Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Mario Poletti

Differenziali esatti di prima specie su varietà abeliane

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 21, nº 1 (1967), p. 107-110

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1967_3_21_1_107_0>

DIFFERENZIALI ESATTI DI PRIMA SPECIE SU VARIETÀ ABELIANE

di Mario Poletti

Sia k un corpo algebricamente chiuso di caratteristica $p \neq 0$, ed A una varietà abeliana (non singolare) su k, di dimensione n e codimensione separabile f (cfr. [3], cap. 6). Indichiamo con $e(A)$ la dimensione dello spazio vettoriale su k formato dai differenziali esatti di prima specie su A, o anche la dimensione dello spazio vettoriale su k formato dalle derivazioni invarianti su A la cui p-esima potenza è nulla. La definizione di $e(A)$ è data da I. Barsotti nell'introduzione di [1]; in tale lavoro (cfr. th. 4.4 e considerazioni seguenti, pg. 167, 168) viene provato che e, quando non è nullo, non è invariante per isogenie (mentre f è sempre invariante per isogenie), e viene posta la questione se esista sempre una varietà abeliana B isogena ad A tale che $e(B)+f=n$. I. Barsotti in [2] (cfr. 8.2, pg. 38) propone nuovamente il problema ed asserisce che l'essere $\mathcal{R}_r A$ prodotto tensoriale completo di vari $\mathcal{R}_{1,1}$ è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una varietà abeliana B isogena ad A e tale che $e(B)+f=n$; la dimostrazione completa di questo asserto è data in [3], teorema 7.41 (appendice del capitolo 7, pg. 354). Tenuto conto di ciò e del fatto che I. Manin ha mostrato in [4], con esempi di jacobiane, che ogni $\mathcal{R}_{r,s}$ è fattore tensoriale di $\mathcal{R} B$, per una opportuna varietà abeliana B, la questione posta in [1] ha quindi risposta negativa, come del resto era già stato osservato da I. Manin in una nota aggiunta a [5]. F. Oort in [6] (cfr. pg. II.15-10) pone la congettura che se $\mathcal{R} A$ è isomorfo a $\overline{\times}_i \mathcal{R}_{r_i, s_i}$ allora $e(A) \leq \Sigma_i \min(r_i, s_i)$. Alla luce dei risultati ottenuti da I. Barsotti in [3], tale congettura viene dimostrata vera nel presente lavoro. Le notazioni usate sono quelle di [3]; in particolare, K, K', t, π, T, Π sono definiti nel n^0 16, cap. 3 di [3].

Osservazione. *Siano r, s interi positivi primi tra loro. Se $r \leq s$, esiste un K-modulo canonico N isogeno ad $N_{r,s}$ tale che $tN \subseteq \pi N$. Se $s \leq r$, esiste un K-modulo canonico N isogeno ad $N_{r,s}$ tale che $\pi N \subseteq tN$.*

Pervenuto alla Redazione il 7 Settembre 1966.

DIM. Sia $\mathcal{N}_{r,s} = K' N_{r,s}$, e sia $\{x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s\}$ una base canonica di $N_{r,s}$, come definita al n⁰ 18 di [3]. Se $r \leq s$, il K-modulo canonico N incluso in $\mathcal{N}_{r,s}$, un cui sistema di generatori come Π-modulo è dato da $\{x_r, \pi^{-1} x_{r-1}, \ldots, \pi^{-r+1} x_1\}$, gode delle proprietà richieste. Se $s \leq r$, il K-modulo canonico N incluso in $\mathcal{N}_{r,s}$, un cui sistema di generatori come T-modulo è dato da $\{y_1, t^{-1} y_2, \ldots, t^{-s+1} y_s\}$, gode delle proprietà richieste, C. V. D..

Dato un K-modulo canonico M, indichiamo con $\lambda(M)$ il massimo di $lungh\, H/(tH + \pi H)$ al variare di H tra i K-moduli canonici isogeni ad M; tale $\lambda(M)$ esiste perchè $lungh\, H/(tH + \pi H) \leq lungh\, H/\pi H = dim\, H = dim\, M$.

