

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

ANTONIO CHIFFI

**Correnti irriducibili**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 21, n° 1 (1967), p. 99-106*

<[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1967\\_3\\_21\\_1\\_99\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1967_3_21_1_99_0)>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# CORRENTI IRRIDUCIBILI

ANTONIO CHIFFI

Data una definizione di corrente « irriducibile » (def. 1), dimostriamo che ogni corrente  $k$ -dimensionale di  $R^n$  intera e chiusa è uguale alla somma di un numero finito o una infinità numerabile di correnti irriducibili, la cui somma delle masse è uguale alla massa della corrente considerata.

Seguiamo, per le *forme differenziali*  $\omega \in E^k(R^n)$  di grado  $k$  e di classe  $\infty$  su  $R^n$  e per le *correnti*  $T \in E_k(R^n)$  sulle forme di  $E^k(R^n)$ , le definizioni e il simbolismo di: Federer e Fleming: *Normal and integral currents*, *Annals of Mathematics*, vol. 72 (1960), pp. 458-520; indicheremo in particolare con  $I_k(R^n)$  la famiglia delle correnti intere di  $E_k(R^n)$ .

Supporremo che sia  $0 < k < n$ . Diremo che la corrente  $T \in E_k(R^n)$  è *chiusa* se  $\partial T = 0$ . Indicheremo con  $Z_k(R^n)$  la famiglia delle correnti di  $I_k(R^n)$  che sono chiuse.

**DEFINIZIONE 1.** Diremo che la corrente  $T \in E_k(R^n)$  è *riducibile* se appartiene a  $Z_k(R^n)$  e se esistono le correnti non nulle  $T_1$  e  $T_2$  di  $Z_k(R^n)$  tali che:

$$T = T_1 + T_2 \quad M(T) = M(T_1) + M(T_2).$$

Diremo che la corrente  $T \in E_k(R^n)$  è *irriducibile* se appartiene a  $Z_k(R^n)$  e non è riducibile.

**DEFINIZIONE 2.** Sia  $T \in Z_k(R^n)$ ; indichiamo con  $\mathcal{G}(T)$  la famiglia delle successioni  $(T_i)_{i \in N}$ , di correnti  $T_i \in Z_k(R^n)$ , tali che:

- (1) 
$$T = \sum_i T_i$$
- (2) 
$$M(T) = \sum_i M(T_i)$$
- (3) 
$$M(T_i) \geq M(T_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Detto  $p$  un intero, indichiamo con  $\mathcal{G}_p(T)$  la sottofamiglia di  $\mathcal{G}(T)$  delle successioni  $(T_i)$  tali che al più  $p$  delle correnti  $T_i$  siano diverse da zero; cioè:

$$T_{p+h} = 0 \quad h = 1, 2, \dots$$

Si ha:

$$(4) \quad \mathcal{G}_p(T) \subset \mathcal{G}_{p+1}(T).$$

**DEFINIZIONE 3.** Sia  $T \in Z_k(\mathbb{R}^n)$ ; consideriamo il funzionale definito su  $\mathcal{G}(T)$ :

$$\mathcal{F}_T((T_i)_{i \in N}) = \sum_i [M(T_i)]^{(k+1)/k} \quad ((T_i)_{i \in N} \in \mathcal{G}(T)).$$

Poniamo:

$$\gamma = \inf \{ \mathcal{F}_T((T_i)_{i \in N}) : (T_i) \in \mathcal{G}(T) \}$$

$$\gamma_p = \inf \{ \mathcal{F}_T((T_i)_{i \in N}) : (T_i) \in \mathcal{G}_p(T) \}.$$

I risultati del presente lavoro si possono riassumere nel seguente:

**TEOREMA 4.** Sia  $T \in Z_k(\mathbb{R}^n)$ ; il funzionale  $\mathcal{F}_T$  ha minimo in  $\mathcal{G}(T)$ ; se  $(T_i) \in \mathcal{G}(T)$  è una successione tale che:

$$\mathcal{F}_T((T_i)_{i \in N}) = \gamma$$

le correnti della successione  $(T_i)$  sono tutte irriducibili.

La dimostrazione del precedente teorema seguirà dalle seguenti proposizioni 5-10.

