\begin{aligned} &(1+\varepsilon_k) u_k(a, x) = 0 \text{ dans } \Omega, \; k = 0, \dots l-1, \text{ si } a > -\infty \\ &(1-\varepsilon_k) u_k(b, x) = 0 \text{ dans } \Omega, \; k = 0, \dots l-1, \text{ si } b < +\infty. \end{aligned} \tag{4,9$'''$}$$

Les équations (4,9)$'$ peuvent encore s'écrire ainsi

$$\begin{cases} -\varepsilon_k D_t u_k + \varepsilon_k u_{k+1} = 0, k = 0, \dots l-2 \\ -\varepsilon_{l-1} D_t u_{l-1} - \varepsilon_{l-1} \sum_{k=0}^{l-1} \mathcal{A}_k(x; D_x) u_k = -\varepsilon_{l-1} f \end{cases} \tag{4,10}$$

dans $I \times \Omega$.

4.2.2 On appliquera le n^0 3 avec le choix suivant de E, F, A et B:

$$E = \prod_{k=0}^{l-1} W_q^0(I; W_p^{2m-(k+1)d}(\Omega))$$

$$F = \{0\}^{l-1} \times L_q(I; L_p(\Omega))$$

(de cette manière F est le sous-espace de E formé des $\vec{f}$ tels que $f_0 = \dots f_{l-2} = 0$)

$$D_A = \left\{ \vec{u} \in \prod_{k=0}^{l-1} W_q^0 \left(I\,;\, W_p^{2m-kd}(\Omega)\right)\,;\, M\vec{u} = 0 \text{ sur } I \times \Gamma \right\}$$

avec

$$M(x\,;D_x) = \left\| \begin{matrix} \mathcal{B}_{1,0}(x\,;D_x) \dots \mathcal{B}_{1,l-1}(x\,;D_x) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mathcal{B}_{m,0}(x\,;D_x) \dots \mathcal{B}_{m,l-1}(x\,;D_x) \end{matrix} \right\|$$

$$D_B = \left\{ \vec{u} \in \prod_{k=0}^{l-1} W_q^1 \left(I\,;\, W_p^{2m-(k+1)d}(\Omega)\right)\,;\, (1+\varepsilon_k)\, u_k(a,x) = 0 \text{ si } a > -\infty, \right.$$

$$\left. (1-\varepsilon_k)\, u_k(b,x) = 0 \text{ si } b < +\infty,\ x \in \Omega,\ k = 0, \dots l-1 \right\}.$$

L'opérateur A est $\vec{u} \rightarrow A\vec{u}$ avec

$$A(x\,;D_x) = \left\| \begin{matrix} 0 & \dots\dots & \varepsilon_0 & \dots\dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots\dots & 0 & \dots\dots & \varepsilon_{l-2} \\ -\varepsilon_{l-1}\mathcal{A}_0(x\,;D_x) & & -\varepsilon_{l-1}\mathcal{A}_1(x\,;D_x) & \dots & -\varepsilon_{l-1}\mathcal{A}_{l-1}(x\,;D_x) \end{matrix} \right\|.$$

Enfin l'opérateur B est

$$\left\| \begin{matrix} \varepsilon_0 D_t & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & \varepsilon_{l-1} D_t \end{matrix} \right\|.$$

Ceci posé, il est facile de voir qu'il revient au même de chercher $\vec{u}$ solution de (4,9)-(4,9)''', ou $\vec{u}$ solution de

$$\text{(4,11)} \qquad \begin{cases} \vec{u} \in D_A \cap D_B \\ A\vec{u} - B\vec{u} = \vec{f} \end{cases}$$

avec $\vec{f} \in F$.

Il faut donc vérifier les hypothèses du n° 3 sur A et B.

4.3 *Le spectre de B* ;

4.3.1 On va vérifier que $-B$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe borné dans E. Posant $X_k = W_p^{2m-(k+1)d}(\Omega)$ et considérant $\vec{u} \in E$ comme fonction de t seulement, à valeurs $\prod_{k=0}^{l-1} X_k$, on a

$$E = \prod_{k=0}^{l-1} L_q(I\,;\,X_k)$$

$$D_B = \Big\{ \vec{u} \in \prod_{k=0}^{l-1} W_q^1(I\,;\,X_k)\,;\,(1+\varepsilon_k)\,u_k(a) = 0 \text{ si } a > -\infty, (1-\varepsilon_k)\,u_k(b) = 0$$
$$\text{si } b < +\infty, k = 0, 1, \dots l-1 \Big\}$$

et

$$(B\vec{u})_k = \varepsilon_k\, u_k', \; k = 0, \dots l-1.$$

On désigne par $\tilde{u}_k$ le prolongement de u_k par zero en dehors de I, et on définit $G(s)$ opérateur linéaire continu dans E par l'identité :

$$(G(s)\vec{u})_k(t) = \tilde{u}_k(t - \varepsilon_k s), \; k = 0, \dots l-1 \tag{4,12}$$

pour $t \in I$, $s \in R$. Il est facile de vérifier que $s \longmapsto G(s)$ est un semi-groupe borné par un et fortement continu d'opérateurs dans E (au sens de [5], [9]) ; le générateur infinitésimal de $\check{G}$ est $-B$.

Grâce au théorème de Hille-Yosida-Phillips (c. f. par ex [5], [9]) on voit que l'hypothèse (ii) du n^0 3 a lieu avec $\theta_B = \pi/2$ et $C_B(\theta) = |\cos.\theta|^{-1}$; cependant il faut encore vérifier (3,4) et pour cela il suffit de remarquer que

$$D_B \cap F = \{\vec{u}\,;\,u_0 = \dots u_{l-2} = 0,\, u_{l-1} \in W_q^1(I\,;\,X_{l-1}),$$
$$u_{l-1}(a) = 0 \text{ si } a > -\infty \text{ et } \varepsilon_{l-1} = +1,$$
$$u_{l-1}(b) = 0 \text{ si } b < +\infty \text{ et } \varepsilon_{l-1} = -1\}\,;$$

par conséquent pour $\vec{u} \in D_B \cap F$, on a $(B\vec{u})_k = \varepsilon_k\, u_k' = 0$, pour $k = 0, \dots l-2$, donc $B\vec{u} \in F$; et comme d'après [5], [9] on a

$$(-B + z)^{-1} = -\int_0^{+\infty} e^{zs}\, G(s)\, ds, \; \text{Re}.z < 0,$$

d'où

$$[(-B+z)^{-1}\vec{u}]_k(t) = -\int_0^{+\infty} e^{zs}\,\tilde{u}_k(t-\varepsilon_k s)\,ds = 0$$

pour $k=0,\dots l-2$ et $\vec{u}\in F$, on voit que $\vec{u}\in F$, implique $(-B+z)^{-1}\vec{u}\in F$.

