

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

GIUSEPPE GEMIGNANI

**Iperalgebre e gruppi analitici commutativi**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 20, n° 2 (1966), p. 453-497*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1966\\_3\\_20\\_2\\_453\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1966_3_20_2_453_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# IPERALGEBRE E GRUPPI ANALITICI COMMUTATIVI

GIUSEPPE GEMIGNANI

Nell'ambiente della geometria algebrica classica, quando cioè il corpo di base  $k$  è il corpo complesso, è noto che ad ogni varietà abeliana  $A$  di dimensione  $n$  sono associati:

un corpo  $K$  di funzioni abeliane di  $n$  variabili complesse;  $K$  coincide con il corpo  $k(A)$  delle funzioni razionali su  $A$ ;

uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione  $n$  su  $k$  costituito dagli integrali di prima specie su  $A$ ;

un sottogruppo  $\Delta$  di  $V$  a  $2n$  generatori sull'anello degli interi (il gruppo dei periodi).

La varietà  $A$  come gruppo astratto risulta isomorfa al gruppo  $V/\Delta$ ; l'omomorfismo naturale di  $V$  su  $A$  risulta localmente (cioè in vicinanza dello  $0$  di  $V$ ) un isomorfismo biolomorfo.

È noto altresì che, quando il corpo di base  $k$  è un corpo (algebricamente chiuso) di caratteristica  $p \neq 0$  ed  $A$  è una varietà abeliana, gli strumenti algebrici e trascendenti idonei a studiare le proprietà di  $A$  sono in generale assai più complicati; ciò è causato da fattori di molteplice natura quali la mancanza sul corpo  $k$  di una topologia naturale, l'esistenza di corrispondenze algebriche biunivoche non birazionali, etc.

Gli elementi del corpo delle funzioni razionali  $k(A)$  (corpo abeliano) non godono più delle semplici proprietà caratteristiche che darebbero loro diritto di essere chiamati funzioni abeliane in certi argomenti; e la definizione di un ente che in qualche modo assolva il ruolo assolto in caratteristica  $0$  dal  $k$ -modulo  $V$  è complicata.

I. Barsotti (cfr. [5]) associa ad una varietà abeliana  $A$  un anello topologico  $R$  così ottenuto; detto  $H$  il gruppo dei punti  $P_h \in A$  per ciascuno dei quali esiste un intero non negativo  $n$  tale che  $p^n P_h = 0$ , sia  $S$  l'inter-

---

(\*) Pervenuto alla Redazione l'11 Maggio 1966.

Questo lavoro è stato eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca per la Matematica n. 35 del C.N.R., nell'anno 1965/66 ed è stato parzialmente finanziato mediante una borsa all'estero della N.A.T.O.

sezione degli anelli quoziente  $Q(P_n/A)$ , e si doti  $S$  della topologia  $T_S$  che ha come sistema fondamentale di intorni dello 0 i prodotti finiti degli ideali massimali di  $S$ ; di denoti con  $R$  il  $T_S$ -completamento di  $S$ .

Si constata la presenza in  $R$  di una comoltiplicazione  $\mathbf{P}_R$  che rende  $R$  una iperalgebra bicommutativa.

$R$  individua poi un funtore  $G$  definito sulla categoria delle  $k$ -algebre ed a valori nella categoria dei gruppi abeliani (gruppo formale, detto *completamento di  $A$*  benchè si tratti in realtà di un intorno dell'identità di  $A$ );  $R$  individua altresì un (Vect  $k$ )-modulo canonico  $M$  costituito dai covettori canonici di Witt (cfr. [3]).

Si constata allora come il ruolo che in caratteristica 0 è svolto dal  $k$ -modulo  $V$  viene qui ripartito tra l'iperalgebra  $R$ , il gruppo formale  $G$  e il (Vect  $k$ )-modulo  $M$ .

Altre considerazioni inducono a prendere in esame l'iperalgebra discreta  $D = R^*$  (duale di  $R$ ) e il gruppo algebrico  $H$  (duale di  $G$ ) ad essa associato; infine lo studio di  $A$  porta a considerare altre iperalgebre dotate di topologie diverse da quelle discrete o linearmente compatte.

Da questo sommario esame risulta chiara la necessità di studiare:

- a) la categoria delle iperalgebre su un corpo  $k$ ; in particolare le categorie delle iperalgebre discrete e linearmente compatte,
- b) la categoria dei gruppi analitici; in particolare le categorie dei gruppi algebrici (cioè associati ad iperalgebre discrete) e dei gruppi formali (associati ad iperalgebre linearmente compatte),
- c) le equivalenze ed antiequivalenze che intercedono tra le categorie citate.

In questo lavoro si studiano alcune proprietà generali delle iperalgebre e dei gruppi analitici da un punto di vista elementare. Nel n. 1 si richiamano alcune proprietà della categoria dei  $k$ -moduli ( $k$  è un corpo qualsiasi) topologici con topologia  $k$ -lineare, completi.

Nei nn. 2 e 3 si effettua un analogo esame sulle categorie delle  $k$ -algebre e delle  $k$ -coalgebre, nonchè dei funtori rappresentabili (covarianti e contravarianti) di tali categorie. Nel n. 4 si studiano le proprietà generali della categoria  $\mathfrak{D}$  delle iperalgebre e della categoria  $\mathfrak{G}$  dei gruppi analitici.

Nel n. 5 si studia la antiequivalenza tra la categoria  $\mathfrak{D}$  delle iperalgebre discrete e la categoria  $\mathfrak{R}$  delle iperalgebre linearmente compatte; servendosi di tale antiequivalenza si dimostra la abelianità di  $\mathfrak{D}$  e di  $\mathfrak{R}$  e conseguentemente la abelianità delle categorie dei gruppi algebrici e formali.

Nel n. 6 si studia la dualità tra la categoria dei gruppi algebrici e la categoria dei gruppi formali deducendone una teoria che ricalca, a grandi linee, la teoria delle dualità tra spazi vettoriali discreti da un lato e linearmente compatti dall'altro.

Infine nel n. 7 si studiano le proprietà di una iperalgebra (discreta o linearmente compatta)  $A$  pensata come insieme delle applicazioni  $k$ -lineari invarianti di  $A^*$  (iperalgebra duale di  $A$ ) in sè.

La teoria qui esposta è nota, nelle sue parti essenziali, almeno negli ambienti dei cultori di geometria algebrica e particolarmente tra gli studiosi delle varietà gruppalì.

Si veda ad esempio [3], [7], [8] e [20].

Abbiamo tuttavia ritenuto opportuno esporre qui questi risultati non solo per dare una visione organica di parti staccate di una teoria, ma soprattutto perchè molti dei risultati noti non sono mai stati esposti con tutti i dettagli necessari ed in modo tale da rendere queste cose accessibili anche ai non iniziati.

Nelle considerazioni che seguono supporremo sempre che gli insiemi di cui parliamo appartengano ad un universo prefissato una volta per tutte. Le categorie considerate saranno sempre supposte in questo universo: cioè per ogni coppia di oggetti  $X, Y$  si supporrà che  $\text{Hom}(X, Y)$  appartenga al dato universo; uniche eccezioni a questa convenzione saranno quelle in cui considereremo categorie di funtori; ma subito dopo rientreremo nell'universo perchè in realtà ci interesseranno solo funtori rappresentabili.

Se  $A$  è un oggetto di una categoria, indicheremo sempre con  $\iota_A$  il morfismo identico di  $A$  in sè; come d'uso supporremo sempre che i funtori considerati portino il morfismo identico nel morfismo identico.

1. Sia  $k$  un corpo. Indichiamo con  $\mathfrak{U}$  la categoria dei  $k$ -moduli topologici con topologia  $k$ -lineare di Hausdorff e completi, cioè la categoria tale che:

i) gli oggetti di  $\mathfrak{U}$  sono i  $k$ -moduli  $A$  per ciascuno dei quali è definita una topologia  $k$ -lineare di Hausdorff  $T_A$  rispetto alla quale  $A$  è completo,

ii) se  $A, B \in \mathfrak{U}$ ,  $\text{Hom}_{\mathfrak{U}}(A, B)$  è l'insieme delle applicazioni  $k$ -lineari  $(T_A, T_B)$ -continue di  $A$  in  $B$ .

Per ogni coppia di oggetti  $A, B \in \mathfrak{U}$ , il prodotto tensoriale  $A \otimes B$  è dotato di una topologia  $k$ -lineare di Hausdorff  $T_{A \otimes B}$ ; un sistema fondamentale di intorni dello 0 per  $T_{A \otimes B}$  è costituito da  $(U \otimes B + A \otimes V)$  quando i  $k$ -moduli  $U$  e  $V$  percorrono un sistema fondamentale di intorni dello 0 per  $T_A$  e  $T_B$  rispettivamente. Con  $A \overline{\otimes} B$  indichiamo il  $T_{A \otimes B}$ -completamento di  $A \otimes B$ ;  $A \overline{\otimes} B$  è un oggetto di  $\mathfrak{U}$  che chiamasi il *prodotto tensoriale completo* della coppia  $(A, B)$ .

Se  $x \in A$  e  $y \in B$  indicheremo con  $x \overline{\otimes} y$  l'elemento  $x \otimes y$  di  $A \overline{\otimes} B$ ; se poi  $f \in \text{Hom}_{\mathfrak{U}}(A_1, A_2)$  e  $g \in \text{Hom}_{\mathfrak{U}}(B_1, B_2)$ , indicheremo con  $f \overline{\otimes} g$  il morfismo di  $A_1 \overline{\otimes} B_1$  in  $A_2 \overline{\otimes} B_2$  che estende  $f \otimes g$ . Infine con  $s_{A, B}$  indichiamo l'iso-

morfismo di  $A \overline{\times} B$  in  $B \overline{\times} A$  tale che:

$$s_{A, B}(x \overline{\times} y) = y \overline{\times} x \quad x \in A; y \in B.$$

Indichiamo poi:

con  $\mathcal{V}$  la sottocategoria piena di  $\mathcal{A}$  i cui oggetti sono i  $k$ -moduli discreti, con  $\mathcal{CA}$  la sottocategoria piena di  $\mathcal{A}$  i cui oggetti sono i  $k$ -moduli linearmente compatti,

con  $\mathcal{F}$  la categoria dei  $k$ -moduli di dimensione finita;  $\mathcal{JF}$  è una sottocategoria piena di  $\mathcal{V}$  e di  $\mathcal{CA}$ .

Le categorie  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{CA}$  ed  $\mathcal{F}$  sono abeliane;  $\mathcal{V}$  è chiusa rispetto al passaggio al limite diretto; inoltre ogni  $A \in \mathcal{V}$  è limite diretto del sistema dei suoi sotto- $k$ -moduli di dimensione finita. Similmente  $\mathcal{CA}$  è chiusa rispetto al passaggio al limite inverso; inoltre ogni  $A \in \mathcal{CA}$  è limite inverso del sistema dei propri  $k$ -moduli quozienti di dimensione finita.

Per ogni  $A \in \mathcal{A}$  e per ogni  $X \in \mathcal{A}$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)$  è dotato di una struttura naturale di  $k$ -modulo:

$$(\xi + \eta)a = \xi a + \eta a \quad \xi, \eta \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X);$$

$$(ca)\xi = c(\xi a) \quad a \in A; c \in k,$$

tale che per ogni  $a \in A$  la applicazione  $\sigma_a$  di  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)$  in  $X$ :

$$\xi \mapsto \xi a$$

è  $k$ -lineare.

Inoltre per ogni  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$  ( $A, B \in \mathcal{A}$ ) e per ogni  $X \in \mathcal{A}$ , è definita la applicazione  $k$ -lineare di  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, X)$  in  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)$ :

$$\xi \mapsto \xi \circ f \quad \xi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, X).$$

Similmente, per ogni  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$  ( $X, Y \in \mathcal{A}$ ) e per ogni  $A \in \mathcal{A}$ , è definita la applicazione di  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)$  in  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, Y)$ :

$$\xi \mapsto f \circ \xi \quad \xi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X).$$

Per ogni  $A \in \mathcal{A}$  risultano allora definiti: il funtore covariante (rappresentabile)  $\tilde{A}$  di  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{V}$ :

$$X \mapsto \tilde{A} X = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X),$$

il funtore contravariante (rappresentabile)  $\widehat{A}$  di  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{V}$ :

$$X \mapsto \widehat{A} X = \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(X, A).$$

Inoltre, per ogni morfismo  $\lambda$  di  $\mathfrak{A}$  ( $\lambda \in \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(A, B)$ ), risultano definiti. il morfismo funtoriale  $\widetilde{\lambda}$  di  $\widetilde{B}$  in  $\widetilde{A}$ :

$$\widetilde{\lambda}_X \xi = \xi \circ \lambda \quad \xi \in \widetilde{B} X; \quad X \in \mathfrak{A},$$

il morfismo funtoriale  $\widehat{\lambda}$  di  $\widehat{A}$  in  $\widehat{B}$ :

$$\widehat{\lambda}_X \xi = \lambda \circ \xi \quad \xi \in \widehat{A} X; \quad X \in \mathfrak{A}.$$

Indicando con  $\widetilde{\mathfrak{A}}$  e  $\widehat{\mathfrak{A}}$  le categorie dei funtori rappresentabili (rispettivamente covarianti e contravarianti) di  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{V}$ , il funtore contravariante di  $\mathfrak{A}$  in  $\widetilde{\mathfrak{A}}$ :

$$\begin{aligned} A &\mapsto \widetilde{A} \\ \lambda &\mapsto \widetilde{\lambda}, \end{aligned}$$

rende  $\mathfrak{A}$  od  $\widetilde{\mathfrak{A}}$  antiequivalenti; similmente il funtore covariante di  $\mathfrak{A}$  in  $\widehat{\mathfrak{A}}$ :

$$\begin{aligned} A &\mapsto \widehat{A} \\ \lambda &\mapsto \widehat{\lambda}, \end{aligned}$$

rende  $\mathfrak{A}$  ed  $\widehat{\mathfrak{A}}$  equivalenti.

Sia  $A \in \mathfrak{V}$  (rispettivamente  $A \in \mathfrak{A}$ ); indichiamo come di consueto con  $A^*$  il  $k$ -modulo  $\widetilde{A}k$  dotato della topologia conveniente che lo rende un oggetto di  $\mathfrak{A}$  (rispettivamente di  $\mathfrak{V}$ ); per ogni morfismo  $\lambda$  di  $\mathfrak{V}$  (rispettivamente di  $\mathfrak{A}$ ) poniamo  $\lambda^* = \widetilde{\lambda}_k$ . Allora il funtore contravariante:

$$\begin{aligned} A &\mapsto A^* \\ \lambda &\mapsto \lambda^*, \end{aligned}$$

rende, come è ben noto,  $\mathfrak{V}$  e  $\mathfrak{A}$  antiequivalenti.

Siano  $A$  ed  $X$   $k$ -moduli ognuno dei quali discreto oppure linearmente compatto. Sia  $\varphi_{A, X}$  la applicazione  $k$ -lineare di  $A^* \overline{\times} X$  in  $\text{Hom}_{\mathfrak{A}}(A, X)$

tale che :

$$[\varphi_{A, X}(\xi \overline{\times} x)] a = \langle a, \xi \rangle x \quad a \in A; \quad \xi \in A^*; \quad x \in X.$$

$\varphi_{A, X}$ , quali che siano  $A$  ed  $X$ , è un isomorfismo.

Sia  $A \in \mathfrak{V}$ ; indichiamo ancora con  $\tilde{A}$  la restrizione di  $\tilde{A}$  a  $\mathfrak{A}$ . Allora  $\tilde{A}$  definisce un funtore di  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{A}$ .

Detto poi  $A'$  il funtore (covariante) di  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{A}$  :

$$\begin{aligned} A' X &= A^* \overline{\times} X & X \in \mathfrak{A}, \\ A' f &= \iota_{A^*} \overline{\times} f & f \text{ morfismo di } \mathfrak{A}, \end{aligned}$$

e detto  $\varphi_A$  l'isomorfismo functoriale di  $A'$  in  $\tilde{A}$  :

$$(\varphi_A)_X = \varphi_{A, X} \quad \text{per ogni } X \in \mathfrak{A},$$

$\varphi = (\varphi_A)_{A \in \mathfrak{V}}$  è un isomorfismo del funtore contravariante :

$$A \mapsto A'$$

nel funtore contravariante :

$$A \mapsto \tilde{A}.$$

Tali considerazioni restano sostanzialmente valide se operiamo le seguenti sostituzioni :

a) essendo  $A \in \mathfrak{V}$ , indichiamo con  $\tilde{A}$  la restrizione di  $\tilde{A}$  a  $\mathfrak{V}$ ;  $\tilde{A}$  risulta un funtore covariante di  $\mathfrak{V}$  in  $\mathfrak{A}$  isomorfo al funtore  $A'$  :

$$\begin{aligned} A' X &= A^* \overline{\times} X & X \in \mathfrak{V} \\ A' f &= \iota_{A^*} \overline{\times} f & f \text{ morfismo di } \mathfrak{V}. \end{aligned}$$

b) essendo  $A \in \mathfrak{A}$ , indichiamo con  $\tilde{A}$  la restrizione di  $\tilde{A}$  a  $\mathfrak{A}$ ;  $\tilde{A}$  risulta un funtore di  $\mathfrak{A}$  in  $\mathfrak{A}$  isomorfo al funtore  $A'$ .

c) essendo  $A \in \mathfrak{A}$ , indichiamo con  $\tilde{A}$  la restrizione di  $\tilde{A}$  a  $\mathfrak{V}$ ;  $\tilde{A}$  risulta un funtore di  $\mathfrak{V}$  in  $\mathfrak{V}$  isomorfo al funtore  $A'$ .

L'isomorfismo  $\varphi_A$  del funtore  $A'$  nel funtore  $\tilde{A}$  ci consentirà di identificare  $A^* \overline{\times} X$  con  $\text{Hom}_{\mathfrak{A}}(A, X)$  ogniqualvolta  $A$  ed  $X$  siano discreti o linearmente compatti.

Concludiamo questo breve esame della categoria  $\mathfrak{A}$  riassumendo alcune proprietà elementari dei morfismi e ricordando alcuni termini in uso.

Siano  $A, B \in \mathfrak{A}$  e sia  $f \in \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(A, B)$ . Il sotto- $k$ -modulo (di  $A$ )  $N = f^{-1} 0$  (nucleo di  $f$ ) è  $T_A$ -chiuso.

Viceversa ogni sotto- $k$ -modulo  $N$   $T_A$ -chiuso di  $A$  è il nucleo di un morfismo di  $\mathfrak{U}$  avente  $A$  come sorgente; precisamente il  $k$ -modulo  $A/N$  è dotato di una topologia  $T_{A/N}$  scelta come la più fine tra quelle  $k$ -lineari che rendono  $f$  (applicazione  $k$ -lineare naturale di  $A$  su  $A/N$ ) continua;  $A/N$  risulta un oggetto di  $\mathfrak{U}$ .

Sia ancora  $f \in \text{Hom}_{\mathfrak{U}}(A, B)$  e sia  $N$  il nucleo di  $f$ .

La topologia indotta su  $fA \cong A/N$  da  $T_B$  è meno fine (in senso lato) di  $T_{A/N}$ ; sia  $M$  la  $T_B$ -chiusura di  $fA$ , sia  $C = B/M$  e  $c$  il morfismo naturale di  $B$  su  $C$ . La coppia  $(C, c)$  (conucleo di  $f$ : per abuso di linguaggio chiameremo, talvolta, conucleo di  $f$  il  $k$ -modulo  $C$ ) gode della seguente proprietà universale:

1)  $c \circ f = 0$

2) se  $d \in \text{Hom}_{\mathfrak{U}}(B, D)$  è tale che  $d \circ f = 0$ , allora esiste  $c' \in \text{Hom}_{\mathfrak{U}}(C, D)$  tale che  $d = c' \circ c$ .

Detto  $n$  il morfismo di immersione di  $N$  in  $A$ ,  $A/N$  è il conucleo di  $n$ , cioè la *coimmagine* di  $f$ .