LEMMA. *Sia M un K-modulo canonico tale che $M = M_r$, isogeno a $\bigoplus_{i=1}^{h} N_{r_i, s_i}$. Si ha $\lambda(M) = \sum_{i=1}^{h} \min(r_i, s_i)$.*

DIM. Se per ogni i si ha $r_i \leq s_i$, a norma dell'osservazione esiste, per $i = 1, \ldots, h$, un K-modulo canonico N_i isogeno ad N_{r_i, s_i} e tale che $tN_i \subseteq \pi N_i$; allora $N = \bigoplus_{i=1}^{h} N_i$ è un K-modulo canonico isogeno ad M e tale che $tN \subseteq \pi N$. Per ogni K-modulo canonico H isogeno ad M si ha $lungh\, H/(tH + \pi H) \leq$ $\leq lungh\, H/\pi H = dim\, H = \sum_{i=1}^{h} r_i$. Inoltre $lungh\, N/(tN + \pi N) = lungh\, N/\pi N =$ $= dim\, N = \sum_{i=1}^{h} r_i$. Si conclude che $\lambda(M) = \sum_{i=1}^{h} r_i = \sum_{i=1}^{h} \min(r_i, s_i)$.

Se per ogni i si ha $s_i \leq r_i$, la dimostrazione dell'asserto si ottiene da quella del caso precedente sostituendovi ogni t con π, ogni π con t, ogni r_i con s_i, e *dim* con *codim*.

Se per alcuni i si ha $r_i < s_i$ e per altri si ha $s_i \leq r_i$, poniamo per esempio $\bigoplus_{i=1}^{h} N_{r_i, s_i} = \left(\bigoplus_{i=1}^{d} N_{r_i, s_i}\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=d+1}^{h} N_{r_i, s_i}\right)$, con $r_i < s_i$ per $i = 1, \ldots, d$, ed $s_i \leq r_i$ per $i = d+1, \ldots, h$. Dato un qualsiasi K-modulo canonico H isogeno ad M, si ha $lungh\, H/(tH + \pi H) \leq \sum_{i=1}^{h} \min(r_i, s_i)$. Sia infatti N un sotto-K-modulo canonico di H isogeno a $\bigoplus_{i=1}^{d} N_{r_i, s_i}$, e tale che $N \cap tH = tN$, ottenuto ad esempio prendendo un qualsiasi sotto-K-modulo canonico B di H, isogeno a $\bigoplus_{i=1}^{d} N_{r_i, s_i}$, e ponendo $N = H \cap K' B$; per quanto già dimostrato si ha $\lambda(N) = \sum_{i=1}^{d} r_i$. Siccome $(\pi N + tN) \cap tH \subseteq N \cap tH = tN$, e $(\pi N + tN) \cap tH \supseteq tN \cap tH = tN$, si ha $(\pi N + tN) \cap tH = tN$, e quindi risulta $lungh\, (\pi H + tH)/tH \geq lungh\, (\pi N + tN + tH)/tH =$

$lungh (\pi N + tN)/(\pi N + tN) \cap tH = lungh\ (\pi N + tN)/tN = lungh\ N/tN \ |$ $lungh\ N/(\pi N + tN)$. Siccome $lungh\ N/tN = codim\ N = \sum_{i=1}^{d} s_i$, e $lungh\ N/(\pi N + tN) \leq \lambda(N) = \sum_{i=1}^{d} r_i$, si ha $lungh\ (\pi H + tH)/tH \geq \sum s_i - \sum_{i=1}^{d} r_i = \sum_{i=1}^{d} (s_i - r_i)$. Ricordando che $lungh\ H/tH = codim\ H = \sum_{i=1}^{h} s_i$, si ottiene $lungh\ H/(\pi H + tH) = lungh\ H/tH - lungh\ (\pi H + tH)/tH \leq \sum_{i=1}^{h} s_i - \sum_{i=1}^{d} (s_i - r_i) = \sum_{i=1}^{d} r_i + \sum_{i=d+1}^{h} s_i = \sum_{i=1}^{h} \min(r_i, s_i)$. Tenuto conto dei casi particolari già dimostrati, esistono un K-modulo canonico R isogeno a $\bigoplus_{i=1}^{d} N_{r_i, s_i}$ tale che $lungh\ R/(\pi R + tR) = \sum_{i=1}^{d} r_i$, ed un K-modulo canonico S isogeno a $\bigoplus_{i=d+1}^{h} N_{r_i, s_i}$ tale che $lungh\ S/(\pi S + tS) = \sum_{i=d+1}^{h} s_i$; posto quindi $B = R \oplus S$, si ha $lungh\ B/(\pi B + tB) = lungh\ R/(\pi R + tR) + lungh\ S/(\pi S + tS) = \sum_{i=1}^{d} r_i + \sum_{i=d+1}^{h} s_i = \sum_{i=1}^{h} \min(r_i, s_i)$. Si conclude che $\lambda(M) = \sum_{i=1}^{h} \min(r_i, s_i)$, C.V.D..