En conclusion, avec ce choix de B, l'hypothèse (ii) *du* n° 3 *est vérifiée avec* $\theta_B=\pi/2$.

De plus lorsque $b-a<+\infty$, on peut remarquer que $G(t)=0$ pour $t\geq b-a$; par conséquent l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{zs}\,G(s)\,ds$$

converge pour tout $z\in C$, donc $\sigma_B=\Phi$; l'hypothèse (ii) du n° 3 est alors vérifiée par $B-\alpha$, quel que soit α (toujours avec $\theta_{B-\alpha}=\pi/2$).

Remarquons enfin que lorsque $I=R$, $s\mapsto G(s)$ est un groupe borné (par un) et fortement continu d'opérateurs dans E, et par conséquent (c. f. également [5], [9]) c'est l'hypothèse (ii)' du n° 3 qui est vérifiée avec

$$\theta''_B(1)=\theta''_B(2)=+\pi/2,\ \theta''_B(2)=\theta'_B(1)=-\pi/2.$$

4.4 *Le spectre de A.*

4.4.1 On peut remplacer l'étude du spectre de A par celle du spectre d'un autre opérateur $\mathcal{A}$ opérant dans

$$X=\prod_{k=0}^{l-1} X_k\,;$$

on pose

$$Y=\{0\}^{l-1}\times X_{l-1}$$

(sous-espace de X formé des $\vec{x}$ tels que $x_0=\dots x_{l-2}=0$)

$$D_{\mathcal{A}}=\{\vec{v}\in X;\ v_k\in W_p^{2m-kd}(\Omega),\ k=0,\dots l-1,\ M\vec{v}=0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ est $\vec{v}\mapsto \mathcal{A}(x;D_x)\vec{v}$, où $\mathcal{A}(x;D_x)$ est la matrice différentielle définie au point 4.2.2.

On a ainsi défini un opérateur $\mathcal{A}$ linéaire non borné dans X de domaine $D_{\mathcal{A}}$, auquel A est lié de la manière suivante :

$$E = L_q(I\,;X)$$

$$F = L_q(I\,;Y)$$

$$D_A = L_q(I\,;D_{\mathcal{A}})$$

$$(A\vec{u})(t) = \mathcal{A}\vec{u}(t)$$

pour presque tout $t \in I$ et par conséquent, on a le

LEMME 4.1 : *On a l'inclusion* $\varrho_{\mathcal{A}} \subset \varrho_A$ *et de plus pour* $z \in \varrho_{\mathcal{A}}$ *on a les inégalités*

$$|(A - z)^{-1}|_{E \to E} \leq |(\mathcal{A} - z)^{-1}|_{X \to X}$$

$$|(A - z)^{-1}|_{F \to E} \leq |(\mathcal{A} - z)^{-1}|_{Y \to X}.$$

Tout ceci est évident.

4.4.2 Pour étudier $\sigma_{\mathcal{A}}$ on doit regarder le problème

$$(4,13) \qquad \begin{cases} \vec{v} \in \prod_{k=0}^{l-1} W_p^{2m-kd}(\Omega) \\ M\vec{v} = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \mathcal{A}\vec{v} - z\vec{v} = \vec{g} \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

avec $\vec{g}$ donné dans X. Suivant un raisonnement inverse de celui fait dans 4.2, on va ramener l'étude de ce système, à l'étude d'un problème aux limites pour *une* équation : En explicitant (4,13) on obtient

$$(4,14)' \qquad \varepsilon_k v_{k+1} - zv_k = g_k\,,\ k = 0, \dots l - 2$$

$$(4,14)'' \qquad -\varepsilon_{l-1} \sum_{k=0}^{l-1} \mathcal{A}_k(x\,;D_x)\, v_k - zv_{l-1} = g_{l-1}$$

et de (4,14)′ on déduit

$$(4,15) \qquad v_k = \varepsilon_0 \dots \varepsilon_{k-1} z^k v_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_j \dots \varepsilon_{k-1} z^{k-1-j} g_j$$

$k = 1, \dots l - 1.$

Cette identité permet d'éliminer $v_1, \dots v_{l-1}$ dans (4,13) qui est équivalent à

$$(4,16)\qquad \begin{cases} v_0 \in W_p^{2m}(\Omega) \\ \tilde{\mathcal{A}}(x\,;D_x, z)\, v_0 = \varphi(z) \text{ dans } \Omega \\ \mathcal{B}_j(x\,;D_x, z)\, v_0 = \psi_j(z) \text{ sur } \Gamma,\ j = 1, \dots m \end{cases}$$

avec

$$\varphi(z) = -\sum_{j=0}^{l-2}\ \sum_{k=j+1}^{l-1} \varepsilon_j \dots \varepsilon_{k-1}\, z^{k-1-j}\, \mathcal{A}_k(x\,;D_x)\, g_j - \sum_{j=0}^{l-1} \varepsilon_j \dots \varepsilon_{l-1}\, z^{l-1-j}\, g_j$$

$$\psi_j(z) = -\sum_{i=0}^{l-2}\ \sum_{k=i+1}^{l-1} \varepsilon_i \dots \varepsilon_{k-1}\, z^{k-1-i}\, \mathcal{B}_{j,k}(x\,;D_x)\, g_i\,,\ j = 1, \dots m$$

donc

$$(4,17)\qquad |\varphi(z)|_{L_p(\Omega)} \leq K \left\{ \sum_{j=0}^{l-2} (1 + |z|)^{l-2-j}\, |g_j|_{W_p^{2m-(j+1)d}(\Omega)} + \sum_{j=0}^{l-1} |z|^{l-1-j}\, |g_j|_{L_p(\Omega)} \right\}$$

$$(4,18)\qquad |\psi_j(z)|_{W_p^{2m-m_j-1/p}(\Gamma)} \leq K \sum_{i=0}^{l-2} (1 + |z|)^{l-2-i}\, |g_j|_{W_p^{2m-(j+1)d}(\Omega)}\,.$$

On peut dès à présent remarquer que lorsque $\vec{g} \in Y$, on a

$$\varphi(z) = -\,\varepsilon_{l-1}\, g_{l-1} \in L_p(\Omega)\,;\ \psi_j(z) = 0,\ j = 1, \dots m.$$