**LEMMA 5.** Sia  $T \in Z_k(\mathbb{R}^n)$ ; ha luogo l'uguaglianza:

$$(5) \quad \inf \{ \mathcal{F}_T((T_i)_{i \in N}) : (T_i) \in \mathcal{G}(T) \} = \liminf_{p \rightarrow \infty} \{ \mathcal{F}_T((T_i)_{i \in N}) : (T_i) \in \mathcal{G}_p(T) \}.$$

La successione  $(\gamma_p)$  della definizione 3 ha limite per la (4) e si ha subito:

$$(6) \quad \gamma \leq \lim_p \gamma_p.$$

Per verificare la disuguaglianza opposta alla (6), consideriamo una successione  $(T_i) \in \mathcal{G}(T)$  e, fissato  $\sigma > 0$ , determiniamo un intero  $p > 0$  tale che si abbia:

$$\sum_{i \geq p} M(T_i) < \sigma^{k/(k+1)}$$

Si ha, tenendo presente la definizione di  $\gamma_p$ :

$$\sum_i [M(T_i)]^{(k+1)/k} > \sum_{i=1}^{p-1} [M(T_i)]^{(k+1)/k} + [\sum_{i \geq p} M(T_i)]^{(k+1)/k} - \sigma \geq \gamma_p - \sigma \geq \lim_p \gamma_p - \sigma$$

e per l'arbitrarietà di  $\sigma$  segue :

$$(7) \quad \gamma \geq \lim_p \gamma_p.$$

Le (6) e (7) dimostrano la (5).

**TEOREMA 6.** *Sia  $T \in Z_k(R^n)$ ; il funzionale  $\mathcal{F}_T$  ristretto a  $\mathcal{G}_p(T)$  ha minimo per ogni  $p$ .*

Le masse delle correnti di ogni successione  $(T_i) \in \mathcal{G}_p(T)$  sono equilimate da  $M(T)$  e i loro supporti sono contenuti nel supporto di  $T$ . Se infatti  $(T_i) \in \mathcal{G}_p(T)$ , si ha :

$$M(T_i) = \|T_i\|(\text{supporto } T) + \|T_i\|(R^n - \text{supporto } T) \quad (i = 1, \dots, p)$$

e, sommando rispetto a  $i$  :

$$M(T) \geq M(T) + \sum_i \|T_i\|(R^n - \text{supporto } T)$$

e da questa segue subito :

$$\|T_i\|(R^n - \text{supporto } T) = 0 \quad (i = 1, \dots, p).$$

Sia  $((T_{mi})_{i \in N})_{m \in N}$  una successione di elementi di  $\mathcal{G}_p(T)$  tali che :

$$(8) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{F}_T((T_{mi})_{i \in N}) = \gamma_p.$$

Si tenga presente che ogni elemento di  $\mathcal{G}_p(T)$  è formato da al più  $p$  correnti non nulle, per cui possiamo scrivere :

$$(T_{mi})_{i \in N} = (T_{m1}, \dots, T_{mp})$$

Esiste, per noti teoremi di compattezza<sup>(1)</sup>, una successione monotona di indici  $(m(j))_{j \in N}$  tale che le successioni  $(T_{m(j), i})_{j \in N}$  convergano debolmente alle correnti

$$S_i \in Z_k(R^n) \quad (i = 1, \dots, p)$$

ed inoltre esistano i limiti :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} M(T_{m(j), i}) \quad (i = 1, \dots, p)$$

---

<sup>(1)</sup> Cfr. FEDERER and FLEMING: *Normal and integral currents*. *Annals of Mathematics*, vol. 72 (1960) pp. 458-520; teor. 8.13 a pag. 499.

Si verifica subito l'uguaglianza :

$$(9) \quad T = \sum_{i=1}^p S_i.$$

Per la subadditività di  $M$  si ha :

$$(10) \quad M(T) \leq \sum_i M(S_i)$$

mentre per la semicontinuità di  $M$  si deduce

$$(11) \quad M(T) = \sum_{i=1}^p M(T_{m(j),i}) \geq \sum_i \lim_{j \rightarrow \infty} M(T_{m(j),i}) \geq \sum_i M(S_i).$$

Dalle (10) e (11) segue :

$$(12) \quad M(T) = \sum_i M(S_i)$$

e, sempre dalla (11), si deduce :

$$(13) \quad M(S_i) = \lim_{j \rightarrow \infty} M(T_{m(j),i}) \quad (i = 1, \dots, p).$$

Per la (13) si ha :

$$(14) \quad M(S_i) \geq M(S_{i+1}) \quad (i = 1, \dots, p-1).$$

Le (9), (12) e (14) dimostrano che  $(S_i)_{i \in N} \in \mathcal{G}_p(T)$ ; dalla (13) e dalla (8) si deduce :

$$(15) \quad \gamma_p = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{F}_T((T_{m,i})_{i \in N}) \geq \sum_i \lim_{j \rightarrow \infty} [M(T_{m(j),i})]^{k+1/k} = \mathcal{F}_T((S_i)_{i \in N})$$

e la (15) dimostra che  $(S_i)$  rende minimo  $\mathcal{F}_T$  ristretto a  $\mathcal{G}_p(T)$ .

