ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

A. VALLE

Un problème de contrôle optimum dans certaines équations différentielles d'évolution

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 20, nº 1 (1966), p. 25-30
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1966_3_20_1_25_0>

UN PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMUM DANS CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ÉVOLUTION

A. VALLE [1]

Introduction.

1.1. — Notations. Premières hypothèses.

On considère deux espaces de Hilbert V et H, *séparables* avec $V \subset H$ algébriquement et topologiquement (c'est à dire: l'injection de V dans H étant continue), V dense dans H. Si u et v sont deux éléments de V, $((u, v))$ désigne leur produit scalaire et $\| u \| = (u, u))^{1/2}$; si $f, g \in H$, (f, g) désigne leur produit scalaire dans H et $|f| = (f, f)^{1/2}$.

On donne une famille de *formes sesquilinéaires continues* sur V, soit $a(t; u, v)$ dépendant du paramètre t (le temps); on supposera que $t \in [O, T]$, T fini. On fera l'hypothèse suivante:

$$
(1.1) \quad \begin{cases} \text{pour } u, v \in V, \text{ la fonction } t \longrightarrow a(t; u, v) \text{ est} \\ \textit{mesurable}, \text{ et} \\ \qquad\qquad |a(t; u, v)| \leq M \| u \| \, \| v \|, \\ M \text{ étant une constante indépendante de } t, u, v. \end{cases}
$$

On donne aussi une forme $v \longrightarrow L(v)$ antilinéaire continue sur V.

Enfin on appelle *contrôle*, toute fonction $p \in L^\infty(O, T)$ telle que $\| p \|_{L^\infty(0, T)} \leq 1$.

1.2. — On va considérer le

Pervenuto alla Redazione il 24 Agosto 1965.

[1] C'est avec un vif sentiment de reconnaissance que je remercie le Prof. J. L. LIONS d'avoir accepté la direction de mon travail à Paris, ainsi que le C. N. R. S. auquel j'appartiens à present en qualité d'attaché.

PROBLÈME 1.1. Trouver une fonction $u \in L^2(-\infty, T; V)$, espace des (classes de) fonctions de carré sommable sur $]-\infty, T[$ à valeurs dans H, avec la norme hilbertienne $\| u \| = \left(\int_{-\infty}^{T} \| u(t) \|_V^2 \, dt \right)^{1/2}$ — nulle presque partout $(p \cdot p)$ pour $t < 0$, satisfaisant à

$$\text{(1.2)} \qquad \begin{cases} a(t; u(t), v) + \dfrac{d}{dt}(u(t), v) = (f(t), v) + p(t) L(v) + (u_0, v)\vartheta \\ \text{pour tout } v \in V \end{cases}$$

où f est donnée dans $L^2(-\infty, T; H)$ nulle pour $t < 0$, u_0 est donné dans H, et ϑ est la masse de DIRAC à l'origine.

Il faut préciser le sens de (1.2). On prolonge $a(t; u, v)$ (définie à priori seulement dans (O, T)) pour $t < 0$ d'une façon quelconque, par exemple par $0 \cdot$ $\dfrac{d}{dt}(u(t), v)$ désigne la derivée au sens des distributions sur $]-\infty, T[$, de la fonction $t \longrightarrow (u(t), v)$. On suppose le contrôle fixe p prolongé aussi par 0, pour $t < 0$.

Or, $L(v) = (\xi, v)$ où $\xi \in V'$ espace anti-dual de V (i. e, espace des formes antilinéaires continues sur V), (ξ, v) désignant le produit scalaire dans l'anti-dualité. D'ailleurs on a ([2] Ch. 1):

$$\text{(1.3)} \qquad V \subset H \subset V'$$

V' muni de la norme hilbertienne $\| L \|_{V'} = \sup \dfrac{|(\xi, v)|}{\| v \|}$, $v \in V$.

On peut donc écrire (1.2) dans la forme

$$\text{(1.4)} \qquad a(t; u(t), v) + \frac{d}{dt}(u(t), v) = (f(t) + p(t)\xi, v) + (u_0, v)\vartheta$$

où $(f(t) + p(t)\xi, v)$ désigne toujours le produit scalaire dans l'anti-dualité.

1.3. PROBLÈME 1.1′. Trouver $u \in L^2(O, T; V)$, avec

$$\text{(1.5)} \quad \int_0^T \{a(t; u(t), \varphi(t)) - (u(t), \varphi'(t))\} \, dt = \int_0^T (f(t) + p(t)\xi, \varphi(t)) \, dt + (u_0, \varphi(0))$$

pour toute fonction φ telle que :

(1.6) $$\varphi \in L^2(O, T; V), \varphi' \in L^2(O, T; H), \varphi(T) = 0.$$

LEMME 1.1. Les problèmes 1.1 et 1.1′ sont équivalents.
(Démonstration [3], Ch 4 § 1).