Sous les hypothèses $(E\,;\zeta)$ et $(F\,;\zeta)$ le problème aux limites suivant est elliptique au sens de Agmon-Douglis-Niremberg [2]

$$(4,19)\qquad \begin{cases} u \in W_p^{2m}(R \times \Omega) \\ \tilde{\mathcal{A}}(x\,;D_x, \zeta\, D_t^d)\, u = f \text{ dans } R \times \Omega \\ \mathcal{B}_j(x\,;D_x, \zeta\, D_t^d)\, u = g_j \text{ sur } R \times \Gamma,\ j = 1, \dots m. \end{cases}$$

On en déduit en utilisant essentiellement un procédé dû à Agmon [1], le résultat suivant (c. f. l'appendice et [6]) : Il existe une constante $C_\zeta \geq 0$ et un nombre $r_\zeta \geq 0$ tels que pour

$$z = \zeta\, i^d\, r^d \text{ avec } |r| \geq r_\zeta$$

l'opérateur T_z

$$v \longmapsto \{\tilde{\mathcal{A}}(x\,;D_x, z)\, v\,;\ \mathcal{B}_1(x\,;D_x, z)\, v, \dots \mathcal{B}_m(x\,;D_x, z)\, v\}$$

est un isomorphisme topologique de

$$W_p^{2m}(\Omega) \text{ sur } L_p(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} W_p^{2m-m_j-1/p}(\Gamma),$$

et de plus on a la majoration

$$(4,20)\qquad \begin{aligned} \sum_{k=0}^{2m} |z|^{(2m-k)/d} |v|_{W_p^k(\Omega)} \leq C_\zeta \Big\{ & |\tilde{\mathcal{A}}(x\,;D_x, z)\, v|_{L_p(\Omega)} \\ & + \sum_{j=1}^{m} |z|^{(2m-m_j-1/p)/d} |\tilde{\mathcal{B}}_j(x\,;D_x, z)\, v|_{W_p^{2m-m_j-1/p}(\Gamma)} \Big\}. \end{aligned}$$

Revenant au problème (4,16) on voit que pour $z = \zeta i^d r^d$ avec $|r| \geq r_\zeta$ la solution existe et est unique et admet la majoration suivante déduite de (4,17) (4,18) et (4,20):

$$(4,21)\qquad \begin{aligned} \sum_{k=0}^{2m} |z|^{(2m-k)/d} |v_0|_{W_p^k(\Omega)} \leq C'_\zeta \Big\{ & \sum_{j=0}^{l-2} (1+|z|)^{2l-2-j} |g_j|_{W_p^{2m-(j+1)d}(\Omega)} + \\ & \sum_{j=0}^{l-1} |z|^{l-1-j} |g_j|_{L_p(\Omega)} \Big\} \end{aligned}$$

avec C'_ζ constante proportionnelle à C_ζ lorsque ζ varie.

On revient au problème (4,13) dont on est parti ; on voit que ce problème admet une solution unique pour laquelle la majoration (4,21) a lieu, dès que $z = \zeta i^d r^d$ avec $|r| \geq r_\zeta$, et par conséquent ces z sont dans ϱ_A; de plus pour ces z et pour

$$\vec{v} = (A - z)^{-1} \vec{g}$$

on a la majoration

$$(4,22)\qquad \begin{aligned} |\vec{v}|_X \leq C'_\zeta \Big\{ & |z|^{-1} \sum_{j=0}^{l-2} (1+|z|)^{2l-2-j} |g_j|_{X_j} + \\ & \sum_{j=0}^{l-2} (1+|z|)^{l-2-j} |g_j|_{X_j} + |z|^{-1} |g_{l-1}|_{X_{l-1}} \Big\} \end{aligned}$$

qui résulte de (4,15) et (4,21). On peut encore écrire (4,22) sous la forme

$$(4,22)'\qquad |\vec{v}|_X \leq C'_\zeta\, P(|z|)\, |\vec{g}|_X$$

avec P polynôme dont le degré dépend seulement de l, et

$$(4{,}22)'' \qquad |\vec{v}|_X \leq C'_\zeta \, |z|^{-1} \, |\vec{g}|_X$$

lorsque $\vec{g} \in Y$.

De ce résultat, on déduit en particulier que sous les hypothèses (E ; ζ) et (F ; ζ), ϱ_A n'est pas vide et par conséquent puisque Ω vérifie l'hypothèse (C^{2m}) qui implique la compacité de l'injection de D_A dans X donc aussi la compacité de l'opérateur $(A - z)^{-1}$ dans X, on voit en appliquant la théorie de Riesz que σ_A *est discret, sans point d'accumulation fini, et formé seulement de valeurs propres.*

4.4.3 Nous sommes à présent en mesure de vérifier l'hypothèse (i) du n⁰ 3 : Sous les hypothèses du théorème 4.1 et d'après les résultats précédents et le lemme 4.1, on voit que σ_A donc aussi σ_A est discret, sans point d'accumulation fini, et ϱ_A donc aussi ϱ_A contient tous les rayons de la forme

$$\{\zeta i^d r^d \, ; \, |r| \geq r_\zeta\}, \; \zeta \in Z_d \, .$$

De plus il est facile de voir que l'ensemble des ζ pour lesquels (E ; ζ) et (F ; ζ) ont lieu est un ensemble ouvert ; par conséquent pour un problème donné, il existe $\eta > 0$ tel que (E ; ζ) et (F ; ζ) aient lieu pour $\zeta = e^{iy}$ avec

$$y \in [-\pi/2 - d\pi/2 - \eta, \pi/2 - d\pi/2 + \eta] = J_d(\eta)$$

lorsque d est pair, et

$$y \in \,]-\pi/2 - d\pi/2, \pi/2 - d\pi/2 + \eta] = J_d(\eta)$$

lorsque d est impair. On en déduit que ϱ_A donc aussi ϱ_A contient tous les rayons $\{\zeta i^d r^d \, ; \, |r| \geq r_\zeta\}$, $\zeta = e^{iy}$, $y \in J_d(\eta)$. Comme on peut choisir $\zeta \longmapsto r_\zeta$ continue [18], on voit qu'il existe $R \geq 0$, tel que ϱ_A et ϱ_A contiennent l'ensemble des z avec

$$|\arg . z| \leq \pi/2 + \eta, \; |z| \geq R.$$

On peut donc introduire le nombre α_0 borne supérieure des parties réelles des valeurs propres du problème (4,7) :

$$\alpha_0 = \sup \{\mathrm{Re.}\, z \, ; \, z \in \sigma_A\} \, ;$$

---

[18] cf. remarque en appendice.

on a $\alpha_0 < +\infty$, et *pour tout* z *avec* $\operatorname{Re}.z > \alpha_0$, *on a* $z \in \varrho_A$ *donc* $z \in \varrho_A$. Par ailleurs *on a les majorations suivantes* qui se déduisent de (4,22)′ et (4,22)″ à l'aide du lemme 4.1 :

(4,23) $$|(A-z)^{-1}|_{E\to E} \leq |(A-z)^{-1}|_{X\to X} \leq C_A(\theta)(1+|z|^N)$$

(4,24) $$|(A-z)^{-1}|_{F\to E} \leq |(A-z)^{-1}|_{Y\to X} \leq C_A(\theta)\,|z|^{-1}$$

pour arg. $z=\theta$, $|\theta| \leq \pi/2+\eta$, $|z| \geq R$.