TEOREMA. *Sia A una varietà abeliana, e sia $\mathcal{R} A \cong \times_i \mathcal{R}_{r_i, s_i}$; allora $e(A) \leq \Sigma_i \min(r_i, s_i)$. Esiste inoltre una varietà abeliana B isogena ad A e tale che $e(B) = \Sigma_i \min(r_i, s_i)$.*

DIM. Posto $N = \mathcal{C}'\,{}^{\pi}\widetilde{R}A$ (vedasi n° 66 di [3] per le notazioni), le derivazioni invarianti di A sono le applicazioni $x \to d_0 x$ di $k(A)$ in sè, tali che d_0 sia la componente di indice 0 di un $d \in N$ (cfr. per esempio i casi 1 e 3 del n° 55 di [3]); l'essere $\pi d_0 = 0$ significa che $\pi d \in tN$, nel qual caso $d \in N_r$. Di conseguenza, detto V l'insieme dei d di N_r tali che $\pi d \in tN_r$, e detto V' l'insieme dei d di $K' N_r$ tali che $\pi d \in tN_r$, tenuto conto che $V = N_r \cap V'$ e che $\pi V' = tN_r$, si ha $e(A) = lungh\ V/tN_r = lungh\ N_r \cap V'/tN_r = lungh\ N_r/tN_r - lungh\ N_r/N_r \cap V'$, ed inoltre $lungh\ N_r/N_r \cap V' = lungh\ \pi N_r/\pi(N_r \cap V') = lungh\ \pi N_r/\pi N_r \cap \pi V' = lungh\ \pi N_r/\pi N_r \cap tN_r = lungh\ (\pi N_r + tN_r)/tN_r$. Pertanto si ha $e(A) = lungh\ N_r/tN_r - lungh\ (\pi N_r + tN_r)/tN_r = lungh\ N_r/(\pi N_r + tN_r)$. Ciò posto, siccome N_r è isogeno a $\oplus_i N_{r_i, s_i}$ (ove la somma si intende qui estesa solo agli i tali che la coppia (r_i, s_i) sia diversa da $(0, 1)$ e da $(1, 0)$), il primo asserto è conseguenza del lemma. Il secondo asserto è conseguenza del lemma e del fatto che, dato un qualsiasi K-modulo canonico M isogeno ad N_r, esiste una varietà abeliana B, isogena ad A, tale che $(\mathcal{C}'\,{}^{\pi}\widetilde{R}B)_r \cong M$ (cfr. il 2. 4 di [1]), C. V. D..

Università di Pisa

BIBLIOGRAFIA

[1] I. BARSOTTI, *Abelian varieties over fields of positive characteristic,* Rend. Circ. Matem. Palermo, 5, 1956, p. 145.

[2] I. BARSOTTI, *Risultati e problemi nella teoria delle varietà gruppali,* Rend. Sem. Matem. Messina, 4, 1958-59, p. 1.

[3] I. BARSOTTI, *Metodi analitici per varietà abeliane in caratteristica positiva,* Ann. Scuola Norm. Sup.: *capp.* 1, 2 in 14, 1964, p. 1; *capp.* 3, 4 in 19, 1965, p. 277; *cap.* 5 ini 19, 1965, p. 481; *cap.* 6 in 20, 1966, p. 101; *cap.* 7 in 20, 1966, p. 331.

[4] IU. I. MANIN, *Teoria dei gruppi commutativi formali di caratteristica finita* (russo), Uspek Matem. Nauk, 18, 1963, n^0 6 (114); tradotto in inglese in Russiam Math. Surveys, 18, 1963, n^0 6.

[5] IU. I. MANIN, *Teoria delle varietà abeliane su corpi di caratteristica finita,* Izvestia Akademii Nauk SSSR, 26, 1962, p. 281.

[6] F. OORT, *Commutative group schemes,* Lecture notes in mathematics n^0 15, 1966.