Il nucleo  $M$  di  $c$  è l'*immagine* di  $f$  (indicata da alcuni autori con  $fA$  nonostante tale notazione induca nelle categorie « concrete » una certa confusione).

Se  $A$  e  $B$  sono  $k$ -moduli discreti o linearmente compatti, ed  $f \in \text{Hom}_{\mathfrak{U}}(A, B)$  la coimmagine di  $f$  e l'immagine di  $f$  coincidono (cioè  $\mathfrak{V}$  e  $\mathfrak{U}$  sono categorie abeliane); la notazione  $fA$  per indicare l'immagine è quindi pienamente legittima.

2. Indicheremo con  $\mathfrak{K}$  la categoria delle  $k$ -algebre topologiche complete, associative, commutative e unitarie (che brevemente saranno chiamate nel seguito  $k$ -algebre); cioè:

i) gli oggetti di  $\mathfrak{K}$  sono terne  $(A, \mu_A, i_A)$  con  $A \in \mathfrak{U}$ ,  $\mu_A \in \text{Hom}_{\mathfrak{U}}(A \overline{\times} A, A)$ ,  $i_A \in \text{Hom}_{\mathfrak{U}}(k, A)$ , tali che:

$$\mu_A \circ (\iota_A \overline{\times} \mu_A) = \mu_A \circ (\mu_A \overline{\times} \iota_A),$$

$$\mu_A \circ s_{A, A} = \mu_A$$

$$\mu_A \circ (i_A \overline{\times} \iota_A) = \mu_A \circ (\iota_A \overline{\times} i_A) = \iota_A,$$

e tali inoltre che esiste un sistema fondamentale  $(V_i)_{i \in I}$  di intorni dello 0 di  $A$  soddisfacente alla relazione

$$\mu_A(A \overline{\times} U_i) = \mu_A(U_i \overline{\times} A) = U_i \quad \text{per ogni} \quad i \in I;$$

(N. B. Ognivolta che ciò non dia luogo ad equivoci indicheremo con  $A$  l'oggetto  $(A, \mu_A, i_A)$  di  $\mathbb{K}$ ).

ii) se  $A, B \in \mathbb{K}$ ,  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(A, B)$  è il sottoinsieme di  $\text{Hom}_{\mathbb{U}}(A, B)$  formato dagli  $f$  tali che:

$$\begin{aligned} f \circ \mu_A &= \mu_B \circ (f \overline{\times} f), \\ f \circ i_A &= i_B. \end{aligned}$$

In particolare  $k \in \mathbb{K}$  e si ha  $\mu_k = i_k = s_{k,k} = \iota_k$ ; inoltre per ogni  $A \in \mathbb{K}$  è  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(k, A) = \{i_A\}$ , onde  $k$  è oggetto iniziale di  $\mathbb{K}$ .

Se  $A, B \in \mathbb{K}$ , definendo:

$$\begin{aligned} \mu_{A \overline{\times} B} &= (\mu_A \overline{\times} \mu_B) \circ (\iota_A \overline{\times} s_{B,A} \overline{\times} \iota_B), \\ i_{A \overline{\times} B} &= i_A \overline{\times} i_B, \end{aligned}$$

$A \overline{\times} B$  diviene un oggetto di  $\mathbb{K}$ ; se  $(U_i)_{i \in I}$  e  $(V_j)_{j \in J}$  sono sistemi fondamentali di intorni dello 0 di  $A$  e di  $B$  rispettivamente, tali che

$$\begin{aligned} \mu_A(A \overline{\times} U_i) &= U_i && \text{per ogni } i \in I \\ \mu_B(B \overline{\times} V_j) &= V_j && \text{per ogni } j \in J, \end{aligned}$$

posto  $W_{i,j} = A \overline{\times} V_j + U_i \overline{\times} B$ ,  $(W_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$  è un sistema fondamentale di intorni dello 0 di  $A \overline{\times} B$  tale che

$$\mu_{A \overline{\times} B}(A \overline{\times} B \overline{\times} W_{i,j}) = W_{i,j} \quad \text{per ogni } i \in I \quad \text{e per ogni } j \in J.$$

Inoltre  $\mu_A$  ed  $s_{A,B}$  sono sempre morfismi di  $k$ -algebra.

Similmente, se  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A_1, A_2)$  e  $g \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(B_1, B_2)$ , è  $f \overline{\times} g \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A_1 \overline{\times} B_1, A_2 \overline{\times} B_2)$ .

Per ogni coppia di oggetti  $A, B \in \mathbb{K}$  siano  $j_A = \iota_A \overline{\times} i_B$  e  $j'_B = i_A \overline{\times} \iota_B$ . La terna  $(A \overline{\times} B, j_A, j'_B)$  è un prodotto inverso della coppia  $(A, B)$ : cioè ogni terna  $(C, f, g)$  con  $C \in \mathbb{K}$ ,  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A, C)$  e  $g \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(B, C)$  individua uno ed unico morfismo  $\{f, g\} \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A \overline{\times} B, C)$  tale che:

$$f = \{f, g\} \circ j_A$$

$$g = \{f, g\} \circ j'_B$$

e si ha:

$$\{f, g\} = \mu_C \circ (f \overline{\times} g).$$

Osserviamo inoltre che la categoria  $\mathbb{K}$  possiede anche un *oggetto finale*; si tratta della  $k$ -algebra  $0$  (costituita dal solo elemento  $0$ ) con  $\mu_0 = \iota_0$  e  $i_0 1 = 0$ . Per ogni  $A \in \mathbb{K}$  è  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(A, 0) = \{0_A\}$  con  $0_A x = 0$  per ogni  $x \in A$ ; inoltre se  $\mathbb{K} \ni A \neq 0$ , è  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(0, A) = \emptyset$ .

Volendo far coincidere il concetto di ideale con quello di nucleo in  $\mathfrak{U}$  di un morfismo di  $\mathbb{K}$  ed il concetto di sottoalgebra con quello di immagine in  $\mathfrak{U}$  di un morfismo di  $\mathbb{K}$ , faremo le seguenti convenzioni:

a) per ogni  $A \in \mathbb{K}$  gli ideali considerati saranno solo quelli  $T_A$ -chiusi; tra essi vi sono  $0$  (nucleo di  $\iota_A$ ) e  $A$  (nucleo di  $0_A$ ): quest'ultimo verrà chiamato *ideale improprio*;

b) le sottoalgebre  $B$  di  $A$  saranno sempre supposte  $T_A$ -chiusa, tali che  $T_B$  è la topologia indotta da  $T_A$  e tali inoltre che  $i_A k \subseteq B$ . Pertanto in ogni  $A \in \mathbb{K}$  esiste una sottoalgebra minima  $i_A k$ ; essa è isomorfa a  $k$  eccettuato il caso in cui sia  $A = 0$ .

Se  $A \neq 0$ , il sotto- $k$ -modulo  $0$  non è una sottoalgebra di  $A$ .

Ogni sistema diretto (rispettivamente inverso) in  $\mathbb{K}$   $(I, (A_i)_{i \in I}, (\sigma_{i,j})_{i \leq j})$  possiede in  $\mathbb{K}$  limite diretto (rispettivamente inverso). Nel caso «inverso», detto  $A$  l'insieme delle *successioni convergenti*  $(a_i)_{i \in I}$  ( $a_i \in A_i$ ,  $\sigma_{ij} a_j = a_i$  ogni-qualvolta  $i \leq j$ ) e posto:

$$(a_i)_{i \in I} + (b_i)_{i \in I} = (a_i + b_i)_{i \in I}$$

$$(a_i)_{i \in I} (b_i)_{i \in I} = (a_i b_i)_{i \in I}.$$

$A$  diviene un oggetto di  $\mathbb{K}$ , quando si definisce la topologia  $T_A$  come la meno fine tra quelle  $k$ -lineari che rendono continuo, per ogni  $j \in I$ , il morfismo  $\sigma_j$ :

$$\sigma_j (a_i)_{i \in I} = a_j.$$

La coppia  $(A, (\sigma_i)_{i \in I})$  risulta allora il limite inverso del sistema inverso  $(I, (A_i)_{i \in I}, (\sigma_{ij})_{i, j \in I})$ .

(N. B. Per abuso di linguaggio diremo talvolta che  $A$  è il limite inverso degli  $A_i$ ).

Indicheremo con  $\mathfrak{M}$  la sottocategoria piena di  $\mathbb{K}$  i cui oggetti sono le  $k$ -algebre discrete. Se  $A, B \in \mathfrak{M}$  anche  $A \overline{\times} B = A \otimes B \in \mathfrak{M}$ ; se  $A \in \mathfrak{M}$ , ogni sottoalgebra di  $A$  è ancora in  $\mathfrak{M}$ , e così pure ogni algebra quoziente di  $A$ ; inoltre  $k \in \mathfrak{M}$ . Infine, per ogni  $A \in \mathbb{K}$  esiste un sistema inverso in  $\mathfrak{M}$  avente  $A$  come limite inverso; detto infatti  $\mathcal{U}$  un sistema fondamentale di intorni aperti dello  $0$  che siano tutti ideali di  $A$ , e posto  $A_U = A/U$  per ogni  $U \in \mathcal{U}$ , siano:

$\sigma_U$  l'omomorfismo naturale di  $A$  su  $A_U$ ,

$\sigma_{U,V}$  l'omomorfismo naturale di  $A_V$  su  $A_U$  ogniqualvolta  $U \supseteq V$ .

Allora  $\mathcal{U}$  risulta un sistema diretto ordinato mediante  $\supset$ ,  $(\mathcal{U}, (A_U)_{U \in \mathcal{U}}, (\sigma_{U,V})_{U,V \in \mathcal{U}})$  è un sistema inverso il cui limite inverso è  $(A, (\sigma_U)_{U \in \mathcal{U}})$ .

Con  $\mathfrak{H}$  indicheremo la categoria delle  $k$ -algebre linearmente compatte; proveremo più avanti che  $\mathfrak{H}$  è sottocategoria (piena) di  $\mathfrak{K}$ .

Se  $A, B \in \mathfrak{H}$  anche  $A \overline{\times} B \in \mathfrak{H}$ ; se  $A \in \mathfrak{H}$  ogni sottoalgebra (chiusa) di  $A$  è un oggetto di  $\mathfrak{H}$ ; inoltre  $k \in \mathfrak{H}$ .

Infine indicheremo con  $\mathfrak{L}$  la categoria delle  $k$ -algebre di dimensione finita.  $\mathfrak{L}$  è sottocategoria piena di  $\mathfrak{H}$  e di  $\mathfrak{H}$  (oltrechè di  $\mathfrak{K}$ ).

Indicheremo con  $\mathfrak{K}'$  la categoria delle  $k$ -coalgebre topologiche con topologia  $k$ -lineare di Hausdorff complete, coassociative, cocommutative e counitarie (dotate di coidentità); cioè:

i) gli oggetti di  $\mathfrak{K}'$  sono terne  $(A, \mathbf{P}_A, \varepsilon_A)$  con  $A \in \mathfrak{U}$ ,  $\mathbf{P}_A \in \text{Hom}_{\mathfrak{U}}(A, A \overline{\times} A)$ ,  $\varepsilon_A \in \text{Hom}_{\mathfrak{U}}(A, k)$  tali che:

$$(\mathbf{P}_A \overline{\times} \iota_A) \circ \mathbf{P}_A = (\iota_A \overline{\times} \mathbf{P}_A) \circ \mathbf{P}_A,$$

$$s_{A,A} \circ \mathbf{P}_A = \mathbf{P}_A$$

$$(\iota_A \overline{\times} \varepsilon_A) \circ \mathbf{P}_A = (\varepsilon_A \overline{\times} \iota_A) \circ \mathbf{P}_A = \iota_A;$$

N. B. Come già convenuto per la categoria  $\mathfrak{K}$ , ogni volta che ciò non dia luogo ad equivoci indicheremo con  $A$  l'oggetto  $(A, \mathbf{P}_A, \varepsilon_A)$  di  $\mathfrak{K}'$ .

ii) se  $A, B \in \mathfrak{K}'$ ,  $\text{Hom}_{\mathfrak{K}'}(A, B)$  è il sottoinsieme di  $\text{Hom}_{\mathfrak{U}}(A, B)$  formato dagli  $f$  tali che:

$$(f \overline{\times} f) \circ \mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B \circ f$$

$$\varepsilon_A = \varepsilon_B \circ f.$$

In particolare  $k \in \mathfrak{K}'$  e si ha  $\mathbf{P}_k = \varepsilon_k = s_{k,k} = \iota_k$ ; inoltre, per ogni  $A \in \mathfrak{K}'$ ,  $\text{Hom}_{\mathfrak{K}'}(A, k) = \{\varepsilon_A\}$ , onde  $k$  è oggetto finale di  $\mathfrak{K}'$ .

Se  $A, B \in \mathfrak{K}'$ , definendo:

$$\mathbf{P}_{A \overline{\times} B} = (\iota_A \overline{\times} s_{A,B} \overline{\times} \iota_B) \circ (\mathbf{P}_A \overline{\times} \mathbf{P}_B),$$

$$\varepsilon_{A \overline{\times} B} = \varepsilon_A \overline{\times} \varepsilon_B,$$

$A \overline{\times} B$  diviene un oggetto di  $\mathfrak{K}'$ ; si ha inoltre  $\mathbf{P}_A \in \text{Hom}_{\mathfrak{K}'}(A, A \overline{\times} A)$  e  $s_{A,B} \in \text{Hom}_{\mathfrak{K}'}(A \overline{\times} B, B \overline{\times} A)$ .

Similmente se  $f \in \text{Hom}_{\mathfrak{K}'}(A_1, A_2)$  e  $g \in \text{Hom}_{\mathfrak{K}'}(B_1, B_2)$ , è  $f \overline{\times} g \in \text{Hom}_{\mathfrak{K}'}(A_1 \overline{\times} B_1, A_2 \overline{\times} B_2)$ .

Per ogni coppia di oggetti  $A, B \in \mathbb{K}'$  siano  $p_A = \iota_A \overline{\times} \varepsilon_B$  e  $p'_B = \varepsilon_A \overline{\times} \iota_B$ . La terna  $(A \overline{\times} B, p_A, p'_B)$  è un *prodotto diretto* della coppia  $(A, B)$ : cioè ogni terna  $(C, f, g)$  con  $C \in \mathbb{K}'$ ,  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}'}(C, A)$ ,  $g \in \text{Hom}_{\mathbb{K}'}(C, B)$  individua uno ed unico morfismo  $\langle f, g \rangle \in \text{Hom}_{\mathbb{K}'}(C, A \overline{\times} B)$  tale che:

$$f = p_A \circ \langle f, g \rangle$$

$$g = p'_B \circ \langle f, g \rangle$$

ed è

$$\langle f, g \rangle = (f \overline{\times} g) \circ \mathbf{P}_C.$$

Per ogni  $k$ -coalgebra  $A$  indichiamo con  $A^+$  il nucleo (in  $\mathfrak{U}$ ) di  $\varepsilon_A$ . La categoria  $\mathbb{K}'$  possiede anche un *oggetto iniziale*, cioè la  $k$ -coalgebra  $0$ , con  $\mathbf{P}_0 = \iota_0$  e  $\varepsilon_0 0 = 0$ . Per ogni  $A \in \mathbb{K}'$  si ha  $\text{Hom}_{\mathbb{K}'}(0, A) = \{z_A\}$  con  $z_A 0 = 0$ ; inoltre se  $\mathbb{K}' \ni A \neq 0$ , è  $\text{Hom}_{\mathbb{K}'}(A, 0) = \emptyset$ .

Un sotto- $k$ -modulo  $M$  di una  $k$ -coalgebra  $A$  dicesi un coideale se:

- i) è  $T_A$ -chiuso,
- ii)  $\mathbf{P}_A M \subseteq M \overline{\times} A + A \overline{\times} M$
- iii)  $M \subseteq A^+$ ,

cioè se e solo se è nucleo in  $\mathfrak{U}$  di un morfismo di coalgebre. Il sotto- $k$ -modulo nullo di  $A$  è un coideale;  $A$  non è un coideale di  $A$ .

Un sotto- $k$ -modulo  $B$  della coalgebra  $A$  dicesi una sottocoalgebra se

- i) è  $T_A$ -chiuso
- ii)  $\mathbf{P}_A B \subseteq B \overline{\times} B$ ,

cioè se e solo se  $B \in \mathbb{K}'$ ,  $T_B$  è la topologia indotta da  $T_A$ , e l'immersione di  $B$  in  $A$  è un omomorfismo di coalgebre.

Tra le sottocoalgebre di  $A$  vi sono  $A$  stessa, e la sottocoalgebra nulla.

Nei nn. che seguono avranno per noi particolare interesse i seguenti tipi di coalgebre:

- discrete,
- finite,
- linearmente compatte.

**2.1. LEMMA.** *Sia  $A$  una  $k$ -coalgebra discreta o linearmente compatta e sia  $U$  un sotto- $k$ -modulo  $T_A$ -chiuso di  $A$ . Sia poi  $x$  un elemento di  $A$ ; allora le tre seguenti asserzioni sono equivalenti:*

- a)  $\mathbf{P}_A x \in U \overline{\times} A$
- b)  $\mathbf{P}_A x \in A \overline{\times} U$
- c)  $\mathbf{P}_A x \in U \overline{\times} U$ .

*Dimostrazione.*

a) implica b): se  $\mathbf{P}_A x \in U \overline{\times} A$ , si ha  $\mathbf{P}_A x = (s_{A,A} \circ \mathbf{P}_A) x \in s_{A,A} (U \overline{\times} A) = A \overline{\times} U$ .

In modo del tutto analogo si prova che b) implica a). Poi a) implica c): infatti se  $\mathbf{P}_A x \in U \overline{\times} A$ , è conseguentemente  $\mathbf{P}_A x \in A \overline{\times} U$ , onde  $\mathbf{P}_A x \in U \overline{\times} U$ . Infine, banalmente, c) implica a), C. V. D..

2.2. COROLLARIO. *Sia  $U$  un sotto- $k$ -modulo  $T_A$ -chiuso della  $k$ -coalgebra  $A$  discreta o linearmente compatta. Allora  $U$  è una sottocoalgebra se e solo se  $\mathbf{P}_A U \subseteq U \overline{\times} A$ ; od anche se e solo se  $\mathbf{P}_A U \subseteq A \overline{\times} U$ .*

2.3. LEMMA. *Sia  $A$  una  $k$ -coalgebra discreta o linearmente compatta, e sia  $U$  un sotto- $k$ -modulo  $T_A$ -chiuso di  $A$ . Esiste allora una massima sottocoalgebra  $V \subseteq U$ ;  $V$  è il sottoinsieme di  $A$  formato dagli  $x$  tali che  $\mathbf{P}_A x \in U \overline{\times} U$ . Inoltre se  $U \subseteq A^+$ , è  $V = 0$ .*

*Dimostrazione.*

Sia  $\tau$  il morfismo (continuo di  $k$ -moduli) di  $A \overline{\times} A$  avente per nucleo il sotto- $k$ -modulo  $T_{A \overline{\times} A}$ -chiuso  $U \overline{\times} A$ , e sia  $V$  il nucleo di  $\tau \circ \mathbf{P}_A$ .

Detto  $\sigma$  il morfismo naturale di  $A$  su  $A/U$ , il nucleo  $U \overline{\times} A + A \overline{\times} A^+$  di  $\sigma \overline{\times} \varepsilon_A$  è  $\supseteq U \overline{\times} A$ , onde esiste un morfismo  $\lambda$  di  $A \overline{\times} A/U \overline{\times} A$  su  $A/U$  tale che  $\sigma \overline{\times} \varepsilon_A = \lambda \circ \tau$ . Essendo  $U$  il nucleo di  $\sigma = (\sigma \overline{\times} \iota_A) \circ (\iota_A \overline{\times} \varepsilon_A) \circ \mathbf{P}_A = \lambda \circ \tau \circ \mathbf{P}_A$ , si ha  $V \subseteq U$ ;  $V$  è un sotto- $k$ -modulo  $T_A$ -chiuso ed è costituito dagli  $x \in A$  tali che  $\mathbf{P}_A x \in U \overline{\times} A$ , e quindi  $\mathbf{P}_A x \in U \overline{\times} U$ , per 2.1.