En conclusion, avec ce choix de A, *l'hypothèse* (i) *du* n⁰ *3 est vérifiée* (avec $\theta_A > \pi/2$), *à condition de remplacer* A *par* $A-r$ *avec* $r > \alpha_0$, *et de supposer que* (E ; ζ) *et* (F ; ζ), *ont lieu pour* $\zeta = e^{iy}$, $y \in J_d$.

4.5 *Application des théorèmes* 3.1 *et* 3.2.

4.5.1 D'après ce qu'on vient de voir, les hypothèses (i) et (ii) du n⁰ 3 sont vérifiées à condition que $\alpha_0 < 0$. L'hypothèse (iii) est automatiquement vérifiée car A et B sont des opérateurs en des variables indépendantes. Avant de vérifier l'hypothèse (iv), il faut expliciter $D_B(s\,;q)$: On a

$$\prod_{k=0}^{l-1} \overset{\circ}{W}{}^1_q(I\,;X_k) \subset D_B \subset \prod_{k=0}^{l-1} W^1_q(I\,;X_k)$$

$$E = \prod_{k=0}^{l-1} W^0_q(I\,;X_k)$$

donc

$$D_B(s\,;q) = \prod_{k=0}^{l-1} W^s_q(I\,;X_k)$$

pour $0 < s < 1/q$, $1 \leq q < +\infty$, d'après (2,3) [19]. On voit alors facilement que $D_{A^k} \cap D_{B^k} \cap F$ est dense dans $D_B(s\,;q) \cap F$ pour tout k, car $C_0^\infty(I\times\Omega)$ est dense dans $W^s_q(I\,;L_p(\Omega))$ pour $0 < s < 1/q$.

Toutes les hypothèses sont réunies pour l'application des théorèmes 3.1 et 3.2 et par conséquent le problème (4,11) admet une solution unique pour $\vec{f} \in D_B(s\,;q) \cap F$ et de plus $A\vec{u}$, $B\vec{u} \in D_B(s\,;q)$; ceci signifie en revenant au problème (4,2) que ce problème admet pour $f \in W^s_q(I\,;L_p(\Omega))$, avec $0 < s < 1/q$ $1 \leq q < +\infty$, $1 < p < +\infty$, une solution unique u vérifiant (4,4) et de plus telle que

(4,25) $$D_t^k u \in W^s_q(I\,;W_p^{2m-kd}(\Omega)),\ k=1,\dots l.$$

---

[19] La restriction $0 < s < 1/q$ est inutile d'après (2,2) lorsque $I = R$.

Nous allons voir que ces conditions impliquent

$$u \in W_q^s(I\,;\,W_p^{2m}(\Omega))\,;$$

en effet d'après (4,4) on a $u \in W_q^0(I\,;\,W_p^{2m}(\Omega))$ et d'après (4,25) et les équations

$$\mathcal{A}_0(x\,;D_x)\,u = f - \sum_{k=1}^{l} \mathcal{A}_k(x\,;D_x)\,D_t^k\,u \ \text{ dans } \ I \times \Omega$$

$$\mathcal{B}_{j,0}(x\,;D_x)\,u = -\sum_{k=1}^{l-1} \mathcal{B}_{j,k}(x\,;D_x)\,D_t^k\,u \ \text{ sur } \ I \times \Gamma,\ j = 1, \dots m$$

on a

$$\mathcal{A}_0(x\,;D_x)\,u = \Phi \in W_q^s(I\,;L_p(\Omega))$$

$$\mathcal{B}_{j,0}(x\,;D_x)\,u = \Psi_j \in W_q^s(I\,;\,W_p^{2m-m_j-1/p}(\Gamma)),\ j = 1, \dots m.$$

Comme d'après les conditions (E_1), (E_2), (F_1), (F_2), $(E\,;\zeta)$ et $(F\,;\zeta)$, le problème

$$\text{(4,26)} \qquad \begin{cases} v \in W_p^{2m}(\Omega) \\ \mathcal{A}_0(x\,;D_x)\,v = \varphi \ \text{ dans } \ \Omega \\ \mathcal{B}_{j,0}(x\,;D_x)\,v = \psi_j \ \text{ sur } \ \Gamma,\ j = 1, \dots m \end{cases}$$

est elliptique au sens de Agmon-Douglis-Nirenberg [2], et par conséquent on a l'existence d'une constante K, telle que pour v l'inégalité suivante ait lieu

$$|\,v\,|_{W_p^{2m}(\Omega)} \leq K \left\{ |\,\varphi\,|_{W_p^0(\Omega)} + \sum_{j=1}^{m} |\,\psi_j\,|_{W_p^{2m-m_j-1/p}(\Gamma)} + |\,v\,|_{W_p^0(\Omega)} \right\};$$

en écrivant cette dernière inégalité avec

$$v(x) = u(t, x), \quad \varphi(x) = \Phi(t, x), \quad \psi_j(x) = \Psi_j(t, x)$$

avec t fixé dans I, puis avec

$$v(x) = u(t, x) - u(\theta, x), \quad \varphi(x) = \Phi(t, x) - \Phi(\theta, x),$$

$$\psi_j(x) = \Psi_j(t, x) - \Psi_j(\theta, x)$$

avec t et θ fixés dans I, et en intégrant, on obtient

$$| u |_{W_q^s(I\,;\,W_p^{2m}(\Omega))} =$$

$$\left(\int_I | u(t, x) |^q_{W_p^{2m}(\Omega)} dt\right)^{1/q} + \left(\iint_{I\times I} \frac{| u(t, x) - u(\theta, x) |^q_{W_p^{2m}(\Omega)}}{| t - \theta |^{1+sq}} dt\, d\theta\right)^{1/q}$$

$$\leq K \left\{ | \Phi |_{W_q^s(I\,;\,W_p^0(\Omega))} + \sum_{j=1}^{m} | \Psi_j |_{W_q^s(I\,;\,W_p^{2m-m_j-1/p}(\Gamma))} + | u |_{W_q^s(I\,;\,W_p^0(\Omega))} \right\} < +\infty\,;$$

ceci prouve que $u \in W_q^s(I, W_p^{2m}(\Omega))$ et par conséquent le théorème 4.1 est complétement démontré.