LEMMA 7. Sia  $T \in Z_k(\mathbb{R}^n)$  e  $(T_i)_{i \in N}$  una successione di  $\mathcal{G}(T)$ ; per ogni intero  $h > 0$  è verificata la disuguaglianza :

$$(16) \quad \sum_{i > h} [M(T_i)]^{(k+1)/k} < k [M(T)]^{(k+1)/k} h^{-1/k}.$$

Per la definizione 2 e, in particolare, per la (3), si ha :

$$M(T_i) \leq M(T)/i$$

e da questa disuguaglianza, con facili calcoli, segue :

$$\sum_{i > h} [M(T_i)]^{(k+1)/k} \leq [M(T)]^{(k+1)/k} \sum_{i > h} i^{-(k+1)/k} < k [M(T)]^{(k+1)/k} h^{-1/k}.$$

**TEOREMA 8.** *Sia  $T \in Z_k(R^n)$ ; il funzionale  $\mathcal{F}_T$  definito su  $\mathcal{G}(T)$  ha minimo.*

Per il teorema 6 per ogni intero  $p > 0$  esiste una successione di elementi di  $\mathcal{G}_p(T) : (S_{pi})_{i \in N}$  (dove al più  $p$  delle correnti  $S_{p1}, S_{p2}, \dots$  sono non nulle) tali che :

$$(17) \quad \mathcal{F}_T((S_{pi})_{i \in N}) = \gamma_p \quad (p = 1, 2, \dots)$$

La successione di correnti di indice  $p : (S_{pi})_{p \in N}$  è formata da correnti di massa equilimitata e aventi il supporto contenuto nel supporto di  $T$ ; esiste allora<sup>(2)</sup> una successione di indici  $(p(1, m))_{m \in N}$  tale che la successione  $(S_{p(1, m), 1})_{m \in N}$  converga debolmente ad una corrente  $S_1 \in Z_k(R^n)$ . Per la stessa ragione dalla successione di indici  $(p(1, m))$  si potrà estrarre una sottosuccessione  $(p(2, m))$  tale che la successione di correnti  $(S_{p(2, m), 2})_{m \in N}$  converga ad una corrente  $S_2 \in Z_k(R^n)$  e così via.

Consideriamo la successione diagonale  $(p(m, m))$ : esiste una successione  $(S_i)$  di correnti  $S_i \in Z_k(R^n)$  tale che si abbia, nel senso della convergenza debole :

$$(18) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} S_{p(m, m), i} = S_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

Inoltre si può fare in modo che le successioni :  $(p(1, m))_{m \in N}, (p(2, m))_{m \in N}, \dots$  siano tali che esistano i limiti :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M(S_{p(i, m), i}) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

e perciò anche il limite :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M(S_{p(m, m), i}) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

Fissato l'intero  $h > 0$  ed un insieme  $\Gamma$  compatto e convesso contenente il supporto di  $T$ , per ogni coppia di indici  $m$  e  $i$ , con  $h < i \leq p(m, m)$  esiste<sup>(3)</sup> una corrente  $V_{m, i} \in I_{k+1}(R^n)$  tale che :

$$(19) \quad \text{supporto } V_{m, i} \subset \Gamma \quad (h < i \leq p(m, m))$$

<sup>(2)</sup> Loc. cit. (4).

<sup>(3)</sup> Loc. cit. (4), teor. 6.1 a pag. 482 e 6.2 a pag. 485.

$$(20) \quad \partial V_{m,i} = S_{p(m,m),i}$$

$$(21) \quad M(V_{m,i}) \leq C [M(S_{p(m,m),i})]^{(k+1)/k}$$

con  $C$  costante dipendente solo dalle dimensioni  $n$  e  $k$ .

Per  $i > p(m, m)$  le correnti  $S_{p(m,m),i}$  sono nulle e perciò possiamo porre:

$$V_{m,i} = 0 \quad (i > p(m, m)).$$

Fissato  $h > 0$ , per ogni  $m$  poniamo:

$$(22) \quad U_{m,h} = \sum_{i>h} V_{m,i}.$$

Dalla (21), (20) e dal lemma 7 si deduce:

$$(23) \quad M(U_{m,h}) \leq \sum_{i>h} M(V_{m,i}) \leq Ck [M(T)]^{(k+1)/k} h^{-1/k}.$$