Sia poi  $W$  l'insieme degli  $x \in A$  tali che  $\mathbf{P}_A x \in V \overline{\times} A$ ; allora  $x \in W$  se e solo se  $[(\mathbf{P}_A \overline{\times} \iota_A) \circ \mathbf{P}_A] x = [(\iota_A \overline{\times} \mathbf{P}_A) \circ \mathbf{P}_A] x \in U \overline{\times} A \overline{\times} A$ , cioè se e solo se  $\mathbf{P}_A x \in U \overline{\times} A$ , cioè se e solo se  $x \in V$ .

Pertanto  $\mathbf{P}_A V \subseteq V \overline{\times} A$  e, per 2.2,  $V$  è una sottocoalgebra di  $A$ .

Se poi  $Z$  è una sottocoalgebra di  $A$  ed è  $Z \subseteq U$ , si ha  $\mathbf{P}_A Z \subseteq Z \overline{\times} Z \subseteq U \overline{\times} A$ , onde  $Z \subseteq V$ .

Se infine  $U \subseteq A^+$ , per ogni  $x \in V$  è  $\mathbf{P}_A x \in U \overline{\times} U \subseteq A^+ \overline{\times} A^+$ , onde  $\iota_A x = (\iota_A \overline{\times} \varepsilon_A) \circ \mathbf{P}_A x = 0$ ; pertanto è  $V = 0$ , C. V. D..

Indicheremo con  $\mathfrak{H}'$  la sottocategoria piena di  $\mathfrak{K}'$  costituita dalle coalgrebre discrete e con  $\mathfrak{M}'$  la sottocategoria piena di  $\mathfrak{K}'$  costituita dalle coalgrebre linearmente compatte; è noto che il funtore contravariante di  $\mathfrak{V}$  in  $\mathfrak{A}$ :  $A \mapsto A^*$ , induce una antiequivalenza tra le categorie  $\mathfrak{M}$  ed  $\mathfrak{M}'$  ed una antiequivalenza tra  $\mathfrak{H}$  ed  $\mathfrak{H}'$ .

È noto altresì che la applicazione biunivoca:

$$U \mapsto U^1$$

dell'insieme dei sotto- $k$ -moduli  $T_A$ -chiusi di un oggetto  $A \in \mathfrak{H}$  ( $A \in \mathfrak{M}$ ) nell'insieme dei sotto- $k$ -moduli  $T_{A^*}$ -chiusi di  $A^*$ , associa agli ideali di  $A$  le sottocoalgebre di  $A^*$  e alle sottoalgebre di  $A$  i coideali di  $A^*$ .

2.4. LEMMA. *Ogni coalgebra discreta  $A$  è limite diretto del sistema delle proprie sottocoalgebre di dimensione finita.*

*Dimostrazione.*

È sufficiente provare che per ogni  $x \in A$  esiste una sottocoalgebra  $B$  di dimensione finita tale che  $x \in B$ . Sia  $(x_i)_{i \in I}$  una base per la dipendenza lineare di  $A$ , e sia  $J$  il minimo sottoinsieme finito di  $I$  tale che  $\mathbf{P}_A x = \sum_{i, j \in J} c_{ij} x_i \otimes x_j$  ( $c_{ij} \in k$ ). Siano poi  $M = \bigoplus_{i \in J} k x_i$  e  $B$  la massima sottocoalgebra di  $A$  contenuta in  $M$ ; essendo  $\mathbf{P}_A x \in M \otimes M$ , per 2.3, si ha  $x \in B$ ,

C. V. D..

Da 2.4 discendono i seguenti corollari.

2.5. COROLLARIO. *Ogni  $k$ -algebra linearmente compatta è limite inverso del sistema delle proprie  $k$ -algebre quozienti di dimensione finita.*

2.6. COROLLARIO. *Se  $A$  è una  $k$ -algebra linearmente compatta allora  $T_A$  è  $A$ -lineare.*

Cioè esiste un sistema fondamentale di intorno dello 0 costituito da ideali di  $A$ .

Pertanto  $\mathfrak{H}$  è sottocategoria piena di  $\mathfrak{K}$  come già affermato.

3. Le notazioni sono quelle dei nn. precedenti. Con  $\mathfrak{E}$  indichiamo la categoria degli insiemi appartenenti al prefissato universo.

Per ogni  $A \in \mathfrak{K}$  indichiamo con  $\tilde{A}$  il funtore di  $\mathfrak{K}$  in  $\mathfrak{E}$  tale che:

$$\tilde{A} X = \text{Hom}_{\mathfrak{K}}(A, X) \quad X, Y \in \mathfrak{K};$$

$$(\tilde{A} f) P = f \circ P \quad f \in \text{Hom}_{\mathfrak{K}}(X, Y); \quad P \in \tilde{A} X.$$

$\tilde{A}$  è un funtore rappresentabile. Per ogni morfismo  $\lambda$  di  $\mathfrak{K}$ , ( $\lambda \in \text{Hom}_{\mathfrak{K}}(A, B)$ ) indichiamo con  $\tilde{\lambda}$  il morfismo (funtoriale) di  $\tilde{B}$  in  $\tilde{A}$ :

$$(\tilde{\lambda})_X P = P \circ \lambda \quad X \in \mathfrak{K}; \quad P \in \tilde{B} X.$$

Allora il funtore contravariante:

$$A \mapsto \tilde{A}$$

$$\lambda \mapsto \tilde{\lambda}$$

definisce una antiequivalenza tra la categoria  $\mathfrak{K}$  e la categoria dei funtori rappresentabili di  $\mathfrak{K}$  in  $\mathfrak{E}$ .

Per ogni  $A \in \mathfrak{K}$  indicheremo ancora con  $\tilde{A}$  la restrizione del funtore  $\tilde{A}$  alla categoria  $\mathfrak{M}$ .

Sia  $F$  un funtore di  $\mathfrak{M}$  in  $\mathfrak{E}$ . Una *funzione definita su  $F$*  è un morfismo (funtoriale) di  $F$  nel funtore

$$X \mapsto \{x \mid x \in X\}; \quad X \in \mathfrak{M};$$

in altre parole una funzione definita su  $F$  è una collezione di applicazioni  $\xi = (\xi_X)_{X \in \mathfrak{M}}$  con  $\xi_X \in \text{Hom}_{\mathfrak{E}}(FX, X)$  tali che  $\xi_Y \circ (Ef) = f \circ \xi_X$  quali che siano  $X, Y \in \mathfrak{M}$  ed  $f \in \text{Hom}_{\mathfrak{M}}(X, Y)$ ; diremo che il funtore  $F$  è *pseudorappresentabile* se la classe  $F^0$  delle funzioni definite su  $F$  è un insieme dell'universo prefissato.

Sia  $F$  pseudorappresentabile;  $F^0$  diviene un oggetto di  $\mathfrak{K}$  ponendo:

$$(\xi + \eta)_X(P) = \xi_X(P) + \eta_X(P) \quad \xi, \eta \in F^0$$

$$(\xi\eta)_X(P) = \xi_X(P)\eta_X(P) \quad P \in FX; \quad X \in \mathfrak{M},$$

e dotando  $F^0$  della topologia  $T_{F^0}$  scelta come la meno fine tra quelle  $k$ -lineari che rendono continua la applicazione  $\vartheta_{X,P}$  (omomorfismo di  $k$ -algebra) di  $F^0$  in  $X$ :

$$\xi \mapsto \xi_X(P)$$

qualunque sia  $P \in FX$  e qualunque sia  $X \in \mathfrak{M}$ .

Un sistema fondamentale di intorni aperti dello 0 di  $F^0$  per la  $T_{F^0}$  è costituito da  $(\vartheta_{X,P}^{-1}U)$  al variare di  $X \in \mathfrak{M}$ ,  $P \in FX$  e  $U$  ideale di  $X$ .

La  $T_{F^0}$  è di Hausdorff; infatti se  $\xi \in F^0$  appartiene a tutti gli intorni del sistema definito, è  $\xi_X(P) = 0$  per ogni  $P \in FX$  e per ogni  $X \in \mathfrak{M}$ , onde  $\xi$  è la funzione nulla.

Inoltre  $T_{F^0}$  è  $F^0$ -lineare; infine  $F^0$  è  $T_{F^0}$ -completa.

Pertanto  $F^0 \in \mathfrak{K}$ .

Siano  $F$  e  $G$  funtori pseudorappresentabili di  $\mathfrak{M}$  in  $\mathfrak{E}$ , e sia  $\varphi$  un morfismo funtoriale di  $F$  in  $G$ ; indichiamo con  $\varphi^0$  la applicazione di  $G^0$  in  $F^0$  tale che:

$$(\varphi^0 \eta)_X(P) = \eta_X(\varphi_X P); \quad \eta \in G^0; \quad P \in FX; \quad X \in \mathfrak{M}.$$

Allora  $\varphi^0 \in \text{Hom}_{\mathfrak{K}}(G^0, F^0)$ . Pertanto la applicazione

$$F \mapsto F^0$$

$$\varphi \mapsto \varphi^0$$

risulta un funtore contravariante definito nella categoria dei funtori pseudorappresentabili di  $\mathfrak{M}$  in  $\mathfrak{E}$  ed a valori in  $\mathfrak{K}$ .

Sia  $F$  un funtore pseudorappresentabile di  $\mathfrak{M}$  in  $\mathfrak{E}$ ; per ogni  $X \in \mathfrak{M}$  sia  $\vartheta_X$  la applicazione di  $FX$  in  $\tilde{F}^0 X$  definita da:

$$P \mapsto \vartheta_{X, P}.$$

Allora  $\vartheta = (\vartheta_X)_{X \in \mathfrak{M}}$  è un morfismo functoriale di  $F$  in  $\tilde{F}^0$ .  
La coppia  $(F^0, \vartheta)$  gode della seguente proprietà universale.

3.1. Ogni coppia  $(A, \tau)$  con  $A \in \mathfrak{K}$  e  $\tau$  morfismo functoriale di  $F$  in  $\tilde{A}$  individua uno ed unico morfismo  $\lambda \in \text{Hom}_{\mathfrak{K}}(A, F^0)$  tale che  $\tau = \tilde{\lambda} \circ \vartheta$ .

*Dimostrazione.*

Per ogni  $a \in A$  sia  $\lambda a \in F^0$  tale che:

$$(\lambda a)_X(P) = (\tau_X P) a; \quad P \in FX; \quad X \in \mathfrak{M}.$$

$\lambda$  è un morfismo (in  $\mathfrak{K}$ ) di  $A$  in  $F^0$ . Si ha infatti:

$$\lambda(c_1 a_1 + c_2 a_2) = c_1 \lambda a_1 + c_2 \lambda a_2 \quad a_i \in A;$$

$$\lambda(a_1 a_2) = (\lambda a_1)(\lambda a_2) \quad c_i \in k;$$

$$\lambda 1 = 1;$$

inoltre se  $U$  è un intorno aperto dello  $0$  di  $F^0$ , esistono  $X \in \mathfrak{M}$ ,  $P \in FX$  e  $J$  ideale di  $X$  tali che  $\xi \in U$  se e solo se  $\xi_X(P) \in J$ ; posto allora  $V = \lambda^{-1} U$ , si ha  $a \in V$  se e solo se  $(\lambda a)_X P = (\tau_X P) a \in J$ , onde  $V = (\tau_X P)^{-1} J$ , e pertanto  $V$  è un aperto di  $A$ .

Per ogni  $a \in A$  e per ogni  $P \in FX (X \in \mathfrak{M})$ , si ha:

$$(\tilde{\lambda} \circ \vartheta)_X P a = (\lambda_{X, P}) a = \vartheta_{X, P}(\lambda a) = (\lambda a)_X(P) = \tau_X P,$$

onde  $\tilde{\lambda} \circ \vartheta = \tau$ .

Tale  $\lambda$  è unico. Infatti se  $\nu \in \text{Hom}_{\mathfrak{K}}(A, F^0)$  è tale che  $\tilde{\nu} \circ \vartheta = \tau$ , allora per ogni  $a \in A$ , e quali che siano  $X \in \mathfrak{M}$  e  $P \in FX$ , è  $(\nu a)_X(P) = \tau_X P = (\lambda a)_X(P)$ , onde  $\nu a = \lambda a$  per ogni  $a \in A$ , C. V. D. .

Un funtore  $F$  di  $\mathfrak{M}$  in  $\mathfrak{E}$  sarà chiamato *prorappresentabile* se è la restrizione alla categoria  $\mathfrak{M}$  di un funtore rappresentabile di  $\mathfrak{K}$  in  $\mathfrak{E}$ .

3.2. TEOREMA. *Sia  $F$  un funtore di  $\mathfrak{M}$  in  $\mathfrak{E}$ . Allora  $F$  è prorappresentabile se e solo se  $\vartheta$  è un isomorfismo. Ed in tal caso  $F \cong \tilde{F}^0$ .*

*Dimostrazione.*

Se  $\vartheta$  è un isomorfismo si ha  $F \cong \tilde{F}^0$ , onde  $F$  è la restrizione ad  $\mathfrak{M}$  di un funtore rappresentabile di  $\mathfrak{K}$  in  $\mathfrak{E}$ .

Sia  $F \cong \tilde{A}$  con  $A \in \mathfrak{K}$ . Senza alterare la generalità del discorso supporremo di poter identificare gli elementi di  $FX$  con i corrispondenti elementi di  $\tilde{A}X$ . Sia  $\lambda \in \text{Hom}_{\mathfrak{K}}(A, F^0)$  tale che  $P = (\tilde{\lambda} \circ \vartheta)_X P$  per ogni  $P \in FX$  e per ogni  $X \in \mathfrak{M}$ .

Tale  $\lambda$  esiste ed è unico per 3.1.

Il morfismo  $\vartheta$  di  $\tilde{A}$  in  $\tilde{F}^0$  considerati quali funtori di  $\mathfrak{M}$  in  $\mathfrak{E}$  si estende in uno ed unico modo come morfismo di  $\tilde{A}$  in  $\tilde{F}^0$  considerati quali funtori di  $\mathfrak{K}$  in  $\mathfrak{E}$ . Infatti se  $X \in \mathfrak{K}$  è limite inverso di un sistema inverso  $(I, (X_i)_{i \in I}, (\sigma_{i,j})_{i \leq j})$ , in  $\mathfrak{M}$ , si ha  $\tilde{A}X = \lim (I, (\tilde{A}X_i)_{i \in I}, (\tilde{A}\sigma_{i,j})_{i \leq j})$ , e  $\tilde{F}^0 X = \lim (I, (\tilde{F}^0 X_i)_{i \in I}, (\tilde{F}^0 \sigma_{i,j})_{i \leq j \in I})$  onde esiste  $\vartheta_X \in \text{Hom}_{\mathfrak{E}}(\tilde{A}X, \tilde{F}^0 X)$  tale che:  $(\tilde{F}^0 \sigma_i) \circ \vartheta_X = \vartheta_{X_i} \circ (\tilde{A} \sigma_i)$  per ogni  $i \in I$ , e  $\vartheta = (\vartheta_X)_{X \in \mathfrak{K}}$  è un morfismo functoriale di  $\tilde{A}$  in  $\tilde{F}^0$ .

Inoltre ogni funzione definita su  $\tilde{A}$  quale funtore di  $\mathfrak{M}$  in  $\mathfrak{E}$  si estende mediante una funzione definita su  $\tilde{A}$  quale funtore di  $\mathfrak{K}$  in  $\mathfrak{E}$ ; cioè per ogni  $\xi \in F^0$  può definirsi  $\xi_X \in \text{Hom}_{\mathfrak{E}}(\tilde{A}X, X)$  per ogni  $X \in \mathfrak{K}$ , in modo che sia

$$f \circ \xi_X = \xi_Y \circ (\tilde{A}f) \quad X, Y \in \mathfrak{K}, f \in \text{Hom}_{\mathfrak{K}}(X, Y)$$

Ciò premesso sia  $\varphi = \vartheta_{A, \iota_A} (\in \text{Hom}_{\mathfrak{K}}(F^0, A))$ .

Intanto  $\varphi$  è iniettivo; infatti, per ogni  $P \in FX$  e per ogni  $X \in \mathfrak{M}$ , si ha:

$$P = (FP) \iota_A,$$

onde, per ogni  $\xi \in F^0$ ,

$$\xi_X \circ FP = P \circ \xi_A,$$

e quindi

$$\xi_X(P) \xi_X[(FP) \iota_A] = P \xi_A(\iota_A).$$

Pertanto se  $\xi \in F^0$  è tale che  $\varphi \xi = \vartheta_{A, \iota_A} \xi = \xi(\iota_A) = 0$ , allora  $\xi_X(P) = 0$  qualunque sia  $P \in FX$  e qualunque sia  $X \in \mathfrak{M}$ , onde  $\xi = 0$ .

Infine per ogni  $a \in A$  si ha

$$(\varphi \circ \lambda) a = \vartheta_{A, \iota_A} (\lambda a) = (\lambda a)_A (\iota_A) = \iota_A a = a,$$

onde  $\varphi \circ \lambda = \iota_A$ .

Ne consegue che  $\varphi$  è un isomorfismo e  $\lambda$  ne è il reciproco.

Essendo  $A \cong F^0$ ,  $\vartheta$  risulta un isomorfismo functoriale, onde  $F \cong \tilde{F}^0$ , C. V. D..

3.3. COROLLARIO. *Il funtore :*

$$A \mapsto \tilde{A}$$

$$f \mapsto \tilde{f}$$

rende antiequivalenti la categoria  $\mathbb{K}$  e la categoria  $\tilde{\mathbb{M}}$  dei funtori prorappresentabili di  $\mathbb{M}$  in  $\mathbb{E}$ .

Il funtore aggiunto del funtore è quello definito da :

$$F \mapsto F^0$$

$$\varphi \mapsto \varphi^0$$

Sia  $\mathbb{A}$  la categoria dei gruppi abeliani e sia  $\Phi$  il funtore « soggiacente » di  $\mathbb{A}$  in  $\mathbb{E}$  :

$$\Phi A = \text{Insieme soggiacente ad } A, \text{ per ogni } A \in \mathbb{A}.$$

Sia  $F$  un funtore rappresentabile di  $\mathbb{K}$  in  $\mathbb{E}$  : diremo che  $F$  è un *gruppo analitico* <sup>(1)</sup> se esiste un funtore  $F'$  di  $\mathbb{K}$  in  $\mathbb{A}$  tale che  $F = \Phi \circ F'$ . Un gruppo analitico  $F$  sarà chiamato *algebrico* <sup>(2)</sup> se  $F^0$  è una  $k$ -algebra discreta; sarà invece chiamato *formale* se  $F^0$  è linearmente compatta.

Se  $F = \Phi \circ F'$  e  $G = \Phi \circ G'$  sono gruppi analitici e  $\varphi$  è un morfismo functoriale di  $F$  in  $G$ , diremo che  $\varphi$  è un *omomorfismo di gruppi analitici* se esiste un morfismo  $\varphi'$  di  $F'$  in  $G'$  tale che  $\varphi_X = \Phi \varphi'_X$  per ogni  $X \in \mathbb{K}$ .

Si ha allora (cfr. [18]).

<sup>(1)</sup> Sottointenderemo sempre la parola « commutativo ».

<sup>(2)</sup> Si tratta in realtà di gruppi algebrici affini; in questa trattazione tuttavia sottointenderemo sempre la parola « affine ».