Lorsque $b - a < +\infty$ on a vu en 4.3.1 que l'hypothèse (ii) du n^0 3 est vérifiée même lorsque l'on remplace B par $B - r$ avec r quelconque; comme $A - B = (A - r) - (B - r)$ il suffit que l'hypothèse (i) du n^0 3 soit vérifiée par $A - r$ pour au moins une valeur de r; utilisant ceci on est conduit au théorème 4.2.

4.5.3 Pour terminer on va détailler un exemple; on se place dans la situation la plus simple d'une équation d'ordre supérieur à un en t. Précisement, on se place dans le cas

$$n = 1,\ l = 2,\ 2m = 4 \text{ donc } d = 2,$$

on prend

$$\tilde{\mathcal{A}}(\xi, q) = q^2 + h\xi^2 q + g\xi^4 = (q - t_1 \xi^2)(q - t_2 \xi^2)$$

avec $g = t_1 t_2$, $h = -(t_1 + t_2)$, Re $t_j > 0$, $j = 1, 2$; enfin pour $\tilde{\mathcal{B}}_1$ et $\tilde{\mathcal{B}}_2$ il y a quatre formes possibles; on notera $[k, l]$ $(k, l = 1, 2, 3, 4)$ le problème dans lequel $\tilde{\mathcal{B}}_1$ est de la forme k, et $\tilde{\mathcal{B}}_2$ est de la forme l, avec

$$\tilde{\mathcal{B}}_1(\xi, q) = 1 \text{ (forme 1)},\ \xi \text{ (forme 2)}\ \alpha\xi^2 + \beta q \text{ (forme 3)}\ \gamma\xi^3 + \delta\xi q \text{ (forme 4)}$$

et

$$\tilde{\mathcal{B}}_2(\xi, q) = 1 \text{ (forme 1)},\ \xi \text{ (forme 2)},\ \alpha'\xi^2 + \beta' q \text{ (forme 3)}\ \gamma'\xi^3 + \delta'\xi\, q \text{ (forme 4)}.$$

Il est évident qu'il suffit de considérer le cas $[k, l]$ avec $k \leq l$ et qu'il faut éliminer les cas $k = l = 1$ et $k = l = 2$.

Les conditions (E_1), (F_1), (E_2), (F_2), $(E\,;\zeta)$ et $(F\,;\zeta)$ ont lieu pour $\zeta \in Z_2$ pour les problèmes

[1,2]

[1,3] avec $\alpha' \neq 0$

[1,4] avec $\alpha' \neq 0,\ \beta' = 0$ ou avec $\alpha' = 0,\ \beta' \neq 0$

[2,3] avec $\alpha' \neq 0,\ \beta' = 0$ ou avec $\alpha' = 0,\ \beta' \neq 0$

[2,4] avec $\alpha' \neq 0$

[3,3] avec $\alpha\,\beta' - \alpha'\,\beta \neq 0$

[3,4] avec $\alpha \neq 0,\ \beta = 0,\ \alpha' \neq 0,\ \beta' = 0$

ou avec $\alpha = 0,\ \beta \neq 0,\ \alpha' = 0,\ \beta' \neq 0$

ou avec $\alpha = 0,\ \beta \neq 0,\ \alpha' \neq 0,\ \beta' = 0$

ou avec $\alpha \neq 0,\ \beta = 0,\ \alpha' = 0,\ \beta' \neq 0$

[4,4] avec $\alpha\,\beta' - \alpha'\,\beta \neq 0$.

A chacun des cas $[k, l]$ décrits ci-dessus correspondent plusieurs problèmes différents (résolus par le théorème 4.2) selon le choix de ε_0 et de ε_1 ; il suffit de considérer les cas $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_0 = 1 = -\,\varepsilon_1$, car les autres s'y réduisent par changement de variables (en « inversant le sens du temps »).

Par exemple les problèmes qui correspondent au cas [3,3] sont les suivants où on se donne $f \in W_q^s(I\,; L_p(J))$ $(I = \,]a, b[$ avec $b - a < +\infty$, $J = \,]c, d[$ avec $d - c < +\infty,\ 0 < s < 1/q,\ 1 \leq q < +\infty,\ 1 < p < +\infty)$ et où on trouve l'unique solution u dans

$$W_q^s(I\,;W_p^4(J)) \cap W_q^{s+1}(I\,;W_p^2(J)) \cap W_q^{s+2}(I\,;W_p^0(J))$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + h\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t} + g\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f,\ a < t < b,\ c < x < d$$

$$\begin{cases} u(a, x) = 0,\ c < x < d \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial t}(a, x) = 0,\ c < x < d \\[2mm] \alpha\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, c) + \beta\,\dfrac{\partial u}{\partial t}(t, c) = \alpha\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, d) + \beta\,\dfrac{\partial u}{\partial t}(t, d) = 0,\ a < t < b \\[2mm] \alpha'\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, c) + \beta'\,\dfrac{\partial u}{\partial t}(t, c) = \alpha'\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, d) + \beta'\,\dfrac{\partial u}{\partial t}(t, d) = 0,\ a < t < b. \end{cases}$$

avec $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$, et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - h\,\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial t} - g\,\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f,\ a < t < b,\ c < x < d \\ u\,(a, x) = 0,\ c < x < d \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\,(b, x) = 0,\ c < x < d \\ \alpha\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,(t, c) + \beta\,\dfrac{\partial u}{\partial t}\,(t, c) = \alpha\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,(t, d) + \beta\,\dfrac{\partial u}{\partial t}\,(t, d) = 0,\ a < t < b \\ \alpha'\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,(t, c) + \beta'\,\dfrac{\partial u}{\partial t}\,(t, c) = \alpha'\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,(t, d) + \beta'\,\dfrac{\partial u}{\partial t}\,(t, d) = 0,\ a < t < b \end{cases}$$

avec $\alpha\,\beta' - \alpha'\,\beta = 0$ [20].

5. Complements.

5.1 *Problèmes dans un cylindre infini avec conditions de croissance.*

5.1.1 On part de la remarque déjà utilisée pour démontrer le théorème 4.2 selon laquelle on ne change pas le problème à résoudre si on remplace A et B par $A - r$ et $B - r$ respectivement; les théorèmes 3.1 et 3.2 sont encore vrais si on suppose que les hypothèses (i)-(iv) sont vérifiées par $A - r$ et $B - r$. En fait seules les hypothèses (i) et (ii) sont modifiées dans cette substitution. Notre but est d'obtenir les résultats au théorème 4.1 sans faire d'hypothèse sur les valeurs propres du problème (4,7); ce but a déjà été atteint lorsque I est un intervalle fini, grâce au théorème 4.2.

