ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SVEN SPANNE

Sur l'interpolation entre les espaces $\mathcal{L}_k^{p\Phi}$

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 20, nº 3 (1966), p. 625-648

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1966_3_20_3_625_0>

SUR L'INTERPOLATION ENTRE LES ESPACES $\mathcal{L}_k^{p\Phi}$

SVEN SPANNE

0. Introduction.

Des espaces de fonctions de type $\mathcal{L}_k^{p\Phi}(\Omega)$ ont été étudiés récemment par plusieurs auteurs (F. John et L. Nirenberg [12], Campanato [3], [4] Meyers [19], Da Prato [9], Spanne [25]) Ces espaces comprennent entre autres les espaces L_p et C^α et les espaces de Morrey $L^{p,\lambda}$ Dans [26], Stampacchia a démontré des théorèmes d'interpolation pour des applications des espaces L_p dans les espaces $\mathcal{L}_0^{p,\lambda}(\Omega)$ qui entrainent des théoremes d'interpolation où les espaces image sont de types différents, notamment des espaces L_p et C^α. Ces théorèmes ont été généralisés par Campanato [5] et par Campanato et Murthy [7], qui emploient la méthode de Stampacchia, et par Grisvard [10] et par Peetre [22], qui en utilisant la théorie des espaces de Sobolev-Besov, obtiennent des résultats pour des applications des espaces de Banach généraux dans les espaces L_p et C^α.

L'origine de notre travail est un essai de retrouver les résultats généraux de Grisvard et Peetre sans sortir du cadre des espaces $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}$. Ceci est possible, et en même temps nos méthodes sont plus simples, même dans le cas original de Stampacchia. Dans [26], [5] et [7], les auteurs ont entièrement refait les démonstrations des théorèmes classiques de Marcinkiewicz et de M. Riesz-Thorin. Ceci n'est pas nécessaire ; en effet notre premier résultat principal, le théorème 4.1 montre :

Etant donné un théorème d'interpolation pour les espaces L_p, il en résulte un théorème correspondant pour les espaces $\mathcal{L}_k^{p\Phi}$.

En particulier, les résultats dans [26], [5] et [7] sont des conséquences immédiates des théorèmes classiques ci-dessus.

En outre, nous trouvons des généralisations au cas 'abstrait' (des applications définies dans des espaces de Banach généraux) qui étendent les résultats de Grisvard et de Peetre. Ces auteurs utilisent seulement la méthode des espaces de moyennes (de Lions et Peetre) et ne traitent pas les espaces de Morrey, tandis que nous pouvons utiliser n'importe quelle mé-

Pervenuto alla Redazione il 16 Marzo 1966.

thode d'interpolation (par exemple celle de Calderon) et aussi des espaces $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}$ généraux (même des espaces $\mathcal{L}_k^{p,\Phi}$, extension pourtant peu essentielle).

Pour obtenir les théorèmes d'interpolation entre les espaces L_p et C^α, il faut aussi regarder un cas limite, l'espace de John et Nirenberg, $\mathcal{E}_0 = \mathcal{L}_k^{p,n}$. Stampacchia [26] donne un résultat, son théorème 3.1, pour l'interpolation entre les espaces $\mathcal{E}_0$ et L_p. Pourtant, la démonstration dans [26] n'est pas complète, (ce qui a été remarqué aussi par Campanato), en outre, ce théorème n'est pas le meilleur possible. Au n^0 5 nous donnons une généralisation, le th. 5.2, en employant une famille d'espaces introduite par John et Nirenberg [12]. Pendant la rédaction de cet article il est paru l'article [27] de Stampacchia qui contient entre autre un résultat, th. 3.1, qui est relaté à notre th. 5.2. La démonstration de Stampacchia utilise d'abord une méthode complexe et puis le théorème de Marcinkiewicz, donc une méthode réelle. Son résultat est réstreint aux scalaires complexes. Notre méthode est purement réelle et marche aussi pour les scalaires réelles et dans le cas 'abstrait'.

Au n^0 6, nous appliquons nos résultats généraux au théorème de Stampacchia-Grisvard, et au n^0 7, nous donnons une nouvelle démonstration d'un théorème bien connu de Calderon-Zygmund-Hörmander sur les opérateurs de convolution dans L_p. Ce résultat est assez proche à celui de Peetre [23] sur des opérateurs de convolution (de type transformation de Hilbert) qui laissent invariants les espaces $\mathcal{L}_k^{p\Phi}$, et à des résultats analogues pour les opérateurs de type potentiel, prouvés par l'auteur (inédit).

Dans la note polycopiée de Kree [15], il y a des résultats qui contiennent quelques cas spéciaux de notre th. 4.1, mais obtenus par une méthode plus compliquée (essentiellement celle de Stampacchia) et restreints à la méthode des espaces de moyennes. Nos méthodes s'appliquent aussi bien à la situation générale de Kree, comme nous le montrons au n^0 8. Comme une application, nous complètons la demonstration du th. 3.1 de Stampacchia [26]. Ce résultat n'est pas contenu dans Stampacchia [27].

1. Quelques lemmes préliminaires.

On désigne par $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des polynômes de degré $\leq k$ (à coéfficients réels ou complexes, suivant le cas) et par $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des réstrictions, à l'ensemble mesurable borné E, des polynômes dans $\mathcal{P}_k$. On choisit une base $(\varphi_j)_{j=1}^l$ dans $\mathcal{P}_k(E)$, orthonormée par rapport au produit scalaire $(f,g)_E = \int_E f\overline{g}\,dx$. Pour a dans $L_1^{\mathrm{loc}}(R^n)$ (ou bien dans $L_1(E)$) on pose

$$M_k(E)\,a = \sum_{j=1}^{l} (a, \varphi_j)_E\, \varphi_j \tag{1.1}$$

L'opérateur linéaire $M_k(E)$ ne dépend pas du choix de base dans $\mathcal{P}_k(E)$, c'est la projection orthogonale sur $\mathcal{P}_k(E) \subset L_2(E)$. En particulier [1],

$$M_0(E)\,a = \frac{1}{m(E)} \int_E a\,dx\,.$$

Soit $I(x, r)$ la boule $\{|\,y \in R^n\,|\,|x-y| \leq r\}$. On va étudier $M_k(E)$ comme opérateur de $L_p(E)$ dans $L_p(E)$, $1 \leq p \leq \infty$, pour des sousensembles assez grands d'un $I(x, r)$ donné.

REMARQUE : On peut employer des normes differentes dans R^n, ce qui ne change rien dans le suivant. En particulier, au n^0 6 on va employer la norme $|x| = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, alors les 'boules' sont des cubes. (Voir Campanato [6], appendice I).

LEMME 1.1. Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $E \subset I(x, r)$, tel que $m(E) > Ar^n$, $A > 0$. Alors il existe une constante C, ne dependente que de A, k, n telle que

$$\sup_{y \in I(x, r)} |p(y)| \leq C r^{-\frac{n}{q}} \|p\|_{Lq(E)} \tag{1.2}$$

pour chaque p dans $\mathcal{P}_k$.

DÉMONSTRATION :

Soit $p(y) = \sum\limits_{|\alpha| \leq k} a_\alpha (y-x)^\alpha$. D'apres un lemme de De Giorgi (Campanato [4], p. 140) il existe une constante $c = c(k, n, A)$ telle que

$$|a_\alpha| \leq C r^{-\frac{n}{q} - |\alpha|} \|p\|_{L_q(E)}$$

Alors

$$|p(y)| \leq \sum_{|\alpha| \leq k} |a_\alpha|\,|y-x|^{|\alpha|} \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} r^{-\frac{n}{q} - |\alpha|} r^{|\alpha|} \|p\|_{L_q(E)} \leq$$

$$\leq C r^{-\frac{n}{q}} \|p\|_{L_q(E)} \text{ pour } |y-x| \leq r.$$

LEMME 1.2 : Soit $E \subset I(x, r)$ et $m(E) > Ar^n$, $A > 0$. Alors

$$\|M_k(E)\,a\|_{L_p(E)} \leq C \|a\|_{L_p(E)}\,, \qquad \forall\, a \in L_p(E) \tag{1.3}$$

où C ne dépend que de A, k, n.

[1] On désigne par $m(E)$ la mesure (de Lebesgue) de l'ensemble E.