Sia  $F$  un funtore rappresentabile di  $\mathbb{K}$  in  $\mathfrak{E}$ ;  $F$  è un gruppo analitico se e solo se, detta  $A$  la  $k$ -algebra  $F^0$  delle funzioni definite su  $F$ , esistono tre morfismi:

$$\mathbf{P}_A \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A, A \overline{\times} A); \quad \varepsilon_A \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A, k); \quad \varrho_A \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A, A),$$

tali che:

$$(\mathbf{P}_A \overline{\times} \iota_A) \circ \mathbf{P}_A = (\iota_A \overline{\times} \mathbf{P}_A) \circ \mathbf{P}_A,$$

$$s_{A,A} \circ \mathbf{P}_A = \mathbf{P}_A,$$

$$(\iota_A \overline{\times} \varepsilon_A) \circ \mathbf{P}_A = (\varepsilon_A \overline{\times} \iota_A) \circ \mathbf{P}_A = \iota_A,$$

$$\mu_A \circ (\iota_A \overline{\times} \varrho_A) \circ \mathbf{P}_A = \mu_A \circ (\varrho_A \overline{\times} \iota_A) \circ \mathbf{P}_A = i_A \circ \varepsilon_A;$$

e, se questo è il caso, per ogni  $X \in \mathbb{K}$ , la legge gruppale in  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(A, X)$  è data da:

$$P + Q = \mu_X \circ (P \overline{\times} Q) \circ \mathbf{P}_A \quad P, Q \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A, X);$$

lo zero del gruppo è  $i_X \circ \varepsilon_A$ ; infine, per ogni  $P \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A, X)$  è  $-P = (\tilde{\varrho}_A)_X P = P \circ \varrho_A$ .

Inoltre: se  $F = \tilde{A}$  e  $G = \tilde{B}$  sono gruppi analitici e  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A, B)$ ,  $\tilde{f}$  è un morfismo di gruppi analitici se e solo se  $(f \overline{\times} f) \circ \mathbf{P}_A = \mathbf{P}_A \circ f$ ; ed in tal caso  $\varepsilon_B \circ f = \varepsilon_A$  e  $f \circ \varrho_A = \varrho_B \circ f$ .

Considerazioni del tutto analoghe a quelle ora svolte ci conducono alla nozione di *cogruppo analitico*. Per ogni  $A \in \mathbb{K}'$  sia  $\hat{A}$  il funtore contravariante di  $\mathbb{K}'$  in  $\mathfrak{E}$ :

$$\hat{A}X = \text{Hom}_{\mathbb{K}'}(X, A) \text{ per ogni } X \in \mathbb{K}'$$

$$(\hat{A}f)P = P \circ f; \quad P \in \hat{A}Y; \quad f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}'}(X, Y).$$

Per ogni morfismo  $\lambda$  di  $\mathbb{K}'$  ( $\lambda \in \text{Hom}_{\mathbb{K}'}(A, B)$ ) indichiamo con  $\hat{\lambda}$  il morfismo functoriale di  $\hat{A}$  in  $\hat{B}$ :

$$\hat{\lambda}_X P = \lambda \circ P \quad P \in \hat{A}X; \quad X \in \mathbb{K}',$$

Un funtore contravariante  $F$  di  $\mathbb{K}'$  in  $\mathfrak{E}$  verrà chiamato *rappresentabile* se esiste  $A \in \mathbb{K}'$  tale che  $F \cong \hat{A}$ .

Un funtore contravariante rappresentabile verrà chiamato un *cograppo analitico* se esiste un funtore contravariante  $F'$  di  $\mathbb{K}'$  in  $\mathfrak{A}$  tale che  $F = \Phi \circ F'$ . La nozione di *omomorfismo di cogruppi analitici* si pone in modo del tutto analogo a quella di omomorfismo di gruppi analitici.

Si ha allora (cfr. [18]):

Sia  $F = \widehat{A}$  un funtore contravariante rappresentabile di  $\mathbb{K}'$  in  $\mathfrak{E}$ ;  $F$  è un cograppo analitico se e solo se esistono tre morfismi:

$$\mu_A \in \text{Hom}_{\mathbb{K}'}(A \overline{\times} A, A); i_A \in \text{Hom}_{\mathbb{K}'}(k, A); \varrho_A \in \text{Hom}_{\mathbb{K}'}(A, A),$$

tali che:

$$\mu_A \circ (\mu_A \overline{\times} \iota_A) = \mu_A \circ (\iota_A \overline{\times} \mu_A),$$

$$\mu_A \circ s_{A,A} = \mu_A$$

$$\mu_A \circ (\iota_A \overline{\times} i_A) = \mu_A \circ (i_A \overline{\times} \iota_A) = \iota_A,$$

$$\mu_A \circ (\iota_A \overline{\times} \varrho_A) \circ \mathbf{P}_A = \mu_A \circ (\varrho_A \overline{\times} \iota_A) \circ \mathbf{P}_A = i_A \circ \varepsilon_A;$$

e, se questo è il caso, per ogni  $X \in \mathbb{K}'$ , la legge gruppale in  $\text{Hom}_{\mathbb{K}'}(X, A)$  è data:

$$P + Q = \mu_A \circ (P \overline{\times} Q) \circ \mathbf{P}_X \quad P, Q \in \text{Hom}_{\mathbb{K}'}(X, A);$$

lo zero del gruppo è  $i_A \circ \varepsilon_X$ ; infine, per ogni  $P \in \text{Hom}_{\mathbb{K}'}(X, A)$  è  $-P = (\widehat{\varrho_A})_X P = \varrho_A \circ P$ .

Inoltre se  $F = \widehat{A}$  e  $G = \widehat{B}$  sono cogruppi analitici, e  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}'}(A, B)$ ,  $\widehat{f}$  è un omomorfismo di cogruppi analitici se e solo se  $\mu_B \circ (f \overline{\times} f) = f \circ \mu_A$ ; ed in tal caso  $f \circ i_A = i_B$  e  $f \circ \varrho_A = \varrho_B \circ f$ .

4. Siano  $A \in \mathfrak{U}$ ,  $\mu_A \in \text{Hom}_{\mathfrak{U}}(A \overline{\times} A, A)$ ,  $\mathbf{P}_A \in \text{Hom}_{\mathfrak{U}}(A, A \overline{\times} A)$ ,  $i_A \in \text{Hom}_{\mathfrak{U}}(k, A)$ ,  $\varepsilon_A \in \text{Hom}_{\mathfrak{U}}(A, k)$  tali che la terna  $(A, \mu_A, i_A)$  sia un oggetto di  $\mathbb{K}$ , e la terna  $(A, \mathbf{P}_A, \varepsilon_A)$  sia un oggetto di  $\mathbb{K}'$ . Si ha allora:

4.1. LEMMA. Le due seguenti asserzioni sono equivalenti:

- i)  $\mathbf{P}_A$  ed  $\varepsilon_A$  sono omomorfismi di  $k$ -algebre,
- ii)  $\mu_A$  e  $i_A$  sono omomorfismi di  $k$ -coalgebre;

*Dimostrazione.*

i) implica ii).

L'ipotesi i) significa

$$\begin{aligned} a) \mathbf{P}_A \circ \mu_A &= \mu_A \overline{\times} A \circ (\mathbf{P}_A \overline{\times} \mathbf{P}_A) = (\mu_A \overline{\times} \mu_A) \circ (\iota_A \overline{\times} s_{A,A} \overline{\times} \iota_A) \circ (\mathbf{P}_A \overline{\times} \mathbf{P}_A) = \\ &= (\mu_A \overline{\times} \mu_A) \circ \mathbf{P}_A \overline{\times} A; \end{aligned}$$

$$b) \mathbf{P}_A \circ i_A = i_A \overline{\times} A = i_A \overline{\times} i_A;$$

$$c) \varepsilon_A \circ \mu_A = \varepsilon_A \overline{\times} A = \varepsilon_A \overline{\times} \varepsilon_A;$$

$$d) \varepsilon_A \circ i_A = i_k = \varepsilon_k.$$

Da a) e c) si ha che  $\mu_A$  è un omomorfismo di  $k$ -coalgebre, e da b) e d), che  $i_A$  è un omomorfismo di  $k$ -coalgebre.

ii) implica i).

La dimostrazione procede in modo del tutto analogo. C. V. D..

4.2. LEMMA. Sia  $(A, \mu_A, i_A, \mathbf{P}_A, \varepsilon_A)$  un sistema soddisfacente alle ipotesi di 4.1, e sia  $\varrho_A \in \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(A, A)$  tale che:

$$\mu_A \circ (\varrho_A \overline{\times} \iota_A) \circ \mathbf{P}_A = \mu_A \circ (\iota_A \overline{\times} \varrho_A) \circ \mathbf{P}_A = i_A \circ \varepsilon_A;$$

allora le due seguenti asserzioni sono equivalenti:

- i)  $\varrho_A$  è un omomorfismo di  $k$ -algebre,
- ii)  $\varrho_A$  è un omomorfismo di  $k$ -coalgebre.

*Dimostrazione.*

Supposta vera la i), il funtore  $\tilde{A}$  di  $\mathfrak{K}$  in  $\mathfrak{E}$  è un gruppo analitico e  $\tilde{\varrho}_A$  è un omomorfismo di gruppi analitici. Pertanto è  $(\varrho_A \overline{\times} \varrho_A) \circ \mathbf{P}_A = \mathbf{P}_A \circ \varrho_A$  e  $\varepsilon_A \circ \varrho_A = \varepsilon_A$ , onde  $\varrho_A$  è un omomorfismo di  $k$ -coalgebre.

Viceversa supposta vera la ii) il funtore contravariante  $\hat{A}$  di  $\mathfrak{K}'$  in  $\mathfrak{E}$  è un cogruppo analitico e  $\hat{\varrho}_A$  è un omomorfismo di cogruppi analitici. Pertanto è  $\varrho_A \circ \mu_A = \mu_A \circ (\varrho_A \overline{\times} \varrho_A)$  e  $\varrho_A \circ i_A = i_A$ , onde  $\varrho_A$  è un omomorfismo di  $k$ -algebre, C. V. D..

Un sistema  $(A, \mu_A, i_A, \varrho_A, \varepsilon_A, \varrho_A)$  soddisfacente a tutte le ipotesi di 4.1 e 4.2 verrà chiamato una  $k$ -iperalgebra. Per abuso di linguaggio indicheremo con  $A$  la  $k$ -iperalgebra  $(A, \mu_A, i_A, \mathbf{P}_A, \varepsilon_A, \varrho_A)$ .

4.3. LEMMA. Sia  $A$  una  $k$ -iperalgebra. Allora  $\mu_A$  e  $\varepsilon_A$  sono surgettivi;  $\mathbf{P}_A$  e  $i_A$  sono iniettivi;  $\varrho_A$  è un isomorfismo e si ha  $(\varrho_A)^{-1} = \varrho_A$ .

*Dimostrazione.*

Si ha  $\mu_A \circ (\iota_A \overline{\times} i_A) = \iota_A$ ; essendo  $\iota_A$  surgettivo, anche  $\mu_A$  è surgettivo; essendo  $\iota_A$  iniettivo  $(\iota_A \overline{\times} i_A)$  è iniettivo. Pertanto, detto  $M (\subseteq k)$  il nucleo di  $i_A$ , è  $0 = A \overline{\times} M$  il nucleo di  $\iota_A \overline{\times} i_A$ . Se non fosse  $M = 0$  sarebbe  $M = k$ , onde  $A = 0$ ; in tal caso si avrebbe  $1 = (\varepsilon_A \circ i_A) 1 = \varepsilon_A 0 = 0$ . Ciò è assurdo e pertanto  $M = 0$  e  $i_A$  è iniettivo.

Essendo poi  $(\iota_A \overline{\times} \varepsilon_A) \circ \mathbf{P}_A = \iota_A$ ,  $\mathbf{P}_A$  risulta iniettivo e  $\iota_A \overline{\times} \varepsilon_A$  surgettivo; detto  $M (\subseteq k)$  l'immagine di  $\varepsilon_A$ , si ha  $A = A \overline{\times} M =$  immagine di  $\iota_A \overline{\times} \varepsilon_A$ . Essendo  $A \neq 0$  si ha  $M \neq 0$ , onde  $M = k$ .

Infine, per ogni  $X \in \mathbb{K}$  e per ogni  $P \in \tilde{A}X$ , è  $[(\tilde{\varrho}_A)_X \circ (\tilde{\varrho}_A)_X] P = P$ , onde  $\tilde{\varrho}_A \circ \tilde{\varrho}_A =$  Morfismo identico di  $\tilde{A}$ . Ne segue  $\varrho_A^2 = \iota_A$ , C. V. D. .

Da 4.3 segue che, indicando con  $A^+$  il nucleo di  $\varepsilon_A$  e con  $k$  l'immagine di  $i_A$  (che è isomorfa a  $k$ ), è  $A = k \oplus A^+$ .

Chiameremo, come di consueto,  $\mu_A$  la *moltiplicazione* di  $A$ ,  $\mathbf{P}_A$  la *comoltiplicazione*,  $i_A$  la *identificazione*,  $\varepsilon_A$  la *augmentazione* (o *coidentità*),  $\varrho_A$  l'*inversione* (o *antipodismo*).

4.5. LEMMA. *Siano  $A$  e  $B$  iperalgebre e sia  $f \in \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(A, B)$ . Allora le due seguenti asserzioni sono equivalenti:*

i)  *$f$  è un omomorfismo di  $k$  algebre ed è  $(f \overline{\times} f) \circ \mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B \circ f$*

ii)  *$f$  è un omomorfismo di  $k$ -coalgebre ed è  $f \circ \mu_A = \mu_B \circ (f \overline{\times} f)$*

*Inoltre se  $f$  verifica le condizioni suddette, allora è  $f \circ \varrho_A = \varrho_B \circ f$ .*

*Dimostrazione.*

Supposta verificata la i), il morfismo functoriale  $\tilde{f}$  di  $\tilde{B}$  in  $\tilde{A}$  è un morfismo di gruppi analitici, onde  $\varepsilon_B \circ f = \tilde{f}_k 0 = 0 = \varepsilon_A$ . Pertanto  $f$  è un omomorfismo di  $k$ -coalgebre. Inoltre,  $\varrho_B \circ f = \tilde{f}_B(-\iota_B) = -\tilde{f}_B(\iota_B) = \iota_B \circ f \circ \varrho_A$ .

Supposta invece verificata la ii), il morfismo functoriale  $\hat{f}$  di  $\hat{A}$  in  $\hat{B}$  è un morfismo di cogruppi analitici, onde  $f \circ i_A = \hat{f}_k 0 = 0 = i_B$ . Pertanto  $f$  è un omomorfismo di  $k$ -algebre. Inoltre  $f \circ \varrho_A = \hat{f}_A(\varrho_A \circ \iota_A) = \hat{f}_A(-\iota_A) = -\hat{f}_A(\iota_A) = \varrho_B \circ f \circ \iota_A$ , C. V. D. .

Se  $A$  e  $B$  sono iperalgebre chiameremo *omomorfismo di iperalgebre* di  $A$  in  $B$  ogni  $f \in \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(A, B)$  soddisfacente alle condizioni di 4.4; per 4.2,  $\varrho_A$  è un omomorfismo di iperalgebre.

Se  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono iperalgebre, e  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow C$  sono omomorfismi di iperalgebre, per 4.4 anche  $g \circ f$  è un omomorfismo di iperalgebre. Le iperalgebre costituiscono pertanto una categoria che indicheremo con  $\mathfrak{B}$ .

Se  $A, B \in \mathfrak{H}$ ,  $A \overline{\times} B$  diviene un oggetto di  $\mathfrak{H}$  ponendo  $\varrho_{A \overline{\times} B} = \varrho_A \overline{\times} \varrho_B$ . Inoltre ponendo  $\varrho_k = \iota_k$ , anche  $k$  diviene un oggetto di  $\mathfrak{H}$ . Per ogni  $A \in \mathfrak{H}$  i morfismi  $\mu_A, i_A, \mathbf{P}_A, \varepsilon_A$  sono tutti morfismi di iperalgebre; e si ha  $\text{Hom}_{\mathfrak{H}}(A, k) = \{\varepsilon_A\}$ , e  $\text{Hom}_{\mathfrak{H}}(k, A) = \{i_A\}$ , onde  $k$  è oggetto nullo di  $\mathfrak{H}$ .

Quali che siano  $A, B \in \mathfrak{H}$  i morfismi  $j_A = \iota_A \overline{\times} i_B, j'_B = i_A \overline{\times} \iota_B, p_A = \iota_A \overline{\times} \varepsilon_B, p'_B = \varepsilon_A \overline{\times} \iota_B$  sono omomorfismi di iperalgebre. Pertanto la quintupla  $(A \overline{\times} B, j_A, j'_B, p_A, p'_B)$  è una *somma diretta* della coppia  $(A, B)$ . La categoria  $\mathfrak{H}$  dotata di oggetto nullo e di somma diretta per ogni coppia di oggetti risulta quindi addittiva.

Sia  $A$  una iperalgebra, e sia  $M$  un sotto  $k$ -modulo  $T_A$ -chiuso di  $A$ ; diremo che  $M$  è un *biideale* se l'omomorfismo (di  $k$ -moduli) di  $A$  di nucleo (in  $\mathfrak{U}$ )  $M$  è un omomorfismo di iperalgebre; ciò comporta, in particolare, che  $A/M$  è dotato di una struttura (naturale) di iperalgebra.

Si ha allora il seguente (ben noto) teorema:

4.5. TEOREMA. *Sia  $M$  un sotto  $k$ -modulo  $T_A$ -chiuso della iperalgebra  $A$ . Allora  $M$  è un biideale se e solo se;*

- a)  $M$  è un ideale di  $A$ ,
- b)  $M$  è un coideale di  $A$ ,
- c)  $\varrho_A M = M$ .

Notiamo incidentalmente che le condizioni a), b) e c) di 4.5 sono indipendenti. Senza esaminare tutti i casi diamo il seguente controesempio nel quale sono soddisfatte a) e b) ma non c).

Sia  $A$  l'iperalgebra linearmente compatta avente una pseudobase  $(z_i)_{i \text{ intero}}$ , tale che

$$z_i z_j = \delta_{ij} z_i \quad (\delta_{ij} \text{ simbolo di Kronecker})$$

$$\mathbf{P}_A z_i = \sum_{a+b=i} z_a \overline{\times} z_b$$

$$i_A 1 = \sum_i z_i; \quad \varepsilon_A z_i = \delta_{i0}; \quad \varrho_A z_i = z_{-i}.$$

Si ha  $A^+ = \bigoplus_{i \neq 0} k z_i$  <sup>(3)</sup>.

Sia  $M = \bigoplus_{i > 0} k z_i$ ;  $M$  è un ideale di  $A$  e simultaneamente un coideale; tuttavia  $\varrho_A M = \bigoplus_{i < 0} k z_i \neq M$ .

Il  $k$ -modulo  $B = A/M$  possiede una moltiplicazione  $\mu_B$ , una identificazione  $i_B$ , una comoltiplicazione  $\mathbf{P}_B$ , una augmentazione  $\varepsilon_B$  soddisfacenti

(3) Somma diretta completa.

alle condizioni di 4.1; tuttavia  $B$  non è una iperalgebra perchè non possiede inversione.

Sia ancora  $A$  una iperalgebra e sia  $B$  un sotto- $k$ -modulo  $T_A$ -chiuso di  $A$ . Diremo che  $B$  è una *sottoiperalgebra* di  $A$  se il morfismo di immersione di  $B$  in  $A$  è un morfismo di iperalgebre; ciò implica, in particolare, che  $B$  è dotato di una struttura di iperalgebra indotta dalla struttura esistente in  $A$ .

Si ha allora il seguente (ben noto)

**4.6. TEOREMA.** *Sia  $B$  un sotto- $k$ -modulo  $T_A$ -chiuso della iperalgebra  $A$ . Allora  $B$  è una sottoiperalgebra di  $A$  se e solo se:*

- a)  $B$  è una sottoalgebra di  $A$ ,
- b)  $B$  è una sottocoalgebra di  $A$ ,
- c)  $\varrho_A B = B$ .

Le sottoiperalgebre di  $A$  contengono tutte la sottoiperalgebra minima  $i_A k \cong k$ .

Analogamente a quanto osservato in margine a 4.5, osserviamo che le condizioni a), b) e c) di 4.6 sono indipendenti come prova il seguente controesempio.