On va étudier ici le cas $I =]\,0, +\infty\,[$ (le cas $]\,-\infty, 0\,[$ s'y ramène par changement de variable) et on étudiera en 5.2 le cas $I =]-\infty, +\infty\,[$.

On laisse à X, X_k, Y et Λ la même signification qu'au n° 4, et on pose

$$E = \{\vec{u}\ ;\ e^{-\varepsilon r t}\,\vec{u} \in L_q\,(I\ ;\ X)\}$$

---

[20] Pour les conditions aux limites suivant la variable x, il revient évidemment au même d'écrire $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,(t, c) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,(t, d) = \dfrac{\partial u}{\partial t}\,(t, c) = \dfrac{\partial u}{\partial t}\,(t, d) = 0,\ a < t < b$.

avec $\varepsilon = \pm 1$ et r sera déterminé plus loin ; on pose encore

$$F = \{\vec{u}\,;\, e^{-\varepsilon r t}\vec{u} \in L_q(I\,;\,Y)\}$$

$$D_B = \left\{\vec{u}\,;\, e^{-\varepsilon r t}\vec{u} \in \prod_{k=0}^{l=1} W_q^1(I\,;\,X_k)\,;\,(1+\varepsilon)\,\vec{u}(0) = 0\right\}$$

et

$$B\dot{u} = \varepsilon \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

$$D_A = \{\vec{u}\,;\, e^{-\varepsilon r t}\vec{u} \in L_q(I\,;\,D_A)\}$$

et

$$(A\vec{u})(t) = A\,\vec{u}(t),\ t \in I.$$

Il est facile de voir que $-B$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe d'opérateurs dans E : $s \longmapsto G(s)$ défini par

$$(G(s)\,\vec{u})(t) = \begin{cases} \vec{u}(t-\varepsilon s) & t > \varepsilon s \\ 0 & t \leq \varepsilon s. \end{cases}$$

Le semi-groupe $s \longmapsto G(s)$ laisse stable le sous-espace F et on a la majoration

$$|\,G(s)\,|_{E \to E} \leq e^{-rs} \qquad s \geq 0.$$

On en déduit que $(B-r)-z$ est inversible pours $\mathrm{Re}.z < 0$ et que son inverse admet la majoration

$$|\,([B-r]-z)^{-1}\,|_{E \to E} \leq 1/|\,\mathrm{Re}.z\,|\,;$$

par conséquent l'hypothèse (ii) du n⁰ 3 est vérifiée avec $\theta_B = \pi/2$ et $B-r$ substitué à B.

D'après 4.4 convenablement modifié on voit que l'hypothèse (i) du n⁰ 3 est vérifiée avec $\theta_A > \pi/2$ et A remplacé par $A-r$, $r > \alpha_0$, sous les hypothèses (E_1) (E_2), (F_1), (F_2), $(E\,;\,\zeta)$ et $(F\,;\,\zeta)$, $\zeta \in Z_d$.

En conclusion on a le théorème 5.1 :

Théoréme 5.1 : *On suppose que les hypothèses* (E_1), (E_2), (F_1), (F_2), $(E\,;\,\zeta)$ et $(F\,;\,\zeta)$ *ont lieu pour tout* $\zeta \in Z_d$ *et* $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \ldots\ \varepsilon_{l-1} = \varepsilon$; *alors pour* $r > \alpha_0$ (défini en 4.4) *et* $I =]\,0, +\infty\,[$, *le problème* (4,2) *avec*

$$e^{-\varepsilon r t} f \in W_q^s(I\,,\,L_p(\Omega))$$

($0 < s < 1/q, 1 \leq q < +\infty, 1 < p < +\infty$ [21]), *admet une solution unique vérifiant*

$$e^{-\varepsilon r t} u \in \bigcap_{k=0}^{l} W_q^k (I\,;\, W_p^{2m-kd}(\Omega))$$

et de plus on a

$$e^{-\varepsilon r t} u \in \bigcap_{k=0}^{l} W_q^{k+s} (I\,;\, W_p^{2m-kd}(\Omega)).$$

5.2 *Problèmes dans un cylindre $\Omega \times R$.*

5.2.1 On revient au choix de E, F, A et B du n^0 4 avec $I = R$ [22]; dans ce cas $G(s)$ est défini par (4,12) est un groupe continu et borné (par un) d'opérateurs dans E; par conséquent $B - z$ est inversible dès que $\mathrm{Re}.z \neq 0$ et on a la majoration

$$|(B - z)^{-1}|_{E \to E} \leq 1/|\mathrm{Re}.z|$$

on est donc dans une situation décrite au point 3.4 : L'hypothèse (ii)$'$ est vérifiée avec

$$\theta''_B(1) = \theta'_B(2) = \pi/2$$

$$\theta''_B(2) = \theta'_B(1) = -\pi/2\,;$$

des raisonnements analogues à ceux de 4.4 permettent de fixer les hypothèses sur $\mathcal{A}$ et les $\mathcal{B}_j$, telles que (i)$'$ ait lieu ; on obtient ainsi le

THÉORÈME 5.2 : *Si les hypothèses* (E_1), (E_2), (F_1), (F_2), ($E\,;\zeta$) et ($F\,;\zeta$) *sont vérifiées pour* $\zeta = e^{iy}$ *avec*

$$\begin{cases} y + d\pi/2 = \pm\,\pi/2 & \textit{pour } d \textit{ pair} \\ y + d\pi/2 = -\,\pi/2 & \textit{pour } d \textit{ impair} \end{cases}$$

et si le problème (4,7) *n'a pas de valeurs propres sur l'axe* $\mathrm{Re}.z = 0$, *alors pour*

$$f \in W_q^s(R\,;\, L_p(\Omega))$$

---

(21) Lorsque $\varepsilon = -1$, il n'y a pas de conditions initiales et la restriction $0 < s < 1/q$ est inutile.

(22) Dans ce cas la possibilité de choisir les ε_k différents entre eux n'augmente pas la classe de problèmes aux limites considérés.