THÉORÈME 1.1. On suppose que (1.1) a lieu et qu'il existe une constante λ et une constante $\alpha > 0$ telles que

(1.7) $$\mathrm{Re}\; a(t; v, v) + \lambda |v|^2 \geq \alpha \|v\|^2, \text{ pour tout } v \in V.$$

Alors il existe une fonction u solution du problème 1.1′.
Cette solution est unique et verifie en outre

(1.8) $$\frac{du}{dt} \in L^2(O, T; V').$$

Si l'on désigne par W l'espace des (classes de) fonctions u telles que

(1.9) $$\begin{cases} u \in L^2(O, T; V) \\ \dfrac{du}{dt} \in L^2(O, T; V'), \end{cases}$$

(1.8) au sens des distributions vectorielles à valeurs dans V', et l'on munit de la norme :

(1.10) $$\|u\|_W = (\|u\|^2_{L^2(O, T; V)} + \|u'\|^2_{L^2(O, T; V')})^{1/2},$$

W est un espace de Hilbert.

COROLLAIRE 1.1. Sous les hypothèses du théorème ci-dessus, $u \in W$ est ($p \cdot p$ égale à une fonction) continue de $[O, T] \to H$ et $u(0) = u_0$.
(Démonstration du théorème et corollaire [2], Ch II).

Par la suite, on supposera toujours (1.7), et on identifiera la solution unique du problème 1.1 a cette fonction continue qu'on notera u_p, pour mettre en évidence le contrôle choisi.

Existence du contrôle optimum.

2.1. — Position du problème.

On donne un ensemble fermé et borné B dans l'espace de Hilbert H. $\mathcal{C}$ désigne la classe de *tous* les contrôles $\{p\}$, pour lesquels la correspondante solution $t \longrightarrow u_p(t)$ de (1.2) atteint B dans un certain instant $\tau \in [O, T]$, c'est à dire:

$$u_p(\tau) \in B. \tag{2.1}$$

On dit que les contrôles de $\mathcal{C}$ *transférent* le point u_0 jusqu'à B et on appelle τ le *temps de transition.* (Pour la terminologie, cf. [4]).

On fait une hypothèse de *controllabilité* en suppossant que la classe $\mathcal{C}$ n'est pas vide.

Dans ces conditions il s'agit de démontrer le

THÉORÈME 2.1. Soit $\tau^* = \inf\{\tau\}$ pour $p \in \mathcal{C}$; alors il existe un contrôle p^* dans $\mathcal{C}$ optimum au sens, que son temps de transition est égal a τ^*

$$u_{p^*}(\tau^*) = b \in B. \tag{2.2}$$

Ce théorème généralise évidemment le Th. 1 de [1].

DÉMONSTRATION. Si l'on choisit une suite $\{p_n\}$ dans $\mathcal{C}$, telle que

$$u_{p_n}(\tau_n) = b_n \in B, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$

$$\tau_n \longrightarrow \tau^*, \tag{2.4}$$

l'ensemble des $u_{p_n}(\tau_n)$ demeurant dans un borné de H, et compte tenu de la definition de contrôle, on peut en extraire une sous-suite $\{p_\nu\}$ convergente dans $L^\infty(O, T)$ *faible*:

$$p_\nu \longrightarrow p^* \tag{2.5}$$

où p^* est un nouveau contrôle, et telle que dans H *faible*:

$$u_{p_\nu}(\tau_\nu) = b_\nu \longrightarrow b \in B. \tag{2.6}$$

REMARQUE 2.1.

$$\int_0^T p_\nu(t)\, g(t)\, dt \longrightarrow \int_0^T p^*(t)\, g(t)\, dt \quad \forall\, g \in L^1(O, T)$$

donc $\forall\, g \in L^2(O, T)$, et (2.5) implique en particulier $p_\nu \longrightarrow p^*$, dans $L^2(O, T)$ faible.

Maintenant il faut démontrer que le contrôle p^* dans (2.5) vérifie (2.2). Pour ceci on a besoin du

LEMME 2.1. On suppose (2.4) et (2.5), alors

$$u_{p_\nu}(\tau_\nu) \longrightarrow u_{p^*}(\tau^*) \tag{2.7}$$

dans V' faible.

Ce lemme achève la démonstration du th. 2.1. En effet, il suffit de considérer (1.3), (2.6) et (2.7) pour obtenir (2.2).