Sia  $A$  l'iperalgebra discreta  $k[x, x^{-1}]$  (essendo  $x$  una indeterminata su  $k$ ) tale che:

$$\mathbf{P}_A x = x \otimes x; \varepsilon_A x = 1; \varrho_A x = x^{-1}.$$

Allora  $B = k[x]$  è un sotto- $k$ -modulo di  $A$  per il quale sono soddisfatte a) e b) ma non c).

**4.7. LEMMA.** *Sia  $M$  un biideale dell'iperalgebra  $A$ ; esiste allora una massima sottoiperalgebra  $B \subseteq k \oplus M$ .*

*Se  $A$  è discreta o linearmente compatta  $B$  è massima anche come sottocoalgebra*

*Dimostrazione.*

Sia  $V$  il minimo sotto- $k$ -modulo di  $A$  contenente tutte le sottoiperalgebre di  $A$  contenute in  $k \oplus M$ , e sia  $B$  la  $T_A$ -chiusura di  $V$ ;  $V$  è costituito da tutte le somme finite di elementi ognuno dei quali appartiene ad una sotto- $k$ -iperalgebra di  $A$  contenuta in  $k \oplus M$ . Pertanto  $V$  è contenuto in  $k \oplus M$ , e conseguentemente  $B \subseteq k \oplus M$ .

Per ogni  $x \in V$ ,  $x = \sum_{i=1}^n x_i$  con  $x_i \in H_i$  ( $H_i$  sottoiperalgebra di  $A$ ) è  $\mathbf{P}_A x = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_A x_i \in H_i \overline{\times} H_i \subseteq B \overline{\times} B$ . Pertanto  $\mathbf{P}_A V \subseteq B \overline{\times} B$ , onde  $\mathbf{P}_A B \subseteq B \overline{\times} B$ .

Poi se  $x, y \in V$  è  $xy \in V$ , e quindi  $\mu_A(B \overline{\times} B) = B$ .

Infine per ogni  $x \in V$  è  $\varrho_A x \in V$ , onde  $\varrho_A V = V$ , e pertanto  $\varrho_A B = B$ ; quindi  $B$  è una sottoiperalgebra di  $A$ .

Nel caso particolare in cui  $A$  sia discreta o linearmente compatta indichiamo con  $B$  la massima sottocoalgebra di  $A$  contenuta in  $k \oplus M$ . Osserviamo che  $k \oplus M$  è una sottoalgebra di  $A$ , onde  $(k \oplus M) \overline{\times} (k \oplus M)$  è una sottoalgebra di  $A \overline{\times} A$ . Siano  $x, y \in B$ ; essendo  $\mathbf{P}_A x, \mathbf{P}_A y \in (k \oplus M) \overline{\times} (k \oplus M)$ , è  $\mathbf{P}_A(xy) = (\mathbf{P}_A x)(\mathbf{P}_A y) \in (k \oplus M) \overline{\times} (k \oplus M)$ , e pertanto, per 2.3,  $xy \in B$ . Poi  $\mathbf{P}_A 1 = 1 \overline{\times} 1 \in (k \oplus M) \overline{\times} (k \oplus M)$ ; quindi  $B$  è una sottoalgebra di  $A$ .

Essendo  $\varrho_A$  un isomorfismo di iperalgebra,  $\varrho_A B$  è la massima sottocoalgebra di  $A$  contenuta in  $\varrho_A(k \oplus M) = k \oplus M$ , onde  $\varrho_A B \subseteq B$ , C. V. D..

4.8. LEMMA. *Sia  $B$  una sottoiperalgebra della iperalgebra  $A$ , e sia  $M$  il minimo ideale di  $A$  contenente  $B^+$ .*

*Allora  $M$  è un biideale.*

*Dimostrazione.*

Intanto è  $\mathbf{P}_A B^+ \subseteq B \overline{\times} B^+ + B^+ \overline{\times} B \subseteq A \overline{\times} B^+ + B^+ \overline{\times} A$ , cioè  $B^+$  è un coideale di  $A$ . Poi  $M = \mu_A(A \overline{\times} B^+)$ , onde  $\mathbf{P}_A M = (\mathbf{P}_A \circ \mu_A)(A \overline{\times} B^+) = [(\mu_A \overline{\times} \mu_A) \circ (\iota_A \overline{\times} s_{A,A} \overline{\times} \iota_A) \circ (\mathbf{P}_A \overline{\times} \mathbf{P}_A)](A \overline{\times} B^+) \subseteq [(\mu_A \overline{\times} \mu_A) \circ (\iota_A \overline{\times} s_{A,A} \overline{\times} \iota_A)][(A \overline{\times} A) \overline{\times} (A \overline{\times} B^+ + B^+ \overline{\times} A)] = (\mu_A \overline{\times} \mu_A)(A \overline{\times} A \overline{\times} A \overline{\times} B^+ + A \overline{\times} B^+ \overline{\times} A \overline{\times} A) = A \overline{\times} M + M \overline{\times} A$ , onde  $M$  è un coideale. Infine  $\varrho_A M$  è il minimo ideale contenente  $\varrho_A B^+ = (\varrho_A B)^+ = B^+$ , onde  $\varrho_A M = M$ , C. V. D..

Da 4.7 e 4.8 segue il seguente:

4.9. TEOREMA. Ogni morfismo in  $\mathfrak{H}$  ha nucleo e conucleo (in  $\mathfrak{H}$ ).

*Dimostrazione.*

Sia  $f \in \text{Hom}_{\mathfrak{H}}(A, B)$ , e sia  $M$  (biideale di  $A$ ) il nucleo di  $f$  in  $\mathfrak{U}$ ; sia  $N$  la massima sottoiperalgebra di  $A$  contenuta in  $k \oplus M$ . Si ha  $fN = k$ ; pertanto, detta  $n$  l'immersione di  $N$  in  $A$ ,  $f \circ n = i_B \circ \varepsilon_N =$  morfismo nullo di  $N$  in  $B$ . D'altra parte se  $R$  è una iperalgebra e  $r \in \text{Hom}_{\mathfrak{H}}(R, A)$  è tale che  $f \circ r = i_B \circ \varepsilon_R$ , si ha  $(f \circ r)R = k$ , onde  $rR \subseteq k \oplus M$ , e quindi  $rR \subseteq N$ . Perciò  $r = n \circ n'$  con  $n' \in \text{Hom}_{\mathfrak{H}}(R, N)$  tale che  $n'x = rx$  per ogni  $x \in R$ ;  $R$  risulta perciò il nucleo di  $f$ .

Sia poi  $D$  la immagine di  $f^{(4)}$  (sottoiperalgebra di  $B$ ), e sia  $J$  il minimo biideale contenente  $D^+ = fA^+$ . Sia  $\text{Hom}_{\mathfrak{H}}(B, B/J)$  l'omomorfismo

(4) Si intende la immagine di  $f$  in  $\mathfrak{U}$ ; si tratta di una iperalgebra  $D$  la cui topologia  $T_D$  è quella indotta da  $T_B$ .

naturale di  $B$  su  $C = B/J$ . Si ha intanto  $c \circ f = i_C \circ \varepsilon_A$ ; inoltre se  $S \in \mathfrak{H}$ , e  $s \in \text{Hom}_{\mathfrak{H}}(B, S)$  è tale che  $s \circ f = i_S \circ \varepsilon_A$ , allora il nucleo (in  $\mathfrak{U}$ ) di  $s$  contiene  $D^+$ , e quindi  $J$ . Pertanto esiste  $c' \in \text{Hom}_{\mathfrak{H}}(C, S)$  tale che  $s = c' \circ c$ , e la coppia  $(C, c)$  (o, per abuso di linguaggio, l'iperalgebra  $C$ ) è il conucleo di  $f$  in  $\mathfrak{H}$ , C. V. D..

Sia  $f \in \text{Hom}_{\mathfrak{H}}(A, B)$ , e siano  $M$  (biideale di  $A$ ) e  $N$  (sottoiper-algebra di  $A$ ) il nucleo di  $f$  in  $\mathfrak{U}$  e in  $\mathfrak{H}$  rispettivamente. Indichiamo con  $M^*$  il minimo biideale contenente  $N^+(M^* \subseteq M)$ . L'iper-algebra  $A/M^*$  (con la topologia quoziente) è il conucleo del nucleo di  $f$ , cioè la *coimmagine* di  $f$ . Sia poi  $D$  l'immagine di  $f$  in  $\mathfrak{U}^{(5)}$ , sia  $J$  il minimo biideale contenente  $D^+$ , e sia  $D^*$  la massima sottoiper-algebra di  $B$  contenuta in  $k \oplus J$ ;  $D^* (\supseteq D)$  è il nucleo del conucleo di  $f$  (in  $\mathfrak{H}$ ), cioè l'*immagine* di  $f$  in  $\mathfrak{H}$ .

Il funtore :

$$A \mapsto \tilde{A} \quad A \in \mathfrak{H},$$

$$f \mapsto \tilde{f} \quad f \text{ morfismo di } \mathfrak{H},$$

definisce una antiequivalenza tra la categoria  $\mathfrak{H}$  e la categoria  $\mathfrak{G}$  dei gruppi analitici. Pertanto la categoria  $\mathfrak{G}$  è addittiva ed ogni suo morfismo possiede nucleo e conucleo. In particolare si ha :

**4.10. TEOREMA.** *Siano  $F$  e  $G$  gruppi analitici, e sia  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathfrak{G}}(F, G)$ . Detto  $H$  il nucleo di  $\varphi$ ,  $HX$  è il nucleo di  $\varphi_X$  per ogni  $X \in \mathfrak{K}$ .*

*Dimostrazione.*

Siano  $A = F^0$ ,  $B = G^0$ ,  $f = \varphi^0$ , e sia  $(C, h)$  il conucleo in  $\mathfrak{H}$  di  $f$ . Allora  $C \cong H^0$  e  $H = \tilde{C}$ .

Per ogni  $X \in \mathfrak{K}$  il morfismo  $\nu_X = \tilde{h}_X$  è iniettivo.

Infatti se  $P \in HX$  è tale che  $\nu_X P = i_X \circ \varepsilon_A$ , si ha  $(h\xi)_X(P) = \varepsilon_C(h\xi)$  per ogni  $\xi \in A$ , onde  $\eta_X(P) = \varepsilon_C \eta$  per ogni  $\eta \in C$ , e  $P$  risulta lo 0 di  $HX$ .

Identifichiamo gli elementi di  $HX$  con i corrispondenti elementi di  $FX$ . Allora  $P \in FX = \text{Hom}_{\mathfrak{K}}(A, X)$  definisce un omomorfismo di  $C$  in  $X$ , cioè un elemento di  $HX$ , se e solo se  $\xi_X(P) = 0$  per ogni  $\xi \in fB^+$ , cioè se e solo se è  $(f\eta)_X(P) = \eta_X(\varphi_X P) = \varepsilon_B \eta$  per ogni  $\eta \in B$ , cioè, infine, se e solo se  $P \in \ker \varphi_X$ , C. V. D..

Siano ancora  $F$  e  $G$  gruppi analitici e sia  $\varphi$  un morfismo di  $F$  in  $G$ . Allora, detto  $N$  il nucleo di  $\varphi$  si ha :

---

<sup>(5)</sup> Vedi nota nella pagina precedente.

4.11. TEOREMA. *Tra tutti i sottogruppi  $K$  di  $G$  tali che  $KX \supseteq FX/NX$  per ogni  $X$ , ne esiste uno minimo  $H$ . Tale  $H$  coincide con la coimmagine di  $\varphi$ .*

*Dimostrazione.*

Siano  $A = F^0$ ,  $B = G^0$  e  $f = \varphi^0 \in \text{Hom}_{\mathfrak{b}}(B, A)$ .

Indichiamo con  $D$  l'immagine di  $f$  (in  $\mathfrak{b}$ ). Con  $f'$  indichiamo il morfismo di  $B$  in  $D$  tale che  $f'\xi = f\xi$  per ogni  $\xi \in B$ , e con  $f''$  il morfismo di immersione di  $D$  in  $A$ . Il nucleo di  $f$  è l'iperalgebra banale  $k$ , e il conucleo di  $f''$  (in  $\mathfrak{b}$ ) coincide con il conucleo di  $f$ .

Indichiamo con  $H$  il gruppo analitico  $\tilde{D}$  e poniamo  $\varphi' = \tilde{f}'$  e  $\varphi'' = \tilde{f}''$ . Il nucleo di  $\varphi'$  ( $\in \text{Hom}(H, G)$ ) è il gruppo banale, onde  $H$  è un sottogruppo di  $G$ ; il nucleo di  $\varphi''$  ( $\in \text{Hom}(F, H)$ ) coincide con  $N$ . Pertanto, per ogni  $X \in \mathfrak{k}$ , è  $HX \supseteq FX/NX$ .

Sia poi  $K$  un sottogruppo di  $G$  tale che  $KX \supseteq FX/NX$  per ogni  $X$ , e siano  $\psi'$  il morfismo di immersione di  $K$  in  $G$ , e  $\psi''$  il morfismo di  $F$  in  $K$  (unico) tale che  $\varphi = \psi' \circ \psi''$ : per ogni  $P \in FX$  è  $\psi''_X P = \varphi_X P$ . Il nucleo di  $\psi''$  coincide con  $N$ .

Indichiamo con  $S$  l'iperalgebra  $K^0$  e poniamo  $g'' = (\psi'')^0$  e  $g' = (\psi')^0$ .

Il conucleo di  $g''$  coincide con il conucleo di  $f$ , e pertanto esiste un morfismo  $h$  di  $S$  in  $D$  tale che  $g'' = f'' \circ h$ . Posto  $\chi = \tilde{h}$ ,  $\chi$  è un morfismo di  $H$  in  $K$  tale che  $\psi'' = \chi \circ \varphi''$ . Pertanto, per ogni  $X \in \mathfrak{k}$  è  $HX \subseteq KX$ , C. V. D..

4.12. TEOREMA. *Sia  $F$  un gruppo analitico, e sia  $H$  un sottogruppo di  $F$ . Esiste un sottogruppo  $N$  di  $F$  tale che:*

- a)  $N$  è il nucleo di un morfismo di  $F$ ,
- b)  $N \supseteq H$ ,
- c) se  $K \supseteq H$  è il nucleo di un morfismo di  $F$ , allora  $K \supseteq N$ .

*$N$  coincide con l'immagine del morfismo di immersione  $\varphi$  di  $H$  in  $F$ .*

*Dimostrazione.*

Siano  $A = F^0$ ,  $B = H^0$  e sia  $f \in \text{Hom}_{\mathfrak{b}}(A, B)$  il morfismo  $\varphi^0$ . Detto  $J$  il nucleo in  $\mathfrak{U}$  di  $f$  sia  $S$  l'iperalgebra  $A/J^*$  e sia  $N = \tilde{S}$  il gruppo analitico ad essa associato. Indichiamo con  $f'$  il morfismo naturale di  $A$  in  $S$  e con  $f''$  il morfismo di  $S$  in  $B$  tale che  $f = f'' \circ f'$ . Il conucleo di  $f'$  è l'iperalgebra  $k$ , e pertanto il nucleo di  $\varphi' = \tilde{f}'$  è il gruppo nullo. Ciò prova che  $N$  è un sottogruppo di  $F$ ; inoltre posto  $\varphi' = \tilde{f}'$ , è  $\varphi = \varphi' \circ \varphi''$ , onde  $H$  è un sottogruppo di  $N$ .

Si  $(G, \psi)$  ( $G$  gruppo analitico e  $\psi \in \text{Hom}(F, G)$ ) il conucleo di  $\varphi$ . Essendo  $S$  il conucleo del nucleo di  $f$ ,  $N$  è il nucleo di  $\psi$ .

Sia ora  $K$  un sottogruppo di  $F$  nucleo di un morfismo  $\psi' \in \text{Hom}(F, G')$  tale che  $\psi' \circ \varphi =$  morfismo nullo. Esiste allora un morfismo  $\chi$  di  $G$  in  $G'$  tale che  $\psi' = \chi \circ \varphi$ . Pertanto  $N$  è un sottogruppo di  $K$ , C. V. D..

Poniamo le seguenti definizioni. Un morfismo  $\varphi: F \rightarrow G$  di gruppi analitici verrà detto *iniettivo* se  $\varphi_X$  è iniettivo per ogni  $X \in \mathbb{K}$ ; verrà invece detto *surgettivo* se la coimmagine di  $\varphi$  coincide con  $G$  <sup>(6)</sup>.

4.13. **TEOREMA.** *Siano  $A$  e  $B$  iperalgebre e sia  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{B}}(A, B)$ ; allora  $\varphi = \tilde{f}$  è iniettivo se e solo se  $B$  è l'immagine di  $f$ .*

*Dimostrazione.*

Siano  $F = \tilde{A}$  e  $G = \tilde{B}$  i gruppi analitici associati alle iperalgebre considerate. Sia  $\varphi$  iniettivo: allora la coimmagine di  $\varphi$  coincide con  $G$ , onde l'immagine di  $f$  coincide con  $B$ .

Viceversa sia  $B$  la immagine di  $f$ ; allora  $G$  è la coimmagine di  $\varphi$ . Per 4.11,  $\varphi$  risulta quindi iniettivo, C. V. D..

Da 4.13 si ha in particolare:

4.14. **COROLLARIO.** *Siano  $A$  e  $B$  iperalgebre e sia  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{B}}(A, B)$ ; se  $fA = B$  allora  $\varphi = \tilde{f}$  è iniettivo.*

Il 4.14 non è invertibile.

*Esempi.*

1. Sia  $A = k[x]$  con  $x$  indeterminata su  $k$ ; definendo  $\mathbf{P}_A x = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ ,  $\varepsilon_A x = 0$ ,  $\varrho_A x = -x$ ,  $A$  diviene una iperalgebra discreta.

Sia  $G_a$  il gruppo algebrico associato ad  $A$ ; per ogni  $X \in \mathbb{B}$ ,  $G_a X$  è isomorfo al gruppo additivo di  $X$ .

2. Sia  $A = k\{x\}$  (anello delle serie di potenze formali nella indeterminata  $x$ ); definendo  $\mathbf{P}_A x = x \overline{\times} 1 + 1 \overline{\times} x$ ,  $\varepsilon_A x = 0$ ,  $\varrho_A x = -x$ ,  $A$  diviene una iperalgebra linearmente compatta.

Detto  $G$  il gruppo formale associato ad  $A$ ,  $G X$  è isomorfo, per ogni  $X \in \mathbb{B}$ , al radicale di  $X$ .

3. Sia  $A = k[x, x^{-1}]$  ( $x$  indeterminata su  $k$ ), con  $\mathbf{P}_A x = x \otimes x$ ,  $\varepsilon_A x = 1$ ,  $\varrho_A x = x^{-1}$ ;  $A$  è una iperalgebra discreta.

---

<sup>(6)</sup> La definizione di morfismo surgettivo non è ortodossa rispetto alla nomenclatura corrente nella teoria delle categorie. Viene qui introdotta per comodità.

Il gruppo algebrico associato ad  $A$  verrà chiamato *gruppo moltiplicativo* di  $k$  e indicato con  $G_m$ .

Per ogni  $X \in \mathfrak{M}$ ,  $G_m X$  è isomorfo al gruppo moltiplicativo delle unità di  $X$ .

4. Sia  $\xi$  una indeterminata su  $k$  e sia  $A = k\{\xi\}$ .

Posto  $\mathbf{P}_A \xi = 1 \overline{\times} \xi + \xi \overline{\times} 1 + \xi \overline{\times} \xi$ ,  $\varepsilon_A \xi = 0$ ,  $\varrho_A = \sum_{n=1}^{\infty} (-\xi)^n$ ,  $A$  diviene una iperalgebra linearmente compatta.

Il gruppo formale  $G$  ad essa associato è tale che  $GX$  è isomorfo, per ogni  $X \in \mathfrak{M}$ , al gruppo moltiplicativo degli  $a \in X$  tali che  $1 - a \in \text{Radiale di } X$ .