DÉMONSTRATION :

Soit $a \in L_p(E)$. Alors $M_k(E)\,a = \sum_i \left(\int_E a\bar{\varphi}_i\,dx \right) \varphi_i$, et

$$\| M_k(E)\,a \|_{L_p(E)} \leq \sum_i \int_E | a\bar{\varphi}_i |\,dx \,\| \varphi_i \|_{L_p(E)} \leq$$

$$\leq \sum_i \| a \|_{L_p(E)} \| \varphi_i \|_{L_p(E)} \| \varphi_i \|_{L_{p'}(E)},$$

d'après l'inégalité de Hölder [2]. Mais

$$\| \varphi_i \|_{L_p(E)} \| \varphi_i \|_{L_{p'}(E)} \leq \| \varphi_i \|_{L_\infty(E)}\, m(E)^{\frac{1}{p}} \| \varphi_i \|_{L_\infty(E)}\, m(E)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= m(E) \| \varphi_i \|^2_{L_\infty(E)} \leq Cr^n (Cr^{-\frac{n}{2}} \| \varphi_i \|_{L_2(E)})^2 = C \| \varphi_i \|^2_{L_2(E)} = C,$$

grâce au lemme 1, pour $q = 2$, et au fait que les φ_j sont normés. Par conséquent $\| M_k(E)\,a \|_{L_p(E)} \leq \sum_i c \| a \|_{L_p(E)} = C \| a \|_{L_p(E)}$, ce qui achève la démonstration.

LEMME 1.3 : Soit $E \subset I(x, r)$ et $m(E) > Ar^n$, alors

$$\inf_{p \in \mathcal{P}_k} \| a - p \|_{L_p(E)} \leq \| a - M_k(E)\,a \|_{L_p(E)} \leq C \inf_{p \in \mathcal{P}_k} \| a - p \|_{L_p(E)} \tag{1.3}$$

où C ne dépend que de A, k, n.

DÉMONSTRATION :

Il suffit de démontrer l'inégalité à droite. Pour $p \in \mathcal{P}_k$, $M_k(E)\,p = p$. Il en résulte que $a - M_k(E)\,a = (a - p) - M_k(E)(a - p)$ dans E pour $p \in \mathcal{P}_k$. Donc

$$\| a - M_k(E)\,a \|_{L_p(E)} \leq \| a - p \|_{L_p(E)} + \| M_k(E)(a - p) \|_{L_p(E)} \leq$$

$$\leq (1 + C) \| a - p \|_{L_p(E)}$$

pour chaque $p \in \mathcal{P}_k$, d'après le lemme 1.2, et l'inégalite est démontrée.

---

[2] On définit p' par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

2. Les espaces M_P.

Soit $E \subset R^n$ un ensemble mesurable (comme toujours pour la mesure de Lebesgue).

DÉFINITION : On désigne par M_p l'espace des fonctions mesurables a, definies dans E, telles que

$$\sigma^p \, m \{|a| > \sigma\} \leq c^p , \qquad \forall \sigma > 0 \tag{2.1}$$

pour une constante c (qui dépend de a) et l'on pose, pour $a \in M_p(E)$

$$\| a \|_{M_p(E)} = \sup_{\sigma > 0} \sigma (m \{| a | > \sigma\})^{\frac{1}{p}} \tag{2.2}$$

On trouve facilement que

$$\| a_0 + a_1 \|_{M_p(E)} \leq 2 (\| a_0 \|_{M_p(E)} + \| a_1 \|_{M_p(E)}) \tag{2.3}$$

et

$$\| a \|_{M_p(E)} = | \lambda | \, \| a \|_{M_p(E)} \tag{2.4}$$

Donc $M_p(E)$ est un espace vectoriel. L'application $a \longrightarrow \| a \|_{M_p(E)}$ est une quasi-norme, mais elle n'est pas une norme ; pour $p > 1$ on peut trouver une norme équivalente, notamment

$$\| a \|_{\widetilde{M}_p(E)} = \sup_{F \subset E} m(F)^{-\frac{1}{p'}} \int_F | a | \, dx \tag{2.5}$$

Un calcul facile montre que

$$\| a \|_M \leq \| a \|_{\widetilde{M}_p} \leq p' \, \| a \|_{M_p} \tag{2.6}$$

En outre, $L_p \subset M_p$ et $M_p \subset L_q$ pour $1 \leq q < p$, si E est borné

REMARQUE 2.1. Les espaces M_p, introduits par G. G. Lorentz [18], apparaissent dans le théorème de Marcinkiewicz.

REMARQUE 2.2. Pour les espaces quasi-normés voir Kree [15].

3. Les espaces $\mathcal{L}_k^{p\Phi}$ et $\mathcal{M}_k^{p\Phi}$.

Soit Ω un ouvert dans R^n et $d(\Omega)$ le diamètre (fini ou non) de Ω. On pose $\Omega(x, r) = I(x, r) \cap \Omega$ et $\Omega_d = \bar{\Omega} \times \left(0, \frac{d(\Omega)}{2}\right]$. Soit $\Phi = \Phi(r), r > 0$ une fonction positive

DÉFINITION 3.1. On désigne par $\mathcal{L}_k^{p\Phi}(\Omega)$ l'espace des fonctions a dans $L_1^{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$ telles qu'il existe une constante C telle que

$$(3.1) \qquad \| a - M_k(E)\, a \|_{L_p(E)} \leq C\Phi(r) \text{ pour chaque } E = \Omega(x, r), (x, r) \in \Omega_d .$$

On munit $\mathcal{L}_k^{p\Phi}(\Omega)$ de la semi-norme

$$| a |_{\mathcal{L}_k^{p\Phi}(\Omega)} = \inf C$$

où l'infimum est pris dans l'ensemble des C vérifiant (3.1). Si l'on identifie des fonctions dont la différence est un polynôme de degré $\leq k$, on obtient une norme et l'espace quotient correspondant est un espace de Banach.

DEFINITION 3.2. On désigne par $\mathcal{M}_k^{p\Phi}(\Omega)$ l'espace des fonctions a dans $L_1^{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$ telles qu'il existe une constante C telle que

$$(3.2) \qquad \| a - M_k(E)\, a \|_{M_p(E)} \leq C\Phi(r) \text{ pour chaque } E = \Omega(x, r), (x, r) \in \Omega_d .$$

On munit $\mathcal{M}_k^{p\Phi}(\Omega)$ de la quasi-semi-norme [3]

$$| a |_{\mathcal{M}_k^{p\Phi}(\Omega)} = \inf C$$

l'infimum étant pris dans l'ensemble des C satisfaisant (3.2). Pour $p > 1$, c'est equivalent à la semi-norme obtenue en remplaçant $\| \; \|_{M_p}$ par $\| \; \|_{\tilde{M}_p}$ dans (3.2).

Soit A et B deux espaces vectoriels semi-quasi-normés. Disons qu'une application $T : A \to B$ est de norme $\leq M$ si

$$| Ta |_B \leq M\, | a |_A \qquad \forall\, a \in A$$

[3] Quasi veut dire: on a l'inégalité de triangle généralisée $| a + b | \leq k(| a |) + | b |)$, $k > 1$, et semi veut dire: on admet que $| a | = 0$ et $a \neq 0$.

Remarque 3.1. On a $\mathcal{L}_k^{p\Phi}(\Omega) \subset \mathcal{M}_k^{p\Phi}(\Omega)$. Une application de l'inégalité de Hölder montre que $\mathcal{L}_k^{p\Phi}(\Omega) \subset \mathcal{L}_k^{q\Psi}(\Omega)$ si $1 \leq q \leq p$ et $r^{-\frac{n}{p}} \Phi(r) \leq \leq r^{-\frac{n}{q}} \Psi(r)$. Les normes des inclusions ne dependent pas de Ω, Φ ou k.

Remarque 3.2. Si Ω est borné (ou, pour $k = 0$, de mesure finie) $\mathcal{L}_k^{p\Phi}(\Omega) \subset L_p(\Omega)$. Alors on peut munir $\mathcal{L}_k^{p\Phi}(\Omega)$ d'une norme, par exemple $a \to |a|_{\mathcal{L}_k^{p\Phi}(\Omega)} + \|a\|_{L_p(\Omega)}$ et muni de cette norme, $\mathcal{L}_k^{p\Phi}(\Omega)$ est un espace de Banach. Tout ce qu'on va faire dans la suite marche aussi bien pour $\mathcal{L}_k^{p\Phi}(\Omega)$ muni de cette norme, mais pour simplifier les notations on n'utilise que les semi-normes.