$(0 < s < 1, 1 < p < +\infty, 1 \leq q < +\infty)$ [23], *le problème* (4,2) *admet une solution unique vérifiant* (4,4) *avec* $I = R$ *et de plus on a*

$$u \in \bigcap_{k=0}^{l} W_q^{s+k}(I\,;\, W_p^{2m-kd}(\Omega)).$$

5.3. *Problèmes du premier ordre en t.*

5.3.1 On garde toujours le choix de E, F, A et B fait au n^0 4, mais on suppose cette fois que $l = 1$; on a par conséquent $E = F$ et les rôles de A et B peuvent être échangés Compte tenu de 3.4.2 on obtient le

THÉORÈME 5.3 : *Si les hypothèses* (E_1), (E_2), (F_1), (F_2), $(E\,;\zeta)$ *et* $(F\,;\zeta)$ *sont vérifiées pour* $\zeta \in Z_d$ *et si le problème* (4,7) *n'a pas de valeurs propres dans le demi-plan* $\mathrm{Re}.z \geq 0$, *alors pour*

$$f \in L_q(I\,;\, W_q^s(\Omega))$$

$(0 < s < 1/2mq, 1 < q < +\infty)$ *le problème* (4,2) *admet une solution unique vérifiant*

$$u \in \bigcap_{k=0}^{l} W_q^{k}(I\,;\, W_q^{2m+s-kd}(\Omega)).$$

On peut aussi obtenir des variantes analogues pour les théorèmes 4.2,5.1 et 5.2.

APPENDICE : THEORIE SPECTRALE DES PROBLEMES ELLIPTIQUES.

On démontre ici le résultat qui a été utilisé au point 4.2.2. On considère les polynômes $\widetilde{\mathcal{A}}$ et $\widetilde{\mathcal{B}}_j$ vérifiant (E_1), (E_2), (F_1), (F_2), $(E\,;\zeta)$ et $(F\,;\zeta)$ et par conséquent tels que le problème

$$\text{(A,1)} \qquad \begin{cases} u \in W_p^{2m}(R \times \Omega) \\ \widetilde{\mathcal{A}}(x\,;\, D_x\,,\, \zeta D_t^d)\, u = f \text{ dans } R \times \Omega, \\ \widetilde{\mathcal{B}}_j(x\,;\, D_x\,,\, \zeta D_t^d)\, u = g_j \text{ sur } R \times \Gamma, j = 1, \dots m \end{cases}$$

---

[23] Il n'y a pas de restriction sur s car ici

$$D_B(s\,;q) = \prod_{k=0}^{l-1} W_q^s(R\,;\, X_k), \qquad 0 < s < 1.$$

soit elliptique au sens de Agmon-Douglis-Niremberg [2]. Dans ces conditions, nos démontrerons d'abord l'inégalité suivante

THÉORÈME A.1 : *Si le problème* (A,1) *est elliptique au sens de Agmon-Douglis-Niremberg, il existe une constante* C_ζ *et un nombre* r_ζ *tels que*

$$\sum_{k=0}^{2m} |z|^{(2m-k)/d} |v|_{W_p^k(\Omega)} \leq C_\zeta \Big\{ |\widetilde{\mathscr{A}}(x\,;D_x, z)\, v|_{L_p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{m} |z|^{(2m-m_j-1/p)/d} |\widetilde{\mathscr{B}}_j(x\,;D_x, z)\, v|_{W_p^{2m-m_j-1/p}(\Gamma)} \Big\} \tag{A,2}$$

pour tout $z = \zeta i^d r^d$ *avec* $|r| \geq r_\zeta$ *et* $v \in W_p^{2m}(\Omega)$.

Démonstration : D'après l'ellipticité du problème (A,1) on sait qu'il existe une constante K_ζ telle que

$$|u|_{W_p^{2m}(R\times\Omega)} \leq K_\zeta \Big\{ |f|_{L_p(R\times\Omega)} + \sum_{j=1}^{m} |g_j|_{W_p^{2m-m_j-1/p}(R\times\Gamma)} + |u|_{L_p(R\times\Omega)} \Big\} \tag{A,3}$$

pour toute $u \in W_p^{2m}(R \times \Omega)$ nulle hors de $[-1, +1] \times \Omega$.

Utilisant le procédé de Agmon [1], on obtiendra (A,2) en appliquant (A,3) à la fonction particulière

$$u(t, x) = \varphi(t)\, e^{irt}\, v(x) \tag{A,4}$$

avec $v \in W_p^{2m}(\Omega)$, r réel et φ fonction régulière nulle hors de $[-1, +1]$, et identique à un dans $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$.

Avec choix de u on a

$$f(t, x) = \{\widetilde{\mathscr{A}}(x\,; D_x, \zeta(ir)^d)\, v(x)\}\, \varphi(t)\, e^{irt} + \sum_{l=0}^{2m-1} (ir)^l e^{irt} \{P_l(D_t)\, \varphi(t)\} \{Q_l(D_x)\, v(x)\}$$

où P_l est un opérateur différentiel è coefficients constants, d'ordre $\leq 2m$ et Q_l un opérateur difiérentiel à coefficients bornés, d'ordre $\leq 2m - l - 1$, et par conséquent on a

$$|f|_{L_p(R\times\Omega)} \leq 2^{1/p} |\widetilde{\mathscr{A}}(x\,; D_x, \zeta(ir)^d)\, v|_{L_p(\Omega)} + C \sum_{l=0}^{2m-1} |r|^l |v|_{W_p^{2m-l-1}(\Omega)} \tag{A,5}$$

De même on a

$$g_j(t, x) = \{\widetilde{\mathcal{B}}_j(x, D_x, \zeta (ir)^d) v(x)\} \varphi(t) e^{irt} + \sum_{l=0}^{m_j-1} (ir)^l e^{irt} \{P_{l,j}(D_t) \varphi(t)\} \{Q_{l,j}(D_x) v(x)\}$$

où $P_{l,j}$ est à coefficients constants et d'ordre $\leq m_j$ et $Q_{l,j}$ est à coefficients bornés et d'ordre $\leq m_j - l - 1$. On a donc

$$|g_j|_{W_p^{2m-m_j-1/p}(R\times\Gamma)} \leq C\Big\{|\widetilde{\mathcal{B}}_j(x; D_x, \zeta(ir)^d) v|_{W_p^{2m-m_j-1/p}(\Gamma)} \; |\varphi(t) e^{irt}|_{W_p^{2m-m_j-1/p}(R)} + \sum_{k=0}^{2m-1} (1 + |r|)^{2m-k-1} |v|_{W_p^k(\Omega)}\Big\}$$

d'où

$$|g_j|_{W_p^{2m-m_j-1/p}(R\times\Gamma)} \leq C\Big\{|r|^{2m-m_j-1/p} |\widetilde{\mathcal{B}}_j(x; D_x, \zeta(ir)^d) v|_{W_p^{2m-m_j-1/p}(\Gamma)} + \sum_{k=0}^{2m-1} |r|^{2m-k-1} |v|_{W_p^k(\Omega)}\Big\} \tag{A,6}$$

pour $|r| \geq 1$.