5. Sia  $H$  un gruppo abeliano (astratto) indicato addittivamente e sia  $A = \bigoplus_{i \in H} kx_i$  (<sup>7</sup>), con  $x_i x_j = \delta_{ij} x_i$  ( $\delta$  simbolo di Kronecker)  $\mathbf{P}_A x_i = \sum_{a+b=i} x_a \overline{\times} x_b$ ,  $\varepsilon_A x_i = \delta_{i,0}$ ,  $\varrho_A x_i = x_{-i}$ ;  $A$  è una iperalgebra linearmente compatta.

6. Sia  $H$  come nell'esempio 5 e sia  $A = \bigoplus_{i \in H}^{(8)} ky_i$  con  $y_i y_j = y_{i+j}$ ,  $\mathbf{P}_A y_i = y_i \otimes y_i$ ,  $\varepsilon_A y_i = 1$ ,  $\varrho_A y_i = y_{-i}$ ;  $A$  è una iperalgebra discreta.

5. Indichiamo con  $\mathfrak{D}$  la sottocategoria piena di  $\mathfrak{H}$  costituita dalle  $k$ -iper-algebre discrete, e con  $\mathfrak{R}$  la sottocategoria piena di  $\mathfrak{H}$  costituita dalle  $k$ -iper-algebre linearmente compatte. È noto (cfr. ad esempio I. Barsotti [5]) che il funtore:

$$A \mapsto A^*$$

$$f \mapsto f^*$$

definisce una antiequivalenza tra le categorie  $\mathfrak{D}$  ed  $\mathfrak{R}$ .

È noto altresì che per ogni  $A \in \mathfrak{D}$  (rispettivamente  $A \in \mathfrak{R}$ ) la applicazione biunivoca  $M \mapsto M^1$  dei sotto- $k$ -moduli  $T_A$ -chiusi di  $A$  nei sotto- $k$ -moduli  $T_{A^*}$ -chiusi di  $A^*$  associa biunivocamente:

ai biideali di  $A$  le sottoiper-algebre di  $A^*$ , e  
alle sottoiper-algebre di  $A$  i biideali di  $A^*$ .

Indichiamo poi con  $\tilde{\mathfrak{D}}$  la categoria dei gruppi algebrici (categoria anti-equivalente a  $\mathfrak{D}$ ) e con  $\tilde{\mathfrak{R}}$  la categoria dei gruppi formali (categoria anti-equivalente ad  $\mathfrak{R}$ ).

(<sup>7</sup>) Somma diretta completa.

(<sup>8</sup>) Somma diretta semplice.

Le quattro categorie ora menzionate possono quindi essere ripartite in due coppie, e cioè  $(\mathfrak{D}, \tilde{\mathfrak{R}})$  e  $(\tilde{\mathfrak{R}}, \mathfrak{D})$ . Categorie appartenenti alla stessa coppia sono equivalenti, mentre categorie appartenenti a coppie diverse sono anti-equivalenti.

Vogliamo, nelle pagine che seguono, svolgere alcune considerazioni sulle equivalenze e antiequivalenze ora menzionate. Partendo dai teoremi sulla dualità per  $k$ -moduli discreti e linearmente compatti, e dalle informazioni che tali teoremi danno sulla antiequivalenza tra  $\mathfrak{D}$  ed  $\mathfrak{R}$ , daremo alla nostra indagine il seguente ordine:

- i) Equivalenza tra  $\mathfrak{R}$  e  $\tilde{\mathfrak{D}}$ ; equivalenza tra  $\mathfrak{D}$  e  $\tilde{\mathfrak{R}}$ .
- ii) Antiequivalenza tra  $\mathfrak{D}$  e  $\tilde{\mathfrak{D}}$ ; antiequivalenza tra  $\mathfrak{R}$  ed  $\tilde{\mathfrak{R}}$ ,
- iii) Antiequivalenza tra  $\tilde{\mathfrak{D}}$  ed  $\tilde{\mathfrak{R}}$ ,
- iv) Altri aspetti della antiequivalenza tra  $\mathfrak{D}$  ed  $\mathfrak{R}$ .

Sia  $A \in \mathfrak{D}$  (rispettivamente  $A \in \mathfrak{R}$ ), e sia  $X \in \mathfrak{M}$  ovvero  $X \in \mathfrak{N}$ ; posto  $A' = A^* \overline{\times} X$ , dotiamo  $A'$  della struttura di  $X$ -modulo destro mediante la applicazione  $k$ -lineare  $m_{A'} = \iota_{A^*} \overline{\times} \mu_X$  di  $A' \overline{\times} X$  in  $A'$ .

La definizione è ben posta (cioè  $A'$  diviene effettivamente un  $X$ -modulo), essendo:

$$m_{A'} \circ (\iota_{A'} \overline{\times} \mu_X) = m_{A'} \circ (m_{A'} \overline{\times} \iota_X)$$

come subito si verifica.

Inoltre se  $A, B \in \mathfrak{D}$  (rispettivamente  $A, B \in \mathfrak{R}$ ) e  $\lambda \in \text{Hom}_{\mathfrak{M}}(A, B)$ , allora  $\lambda' = \lambda^* \overline{\times} \iota_X (\in \text{Hom}_{\mathfrak{M}}(B', A'))$  è una applicazione  $X$ -lineare, onde risulta definito il funtore contravariante di  $\mathfrak{D}$  (rispettivamente  $\mathfrak{R}$ ) nella categoria degli  $X$ -moduli:

$$A \mapsto A'$$

$$\lambda \mapsto \lambda'.$$

Quali che siano  $A, B \in \mathfrak{D}$  (rispettivamente  $A, B \in \mathfrak{R}$ ),  $A' \overline{\times} B'$  è isomorfo (come  $k$ -modulo) al completamento di  $A' \otimes_X B'$ ; inoltre  $(\iota_{A^*} \overline{\times} \mu_X) \circ (\iota_{A^*} \overline{\times} s_{X, B^*} \overline{\times} \mu_X)$  è un isomorfismo (di  $X$ -moduli) di  $A' \overline{\times} B'$  in  $A^* \overline{\times} B^* \overline{\times} X = (A \overline{\times} B)'$ . Poniamo:

$$P_{A'} = (\mu_A)' = (\mu_A)^* \overline{\times} \iota_X = P_{A^*} \overline{\times} \iota_X,$$

$$\varepsilon_{A'} = (i_A)' = (i_A)^* \overline{\times} \iota_X = \varepsilon_{A^*} \overline{\times} \iota_X;$$

$P_{A'}$  ed  $\varepsilon_{A'}$  sono applicazioni  $X$ -lineari rispettivamente di  $A'$  in  $(A \overline{\times} A)'$

e di  $A'$  in  $k' \cong X$ , tali che :

$$\begin{aligned} \mu_X[(P_{A'} \alpha)(a \overline{\times} b)] &= \alpha(ab) & \alpha \in A'; \\ & & a, b \in A; \\ i_X[(\varepsilon_{A'} \alpha) c] &= i_A(\alpha c) & c \in k. \end{aligned}$$

Inoltre si ha :

$$(\alpha\beta) x = \mu_X[(\alpha \overline{\times} \beta) \mathbf{P}_{A'} x]$$

per ogni  $x \in A$  e per ogni coppia di oggetti  $\alpha, \beta \in A'$ .

5.1. LEMMA. *Sia  $A$  una iperalgebra discreta (rispettivamente linearmente compatta), sia  $X$  una  $k$ -algebra discreta ovvero linearmente compatta, e sia  $\alpha \in A^* \overline{\times} X = A'$  tale che :*

$$(\mathbf{P}_{A^*} \overline{\times} \iota_X) \alpha = [(\iota_{A^*} \overline{\times} \mu_X) \circ (\iota_{A^*} \overline{\times} s_{X, A^*} \overline{\times} \iota_X)] (\alpha \overline{\times} \alpha);$$

allora le due seguenti asserzioni sono equivalenti :

- i)  $(\varepsilon_{A^*} \overline{\times} \iota_X) \alpha = 1$
- ii)  $\alpha$  è una unità di  $A^* \overline{\times} X$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $\alpha \mapsto \alpha'$  l'isomorfismo (cfr. n. 1) naturale di  $A^* \overline{\times} X$  in  $\text{Hom}_{\mathfrak{A}}(A, X)$ .

Allora l'ipotesi di 5.1 può scriversi nella forma  $\mathbf{P}_{A'} \alpha = \alpha \otimes_X \alpha$ , ovvero  $\alpha' \circ \mu_A = \mu_B \circ (\alpha' \overline{\times} \alpha')$ . Similmente la i) può essere scritta nella forma  $\varepsilon_{A'} \alpha = 1$ , ovvero  $\alpha' \circ i_A = i_X$ .

Ciò premesso proviamo che :

- i) implica ii).

Indichiamo con  $S(A^*, X)$  il sottoinsieme degli  $\alpha$  di  $A^* \overline{\times} X$  soddisfacenti all'ipotesi di 5.1 ed a i). Indichiamo con  $G$  il gruppo algebrico (rispettivamente formale) associato ad  $A$ . Per evitare confusioni indichiamo con  $\dot{+}$  l'operazione grupale in  $GX$ .

Allora  $\alpha \mapsto \alpha'$  è una applicazione biunivoca di  $S(A^*, X)$  in  $GX$ . Quali che siano  $\alpha, \beta \in S(A^*, X)$  e  $x \in A$  si ha :

$$(\alpha\beta)' x = \mu_X[(\alpha' \overline{\times} \beta') \mathbf{P}_A x] = (\alpha' \dot{+} \beta') x,$$

onde  $(\alpha\beta)' = \alpha' \dot{+} \beta'$ .

Pertanto il prodotto definito in  $A^* \overline{\times} X$  subordina una struttura di gruppo in  $S(A^*, X)$ ; inoltre  $S(A^*, X)$  è isomorfo a  $GX$ . Ogni  $\alpha \in S(A^*, X)$  è quindi una unità di  $A'$ .

ii) implica i).

Sia  $\alpha \in A'$  soddisfacente alle ipotesi di 5.1 ed a ii).

Per ogni coppia di elementi  $x, y \in A$  si ha allora

$$\alpha'(xy) = (\alpha'x)(\alpha'y);$$

pertanto  $\alpha'1$  è un automodulo di  $X$ .

D'altro canto, detto  $\beta$  il reciproco di  $\alpha$ , è

$$1 = (i_X \circ \varepsilon_A)1 = (\alpha' + \beta')1 = \mu_X[(\alpha' \overline{\times} \beta')(1 \overline{\times} 1)] = (\alpha'1)(\beta'1),$$

onde 1 è una unità di  $X$ ; pertanto  $\alpha'1 = 1$ , da cui la i), C. V. D..

Durante la dimostrazione di 5.1 abbiamo altresì provato:

**5.2. LEMMA.** *Sia  $A$  una iperalgebra discreta (linearmente compatta). Allora il gruppo  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(A, X)$  qualunque sia la  $k$ -algebra  $X$  discreta o linearmente compatta, è isomorfo al gruppo moltiplicativo degli  $\alpha \in A' = A^* \overline{\times} X$  tali che  $P_{A'}\alpha = \alpha \otimes_X \alpha$  e  $\varepsilon_{A'}\alpha = 1$ .*

Le considerazioni sopra svolte consentono di dare un aspetto esplicito alla equivalenza tra la categoria  $\mathfrak{D}$  e la categoria  $\tilde{\mathfrak{R}}$  (rispettivamente tra  $\mathfrak{R}$  e  $\tilde{\mathfrak{D}}$ ).

Tale equivalenza è definita dal funtore:

$$F \longmapsto (F^0)^* \quad F \in \tilde{\mathfrak{R}} \text{ (rispettivamente } F \in \tilde{\mathfrak{D}}).$$

L'iperalgebra  $(F^0)^*$  (per ogni  $F \in \tilde{\mathfrak{R}}$ , o, rispettivamente  $F \in \tilde{\mathfrak{D}}$ ) verrà indicata con  ${}^0F$ ; essa viene denominata *iperalgebra delle distribuzioni* su  $F$ .

Se poi  $F, G \in \tilde{\mathfrak{D}}$  (rispettivamente  $F, G \in \tilde{\mathfrak{R}}$ ) e  $\varphi \in \text{Hom}(F, G)$  indicheremo con  ${}^0\varphi$  il morfismo (di iperalgebre) di  ${}^0F$  in  ${}^0G$  corrispondente a  $\varphi$ .

**5.3. LEMMA.** *Siano  $F$  e  $G$  gruppi formali (rispettivamente algebrici) e sia  $\varphi$  un morfismo iniettivo di  $F$  in  $G$ . Allora  ${}^0\varphi$  è iniettivo.*

*Dimostrazione.*

Siano  $A = {}^0F$ ,  $B = {}^0G$  ed  $f = {}^0\varphi$ . Indichiamo con  $J$  il nucleo (in  $\mathfrak{U}$ ) di  $f$  e supponiamo, per assurdo, che esista in  $J$  un elemento  $\vartheta \neq 0$ . Sia poi  $X = (A \overline{\times} A)[\xi]$  ove  $\xi \neq 0$  è un elemento (algebrico su  $A \overline{\times} A$ ) tale che:

$$[(\vartheta \overline{\times} 1) + (1 \overline{\times} \vartheta) - \mathbf{P}_A \vartheta] \xi + (\vartheta \overline{\times} \vartheta) \xi^2 = 0; \quad (9)$$

allora  $\alpha = 1 \overline{\times} 1 + \vartheta \overline{\times} \xi$  è tale che

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{A'} \alpha &= \alpha \otimes_X \alpha \\ \varepsilon_{A'} \alpha &= 1 \end{aligned}$$

onde  $\alpha$  è un elemento di  $FX$  diverso da 1 e tale che  $(f \overline{\times} \iota_X) \alpha = \varphi_X \alpha = 1$ . Ciò contrasta con l'ipotesi che  $\varphi$  sia iniettivo, C. V. D. .

Da 5.3 seguono i seguenti corollari.

**5.4. COROLLARIO.** *Siano  $A$  e  $B$  iperalgebre discrete (rispettivamente linearmente compatte) e sia  $f \in \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(A, B)$ . Allora  $\varphi = \tilde{f}$  è iniettivo se e solo se  $fA = B$ .*

*Dimostrazione.*

Supponiamo  $fA = B$ . Allora, per 4.14,  $\varphi$  è iniettivo. Supponiamo  $\varphi$  iniettivo. Allora, per 5.1,  ${}^0\varphi$  è iniettivo, onde  $f = ({}^0\varphi)^*$  è surgettivo, C. V. D. .

**5.5 COROLLARIO.** *Siano  $A$  e  $B$  iperalgebre discrete (rispettivamente linearmente compatte) e sia  $f \in \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(A, B)$ ; il nucleo di  $f$  in  $\mathfrak{U}$  è 0 se e solo se il nucleo di  $f$  in  $\mathfrak{B}$  è  $k$ .*

*Dimostrazione.*

Sia 0 il nucleo di  $f$  in  $\mathfrak{U}$ ; allora la massima sottoiperalgebra contenuta in  $k \oplus 0$  coincide con  $k$ .

Viceversa sia  $k$  la massima sottoiperalgebra contenuta in  $k \oplus J$  ( $J$  nucleo di  $f$  in  $\mathfrak{U}$ ); siano  $G$  e  $H$  i gruppi analitici (algebrici o formali) tali che  ${}^0G = A$  e  ${}^0H = B$ , e  $\varphi$  sia il morfismo di  $G$  in  $H$  tale che  ${}^0\varphi = f$ .

(9) Se  $A$  è discreta può prendersi per  $X$  l'algebra quoziente di  $(A \otimes A)[x] = A \otimes A \otimes k[x]$  ( $x$  indeterminata su  $A$ ) modulo l'ideale generato da  $[(\vartheta \otimes 1) + (1 \otimes \vartheta) - P_A \vartheta]x + (\vartheta \otimes \vartheta)x^2$ .

Se  $A$  è linearmente compatta  $X$  può essere determinata in modo analogo; ai polinomi si sostituiscono le serie di potenze formali e si riduce modulo il minimo ideale chiuso contenente il polinomio scritto.

Allora il nucleo di  $\varphi$  è il gruppo formale  $\tilde{k}^* = \tilde{k}$ , cioè il gruppo nullo. Pertanto  $\varphi$  è iniettivo, onde, per 5.1,  $J = 0$ , C. V. D. .

5.6. COROLLARIO. *Sia  $A$  una iperalgebra discreta (o linearmente compatta). Per ogni biideale  $J$  di  $A$  è  $J = J^*$ .*

*Dimostrazione.*

Sia  $f$  il morfismo naturale di  $A/J^*$  su  $A/J = (A/J^*)/(J/J^*)$ .

Il nucleo in  $\mathfrak{U}$  di  $f$  è  $J/J^*$  mentre il nucleo in  $\mathfrak{B}$  di  $f$  è  $k$ . Per 5.3 si ha allora  $J = J^*$ , C. V. D. .

5.7. COROLLARIO. *Sia  $A$  una iperalgebra discreta (o linearmente compatta) Per ogni sottoiperalgebra  $S$  di  $A$  è  $S^* = S$ .*

*Dimostrazione.*

Posto  $J = S^\perp$ , è  $J^* = (S^*)^\perp$ ; essendo  $J$  un biideale di  $A^*$ , è per 5.4,  $J = J^*$ , onde  $S = S^*$ , C. V. D. .

5.8. TEOREMA. *Sia  $A$  una iperalgebra discreta (linearmente compatta) e sia  $S$  una sottoiperalgebra di  $A$ . Esistono allora una iperalgebra  $B$  ed un morfismo  $f$  di  $A$  in  $B$  tali che:*

- a)  $S$  è il nucleo (in  $\mathfrak{B}$ ) di  $f$ ,
- b) se  $C$  è una iperalgebra discreta (linearmente compatta) e  $g \in \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(A, C)$  ha per nucleo  $S$ , allora esiste un morfismo  $h \in \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(B, C)$  tale che  $g = h \circ f$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $J$  il minimo biideale di  $A$  contenente  $S^\perp$  e sia  $B = A/J$ . Detto  $f$  il morfismo naturale di  $A$  su  $B$ , il nucleo di  $f$  in  $\mathfrak{B}$  coincide con  $S$ , per 5.5.

Siano poi  $C$  e  $g$  come in ipotesi. Allora il nucleo di  $g$  in  $\mathfrak{U}$  è  $J$ ;  $B$  è quindi isomorfo ad una sottoiperalgebra di  $C$ . Detto  $h$  il morfismo di immersione di  $B$  in  $C$  si ha  $g = h \circ f$ , C. V. D. .

5.9. COROLLARIO. *Le categorie  $\mathfrak{D}$  ed  $\mathfrak{R}$  sono abeliane.*

*Dimostrazione.*

Siano  $A$  e  $B$  iperalgrebre discrete (linearmente compatte) e sia  $f$  un morfismo di  $A$  in  $B$ .

Detto  $J$  il nucleo in  $\mathfrak{U}$  di  $f$ , la coimmagine di  $f$  è  $S = A/J = A/J^*$ ; l'immagine di  $f$  è la sottoiperalgebra (di  $B$ )  $S^* = S$ , C. V. D. .

5.10. COROLLARIO. *La categoria dei gruppi algebrici e la categoria dei gruppi formali sono abeliane.*

Sussiste quindi un teorema di omomorfismo per i gruppi algebrici e per i gruppi formali; cioè:

5.11. TEOREMA. *Siano  $G$  un gruppo algebrico (rispettivamente formale) e sia  $H$  un sottogruppo di  $G$ . Esistono allora un gruppo algebrico (formale)  $F$  ed un morfismo  $\varphi$  di  $G$  in  $F$  tali che:*

a) *il nucleo di  $\varphi$  è  $H$ ,*

b) *se  $L$  è un gruppo algebrico (formale) e  $\psi$  un morfismo di  $G$  in  $L$  avente  $H$  per nucleo, allora esiste un morfismo  $\chi$  di  $F$  in  $L$  tale che  $\psi = \chi \circ \varphi$ .*

*Dimostrazione.*

Sia  $\lambda$  il morfismo di immersione di  $H$  in  $G$ . Per 5.10, l'immagine di  $\lambda$  coincide con  $H$ ; pertanto il conucleo  $(F, \varphi)$  di  $\lambda$  verifica le condizioni richieste, C. V. D. .