Définition 3.3. On dit que est de type $\mathcal{A}$ s'il existe une constante positive A telle que

$$m(\Omega(x, r)) \geq Ar^n. \qquad \forall (x, r) \in \Omega_d \tag{3.3}$$

On va montrer que, sous la condition $\mathcal{A}$, les espaces $\mathcal{L}_k^{p\Phi}(\Omega)$ coincident avec les espaces $\mathcal{L}_k^{p\lambda}(\Omega)$ définis par Campanato [3], [4], si $\Phi(r) = r^{\frac{\lambda}{p}}$.

Définition 3.4. On désigne par $\bar{\mathcal{L}}_k^{p\Phi}(\Omega)$ l'espace des fonctions a dans $L_1^{\text{loc}}(\bar{\Omega})$ telles qu'il existe une constante C telle que

$$\inf_{p \in \mathcal{P}_k} \| a - p \|_{L_p(E)} \leq C\Phi(r) \text{ pour chaque } E = \Omega(x, r), (x, r) \in \Omega_d. \tag{3.4}$$

On munit $\bar{\mathcal{L}}_k^{p,\Phi}$ de la semi-norme

$$|a|_{\bar{\mathcal{L}}_k^{p\Phi}(\Omega)} = \inf C$$

l'infimum étant pris dans l'ensemble des C satisfaisant à (3.4).

Exemple : Soit $\Phi(r) = r^{\frac{\lambda}{p}}$, $\lambda \geq 0$. Alors $\bar{\mathcal{L}}_k^{p\Phi}(\Omega)$ est l'espace $\mathcal{L}_k^{p\lambda}(\Omega)$ introduit par Campanato [4].

Proposition 3.1. Soit Ω un ouvert de type $\mathcal{A}$. Alors les espaces $\mathcal{L}_k^{p\Phi}(\Omega)$ et $\bar{\mathcal{L}}_k^{p\Phi}(\Omega)$ coïncident et les semi-normes correspondantes sont equivalentes.

DÉMONSTRATION.

D'àpres le lemme 1.3 il existe une constante C telle que

$$\inf_{p \in \mathcal{P}_k} \| a - p \|_{L_p(E)} \leq \| a - M_k(E)\, a \|_{L_p(E)} \leq C \inf_{p \in \mathcal{P}_k} \| a - p \|_{L_p(E)}$$

pour chaque $E = \Omega(x, r)$, $(x, r) \in \Omega_d$. Il en résulte que

$$| a |_{\overline{\mathcal{L}}_k^{p\Phi}(\Omega)} \leq | a |_{\mathcal{L}_k^{p\Phi}(\Omega)} \leq C \, | a |_{\overline{\mathcal{L}}_k^{p\Phi}(\Omega)}$$

si l'une des seminormes est définie. La constante C est independante de a, p, Φ.

REMARQUE 3.2. Campanato et Murthy [7] ont montré la prop. 3.1 dans le cas $p \geq 2$.

Campanato [3], [4] a donné la caractérisation suivante des espaces

$\mathcal{L}_k^{p\lambda}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ pour Ω borné, de type $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_k^{p\lambda}(\Omega) &= L_p(\Omega) \text{ si } \lambda = 0 \\
&= L^{p,\lambda}(\Omega), \text{ espace de Morrey si } 0 \leq \lambda < n. \\
&= C^{h,\alpha}(\overline{\Omega}) \text{ si } n < \lambda \leq n + (k+1)\,p, \; h \text{ entier} \leq k \\
&\qquad \frac{\lambda - n}{p} = h + \alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \Omega \text{ convexe} \\
&= \mathcal{E}_h(\Omega) = \mathcal{L}_h^{1,n+h}(\Omega) \text{ si } \frac{\lambda - n}{p} = h \text{ entier}, \leq k, \Omega \text{ convexe} \\
&= \mathcal{P}_k(\Omega) \text{ si } \lambda > n + (k+1)\,p
\end{aligned}$$

John et Nirenberg [12] ont caractérisé l'espace $\mathcal{L}_0^{1,n}(\Omega) = \mathcal{E}_0(\Omega)$ pour $\Omega =$ cube, et l'auteur [25] a étendu cette caractérisation au cas $\mathcal{L}_0^{1,\Phi}(\Omega)$ pour $\varphi(r) = r^{-n}\,\Phi(r)$ croissante, $\Omega =$ cube. Ces résultats valent encore pour $\Omega =$ image bilipschitzien d'un cube (Campanato [6], appendice 1).

REMARQUE 3.3. De la caracterisation ci-dessus et de la remarque 3 1 il suit que

$$\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega) = \mathcal{L}_k^{q,\mu}(\Omega) = \mathcal{M}_k^{p,\lambda}(\Omega) = \mathcal{M}_k^{q,\mu}(\Omega) \text{ si } \frac{\lambda - n}{p} = \frac{\mu - n}{q} \geq 0$$

et $\Omega =$ cube. Donc les espaces $\mathcal{M}_k^{p,\lambda}(\Omega)$ ne sont intéressants que dans le cas $\lambda < n$.

4. Les théorèmes d'interpolation.

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ des éspaces vectoriels topologiques et A_0, $A_1 \subset \mathcal{A}$, B_0 $B_1 \subset \mathcal{B}$ des espaces-quasi-semi-normés, les inclusions étant continues.

DEFINITION 4.1. On dit que les espaces quasi-semi-normés A_θ, B_θ, avec $A_\theta \subset \mathcal{A}$, $B_\theta \subset \mathcal{B}$ (continûment) sont des *espaces d'interpolation d'exposant* θ, $0 < \theta < 1$, par rapport aux couples (A_0, A_1) et (B_0, B_1) si la condition suivante est satisfaite :

Soit T une application lineaire continue $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ telle que la restriction de T à A_i applique A_i dans B_i, de norme $\leq M_i$, $i = 0, 1$. Alors la restriction de T à A_θ applique A_θ dans B_θ de norme $\leq M \leq C\, M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$, et la constante C ne dépend pas de T. Nous appellons C constante de convexité.

D'une manière analogue on définit des espaces d'interpolation par rapport aux applications quasi-linéaires.

Notre résultat principal est le théorème suivant d'interpolation, avec $B_0 = \mathcal{L}_{k_0}^{p_0 \Phi_0}(\Omega)$, $B_1 = \mathcal{L}_k^{p_1 \Phi_1}(\Omega)$ et $\mathcal{B} = L_1^{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$.

THÉOREME 4.1 : On suppose que les espaces A_θ et $L_p(\Omega)$ sont des espaces d'interpolation d'exposant θ et de constante de convexité C par rapport aux couples (A_0, A_1) et $(L_{p_0}(\Omega), L_{p_1}(\Omega))$. Alors A_θ et $\mathcal{L}_k^{p\Phi}(\Omega)$ sont des espaces d'interpolation d'exposant θ et de constante de convexité C par rapport aux couples (A_0, A_1) et $(\mathcal{L}_k^{p_0 \Phi_0}(\Omega), \mathcal{L}_k^{p_1 \Phi_1}(\Omega))$ si

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \Phi(r) = \Phi_0(r)^{1-\theta}\, \Phi_1(r)^{\theta}.$$

DÉMONSTRATION :

Supposons que l'application linéaire continue $T : \mathcal{A} \to L_1^{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$ applique A_i dans $\mathcal{L}_k^{p_i \Phi}(\Omega)$, de norme $\leq M_i$, $i = 0, 1$.