Enfin on a évidemment

$$|u|^p_{W_p^{2m}(R\times\Omega)} \geq |u|^p_{W_p^{2m}(]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}[\times\Omega)} = \sum_{l=0}^{2m} |r|^{lp} |v|^p_{W_p^{2m-l}(\Omega)}$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{2m} |r|^{2m-k} |v|_{W_p^k(\Omega)} \leq C |u|_{W_p^{2m}(R\times\Omega)}. \tag{A,7}$$

De (A,3) - (A,7) on déduit l'inégalité suivante où on pose

$$z = \zeta i^d r^d \text{ (d'où } |z| = |r|^d) \text{ avec } r \geq 1:$$

$$\sum_{k=0}^{2m} |z|^{(2m-k)/d} |v|_{W_p^k(\Omega)} \leq C\Big\{|\widetilde{\mathcal{A}}(x; D_x, z) v|_{L_p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{m} |z|^{(2m-m_j-1/p)/d} |\widetilde{\mathcal{B}}_j(x; D_x, z) v|_{W_p^{2m-m_j-1/p}(\Gamma)} + |z|^{-1/d} \sum_{k=0}^{2m} |z|^{(2m-k)/d} |v|_{W_p^k(\Omega)}\Big\}$$

d'où (A,2) pour $|z| = |r|^{1/d}$ assez grand.

Le théorème A.1 est ainsi démontré.

A présent on considère l'opérateur $T_{z,p}$:

$$v \longrightarrow \{\tilde{\mathcal{A}}(x\,;D_x,z)\,v\,;\,\tilde{\mathcal{B}}_1(x;D_x,z)\,v,\ldots\tilde{\mathcal{B}}_m(x;D_x,z)\,v\}$$

de $W_p^{2m}(\Omega)$ dans $L_p(\Omega)\times\prod_{j=1}^{m} W_p^{2m-m_j-1/p}(\Gamma)$.

Le problème d'inverser $T_{z,p}$ correspond à un problème aux limites elliptique lorsque $z=\zeta i^d r^d$, $r\in R$, dès que les hypothèses (E_1), (E_2), (F_1), (F_2), (E ; ζ) et (F ; ζ) sont remplies; par conséquent $T_{z,p}$ a un noyau $N_{z,p}$ de dimension finie $m(z)$ (indépendante de p) et une image $I_{z,p}$ de codimension finie $n(z)$ (indépendante de p), dans l'espace $L_p(\Omega)\times\prod_{j=1}^{m} W_p^{2m-m_j-1/p}(\Gamma)$.

D'après Agaranovič-Višik [4], sous nos hypothèses $T_{z,2}$ est bijectif dès que $z=\zeta i^d r^d$ avec $|r|$ assez grand; par conséquent pour ces z, on a

$$m(z)=n(z)=0$$

et $T_{z,p}$ est bijectif aussi pour $p\neq 2$ [24]. On a donc le

THÉOREME A.2. *Sous les hypothèses* (E_1), (E_2), (F_1), (F_2), (E ; ζ) *et* (F; ζ) *l'opérateur* $T_{z,p}$ *est un isomorphisme de*

$$W_p^{2m}(\Omega)\ \textit{sur}\ L_p(\Omega)\times\prod_{j=1}^{m} W_p^{2m-m_j-1/p}(\Gamma)$$

pour tout $p\in\,]1,+\infty[$ *et* $z=\zeta i^d r^d$, $|r|$ *assez grand.* [25]

REMARQUE: On veut facilement que dans l'énoncé du théorème A.1, on peut choisir $\zeta\longrightarrow r_\zeta$ continue, car dans (A,3) on peut choisir $\zeta\longrightarrow K_\zeta$ continue.

Rabat, Maroc

---

[24] On peut obtenir ce résultat d'une autre manière en supposant de plus que le système des $\tilde{\mathcal{B}}_j(x\,;D_x,\zeta D_t^d)$ est *normal* au sens de Schecter [12]: alors le problème adjoint au problème (A,1) est aussi elliptique au sens de Agmon-Douglis-Niremberg et on peut lui appliquer le théorème A,1. L'inégalité (A,2) montre que $m(z)=0$ pour $z=\zeta i^d r^d$, $|r|$ assez grand et l'analogue de l'inégalité (A.2) pour le problème adjoint montre que $n(z)=0$ pour les mêmes z et par conséquent $T_{z,p}$ est bijectif.

[25] On peut préciser pour $|r|\geq r_\zeta$ (peut-être différent du r_ζ du théorème A.1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AGMON S: *On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems.* C.P.A.M Vol. 15 (1962) p. 119.

[2] AGMON S - DOUGLIS A-NIRENBERG L: *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations* C.P.A.M. Vol. 12 (1959) p. 623.

[3] AGMON S - NIRENBERG L: *Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach spaces.* C.P.A.M. Vol. 16 (1963) p. 121.

[4] AGRANOVIČ M S - VIŠIK M. I: *Problèmes elliptiques avec un paramètre et problèmes paraboliques de type général:* Uspehi Mat. Nauk t. 20 n⁰ 43 (1964).

[5] DUNFORD N - SCHWARTZ J. T: *Linear operators,* part I; Interscience publishers, New-York (1958).

[6] GEYMONAT G - GRISVARD F: *Problemi ai limiti ellittici negli spazi di Sobolev con peso* (à paraître)

[7] GRISVARD P: *Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications,* Journal de Mathématiques, fascicules 3 et 4 (1966).

[8] GRISVARD P: *Problèmes aux limites résolus par le calcul opérationnel* C.R. Acad. Sc. Paris t. 262, (1966) p. 1306.

[9] KATO T. *Semi-groups and temporally inhomogeneous evolution equations* C.I.M.E I⁰ ciclo Varenne (1963).

[10] LIONS J L - MAGENES E: *Problemi ai limiti non omogenei (III)* Annali della S.N.S. di Pisa Vol. XV p. 39 (1961).

[11] LIONS J L - PEETRE J: *Sur une classe d'espaces d'interpolation* I.H.E.S. Paris n⁰ 19.

[12] SCHECTER M: *General boundary value problems for elliptic differential equations.* C.P.A.M. Vol. 12 (1959) p. 561.

[13] SOBOLEVSKII P. E: *Inégalités de coercivité pour une équation parabolique abstraite.* Doklady Akad. Nauk t. 157 n⁰ 1 p. 52 (1964).