Per ogni fissato  $h$  le correnti della successione di indice  $m : (U_{m,h})_{m \in N}$  hanno masse equilimate e, per la (19), il supporto contenuto in uno stesso insieme compatto; esiste allora <sup>(4)</sup> per ogni  $h$  una successione di indici  $(m_r(h))_{r \in N}$  ed una corrente  $U_h$  tale che si abbia, tenuta anche presente la (23):

$$\lim_r U_{m_r(h),h} = U_h \quad (h = 1, 2, \dots)$$

$$(24) \quad M(U_h) \leq Ck [M(T)]^{(k+1)/k} h^{-1/k}.$$

Per la (24) la successione  $(\partial U_h)$  tende debolmente a zero; ma per le uguaglianze, valedoli per le (22) e (20):

$$(25) \quad \partial U_{m,h} = \sum_{i>h} S_{p(m,m),i} = T - \sum_{i \leq h} S_{p(m,m),i}$$

e per l'altra, conseguenza delle (25) e (18):

$$\partial U_h = T - \sum_{i \leq h} S_i.$$

segue:

$$(26) \quad T = \sum_i S_i.$$

---

<sup>(4)</sup> Loc. cit. (4).

Fissato l'indice  $h$ , dalle ovvie relazioni :

$$M(T) = \sum_i M(S_{p(m, m), i}) \geq \sum_{i \leq h} M(S_{p(m, m), i})$$

e dalle disuguaglianze, valide per la (18) :

$$(27) \quad M(T) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i \leq h} M(S_{p(m, m), i}) \geq \sum_{i \leq h} M(S_i)$$

segue :

$$(28) \quad M(T) \geq \sum_i M(S_i).$$

Dalla (28) e dalla ovvia disuguaglianza opposta segue :

$$(29) \quad M(T) = \sum_i M(S_i).$$

Dalle (27) e (29) si ottiene :

$$M(S_i) = \lim_{m \rightarrow \infty} M(S_{p(m, m), i})$$

$$(30) \quad M(S_{i+}) \leq M(S_i).$$

Le (26), (29) e (30) dimostrano che  $(S_i)$  appartiene a  $\mathcal{G}(T)$ .

Tenendo presente il lemma 5 e la (17) si verificano subito le relazioni :

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_p \gamma_p = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_i [M(S_{p(m, m), i})]^{(k+1)/k} \geq \\ &\geq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i \leq h} [M(S_{p(m, m), i})]^{(k+1)/k} \geq \sum_{i \leq h} [M(S_i)]^{(k+1)/k} \end{aligned}$$

e da questa segue subito :

$$(31) \quad \gamma \geq \sum_i [M(S_i)]^{(k+1)/k} = \mathcal{F}_T((S_i)_{i \in N}).$$

La (31) e la ovvia disuguaglianza opposta dimostrano il presente teorema.

**OSSERVAZIONE 9.** Se  $a$  e  $b$  sono due numeri non negativi ed è  $\alpha > 1$ , si ha :

$$(32) \quad (a + b)^\alpha \geq a^\alpha + b^\alpha$$

e nella (32) vale il segno di uguaglianza se e solo se uno al più dei numeri  $a$  e  $b$  è diverso da zero.

TEOREMA 10. Sia  $T \in Z_k(R^n)$ ,  $(S_i) \in \mathcal{G}(T)$  e si abbia :

$$(33) \quad \mathcal{F}_T((S_i)_{i \in N}) = \gamma$$

allora le correnti della successione  $(S_i)$  sono irriducibili.

Sia, per assurdo,  $S_r$  una corrente riducibile della successione  $(S_i)$ ; esistono due correnti non nulle  $S_{r_1}$  e  $S_{r_2}$  di  $Z_k(R^n)$  tali che:  $S_r = S_{r_1} + S_{r_2}$ ,  $M(S_r) = M(S_{r_1}) + M(S_{r_2})$  e si avrebbe, per l'osservazione 9 :

$$[M(S_r)]^{(k+1)/k} > [M(S_{r_1})]^{(k+1)/k} + [M(S_{r_2})]^{(k+1)/k}.$$

Esisterebbe allora una successione  $(T_i) \in \mathcal{G}(T)$  tale che  $\mathcal{F}_T((T_i)_{i \in N}) < \mathcal{F}_T((S_i)_{i \in N})$  e ciò è assurdo per la (33).

I teoremi 8 e 10 equivalgono al teorema 4; da questo segue subito:

TEOREMA 11. Sia  $T \in Z_k(R^n)$ ; esiste una successione  $(S_i)$ , eventualmente finita, di correnti  $S_i \in Z_k(R^n)$ , irriducibili, tali che :

$$T = \sum_i S_i$$

$$M(T) = \sum_i M(S_i).$$