On désigne par J_E l'application $L_1^{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}) \to L_1^{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$ définie par

$$J_E\, a = \begin{cases} a - M_k(E)\, a & \text{dans } E \\ 0 & \text{dans } \complement E. \end{cases}$$

Alors J_E applique $\mathcal{L}_k^{p\Phi}(\Omega)$ dans $L_p(\Omega)$, de norme $\leq \Phi(r)$, pour chaque p, Φ et $E = \Omega(x, r)$ $(x, r) \in \Omega_d$. Il en résulte que $J_E\, T$ applique A_i dans $L_{p_i}(\Omega)$, de norme $\leq M_i\, \Phi_i(r)$. Puisque A_θ, $L_p(\Omega)$ sont des espaces d'interpolation, il résulte que $J_E\,T$ applique A_θ dans $L_p(\Omega)$, de norme

$$\leq C\,(M_0\,\Phi_0(r))^{1-\theta}\,(M_1\,\Phi_1(r))^{\theta} = C\,M_0^{1-\theta}\,M_1^{\theta}\,\Phi(r).$$

Soit $a \in A_\theta$. Alors

$$\|\,Ta - M_k(E)\,Ta\,\|_{L_p(E)} \leq CM_0^{1-\theta}\,M_1^{\theta}\,\Phi(r)\,\|\,a\,\|_{A_\theta}$$

pour chaque $E = \Omega(x, r)$, $(x, r) \in \Omega_d$.

Donc $Ta \in \mathcal{L}_k^{p\Phi}(\Omega)$ et

$$|\,Ta\,|_{\mathcal{L}_k^{p\Phi}(\Omega)} \leq CM_0^{1-\theta}\,M_1^{\theta}\,\|\,a\,\|_{A_\theta}$$

ce qui achève la démonstration.

Il y a un théorème correspondant pour les $\mathcal{M}_k^{p\Phi}(\Omega)$.

THÉORÈME 4.2. On suppose que les espaces A_θ et $L_p(\Omega)$ sont des espaces d'interpolation d'exposant θ et de constante de convexité C par rapport aux couples (A_0, A_1) et $(M_{p_0}(\Omega), M_{p_1}(\Omega))$. Alors les espaces A_θ et $\mathcal{L}_k^{p\Phi}(\Omega)$ sont des espaces d'interpolation par rapport aux couples (A_0, A_1) et $(\mathcal{M}_k^{p_0,\Phi_0}(\Omega), \mathcal{M}_k^{p_1\Phi_1}(\Omega))$ si

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \Phi(r) = \Phi_0(r)^{1-\theta}\,\Phi_1(r)^{\theta}.$$

DÉMONSTRATION: On notera que J_E applique $\mathcal{M}_k^{p\Phi}(\Omega)$ dans $M_p(\Omega)$ de norme $\leq \Phi(r)$. Vu ceci, la démonstration du th. 4.1 marche sans changement.

Ces deux théorèmes entrainent, dans des cas plus ou moins concrets, des théorèmes d'interpolation.

REMARQUE 4.1. Les théorèmes 4.1 et 4.2 s'appliquent aux applications linéaires ou aux applications quasi-linéaires.

EXEMPLES

4.1) D'après le théorème classique de Marcinkiewicz (Zygmund [28]) on peut choisir, dans th. 4.2, $A_0 = L_{q_0}$, $A_1 = L_{q_1}$, $A_\theta = L_q$ si $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$ et $p_i > q_i$, $i = 0, 1$. (Il suffit d'ailleurs que $p \geq q$), et si $p_0 \neq p_1$. Donc on retrouve les théorèmes d'interpolation de Stampacchia [26] ($k = 0$) et de Campanato [5] ($k \geq 0$).

4.2) Le théorème de M. Riesz-Thorin (Zygmund [28]) montre que, dans le cas des scalaires complexes et des applications linéaires, on peut choisir $A_0 = L_{q_0}$, $A_1 = L_{q_1}$, $A_\theta = L_q$ dans le théorème 4.2, si $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$.

En plus, la constante de convexité peut être prise $= 1$. Ceci donne le théorème de Campanato-Murthy [7].

4.3) Le théorème de (M. Riesz [24]) montre que dans le cas des scalaires réelles on peut prendre $A_0 = L_{q_0}$, $A_1 = L_{q_1}$, $A_\theta = L_q$ si $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$ et $q_i \leq p_i$, $i = 0, 1$, et la constante de convexité peut être prise $= 1$.

4.4) D'après Lions-Peetre [17], le th. 4.1 s'applique au cas $A_\theta = (A_0, A_1)_{\theta, p}$, notations de Peetre [20], [21]. Comme $(M_{p_0}, M_{p_1})_{\theta, p} = L_p$, ceci est aussi vrai pour le th. 4.2. It en résulte des analogues abstraits des théorèmes de Stampacchia et de Campanato et du théorème dans l'ex. 4.3 cidessus.

4.5) Dans le cas des scalaires complexes et des applications linéaires on peut utiliser la méthode complexe de Calderon [1] et de Lions [16]. En effet, comme $[L_{p_0}, L_{p_1}]_\theta = L_{p_\theta}$, on peut choisir $A_\theta = [A_0, A_1]_\theta$. Le résultat est un analogue abstrait du théorème de Campanato-Murthy.

Terminons par un résultat d'une nature un peu différente.

THÉORÈME 4.3. Soient Φ_0, Φ_1 donnés, $0 < \theta < 1$. Alors on a

$$(\mathcal{L}_k^{p\Phi_0}(\Omega), \quad \mathcal{L}_k^{p\Phi_1}(\Omega))_{\theta, \infty} \subset \mathcal{L}_k^{p\Phi}(\Omega) \tag{4.1}$$

et

$$(\mathcal{M}_k^{p\Phi_0}(\Omega), \quad \mathcal{M}_k^{p\Phi_1}(\Omega))_{\theta, \infty} \subset \mathcal{M}_k^{p\Phi}(\Omega) \tag{4.2}$$

avec $\Phi = \Phi_0^{1-\theta}\, \Phi_1^\theta$.

DÉMONSTRATION :

Le cas $\mathcal{L}_k^{p\Phi}(\Omega)$ est essentiellement contenu dans le th. 4.1. Démontrons le cas $\mathcal{M}_k^{p\Phi}(\Omega)$.

Posons $A_i = \mathcal{M}_k^{p, \Phi_i}(\Omega)$, $i = 0, 1$ et $A_\theta = (A_0, A_1)_{\theta, \infty}$. Soit $a \in A_\theta$. D'après la définition de A_θ, il existe une décomposition $a = a_0(t) + a_1(t)$, $0 < t < \infty$ avec $a_0(t) \in A_0$, $a_1(t) \in A_1$, telle que

$$\| a_0(t) \|_{A_0} + t \, \| a_1(t) \|_{A_1} \leq C t^\theta \, \| a \|_{A_\theta} \qquad 0 < t < \infty$$

on C ne dépend pas de a.

Soit $(x, r) \in \Omega_d$ et $E = \Omega(x, r)$. Alors il resulte que

$$\| a - M_k(E)\, a \|_{M_p(E)} \leq 2\,(\| a_0 - M_k(E)\, a_0 \|_{M_p(E)} +$$

$$+ \| a_1 - M_k(E)\, a_1 \|_{M_p(E)}) \leq \Phi_0(r)\, | a_0 |_{A_0} + \Phi_1(r)\, | a_1 | .$$

Si nous choisissons $a_0 = a_0(t)$, $a_1 = a_1(t)$, $t = \Phi_1(r)/\Phi_0(r)$, nous trouvons

$$\| a - M_k(E)\, a \|_{M_p(E)} \leq C\,(\Phi_1(r)/\Phi_0(r))^{-\theta}\, \Phi_0(r)\, \| a \|_{A_\theta} = C\Phi(r)\, \| a \|_{A_\theta} .$$

Donc $a \in \mathcal{M}_k^{p\Phi}(\Omega)$. On notera aussi que l'inclusion $A_\theta \subset \mathcal{M}_k^{p\Phi}(\Omega)$ est de norme $\leq C$.

Le théorème 4.3 est assez banal mais il suffit pour retrouver une partie des théorèmes de Stampacchia-Grisvard.

EXEMPLE 4.6. Soit $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 > n$, Ω de type $\mathcal{A}$ et convexe. Alors on trouve

$$(M_p\, \Omega),\, C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}))_{\theta\infty} \subset \mathcal{M}^{p,\lambda}(\Omega) = \begin{cases} M^{p,\lambda}(\Omega) & 0 < \theta < \dfrac{n}{\lambda_1} \\ \mathcal{E}_0(\Omega) & \theta = \dfrac{n}{\lambda_1} \\ C^{0,\beta}(\Omega), & \dfrac{n}{\lambda_1} < \theta < 1 \end{cases}$$

$$\text{si } \alpha = \frac{\lambda_1 - n}{p}, \qquad \beta = \frac{\lambda - n}{p}, \qquad \lambda = \theta\lambda_1 ,$$

grâce à la caracterisation des espaces $\mathcal{L}^{p\lambda}$ et à la remarque 3.3.