Il gruppo  $F$  di cui al 5.11, viene indicato con  $G/H$  e denominato *gruppo quoziente di  $G$  modulo  $H$* ;  $\varphi$  si chiama il *morfismo naturale* di  $G$  in  $F$ .

Conservando le notazioni di 5.11, sia  $K$  il funtore di  $\mathfrak{M}$  in  $\mathfrak{A}$ :

$$\begin{aligned} X &\mapsto GX/HX & X \in \mathfrak{M}, \\ f &\mapsto Kf & f \text{ morfismo di } \mathfrak{M} \end{aligned}$$

con  $Kf$  così definito; per ogni  $X \in \mathfrak{M}$  sia  $\tau_X$  il morfismo naturale (di gruppi abeliani) di  $GX$  in  $KX$ ; se  $f \in \text{Hom}_{\mathfrak{M}}(X, Y)$  si ha  $\lambda_Y \circ Hf = Gf \circ \lambda_X$  ed  $Hf$  è la restrizione di  $Gf$  ad  $HX$ . Pertanto  $(Gf)HX \subseteq HY$ , onde esiste un morfismo di gruppi abeliani  $Kf$  tale che  $\tau_Y \circ Gf = Kf \circ \tau_X$ . Risulta così definito il funtore  $K$ ;  $\tau = (\tau_X)_{X \in \mathfrak{M}}$  è un morfismo funtoriale di  $G$  in  $K$ .

Tenendo conto di 5.11 e del teorema di omomorfismo dei gruppi abeliani, si ha allora:

5.12. COROLLARIO. *Il funtore  $K$  è sottofuntore di un gruppo algebrico (formale)  $F$ ; se  $L$  è un altro gruppo algebrico (formale) di cui  $K$  è sottofuntore, allora  $F$  è sottogruppo di  $L$ .*

*Dimostrazione.*

Sia  $F$  il gruppo  $G/H$ . Per ogni  $X \in \mathfrak{M}$  esiste un morfismo iniettivo  $\vartheta_X$  di  $KX$  in  $FX$  tale che  $\varphi_X = \vartheta_X \circ \tau_X$ ; allora  $\vartheta = (\vartheta_X)_{X \in \mathfrak{M}}$  è un morfismo funtoriale iniettivo di  $K$  in  $F$ . La proprietà universale di cui gode  $F$  completa la dimostrazione, C. V. D. .

Sia  $A$  una iperalgebra discreta (linearmente compatta).

Abbiamo stabilito una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle sottoiperalgebre di  $A$  e l'insieme dei biideali di  $A$ ; in essa si corrispondono una sottoiperalgebra ed un biideale quando sono nucleo, in  $\mathfrak{B}$  ed in  $\mathfrak{A}$  rispettivamente, di uno stesso morfismo di  $A$ . Ordinando i due insiemi mediante la relazione di inclusione, tale corrispondenza risulta ordinata. In particolare se  $R$  ed  $S$  sono sottoiperalgebre di  $A$ , e  $J$  ed  $L$  sono i biideali corrispondenti:

- alla sottoiperalgebra  $R \cap S$  corrisponde il biideale  $M$  massimo tra quelli che sono  $\subseteq J \cap L$ ,
- alla sottoiperalgebra  $R[S]$  corrisponde il biideale  $J + L$ .

Inoltre il teorema 5.8 stabilisce una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle sottoiperalgebre di  $A$  e l'insieme delle iperalgebre quozienti di  $A$ . Ordinando quest'ultimo insieme in modo naturale (dette  $B$  e  $C$  due iperalgebre quozienti di  $A$ ,  $f$  e  $g$  gli omomorfismi naturali di  $A$  in  $B$  e  $C$  rispettivamente, diremo che  $B$  precede  $C$  se esiste  $h \in \text{Hom}(B, C)$  tale che  $g = h \circ f$ ) tale corrispondenza risulta ordinata (secondo teorema di omomorfismo per le iperalgebre).

Inoltre sia  $G$  il gruppo algebrico (rispettivamente formale) associato ad  $A$ . Il 5.2 stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i biideali di  $A$  e i sottogruppi di  $G$ ; il biideale  $J$  e il sottogruppo  $H$  si corrispondono se e solo se:

- a)  $J$  è l'insieme degli  $\xi \in A$  tali che, per ogni  $X \in \mathfrak{M}$  e per ogni  $P \in HX$  è  $\xi_X(P) = 0$ ,
- b) per ogni  $X \in \mathfrak{M}$ ,  $HX$  è il sottoinsieme di  $GX$  formato dai  $P$  tali che, per ogni  $\xi \in J$ ,  $\xi_X(P) = 0$ .

Ordinando l'insieme dei sottogruppi di  $G$  in modo naturale ( $H$  precede  $K$  se  $H$  è sottogruppo di  $K$ ) la corrispondenza detta risulta antiordinata.

In particolare se  $J$  ed  $L$  sono biideali di  $A$ , e  $H$  e  $K$  sono i sottogruppi di  $G$  ad essi corrispondenti, al biideale  $J + L$  corrisponde il sottogruppo  $N$  tale che

$$NX = HX \cap KX \text{ per ogni } X \in \mathfrak{M},$$

al massimo biideale contenuto in  $J \cap L$  corrisponde il minimo sottogruppo di  $G$  del quale  $H$  e  $K$  sono sottogruppi.

Infine rimane stabilita una corrispondenza biunivoca tra le sottoiperalgebre di  $A$  e i quozienti di  $G$ . In tale corrispondenza sono associati una sottoiperalgebra  $S$  di  $A$  ed un quoziente  $H$  di  $G$  se  $S = H^0$ .

Ordinando in modo naturale l'insieme dei quozienti di  $G$ , tale corrispondenza è ordinata (secondo teorema di omomorfismo per i gruppi algebrici e formali).

Concludiamo queste considerazioni con il seguente :

**5.13. TEOREMA di HAHN-BANACH.** *Sia  $H$  un sottogruppo del gruppo algebrico (rispettivamente formale)  $G$  e sia  $\xi$  una funzione definita su  $H$ . Esiste allora una funzione  $\eta$  definita su  $G$  la cui restrizione ad  $H$  coincide con  $\xi$ .*

*Dimostrazione.*

Siano  $A$  e  $B$  le iperalgebre delle funzioni definite su  $G$  e  $H$  rispettivamente. Detto  $\lambda$  il morfismo di immersione di  $H$  in  $G$ , il morfismo  $\lambda^0 \in \text{Hom}(A, B)$  è, per 5.2, surgettivo. Per ogni  $\xi \in B$  esiste dunque  $\eta \in A$  tale che  $(\lambda^0 \eta)_X(P) = \xi_X(P)$  per ogni  $P \in HX$  e per ogni  $X \in \mathbb{N}$ , C. V. D..

6. Le notazioni sono quelle dei nn. precedenti.

Siano  $A$  e  $B$  iperalgebre discrete (linearmente compatte) e siano  $G$  il gruppo algebrico (formale) associato ad  $A$ , e  $H$  il cogruppo algebrico (formale) associato a  $B$ .

Si ha allora :

**6.1. LEMMA.**  $\text{Hom}_{\mathbb{P}}(A, B)$  è un sottogruppo di  $GB$  e un sottogruppo di  $HA$ .

*Dimostrazione.*

Consideriamo  $\text{Hom}_{\mathbb{P}}(A, B)$  come sottoinsieme di  $GB = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A, B)$ . Siano  $f, g \in \text{Hom}_{\mathbb{P}}(A, B)$ ; allora

$$f - g = f + g \circ \varrho_A = \mu_B \circ (f \overline{\times} g \circ \varrho_A) \circ \mathbf{P}_A \in \text{Hom}_{\mathbb{P}}(A, B).$$

Pertanto  $\text{Hom}_{\mathbb{P}}(A, B)$  è sottogruppo di  $GB$ .

Consideriamo poi  $\text{Hom}_{\mathbb{P}}(A, B)$  come sottoinsieme di  $HA = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(A, B)$ . Siano  $f, g \in \text{Hom}_{\mathbb{P}}(A, B)$ ; allora  $f - g = f + \varrho_B \circ g = \mu_B \circ (f \overline{\times} \varrho_B \circ g) \circ \mathbf{P}_A \in \text{Hom}_{\mathbb{P}}(A, B)$ . Pertanto  $\text{Hom}_{\mathbb{P}}(A, B)$  è sottogruppo di  $HA$ , C. V. D..

**6.2. LEMMA.** *Sia  $A$  una iperalgebra discreta,  $B$  una iperalgebra linearmente compatta, e sia  $\xi \in A \overline{\times} B$  tale che :*

$$\text{a) } (\mathbf{P}_A \overline{\times} \iota_B) \xi = [(\iota_A \overline{\times} \mu_B) \circ (\iota_A \overline{\times} s_{B, A} \overline{\times} \iota_B)] (\xi \overline{\times} \xi)$$

$$\text{b) } (\iota_A \overline{\times} \mathbf{P}_B) \xi = [(\mu_A \overline{\times} \iota_B \overline{\times} B) \circ (\iota_A \overline{\times} s_{B, A} \overline{\times} \iota_B)] (\xi \overline{\times} \xi).$$

Allora le tre seguenti asserzioni sono equivalenti:

$$\text{i) } (\varepsilon_A \overline{\times} \iota_B) \xi = 1$$

ii)  $(\iota_A \overline{\varepsilon}_B) \xi = 1$

iii)  $\xi$  è una unità di  $A \overline{\varepsilon} B$ .

*Dimostrazione.*

Siano  $\alpha \mapsto \alpha'$  e  $\alpha \mapsto \alpha''$  gli isomorfismi (già altre volte considerati) del  $k$ -modulo  $A \overline{\varepsilon} B$  in  $\text{Hom}_{\mathfrak{A}}(A^*, B)$  ed in  $\text{Hom}_{\mathfrak{A}}(B^*, A)$  rispettivamente; per ogni  $\alpha \in A \overline{\varepsilon} B$  è  $\alpha' = (\alpha'')^*$ .

Le relazioni sopra scritte possono allora tradursi in altre forme. Così la relazione a) è equivalente a ciascuna delle seguenti :

a')  $\xi' \circ \mu_{A^*} = \mu_B \circ (\xi' \overline{\varepsilon} \xi')$

a'')  $\mathbf{P}_A \circ \xi'' = (\xi'' \overline{\varepsilon} \xi'') \circ \mathbf{P}_{B^*}$ .

Similmente la relazione b) può essere scritta nei due seguenti modi

b')  $\mathbf{P}_B \circ \xi' = (\xi' \overline{\varepsilon} \xi') \circ \mathbf{P}_{A^*}$

b'')  $\xi'' \circ \mu_{B^*} = \mu_A \circ (\xi'' \overline{\varepsilon} \xi'')$ .

Infine i) e ii) possono essere scritte nei modi sotto indicati :

i')  $\xi' \circ i_{A^*} = i_B$

i'')  $\varepsilon_A \circ \xi'' = \varepsilon_{B^*}$

per la i), e :

ii')  $\varepsilon_B \circ \xi' = \varepsilon_{A^*}$

ii'')  $\xi'' \circ i_{B^*} = i_A$ .

Ciò premesso proviamo che :

i) implica ii).

Da a') e i') si deduce che  $\xi'$  è un omomorfismo di  $k$ -algebre; tenendo conto di b'), si ha allora, per 4.3, la ii'), onde la ii).

ii) implica i)

Da b') e ii') si deduce che  $\xi''$  è un omomorfismo di  $k$ -coalgebre; tenendo conto di a'), per 4.3, si ha la i') e quindi la i).

i) implica iii). È conseguenza immediata di 5.1; da 5.1 si deduce altresì.

iii) implica i), C. V. D..

Inoltre, indicando con  $T(A, B)$  l'insieme degli  $\xi \in A \overline{\times} B$  soddisfacenti a tutte le condizioni espresse in 6.2, si ha:

6.3. LEMMA.  $T(A, B)$  è un gruppo isomorfo a  $\text{Hom}_{\mathbb{D}}(A^*, B)$  e ad  $\text{Hom}_{\mathbb{D}}(B^*, A)$ .

*Dimostrazione.*

Per ogni  $\xi \in T(A, B)$ ,  $\xi'$  è un omomorfismo di iperalgebre di  $A^*$  in  $B$ , e  $\xi''$  è un omomorfismo di iperalgebre di  $B^*$  in  $A$ , C. V. D..

Siano  $G$  e  $H$  gruppi algebrici (rispettivamente formali). Allora  $\text{Hom}(G, H)$  diviene un gruppo abeliano definendo:

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi)_X P &= \varphi_X P + \psi_X P & \varphi, \psi \in \text{Hom}(G, H); \\ & & P \in GX; X \in \mathfrak{M}. \end{aligned}$$

Si ha immediatamente:

6.4. LEMMA. Siano  $A$  e  $B$  le iperalgebre associate ai gruppi algebrici (rispettivamente formali)  $G$  e  $H$ . Allora  $\text{Hom}(G, H)$  è isomorfo ad  $\text{Hom}_{\mathbb{D}}(B, A)$

*Dimostrazione.*

Siano  $f, g \in \text{Hom}_{\mathbb{D}}(B, A)$ ; per ogni  $P \in GX$  e per ogni  $X \in \mathfrak{M}$  si ha allora:

$$\begin{aligned} (\tilde{f} + \tilde{g})_X P &= \tilde{f}_X P + \tilde{g}_X P = P \circ f + P \circ g = \\ &= \mu_X \circ (P \circ f \overline{\times} P \circ g) \circ \mathbf{P}_B = \mu_X \circ (P \overline{\times} P) \circ (f \overline{\times} g) \circ \mathbf{P}_B = \\ &= P \circ \mu_A \circ (f \overline{\times} g) \circ \mathbf{P}_B = P \circ (f + g) = \overline{(f + g)}_X P; \end{aligned}$$

pertanto  $f \mapsto \tilde{f}$  è un omomorfismo di  $\text{Hom}_{\mathbb{D}}(B, A)$  in  $\text{Hom}(G, H)$ ; essendo biunivoca è un isomorfismo, C. V. D..

Indichiamo ancora con  $G_m$  il gruppo moltiplicativo (gruppo algebrico; cfr. es. 3 del n. 4) e con  $M$  la  $k$ -iperalgebra (discreta) ad esso associata.

Siano  $G$  un gruppo algebrico,  $H$  un gruppo analitico e siano  $A$  e  $B$  le iperalgebre discreta e linearmente compatta ad essi associate.

Sia  $\varphi$  un morfismo functoriale del funtore  $G \times H$ :

$$(G \times H) X = GX \times HX \quad \text{per ogni } X \in \mathfrak{M}$$

nel funtore  $G_m$ . Diremo che  $\varphi$  è bilineare se  $\varphi_X$  è bilineare per ogni  $X \in \mathfrak{M}$ .

Indichiamo con  $\text{Bil}(G, H)$  l'insieme dei morfismi bilineari di  $G \times H$  in  $G_m$ . Dotiamo  $\text{Bil}(G, H)$  di una struttura naturale di gruppo abeliano definendo :

$$(\varphi + \psi)_X(P, Q) = \varphi_X(P, Q) + \psi_X(P, Q);$$

$$\varphi, \psi \in \text{Bil}(G, H);$$

$$P \in GX; \quad Q \in HX; \quad X \in \mathfrak{M}.$$

Si ha allora, con le stesse notazioni :

**6.5. TEOREMA.** *Il gruppo  $\text{Bil}(G, H)$  è isomorfo al gruppo  $T(A, B)$ .*

*Dimostrazione.*

Introduciamo le seguenti notazioni :

$\delta_G$  è il morfismo di  $G$  in  $G \times G$  tale che  $(\delta_G)_X P = (P, P)$  ( $P \in GX$ ;  $X \in \mathfrak{M}$ );  $\delta_G$  è un morfismo di gruppi algebrici.

In modo analogo si definisce il morfismo  $\delta_H$  (morfismo di gruppi formali).

$m_G$  è il morfismo di  $G \times G$  in  $G$  tale che  $(m_G)_X(P_1, P_2) = P_1 + P_2$  ( $P_1, P_2 \in GX$ ;  $X \in \mathfrak{M}$ );  $m_G$  è un morfismo di gruppi algebrici.

In modo analogo si definiscono  $m_H$  e  $m_{G_m}$ .

$s_{G,H}$  è il morfismo di  $G \times H$  in  $H \times G$  tale che  $(s_{G,H})_X(P, Q) = (Q, P)$  ( $P \in GX$ ;  $Q \in HX$ ;  $X \in \mathfrak{M}$ );  $s_{G,H}$  è un isomorfismo di funtori.

Ricordando che  $(G \times G)^0 = A \overline{\times} A$ ,  $(H \times H)^0 = B \overline{\times} B$ ,  $(G_m \times G_m)^0 = M \overline{\times} M$ ,  $(G \times H)^0 = A \overline{\times} B$ , osserviamo che ;

$$\begin{aligned} \delta_G^0 &= \mu_A; & \delta_H^0 &= \mu_B; & m_G^0 &= \mathbf{P}_A; & m_H^0 &= \mathbf{P}_B; \\ m_{G_m}^0 &= \mathbf{P}_M; & s_{G,H}^0 &= s_{B,A}. \end{aligned}$$

Ciò premesso sia  $\varphi$  un morfismo functoriale di  $G \times H$  in  $G_m$ ;  $\varphi$  è bilineare se e solo se :

$$\varphi \circ (m_G \times \iota_H) = m_{G_m} \circ (\varphi \times \varphi) \circ (\iota_G \times s_{G,H} \times \iota_H) \circ (\iota_{G \times G} \times \delta_H),$$

$$\varphi \circ (\iota_G \times m_H) = m_{G_m} \circ (\varphi \times \varphi) \circ (\iota_G \times s_{G,H} \times \iota_H) \circ (\delta_G \times \iota_{H \times H}).$$

Posto  $f = \varphi^0$  ( $f$  morfismo di  $k$ -algebre di  $M$  in  $A \overline{\times} B$ ),  $\varphi$  è quindi bilineare se e solo se :

$$(\mathbf{P}_A \overline{\times} \iota_B) \circ f = (\iota_A \overline{\times} A \overline{\times} \mu_B) \circ (\iota_A \overline{\times} s_{B,A} \overline{\times} \iota_B) \circ (f \overline{\times} f) \circ \mathbf{P}_M,$$

$$(\iota_A \overline{\times} \mathbf{P}_B) \circ f = (\mu_A \overline{\times} \iota_B \overline{\times} B) \circ (\iota_A \overline{\times} s_{B,A} \overline{\times} \iota_B) \circ (f \overline{\times} f) \circ \mathbf{P}_M.$$

Ricordando poi (cfr. es. 3 del n. 4) che  $M = k[x, x^{-1}]$  con  $x$  indeterminata su  $k$  tale che  $\mathbf{P}_M = x \overline{\times} x$  e  $\varepsilon_M x = 1$ , poniamo  $\xi = fx$ . Allora  $\varphi$  è bilineare se e solo se:

$$(\mathbf{P}_A \overline{\times} \iota_B) \xi = [(\iota_A \overline{\times} \mu_B) \circ (\iota_A \overline{\times} s_{B,A} \overline{\times} \iota_B)] (\xi \overline{\times} \xi),$$

$$(\iota_A \overline{\times} \mathbf{P}_B) \xi = [(\mu_A \overline{\times} \iota_B \overline{\times} B) \circ (\iota_A \overline{\times} s_{B,A} \overline{\times} \iota_B)] (\xi \overline{\times} \xi).$$

Tenendo presente che  $fx$  è una unità di  $A \overline{\times} B$  si ha allora che la applicazione biunivoca  $\varphi \mapsto \xi$  sopra definita dell'insieme dei morfismi di  $G \times H$  in  $G_m$  nella  $k$ -algebra  $A \overline{\times} B$  subordina una applicazione biunivoca di  $\text{Bil}(G, H)$  in  $T(A, B)$ .