2.2. DÉMONSTRATION DU LEMME 2.1.

D'abord on procède par *troncature* en définissant les fonctions

$$t \longrightarrow v_\nu(t) = \begin{cases} u_{p_\nu}(t) & \text{dans } \;]0, \tau_\nu[\\ 0 & \text{dans } \;]\tau_\nu, T[\end{cases} \tag{2.8}$$

$$t \longrightarrow v(t) = \begin{cases} u_{p^*}(t) & \text{dans } \;]0, \tau^*[\\ 0 & \text{dans } \;]\tau^*, T[. \end{cases} \tag{2.9}$$

On appelle χ_ν et χ les fonctions caractéristiques de $]0, \tau_\nu[$, $]0, \tau^*[$.

La relation (1.5) signifie ([2], Ch. 2)

$$\begin{cases} u \in L^2(O, T; V) & \\ A(t)\,u(t) + u'(t) = f(t) + p(t)\,\xi & \text{dans } (0, T) \\ u(0) = u_0 & \end{cases} \tag{2.10}$$

les opérateurs $A(t)$ non bornés dans H, définis par les formes sesquilinéaires $a(t\,;u, v)$ de sorte que

$$a(t\,;u(t), v) = (A(t)\,u(t), v).$$

Or de (2.8), (2,9) et (2.10) on déduit

$$A(t)\,v_\nu + v'_\nu = (f + p_\nu\,\xi) - u_{p_\nu}(\tau_\nu)\,\vartheta_{(\tau_\nu)} \tag{2.11}$$

où $-u_{p_\nu}(\tau_\nu)$ est le saut de v_ν pour $t = \tau_\nu$, qui a bien un sens grâce au corollaire 1.1, $\vartheta_{(\tau_\nu)}$ étant la masse de DIRAC en ce point. De façon analogue on a

$$A(t)\,v + v' = \chi\,(f + p^*\,\xi) - u_{p^*}(\tau^*)\,\vartheta_{(\tau^*)}\,. \tag{2.12}$$

2.3. Soit l'application $p \longrightarrow u_p$ de $L^\infty(O, T)$ dans W (cf. 1.3).
En ayant compte des topologies faibles associées, on déduit de (2.5):

$$u_{p_\nu} \longrightarrow u_{p^*} \text{ dans } W \text{ faible} \tag{2.13}$$

donc,

$$(2.14)\qquad \begin{cases} v_\nu \longrightarrow v \text{ dans } L^2(O, T; V) \text{ faible} \\ v'_\nu \longrightarrow v' \text{ dans } L^2(O, T; V') \end{cases} \text{ » .}$$

Par conséquent, au sens des distributions vectorielles à valeurs dans V', $\mathcal{D}'(]O, T[; V')$, on a :

$$(2.15)\qquad A(t)\, v_\nu + v'_\nu \longrightarrow A(t)\, v + v'.$$

Or de (2.4) et (2.5) résulte dans le même espace :

$$(2.16)\qquad \chi_\nu (f + p_\nu\, \xi) \longrightarrow \chi (f + p^*\, \xi).$$

De (2.11), (2.12), (2.15) et (2.16), on trouve toujours dans $\mathcal{D}'(]O, T[; V')$

$$(2.17)\qquad X_\nu = u_{p^*}(\tau^*)\, \vartheta_{(\tau^*)} - u_{p_\nu}(\tau_\nu)\, \vartheta_{(\tau_\nu)} \longrightarrow 0.$$

2.4. En faisant

$$Y_\nu = u_{p_\nu}(\tau_\nu)\, [\vartheta_{(\tau^*)} - \vartheta_{(\tau_\nu)}],$$

on a :

$$(2.18)\qquad X_\nu = [u_{p^*}(\tau^*) - u_{p_\nu}(\tau_\nu)]\, \vartheta_{(\tau^*)} + Y_\nu .$$

On démontre facilement que $Y_\nu \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}'(]O, T[; V')$, et on en conclut

$$(2.19)\qquad X_\nu - Y_\nu = [u_{p^*}(\tau^*) - u_{p_\nu}(\tau_\nu)]\, \vartheta_{(\tau^*)} \longrightarrow 0,$$

et enfin (2.7).

Le lemme 2.1 est maintenant complétement démontré.

Paris C. N. R. S., avril 1965.

BIBLIOGRAPHIE

[1] EGOROV JU. V. *Certain problems in the theory of optimal control.* Soviet Math. Doklady 3 (1962), 1080.

[2] LIONS J. L. *Équations différentielles opérationelles dans les espaces de Hilbert.* Cours C. I. M. E., Varenna (Italie) 1963.

[3] LIONS J. L. *Équations différentielles opérationelles et problèmes aux limites.* Springer 1961.

[4] PONTRYAGIN S. L., *The Mathematical Theory of Optimal Processes.* Interscience Publishers 1962.