EXEMPLE 4.7. Soit $n < \lambda_0$, $\lambda_1 < n + 1$, $p = 1$, Ω de type $\mathcal{A}$ et convexe. Alors on trouve

$$(C^{0,\alpha_0}(\Omega),\, C^{0,\alpha_1}(\Omega))_{\theta,\infty} \subset C^{0,\alpha}(\Omega)$$

$$\text{si } \alpha_0 = \frac{\lambda_0 - n}{p}, \qquad \alpha_1 = \lambda_1 - n, \qquad \alpha = (1 - \theta)\,\alpha_0 + \theta\alpha_1 .$$

En outre, la norme de l'inclusion est bornée independamment de θ. Ceci entraine des théorèmes d'interpolation bien connus pour les espaces $C^{0,\alpha}$.

5. Interpolation des espaces N^p.

Dans l'exemple 4.6, nous avons trouvé un théorème d'interpolation entre les espaces M_p (ou L_p) et les espaces C^α. Pourtant, les résultat n'est pas satisfaisant du côté des $L_p \left(\theta < \frac{n}{\lambda_1} \text{ dans l'exemple}\right)$. Il faut completer nos résultats autérieurs par un théorème d'interpolation entre L_p (ou M_p) et $\mathcal{E}_0$.

Dans ce cas-là on peut employer une famille d'espaces introduite par John et Nirenberg [12] pour obtenir un résultat plus exact. Aussi on va trouver un démonstration d'un théorème de Stampacchia [26] th. 3.19 (voir aussi l'introduction).

Soit Ω un cube dans R^n. Dans ce n^0 on va employer la norme $|x| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ dans R^n, donc les $I(x, r)$ sont des cubes. On considère des partitions $P: \overline{\Omega} = \bigcup\limits_k I_k$ de $\overline{\Omega}$ en cubes I_k sans points intérieurs communs.

Définition 5.1. On désigne par $N_p(\Omega)$ l'espace des fonctions $a \in L_1(\overline{\Omega})$ telles qu'il existe une constante C telle que

$$\sum_k m(I_k) \left(\frac{1}{m(I_k)} \int_{L_p} |a - M_0(I_k) a| \, dx\right)^p \leq C^p \tag{5.1}$$

pour chaque partition $\Omega = \bigcup I_k$. Pour $p = \infty$ on a la modification usuelle.

On munit $N_p(\Omega)$ de la seminorme $|a|_{N_p(\Omega)} = \inf C$, et pour $p < \infty$ de la norme $\|a\|_{N_p(\Omega)} = |a|_{N_p(\Omega)} + m(\Omega)^{\frac{1}{p}} |M_0(\Omega) a|$.

Proposition 5.1 On a

1) $L_p(\Omega) \subset N_p(\Omega) \qquad 1 \leq p \leq \infty$
2) $L_1(\Omega) = N_1(\Omega)$
3) $\mathcal{E}_0(\Omega) = N_\infty(\Omega)$.

Démonstration.

1) Pour chaque cube $I \subset \overline{\Omega}$ on a, d'après le lemme 1.3 (qui est trivial dans ce cas, $k = 0$. Voir Spanne [25]), que

$$\int_I |a - M_0(I) a| \, dx \leq C \inf_\sigma \int_I |a - \sigma| \, dx \leq$$

$$\leq C \int_I |a| \, dx \leq C m(I)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_I |a|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Il en résulte que

$$\Sigma\, m(I_k)\left(\frac{1}{m(I_k)}\int_{I_k} |a - M_0(I)\,a|\,dx\right)^p \leq$$

$$\leq C^p\, \Sigma\, m(I_k)\, m(I_k)^{p\left(\frac{1}{p'}-1\right)} \int_{I_k} |a|^p\,dx = C^p \int_{\Omega} |a|^p\,dx.$$

2) Immédiate

3) La seule chose à verifier est que $\frac{1}{r^n}\int_E |a - M_0(E)\,a|\,dx \leq C$ pour tout $E = \Omega(x, r)$, $(x, r) \in \Omega_d$ tel que $I(x, r) \not\subset \bar{\Omega}$. Chaque E pareil est contenu dans un cube $I \subset \bar{\Omega}$, avec $m(I) < C_n\, m(E) \leq C_n\, r^n$. Donc

$$\frac{1}{r^n}\int_E |a - M_0(E)\,a|\,dx \leq \frac{C}{r^n}\inf_{\sigma}\int_E |a - \sigma|\,dx \leq$$

$$\leq \frac{C}{r^n}\int_E |a - M_0(I)\,a|\,dx \leq \frac{C}{r^n}\int_I |a - M_0(I)\,a|\,dx \leq$$

$$\leq \frac{C}{r^n}\, m(I)\, |a|_{N_p(\Omega)} \leq C_n\, C\, |a|_{N_p(\Omega)},$$

grâce au lemme 1.3.

Le resultat fondamental suivant est dû à John et Nirenberg.

THÉORÈME 5.1: Pour $1 \leq p \leq \infty$ on a l'inclusion $N_p(\Omega) \subset M_p(\Omega)$, de norme $\leq C$, ou C ne dépend pas de Ω.

DÉMONSTRATION:

Le lemme 3 de John et Nirenberg [12[dit qu'il existe une constante A telle que

$$m\{x \in \Omega \mid |a(x) - M_0(\Omega)\,a| > \sigma\} \leq A\left(\frac{|a|_{N_p}}{\sigma}\right)^p,\ \sigma > 0. \tag{5.2}$$

Donc

$$m\{x \in Q \mid |a(x)| > \sigma\} \leq 2^p A\left(\frac{|a|_{N_p}}{\sigma}\right)^p,\ \sigma > 2\,|M_0(\Omega)\,a|.$$

De l'autre coté

$$m\{x \in \Omega \mid |a(x)| > \sigma\} \leq m(\Omega).$$

Pour $\sigma \leq 2 \mid M_0(\Omega)\, a \mid$ on a

$$m(\Omega) \leq m(\Omega)\left(2\,\frac{\mid M_0(\Omega)\, a\mid}{\sigma}\right)^p \leq 2^p\left(\frac{\mid M_0(\Omega)\, a \mid m(\Omega)^{\frac{1}{p}}}{\sigma}\right)^p \leq 2^p\left(\frac{\| a \|_{N_p}}{\sigma}\right)^p .$$

De ces deux estimations il suit que

$$(5.3) \qquad m\{x \in \Omega \mid \mid a(x) \mid > \sigma\} \leq C\left(\frac{\| a \|_{N_p}}{\sigma}\right)^p, \quad \sigma > 0$$

si l'on choisit $C = \max(2^p, 2^p A)$.

Remarque 5.1 Le théorème correspondant est vrai, même dans le cas $\Omega = R^n$, si l'on calcule modulo les constantes.

Les espaces N_p ont la propriété d'interpolation suivante.

Proposition 5.2 Pour chaque couple p_0, p_1, $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$ et pour chaque θ, $0 < \theta < 1$ on a [4]

$$(5.4) \qquad (N_{p_0}(\Omega),\ N_{p_1}(\Omega))_{\theta,1} \subset N_p(\Omega)$$

si $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$.

Démonstration

Soit $a \in N_{p_0} \cap N_{p_1}$ et soit $\bar{\Omega} = \bigcup_k I_k$ une partition. On pose $\alpha_k = m(I_k)$ et $\beta_k = \dfrac{1}{m(I_k)} \displaystyle\int \mid a - M_0(I_k)\, a \mid dx$.

Alors, l'inégalite de Hölder donne

$$\Sigma\, \alpha_k\, \beta_k^p = \Sigma\, (\alpha_k\, \beta_k^{p_0})^{\frac{1-\theta}{p_0}p}\, (\alpha_k\, \beta_k^{p_1})^{\frac{\theta}{p_1}p} \leq \mid a \mid_{N_{p_0}}^{(1-\theta)p}\ \mid a \mid_{N_{p_1}}^{\theta p} .$$

En variant les partitions on trouve

$$(5.5) \qquad \mid a \mid_{N_p(\Omega)} \leq \mid a \mid_{N_{p_0}(\Omega)}^{1-\theta}\ \mid a \mid_{N_{p_1}(\Omega)}^{\theta}, \qquad \forall\, a \in N_{p_0} \cap N_{p_1} .$$

Mais d'après Lions-Peetre [17], (5.5) entraine l'assertion (5.4).