Rimane da provare che tale applicazione è un omomorfismo. Siano  $\varphi, \psi \in \text{Bil}(G, H)$  e siano  $f = \varphi^0$  e  $g = \psi^0$ .

Posto  $\delta_{G \overline{\times} H} = (\iota_G \times s_{G,H} \times \iota_H) \circ (\delta_G \times \delta_H)$ , si ha:

$$\varphi + \psi = m_{G_m} \circ (\varphi \times \psi) \circ \delta_{G \overline{\times} H}.$$

Detto  $h$  il morfismo  $(\varphi + \psi)^0$ , si ha quindi:

$$h = (\mu_A \overline{\times} \mu_B) \circ (\iota_A \overline{\times} s_{B,A} \overline{\times} \iota_B) \circ (f \overline{\times} g) \circ \mathbf{P}_m = \mu_{A \overline{\times} B} \circ (f \overline{\times} g) \circ \mathbf{P}_m;$$

onde  $h$  è la somma di  $f$  e  $g$  nel gruppo  $G_m(A \overline{\times} B) = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(M, A \overline{\times} B)$ .

Pertanto, posto  $\xi = fx$ ,  $\eta = gx$ ,  $\zeta = hx$  si ha  $\zeta = \xi\eta$ , C. V. D..

Inoltre, con le stesse notazioni:

**6.6. COROLLARIO.** *Il gruppo  $\text{Bil}(G, H)$  è isomorfo a  $\text{Hom}_{\mathbb{B}}(A^*, B)$  e ad  $\text{Hom}_{\mathbb{B}}(B^*, A)$ .*

*Dimostrazione.*

È conseguenza immediata di 6.3 e 6.5, C. V. D..

Sia  $G$  un gruppo algebrico (rispettivamente formale) e sia  $A$  l'iperalgebra discreta (rispettivamente linearmente compatta) associata a  $G$ ; indichiamo con  $G^*$  il gruppo formale (rispettivamente algebrico) associato ad  $A^*$ . Per ogni morfismo  $\varphi$  di gruppi algebrici (rispettivamente formali) risulta allora definito un morfismo  $\varphi^*$  di gruppi formali (rispettivamente algebrici) in guisa tale che il funtore contravariante:

$$G \mapsto G^*$$

$$\varphi \mapsto \varphi^*$$

definisce una antiequivalenza tra le categorie  $\mathfrak{D}$  ed  $\mathfrak{R}$ .

Si ha immediatamente :

6.7. LEMMA. *Siano  $F$  e  $G$  gruppi algebrici. La applicazione  $\varphi \mapsto \varphi^*$  di  $\text{Hom}_{\tilde{\mathfrak{D}}}(F, G)$  in  $\text{Hom}_{\tilde{\mathfrak{R}}}(G^*, F^*)$  è un isomorfismo di gruppi abeliani.*

6.8. LEMMA. *Sia  $\varphi$  un morfismo di gruppi algebrici (rispettivamente formali). Allora  $\varphi$  è iniettivo se e solo se  $\varphi^*$  è surgettivo.*

Sia  $F$  un sottogruppo del gruppo algebrico (rispettivamente formale)  $G$  e sia  $\lambda$  il morfismo di immersione. Indichiamo con  $F^\perp$  il nucleo di  $\lambda^*$ . Allora :

6.9. COROLLARIO. *La applicazione  $F \mapsto F^\perp$  dell'insieme dei sottogruppi di  $G$  nell'insieme dei sottogruppi di  $G^*$  è biunivoca ; e si ha  $(F^\perp)^\perp = F$ .*

Per le considerazioni che seguono è utile introdurre le seguenti notazioni.

Sia  $G$  un gruppo algebrico e sia  $H$  un gruppo formale ; siano  $A$  e  $B$  le iperalgebre (discrete linearmente compatte) ad essi associate. Indicheremo : con  $\alpha_{G, H}$  l'isomorfismo di  $\text{Hom}_{\tilde{\mathfrak{D}}}(G, H^*)$  in  $T(A, B)$  definito da 6.3 e 6.4, con  $\alpha_{H, G}$  l'isomorfismo di  $\text{Hom}_{\tilde{\mathfrak{R}}}(H, G^*)$  in  $T(A, B)$  definito da 6.3 e 6.4, con  $\beta_{G, H}$  l'isomorfismo di  $T(A, B)$  in  $\text{Bil}(G, H)$  definito da 6.5.

Ciò premesso sia  $G$  un gruppo algebrico e sia  $\Phi$  il funtore di  $\tilde{\mathfrak{D}}$  in  $\mathfrak{A}$  :

$$\begin{aligned} \Phi F &= \text{Bil}(G, F^*) & F \in \tilde{\mathfrak{D}}, \\ (\Phi f) \varphi &= \varphi \circ (\iota_G \times f^*) ; & f \in \text{Hom}_{\tilde{\mathfrak{D}}}(F_1, F_2) \\ & & \varphi \in \Phi F_1 \\ & & F_1, F_2 \in \tilde{\mathfrak{D}}. \end{aligned}$$

Posto  $\gamma_F = \beta_{G, F^*} \circ \alpha_{G, F^*}$ ,  $\gamma = (\gamma_F)_{F \in \tilde{\mathfrak{D}}}$  è un isomorfismo del funtore  $\tilde{\mathfrak{G}}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{G}}F &= \text{Hom}_{\tilde{\mathfrak{D}}}(G, F) & F, F_1, F_2 \in \tilde{\mathfrak{D}} \\ (\tilde{\mathfrak{G}}f) \lambda &= f \circ \lambda, & \lambda \in \tilde{\mathfrak{G}} F_1 \\ & & f \in \text{Hom}_{\tilde{\mathfrak{D}}}(F_1, F_2), \end{aligned}$$

nel funtore  $\Phi$ .

Essendo, per ogni  $\lambda \in \tilde{G}F$  e per ogni  $F \in \tilde{\mathfrak{D}}$ ,

$$\lambda = (\tilde{G}\lambda) \iota_G$$

si ha :

6.10.  $\varphi = (\Phi\lambda) (\gamma_G \iota_G)$  con  $\lambda = \gamma_F^{-1} \varphi$ , per ogni  $\varphi \in \Phi F$  e per ogni  $F \in \tilde{\mathfrak{D}}$ .

Sia poi  $H$  un gruppo formale, e sia  $\Psi$  il funtore di  $\tilde{\mathfrak{R}}$  in  $\mathfrak{A}$  :

$$\Psi L = \text{Bil}(L^*, H) \quad L, L_1, L_2 \in \tilde{\mathfrak{R}};$$

$$(\Psi f) \varphi = \varphi \circ (f^* \times \iota_H) \quad f \in \text{Hom}_{\tilde{\mathfrak{R}}}(L_1, L_2);$$

$$\varphi \in \Psi L_1;$$

Posto  $\tau_L = \beta_{L^*, H} \circ \alpha_{H, L^*}$  per ogni  $L \in \tilde{\mathfrak{R}}$ ,  $\tau = (\tau_L)_{L \in \tilde{\mathfrak{R}}}$  risulta un isomorfismo del funtore :

$$L \mapsto \text{Hom}_{\tilde{\mathfrak{R}}}(H, L)$$

nel funtore  $\Psi$ . Pertanto per ogni  $\varphi \in \Psi L$  e per ogni  $L \in \tilde{\mathfrak{R}}$  si ha

$$6.11 \quad \varphi = (\Psi\lambda) (\tau_H \iota_H), \text{ con } \lambda = \tau_L^{-1} \varphi.$$

Inoltre :

6.12. LEMMA. Per ogni gruppo algebrico  $G$  è  $\alpha_{G, G^*} \iota_G = \alpha_{G^*, G} \iota_{G^*}$ , onde  $\gamma_G \iota_G = \tau_{G^*} \iota_{G^*}$ .

Sia  $G$  un gruppo algebrico e sia  $\Delta_G$  il morfismo bilineare di  $G \times G^*$  in  $G_m$  :

$$\Delta_G = \gamma_G \iota_G = \tau_{G^*} \iota_{G^*}.$$

Si ha allora :

6.13. COROLLARIO. Sia  $G$  un gruppo algebrico,  $H$  un gruppo formale e sia  $\varphi$  un morfismo bilineare di  $G \times H$  in  $G_m$ . Esiste allora uno ed unico morfismo  $\lambda$  di  $H$  in  $G^*$  tale che  $\varphi = \Delta_G \circ (\iota_G \times \lambda)$ ; esiste inoltre uno ed unico morfismo  $\sigma$  di  $G$  in  $H^*$  tale che  $\varphi = \Delta_{H^*} \circ (\sigma \times \iota_H)$ .

7. Sia  $A$  una iperalgebra discreta (linearmente compatta) e sia  $B = A^*$  l'iperalgebra linearmente compatta (discreta) duale di  $A$ .

Identifichiamo il  $k$ -modulo  $A \overline{\times} B$  con  $\text{Hom}_{\mathfrak{U}}(B, B)$ ; indichiamo con  $H$  la  $k$ -algebra topologica non commutativa avente  $A \overline{\times} B$  come  $k$ -modulo soggiacente e tale che  $\xi\eta = \xi \circ \eta$ . L'identità di  $H$  è  $\iota_B$ .

Con  $B'$  indichiamo la sotto  $k$ -algebra di  $H$  formata dalle *omotetie* di  $B$ , cioè dagli  $\xi \in A \overline{\times} B$  tali che  $\xi \circ \mu_B = \mu_B \circ (\xi \overline{\times} \iota_B) = \mu_B \circ (\iota_B \overline{\times} \xi)$ . La applicazione  $\xi \mapsto \xi 1$  di  $B'$  in  $B$  è un isomorfismo di  $k$ -algebre.

Identifichiamo poi  $A \overline{\times} B$  con  $\text{Hom}_{\mathfrak{U}}(A, A)$ ; indichiamo con  $L$  la  $k$ -algebra non commutativa avente  $A \overline{\times} B$  come  $k$ -modulo soggiacente e tale che  $\xi\eta = \xi \circ \eta$ .

$L$  ed  $H$  sono reciproche l'una dall'altra. Indichiamo con  $A'$  la sotto- $k$ -algebra di  $L$  avente lo stesso  $k$ -modulo soggiacente di  $B'$ ;  $A'$  è formata dalle applicazioni  $k$ -lineari continue *invarianti* di  $A$  in sè, cioè dagli  $\xi \in A \overline{\times} B$  tali che  $\mathbf{P}_A \circ \xi = (\xi \overline{\times} \iota_A) \circ \mathbf{P}_A$ .

Poichè  $B'$  è commutativa, la applicazione identica di  $B'$  in  $A'$  è un isomorfismo di  $k$ -algebre. Pertanto  $A'$  è isomorfo a  $B$ .

Nell'uso corrente si identificano degli elementi corrispondenti di  $A'$  e di  $B$ ; per ogni  $x \in A$  e per ogni  $\xi \in B$  si indica con  $\xi x$  il corrispondente di  $x$  mediante  $\xi$ ; si ha allora (cfr. Barsotti [5])

$$7.1 \quad \langle \eta, \xi x \rangle = \langle \xi \eta, x \rangle \quad x, y \in A; \xi, \eta \in B;$$

$$7.2 \quad \langle \xi, x \rangle = \varepsilon_A(\xi x)$$

$$7.3 \quad \xi(xy) = \mu_A[(\mathbf{P}_B \xi)(x \overline{\times} y)].$$

Sia  $S$  una sottoiperalgebra di  $A$ , e sia  $T = S^*$ . Identificheremo  $T$  con l'insieme delle applicazioni  $k$ -lineari continue invarianti di  $S$  in sè.

7.4. LEMMA. Per ogni  $\xi \in B$  e per ogni  $x \in S$ , è  $\xi x \in S$ .

*Dimostrazione.*

Si ha:

$$\mathbf{P}_A(\xi x) = (\xi \overline{\times} 1) \mathbf{P}_A x \in \xi S \overline{\times} S,$$

e d'altro canto:

$$\mathbf{P}_A(\xi x) \in S \overline{\times} \xi S,$$

onde  $\mathbf{P}_A(\xi x) \in S \overline{\times} S$ , e quindi, per 2.3,  $\xi x \in S$ , C. V. D..

7.5. COROLLARIO. La applicazione di  $B$  in  $\text{Hom}_{\mathfrak{U}}(S, A): \xi \mapsto$  *restri-*  
*zione di  $\xi$  ad  $S$ , definisce un omomorfismo (di iperalgebre) di  $B$  in  $T$ .*

Inoltre :

7.6. LEMMA. *Il nucleo (in  $\mathfrak{U}$ ) dell'omomorfismo, di cui in 7.5, è  $S$ .*

*Dimostrazione.*

Sia  $C$  il nucleo. Allora  $\xi \in C$  se e solo se  $\xi x = 0$  per ogni  $x \in S$ , cioè se e solo se  $\langle \eta, \xi x \rangle = \langle \xi \eta, x \rangle = 0$  per ogni  $x \in S$  e per ogni  $\eta \in B$ , cioè infine se e solo se  $\xi \eta \in S^\perp$  per ogni  $\eta \in B$ .

Pertanto  $\xi \in C$  se e solo se  $\xi \in S^\perp$ , C. V. D..

Sia  $j$  l'immersione di  $S$  in  $A$ . Allora :

7.7. COROLLARIO. *Per ogni  $\xi \in B$  e per ogni  $x \in S$  si ha :*

$$(j^* \xi) x = \xi (jx).$$

Indichiamo con  $J$  il minimo biideale contenente  $S^+$ , e con  $E$  il nucleo in  $\mathfrak{B}$  di  $j^*$ ; si ha  $E = J$ . Inoltre :

7.8. LEMMA.  *$E$  è l'insieme degli  $\xi \in B$  che sono  $S$ -lineari.*

*Dimostrazione.*

Sia  $\xi$   $S$ -lineare. Per ogni  $s \in S^+$  e per ogni  $x \in A$  si ha  $\langle \xi, sx \rangle = \langle 1, \xi (sx) \rangle = \langle 1, s \xi x \rangle$ , onde essendo  $s \xi x \in J \subseteq A^+$ ,

$$0 = \langle 1, s \xi x \rangle = \langle 1, \xi (sx) \rangle = \langle \xi, sx \rangle.$$

Pertanto  $\xi \in J^\perp = E$ .

Sia  $\xi \in E$ . Allora  $\mathbf{P}_B \xi \in (k \oplus C) \overline{\times} (k \oplus C) = [k \overline{\times} (k \oplus C)] \oplus [C \overline{\times} (k \oplus C)]$ ; posto  $\mathbf{P}_B \xi = \alpha_1 + \alpha_2$  con  $\alpha_1 \in k \overline{\times} (k \oplus C)$  e  $\alpha_2 \in C \overline{\times} (k \oplus C)$ , si ha  $\alpha_2 (s \overline{\times} x) = 0$  per ogni  $s \in S$  e per ogni  $x \in A$ , onde  $\xi (sx) = \mu_B [\alpha_1 (s \overline{\times} x)] = s \mu_B [\alpha_1 (1 \overline{\times} x)] = s \mu_B [\mathbf{P}_B \xi (1 \overline{\times} x)] = s \xi x$ .

Pertanto  $\xi$  è  $S$ -lineare, C. V. D..

Per dare una forma più suggestiva a queste considerazioni indichiamo con  $\text{Inv}(A/S)$  la sottoiperalgebra delle applicazioni  $S$ -lineari continue invarianti di  $A$  in sè. Si ha allora :

7.9. TEOREMA di GALOIS - JACOBSON. *Sia  $A$  una iperalgebra discreta o linearmente compatta e sia  $S$  una sottoiperalgebra di  $A$ . Esiste allora una corrispondenza biunivoca tra le sottoiperalgebre di  $A$  che sono  $\supseteq S$  e le sottoiperalgebre di  $\text{Inv}(A/S)$ , tale che se  $R$  ed  $F$  sono corrispondenti :*

- a)  $F$  è l'insieme degli  $\xi \in \text{Inv}(A/S)$  che sono  $R$ -lineari,
- b)  $\text{Inv}(R/S)$  è l'iperalgebra quoziente di  $\text{Inv}(A/S)$  modulo  $\text{Inv}(A/R)$ .

## BIBLIOGRAFIA

1. BARSOTTI I., *Risultati e problemi nella teoria delle varietà gruppali*; Atti convegno Internaz. Geom. Algebrica, Taormina, Nov. 1958.
2. BARSOTTI I., *On Witt vectors and periodic group-varieties*; Illinois Journ. of Math., 2, 1958, p. 99.
3. BARSOTTI I., *Moduli canonici e gruppi analitici commutativi*; Ann. Sc. Norm. Sup., 13 1959, p. 302.
4. BARSOTTI I., *Analytical methods for abelian varieties in positive characteristic*; Colloque sur la théorie des Groupes Alg., Bruxelles 1962.
5. BARSOTTI I., *Metodi analitici per varietà abeliane in caratteristica positiva*. cap. 1, 2; Ann. Scuola Norm. Sup. 18, 1964 p. 1; cap. 3, 4 ibidem 19, 1965 p. 277; cap. 5 ibidem 19, 1965 p. 481; cap. 6 ibidem 20, 1966 p. 101.
6. CARTIER P., *Théorie différentielle des groupes algébriques*; Comptes Rend. Ac. Sc., Paris 244, 1957 p. 540.
7. CARTIER P., *Groupes algébriques et groupes formels*; Colloque sur la Théorie des Groupes Algébriques, Bruxelles, 1962.
8. DIEUDONNÉ J., *Groupes de Lie et hypéralgèbres de Lie sur un corps de caractéristique,  $p < 0$* ; Comm. Math. Helv., 28, 1954, p. 87.
9. DIEUDONNÉ J., *Sur les groupes de Lie algébriques sur un corps de caractéristique  $p > 0$* ; Rend. Circ. Mat. Palermo, 1, 1952, p. 126.
10. DIEUDONNÉ J., *Witt groups and hyperexponential groups*; Mathematika 2, 1955, p. 21.
11. DIEUDONNÉ J., *On The Artin-Hasse exponential series*; Proc. Amer. Math. Soc , 8, 1957; p. 210.
12. DIEUDONNÉ J., *Lie groups and Lie hypéralgebras over a field of caractéristic  $p > 0$  (IV)*; Amer Journ. of Math., 77, 1955, p. 429.
13. DIEUDONNÉ J., *Groupes de Lie et hypéralgèbres de Lie sur un corps de caractéristique  $p > 0$  (V)*; Bul Soc. Math. de France, 84, 1956, p. 207.
14. DIEUDONNÉ J., *Groupes de Lie et hypéralgèbres de Lie sur un corps de caractéristique  $p > 0$  (VII)*; Math. Ann. 134, 1957, p. 114.
15. DIEUDONNÉ J., *Hypéralgèbres et groupes formels*; note ciclostilate; Institut des Hautes Etudes Scient., 1962.
16. ECKMANN B. and HILTON P. J., *Group-like Structures in General Categories I*, Math. Annalen 145, p. 227 (1962).
17. GABRIEL P., *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France, 90, 1962, p. 323.
18. GEMIGNANI G., *Gruppi e cogruppi in una categoria*. Ann. Scuola Norm. Sup. 20, 1966, p. 139.
19. GROTHENDIECK A., *Eléments de Géométrie Algébrique III*, Pbl. Math. I. H. E. S. No. 11, Paris, 1961.
20. GROTHENDIECK A., *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku Math. Journ. 9, 1957, p. 119.
21. LAZARD M., *Groupes analytiques p-adiques*, I. H. E. S., No. 26, Paris, 1965.
22. MANIN J., *K teorii abel'ich mnogoobraziy nad polem konechnoy charakteristiki*; Izv. Akad. Nauk. S. S. S. R. 26, 1962, p. 281.
23. MANIN J., *On the classification of formal Abelian groups*, (Russo) Dokl. Akad. Nauk. 144, 1962 p. 490.
24. SERRE J. P., *Groupes algébriques et corps de classes*; Act. Scient. et ind., 1959.