Maintenant nous pouvons démontrer le résultat principal de ce n^0.

---

[4] Pour les espaces $(A_0, A_1)_{\theta, p}$, voir Peetre [20], [21] et Lions-Peetre [17].

THÉORÈME 5.2 Soit Ω un cube. Alors on a

1) $(N_{p_0}(\Omega),\ N_{p_1}(\Omega))_{\theta,q} = L_{p,q}(\Omega)$
$$1 \leq p_0 \neq p_1 \leq \infty$$
$$1 \leq q \leq \infty$$
$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad 0 < \theta < 1$$

2) $(M_{p_0}(\Omega),\ N_{p_1}(\Omega))_{\theta,q} = L_{p,q}(\Omega)$
$$1 < p_0 < \infty$$
$$1 \leq p_1 \leq \infty,\ p_0 \neq p_1$$
$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

DÉMONSTRATION :

1) Pour $1 \leq p \leq \infty$, on a $L_p \subset N_p$ (prop. 5.1). Donc

$$L_{p,q} = (L_{p_0}, L_{p_1})_{\theta,q} \subset (N_{p_0}, N_{p_1})_{\theta,q}.$$

De l'autre côté, pour $1 < p < \infty$ on a $N_p \subset M_p = L_{p,\infty}$. Donc

$$(N_{p_0}, N_{p_1})_{\theta,q} \subset (M_{p_0}, M_{p_1})_{\theta,q} = L_{p,q}$$

pour $1 < p_0, p_1 < \infty$. Le théorème de réitération, Lions-Peetre [17], montre que $(N_{p_0}, N_{p_1})_{\theta,q} = ((N_{p_0}, N_{p_1})_{\theta_0,1}, (N_{p_0}, N_{p_1})_{\theta_1,1})_{\eta,q}$ avec

$$0 < \theta_0 < \theta < \theta_1 < 1, \qquad \eta = (\theta_1 - \theta)/(\theta_1 - \theta_0).$$

Donc

$$(N_{p_0}, N_{p_1})_{\theta,q} \subset (N_{p'}, N_{p''})_{\eta,q} \subset L_{p,q}$$

avec

$$\frac{1}{p'} = \frac{1-\theta_0}{p_0} + \frac{\theta_0}{p_1}, \qquad \frac{1}{p''} = \frac{1-\theta_1}{p_0} + \frac{\theta_1}{p_1},$$

grace à la prop. 5.2.

2) Supposons d'abord que $p_1 < \infty$. Alors $L_{p_1} \subset N_{p_1} \subset M_{p_1}$, donc

$$L_{p,q} = (L_{p_0}, L_{p_1})_{\theta,q} \subset (M_{p_0}, N_{p_1})_{\theta,q} \subset (M_{p_0}, M_{p_1})_{\theta,q} = L_{p,q}.$$

Soit $p_1 = \infty$. On a $M_{p_0} = L_{p_0,\infty} = (N_1, N_\infty)_{\theta_0,\infty}$ avec $\dfrac{1}{p_0} = 1 - \theta_0$. Donc

$$(M_{p_0}, N_\infty)_{\theta,q} = ((N_1, N_\infty)_{\theta_0,\infty}, N_\infty)_{\theta,q} = (N_1, N_\infty)_{\theta',q}$$

avec $\theta' = (1-\theta)\,\theta_0 + \theta\cdot 1$ d'après le théorème de réitération. En utilisant 1) on trouve que $(M_{p_0}, N_\infty)_{\theta,q} = L_{p,q}$ avec

$$\frac{1}{p} = 1 - \theta' = 1 - \theta_0 + \theta\theta_0 - \theta = \frac{1-\theta}{p_0}\,.$$

Ceci donne en particulier la théorème suivant d'interpolation entre les espaces $L_p(M_p)$ et $\mathcal{E}_0 = N_\infty$.

Théorème 5.3 Soit T une application (quasi) linéaire telle que T applique A_0 dans $L_p(\Omega)$ $(M_p(\Omega))$ et A_1 dans $\mathcal{E}_0(\Omega)$. Alors on a

$$T:\ (A_0\,, A_1)_{\theta,q} \longrightarrow L_q(\Omega), \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{p}\,.$$

En particulier, si $T:\ L_{q_0} \longrightarrow M_{p_0}$ et $L_{q_1} \longrightarrow \mathcal{E}_0$, alors $T:\ L_q \longrightarrow L_p$ avec

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{\infty}, \quad q \leq p.$$

Ceci est un cas particulier du théorème 3.1 de Stampacchia [20], étendu au cas $p_0 = q_0$, $q_1 = \infty$. Nous retournerons à ce théorème au n^0 8.

Le théorème 5.3 montre que l'espace $\mathcal{E}_0$ est un substitut convenable de l'espace de Marcinkiewicz M_p dans le cas $p = \infty$.

Remarque 5.2 Les théorèmes valent aussi dans le cas $\Omega = R^n$. Alors il faut, plus précisement, regarder les espaces N_p, $1 \leq p < \infty$, modulo le sous-espace des fonctions constantes.

6. Le théorème de Stampacchia-Grisvard.

Le théorème suivant est donné par Stampacchia [26] dans le cas $h = 0$, A_0, A_1 espaces L_p, et démontré par Grisvard [10] par des méthodes differentes en utilisant des espaces de Sobolev-Besov. Voir aussi Kree [15].

Théorème 6.1 Soit Ω un cube dans R^n. On suppose que

$$T:\quad \begin{cases} A_0 \longrightarrow L_p(\Omega)\ \ 1 \leq p \leq \infty \ \ (\text{ou bien } M_p(\Omega),\ 1 < p < \infty) \\ A_1 \longrightarrow C^{h,\alpha}(\Omega) \end{cases}$$

Alors on a

$$T: (A_0, A_1)_{\theta,r} \longrightarrow \begin{cases} L_q(\Omega), & 0 < \theta < \dfrac{n}{\lambda}, \quad \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p}\left(1 - \dfrac{\theta\lambda}{n}\right) \\ \mathcal{E}_k(\Omega), \ k \text{ entier}, & \theta = \dfrac{k}{\lambda} \\ C^{k,\beta}(\Omega), \ k \text{ entier}, & 0 < \beta < 1, \quad \theta = \dfrac{k+\beta}{\lambda} \end{cases}$$

où

$$r = \begin{cases} q, & 0 < \theta < \dfrac{n}{\lambda} \\ \infty, & \dfrac{n}{\lambda} \leq \theta < 1 \end{cases}$$

et

$$\lambda = n + p\,(h + \alpha).$$

DÉMONSTRATION :

On considère le cas M_p. Le cas L_p se traite de la même façon.

Choissons $k > h + \alpha$, entier. Alors $M_p(\Omega) = \mathcal{M}_k^{p,0}(\Omega)$ et $C^{h,\alpha}(\Omega) = \mathcal{M}_k^{p,\lambda}(\Omega)$. D'après le th. 4.2 on a

$$T: (A_0, A_1)_{\theta,\infty} \longrightarrow \mathcal{M}_k^{p,\theta}(\Omega), \quad 0 < \theta < 1.$$

En particulier,

$$T: (A_0, A_1)_{\tilde{\theta},\infty} \longrightarrow \mathcal{M}_k^{p,n}(\Omega) = \mathcal{E}_0(\Omega), \quad \tilde{\theta} = \frac{n}{\lambda}.$$

Le cas $\theta \geq \dfrac{n}{\lambda}$ est une conséquence immédiate de la caractérisation des espaces $\mathcal{M}_k^{p,\lambda}$, $\lambda \geq n$.

Soit $0 < \theta < \tilde{\theta}$. Il résulte du th. 4.3 que

$$T: (A_0, (A_0, A_1)_{\tilde{\theta},\infty})_{\eta,q} \longrightarrow L_q, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\eta}{p}$$

et d'après le théorème de réitération $(A_0, (A_0, A_1)_{\tilde{\theta},\infty})_{\eta,q} = (A_0, A_1)_{\theta,q}$ avec $\theta = (1-\eta)\cdot 0 + \eta\tilde{\theta} = \eta\tilde{\theta}$ et $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1 - \dfrac{\theta}{\tilde{\theta}}}{p} = \dfrac{1 - \dfrac{\theta\lambda}{n}}{p}$.

REMARQUE 6.1. La démonstration n'utilise que le théorème 4.3, le th. 5.1 de John et Nirenberg et la classification des $\mathcal{L}_k^{p\lambda}$, due à Campanato.

7. Une application aux opérateurs de convolution.

Dans ce n^0, nous allons employer le th. 5.3 pour démontrer un résultat de Hörmander [11], sur les opérateurs de convolution.

Soit k une fonction mesurable $R^n \longrightarrow R$. On dit (Hörmander) que $k \in K_a$ $1 \leq a \leq \infty$ s'il existe des constantes C et $\gamma > 0$ telles que

$$(7.1) \qquad \left(\int_{|y| \geq \gamma t} | k(x-y) - k(-y) |^a \, dy \right)^{\frac{1}{a}} \leq C, \text{ si } t > 0 \text{ et } |x| \leq \gamma t.$$

Soit Kf la convolution $Kf(x) = k * f(x) = \int k(x-y) f(y) \, dy$, definie en general comme valeur principale. Dans ce qui suit nous ne donnerons que les calculs formels et nous laissons au lecteur le soin de compléter les démonstrations.

PROPOSITION 7.1 : On suppose que $k \in K_a$ et que K applique L_{p_0} dans L_{q_0} pour un couple (p_0, q_0) avec $\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0} = 1 - \frac{1}{a} = \frac{1}{a'}$, et $p_0 < a'$. Alors K applique $L_{a'}$ dans $\mathcal{E}_0$.

DÉMONSTRATION :

Soit $a \in L_{a'}$. On pose $a = a_0 + a_1$, $a_0(x) = \begin{cases} a(x) & |x| \leq \nu^t \\ 0 & |x| > \nu^t. \end{cases}$

Alors on a

$$(7.2) \qquad \left(\int | Ka_0(x) |^{q_0} \, dx \right)^{\frac{1}{q_0}} \leq C \| a_0 \|_{L_{p_0}} \leq Ct^{n\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{a'}\right)} \| a_0 \|_{L_{a'}}.$$

Aussi

$$Ka_1(x) - Ka_1(0) = \int_{|y| \geq \gamma} (k(x-y) - k(-y)) \; a_1(y) \, dy,$$

donc

$$| Ka_1(x) - Ka_1(0) | \leq \left(\int_{|y| \leq \gamma t} | k(x-y) - k(-y) |^a \, dx \right)^{\frac{1}{a}} \| a_1 \|_{L_a} \leq$$

$$\leq C \| a_1 \|_{L_{a'}} \quad \text{pour} \quad |x| \leq t.$$

Il en resulte

$$\left(\int\limits_{|x| \leq t} | Ka_1 (x) - Ka_1 (0) |^{q_0} dx \right)^{\frac{1}{q_0}} \leq Ct^{n \cdot \frac{1}{q_0}} \| a_1 \|_{L_{a'}} .$$

Donc il existe une constante σ telle que

$$\left(\int\limits_{|x| \leq t} | Ka (x) - \sigma |^{q_0} dx \right)^{\frac{1}{q_0}} \leq Ct^{\frac{n}{q_0}} \| a \|_{L_{a'}} , \tag{7.4}$$

comme $\dfrac{1}{p_0} - \dfrac{1}{a'} = \dfrac{1}{q_0}$.

Par translation on obtient pour chaque $I = I(x, r)$ une constante $\sigma = \sigma_I$ telle que

$$\left(\int\limits_{I} | Ka - \sigma_I |^{q_0} dx \right)^{\frac{1}{q_0}} \leq C\, m (I)^{\frac{1}{q_0}} \| a \|_{L_{a'}} , \tag{7.5}$$

ce qui dit que $Ka \in \mathcal{L}_0^{q_0, n} = \mathcal{E}_0$, et

$$| Ka |_{\mathcal{L}^{q_0, n}} \leq C \| a \|_{L_{a'}} .$$

Maintenant nous pouvons appliquer le théorème 6.3. On obtient le resultat suivant, le théorème de Hörmander.

THÉORÈME 7.1. On suppose que $k \in K^a$ et que K applique L_{p_0} dans L_{q_0} pour une couple (p_0 , q_0) avec $\dfrac{1}{p_0} - \dfrac{1}{q_0} = \dfrac{1}{a}$, et $p_0 < a'$. Alors K applique L_p dans L_q si $1 < p, q < \infty, \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{a'}$.

DÉMOMSTRATION :

Il résulte de la proposition 7.1 que

$$K : \begin{array}{l} L_{p_0} \longrightarrow L_{q_0} \\ L_{a'} \longrightarrow \mathcal{E}_0 . \end{array}$$

Le théorème 5.3 donne alors le résultat voulu pour les p avec $p_0 < p < a'$. Le théorème suit par dualité comme dans [11].

REMARQUE 7.1 Notre démonstration est en quelque sorte duale à celle de Hörmander.

REMARQUE 7.2. Notre méthode n'est pas restreinte au cas d'opérateurs de convolution. La démonstration marche aussi pour un noyau $k(x, y)$ qui ainsi que le noyau adjoint satisfait à une condition de type (7.1) dans chaque point. Ceci peut être appliqué aux (dérivées des) solutions fondamentales d'operateurs elliptiques à coéfficients variables et on obtient des estimations dans L_p pour ces opérateurs. Nous reviendrons à ce sujet dans une publication ultérieure. Voir aussi Stampacchia et Campanato [8].

8. Généralisations.

Il est évident que les méthodes au n^0 4 marchent aussi bien dans une situation beaucoup plus générale, par exemple, celle décrite dans Kree [15]. Nous regardons ici un cas un peu plus général.

Soit X un ensemble quelconque. Un poids positif Φ sur X est une application $\Phi: X \to (0, \infty)$. Soit $A = (A_x)_{x \in X}$ une famille d'espaces quasi-normés. On désigne par $L_\Phi^\infty(X, A)$ l'éspace vectoriel des applications $f: X \to A$ telles que $\sup\limits_{x \in X} \dfrac{|f(x)|_{A_x}}{\Phi(x)} < \infty$, quasi-semi-normé de la manière naturelle.

EXEMPLE 8.1. Prenons $X = \Omega_d$ et $A_{(x,r)} = L_p(\Omega)$ (on bien $L_p(\Omega(x, r))$) pour $(x, r) \in \Omega_d$. Alors $\mathcal{L}_k^{p\Phi}(\Omega)$ (modulo $\mathcal{P}_k$) peut être identifie à un sous-espace de $L_\Phi^\infty(X, A)$. On identifie $f \in \mathcal{L}_k^{p\Phi}(\Omega)$ à l'application

$$X \ni (x, r) \to J_{\Phi(x,r)} f \in L_p(\Omega) = A_{(x,r)}.$$

L'espace $\mathcal{L}_k^{p\Phi}(\Omega)$ consiste de tous les elements de $L_\Phi^\infty(X, A)$, provenants de cette manière d'une fonction dans $L_1^{\text{loc}}(\bar{\Omega})$.

EXEMPLE 8.2. Soit Ω un cube ou R^n, $X = \Omega_d$ et $A_{(x,r)} = \mathcal{E}_0(\Omega(x, r))$ pour $(x, r) \in \Omega_d$. Prenons $\Phi(r) = 1$. Etant donné $f \in \mathcal{E}_0(\Omega)$, on a des applications

$$X \ni \Omega_d(x, r) \to J_{\Omega(x,r)} f \in \mathcal{E}_0(\Omega(x, r)) = A_{(x,r)}.$$

On voit facilement que $\mathcal{E}_0(\Omega)$ (modulo constantes) est le sous-espace de $L_\Phi^\infty(X, A)$ provenant de $L_1^{\text{loc}}(\bar{\Omega})$.

On peut généraliser les th. 4.1 et 4.2.

THÉORÈME 8.1. Soit $B_i = (B_{ix})_{x \in X}$, $i = 0, 1, \theta$ $(0 < \theta < 1)$. On suppose que pour chaque $x \in X$, A_θ et $B_{\theta x}$ sont des espaces d'interpolation par rapport aux couples (A_0, A_1) et (B_{0x}, B_{1x}), d'exposant θ et de constante de convexité bornée indépendamment de x.

Alors A_θ et $L_\Phi^\infty(X, B_\theta)$ sont des espaces d'interpolation d'exposant θ par rapport aux couples (A_0, A_1) et $(L_{\Phi_0}^\infty(X, B_0), L_{\Phi_1}^\infty(X, B_1))$, si $\Phi_0 = \Phi_0^{1-\theta}\,\Phi_1^\theta$.

La démonstration est la même que celle du théorème 4.1.

Aussi, le théorème 4.3 peut être étendu de la même manière.

TÉORÈME 8.2. On a

$$(L_{\Phi_0}^\infty(X, A),\ L_{\Phi_1}^\infty(X, A))_{\theta, \infty} \subset L_\Phi^\infty(X, A)$$

avec $\Phi = \Phi_0^{1-\theta}\,\Phi_1^\theta$.

Comme une application, nous allons démontrer une extension du théorème 3.1 de Stampacchia [26] au cas général.

THÉORÈME 8.3. On a, pour $\Omega =$ cube

$$(\mathcal{E}_0(\Omega),\ \mathcal{M}_k^{p_1 \Phi_1}(\Omega))_{\theta, p} \subset \mathcal{L}_k^{p\Phi}(\Omega)$$

avec $\Phi = \Phi_1^\theta$, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\theta}{p_1}$.

DÉMONSTRATION : Soit $X = \Omega_d$.

D'après l'exemple 8.2 nous avons $\mathcal{E}_0(\Omega) \subset L_{\Phi_0}^\infty(X, A_0)$ avec $\Phi_0(r) = 1$, $A_{0,(x,r)} = \mathcal{E}_0(\Omega(x, r))$ et $\mathcal{M}_k^{p_1 \Phi_1}(\Omega) \subset L_{\Phi_1}^\infty(X, A_1)$ avec $A_{1(x,r)} = M_p(\Omega(x, r))$. Donc $(\mathcal{E}_0(\Omega), \mathcal{M}_k^{p_1 \Phi_1}(\Omega))_{\theta, p} \subset L_\Phi^\infty(X, (A_0, A_1)_{\theta, p})$. Mais $(A_{0,(x,r)}, A_{1(x,r)})_{\theta, p} = (\mathcal{E}_0(\Omega_{(x,r)}), M_p(\Omega(x, r))_{\theta, p} = L_p(\Omega(x, r))$ d'après le théorème 5.2.

Il en résulte que $(\mathcal{E}_0(\Omega), \mathcal{M}_k^{p\Phi}(\Omega))_{\theta, p} \subset L_\Phi^\infty(X, A_\theta)$ où $A_{\theta,(x,r)} = L_p(\Omega(x, r))$. En outre, les elements de $(\mathcal{E}_0(\Omega), \mathcal{M}_k^{p\Phi}(\Omega))_{\theta, p}$ proviennent des fonctions dans $L_1^{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$ ce qui achève la démonstration.

Une modification légère des raisonnements ci-dessus permet aussi d'étendre le th. 3.1 de Stampacchia [27] sur l'interpolation des espaces $N^{(p,\lambda)}$ à un cas plus général.

On peut aussi appliquer les théorèmes 8.1 et 8.2 aux autres exemples donnés par Kree [15].

Les résultats des n^{0}s 5 et 7 sont tous fondés sur une lemme de décomposition de F. Riesz-Calderon-Zygmund (Voir Calderon-Zygmund [2], John-Nirenberg [12]). Ce lemme est relatif à une suite particulière de partitions de R^n, formées par des cubes de côte 2^k, $k \in Z$. Ce lemme se généralise au cas des suites plus générales de partitions, correspondant, par exemple aux opérateurs quasi elliptiques (F. Jones [13], Kree [14]). Tout ce que nous avons fait aux n^{0}s 5 et 7 s'étend à ce cas-là. En particulier on peut retrouver les résultats de F. Jones et de Kree sur les solutions fondamentales des opérateurs quasielliptiques.

Lund University

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. R. CALDERON, *Intermediate spaces and interpolation, the complex method.* Studia Math. 24 (1964), 113-190.

[2] A P. CALDEBON et A. ZYGMUND, *On the existence of certain singular integrals.* Acta Math. 88 (1952), 85-139.

[3] S. CAMPANATO, *Proprietà dihölderianità di alcune classi di funzioni.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, s. III, vol XVII (1963) 175-188.

[4] S. CAMPANATO, *Proprietà di una famiglia di spazi funzionali* Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa s III, vol. XVIII (1964) (137-160).

[5] S. CAMPANATO, *Teoremi di interpolazione per trasformazioni che applicano* L^p *in* $C^{n,\alpha}$. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, s. III, vol. XVII (1964) 345-360.

[6] S. CAMPANATO, *Equazioni ellittiche del* II^0 *ordine e spazi* $\mathcal{L}^{(2,\lambda)}$. Ann. Mat. Pura Appl. s. IV, vol. LXIX (1965) 321-381.

[7] S. CAMPANATO, et M. K. V. MURTHY, *Una generalizzazione del teorema di Riesz-Thorin.* Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa s III, Vol. XIX (1965) 87-100.

[8] S. CAMPANATO, et G. STAMPACCHIA, *Sulle maggiorazioni in* L^p *nella teoria dell'equazioni ellittiche.* A paraître.

[9] G. DA PRATO, *Spazi* $\mathcal{L}^{(p,\theta)}(\Omega, \delta)$ *e le loro proprietà.* Ann. Mat. Pura Appl. s. IV, vol. LXIX (1965) 383-392.

[10] P. GRISVARD, *Commutativé de deux foncteurs d'interpolation et applications.* Thèse. Paris. 1965.

[11] L. HÖRMANDER, *Estimates for translation invariant operators in* L_p*-spaces.* Acta Math. 104 (1960) 93-140.

[12] F. JOHN, et L. NIRENBERG, *On functions of bounded mean oscillation.* Comm. Pure Appl. Math. Vol. 14 (1961) 415-426.

[13] B. F. JONES, JR. *A class of singular integrals.* Amer. J. Math. 86 (1964) 441-462.

[14] P. KREE, *Sur les multiplicateurs dans* $\mathcal{F} L^p$. C. R. Acad. Sci. Paris 260 (1965) 4400-4403.

[15] P. KREE, *Interpolation d'espaces qui ne sont ni normés, ni complets.* Applications. Séminaire Lions Schwartz (1964-1965)

[16] J. L. LIONS, *Une construction d'espaces d'interpolations.* C. R. Acad. Sci., Paris 251 (1960) 1853-1855.

[17]. J. L. LIONS, et J. PEETRE, *Sur une classe d'espaces d'interpolation.* Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 19 (1964) 5-68.

[18] G. G. LORENTZ, *Some new functional spaces.* Ann. Math. 51 (1950) 37-55.

[19] G. N. MEYERS, *Mean oscillation over cubes and Holder continuity.* Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964) 717-721.

[20] J. PEETRE, *Nouvelles propriétés d'espaces d'interpolation* C. R. Acad. Sci., Paris 256 (1963) 1424-1426.

[21] J. PEETRE, *Espaces d'interpolation, généralisations, applications.* Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 34 (1964) 133-161.

[22] J. PEETRE, *Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) XVI (1966) 279-317.

[23] J. PEETRE, *On convolution operators leaving $\mathcal{L}^{p\lambda}$-spaces invariant.* A paraître das les Annali di Matematica.

[24] M. RIESZ, *Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionelles linéaires.* Acta Math. 49 (1927) 465-497.

[25] S. SPANNE, *Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. s. III vol. XIX, (1965) 593-608.

[26] G. STAMPACCHIA, $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$ *spaces and interpolation.* Comm. Pure Appl. Math. 17 (1964)

[27] G. STAMPACCHIA, *The spaces* $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$, $N^{(p,\lambda)}$ *and interpolation.* Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa. s. III, vol. XIX, (1965) 443-462.

[28] A. ZYGMUND, *Trigonometric Series.* Cambridge University Press, 1959.