ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

CALOGERO VINTI

Proprietà di alcuni integrali del calcolo delle variazioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 20, nº 1 (1966), p. 173-195

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1966_3_20_1_173_0>

PROPRIETÀ DI ALCUNI INTEGRALI DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

di CALOGERO VINTI (*)

1. Introduzione. Per l'integrale del Calcolo delle Variazioni

$$I[f, u, A] = \int_A f(x, y, u, p, q)\, dx\, dy$$

con A aperto limitato di R^2 ed $f(x, y, u, p, q)$ definita continua e non negativa per $(x, y) \in A$, u, p, q qualunque, ricollegandoci a una idea E. Baiada [1], abbiamo proposto in [11] una definizione, denotata simbolicamente $I_B[f, u, A]$, ispirata ai noti teoremi di approssimazione in area con le medie integrali, e abbiamo stabilito un teorema di equivalenza con un'altra definizione $I_C[f, u, A]$, che è stata posta da J. Serrin [5], quando $u(x, y)$ è continua in A, come generalizzazione della definizione di area di una superficie. Successivamente in [12] abbiamo migliorato l'equivalenza tra $I_B[f, u, A]$ ed $I_C[f, u, A]$ ottenendo in particolare dei risultati che comprendevano altri di J. Serrin.

Quando però la $u(x, y)$ non è continua in A, ma localmente sommabile, mentre la definizione $I_B[f, u, A]$, espressa dalla:

$$I_B[f, u, A] = \lim_{K \to A} \underline{\lim}_{h \to 0} \int_K f(x, y, u^{(h)}, u_x^{(h)}, u_y^{(h)})\, dx\, dy,$$

Pervenuto alla Redazione il 16 Dicembre 1965.

(*) Istituto di Matematica dell'Università di Modena.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

con $K \subset A$ insieme compatto ed $u^{(h)}(x, y) = \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} u(x + \varrho, y + \eta)\, d\varrho\, d\eta$, continua ad aver senso, lo stesso non può dirsi per $I_O[f, u, A]$. J. Serrin [6] propone in tal caso la seguente definizione:

$$I_S[f, u, A] = \underset{[\mathcal{C}]}{\text{estr. inf.}} \varliminf_{n \to \infty} I[f, u_n, A_n],$$

ove $[\mathcal{C}]$ denota la collezione di tutte le successioni $\{u_n(x, y)\}_n$ che godono le seguenti proprietà:

1⁰) $u_n(x, y)$, $n = 1, 2, \ldots$, sia di classe C^1 in un aperto $A_n \subset A$, con $\lim_{n \to \infty} A_n = A$;

2⁰) $\{u_n(x, y)\}_n$ converga ad $u(x, y)$ localmente in A in senso forte, cioè per ogni compatto $K \subset A$ risulti:

$$\lim_{n \to \infty} \int_K | u_n(x, y) - u(x, y) | \, dx\, dy = 0.$$

Poichè in alcuni problemi di minimo del Calcolo delle Variazioni si abbandona l'ipotesi della continuità globale della $u(x, y)$ in A, come hanno fatto C. B. Morrey [4] e più recentemente E. De Giorgi [2] e G. Stampacchia ([7], [8], [9]), riteniamo non privo d'interesse affrontare l'equivalenza tre le due definizioni $I_B[f, u, A]$ ed $I_S[f, u, A]$, equivalenza che mentre da una parte fornisce per $I_S[f, u, A]$ un algoritmo di calcolo mediante $I_B[f, u, A]$, dall'altra rappresenta una proposizione di semicontinuità inferiore per l'integrale $I_B[f, u, A]$ rispetto alla convergenza locale in senso forte.

I teoremi 2 e 5 esprimono due proposizioni di equivalenza. Con procedimento analogo a quello adoperato per dimostrare il Teorema 2 si trova il Teorema 3 che ne generalizza uno di J. Serrin ([6], Teorema 6).

I ragionamenti adoperati per dedurre questi risultati ci hanno permesso di stabilire due Teoremi, 1 e 4, di semicontinuità per l'integrale $I[f, u, A]$ nella classe delle funzioni B_1 di C. B. Morrey [3], dei quali il primo è una generalizzazione di un altro di J. Serrin ([6], Teorema 7).

Metteremo infine in evidenza (N. 6) che i risultati espressi dai Teoremi 1, 2, 3, continuano a sussistere se sulla f si fanno delle ipotesi di tipo intermedio tra quelle poste in tali teoremi e quelle dei Teoremi 4, 5.

2. In tutto il lavoro denoteremo con A un aperto limitato di R^2 e con $f(x, y, u, p, q)$ una funzione non negativa e continua per $(x, y) \in A$, u, p, q qualunque.

In questo numero porremo prima delle definizioni e stabiliremo poi un lemma che verrà adoperato successivamente per mostrare un teorema di semicontinuità inferiore per l'integrale $I[f, u, A]$ nella classe B_1 di C. B. Morrey e un teorema di equivalenza tra $I_B[f, u, A]$ ed $I_S[f, u, A]$.

DEFINIZIONI. Una funzione $\Phi(x, y, u, p, q)$ non negativa e continua per $(x, y) \in A$, u, p, q qualunque, la diremo *I_S-confrontabile* con f se per ogni $u(x, y)$ localmente sommabile in A, con $I_S[f, u, A] < +\infty$, esiste almeno una successione $\{u_n\}_n$, con le proprietà 1⁰), 2⁰) del N. 1, per cui risulti (1):

$$\lim_{n \to \infty} I[f, u_n, A_n] = I_S[f, u, A], \qquad \lim_{n \to \infty} I[\Phi, u_n, A_n] < +\infty .$$

Una Φ, sempre non negativa e continua per $(x, y) \in A$, u, p, q qualunque, la diremo *I-confrontabile* con f se, quando è $I[f, u, A] < +\infty$, con $u(x, y)$ localmente in A di classe B_1 secondo C. B. Morrey (2), risulta $I[\Phi, u, A] < +\infty$.

---

(1) Tale definizione è analoga a quella di funzione Φ ad integrale confrontabile con f posta in [12] pag. 87 per l'integrale I_C.

(2) Una funzione $u(x, y)$, $(x, y) \in A$, è detta localmente in A di classe B_1 secondo C. B. Morrey se:

α) $u(x, y)$ è localmente sommabile in A;

β) esistono due funzioni $g_1(x, y)$, $g_2(x, y)$, localmente sommabili in A, e una successione $\{u_n(x, y)\}_n$, con le proprietà 1⁰), 2⁰) del N. 1, tale che:

$$\lim_{n \to \infty} \int_K \left| \frac{\partial u_n}{\partial x} - g_1 \right| dx\, dy = \lim_{n \to \infty} \int_K \left| \frac{\partial u_n}{\partial y} - g_2 \right| dx\, dy = 0,$$

per ogni compatto $K \subset A$.

Le derivate delle funzioni d'insieme $\int_E g_1\, dx\, dy$, $\int_E g_2\, dx\, dy$, $E \subset A$, si chiamano rispettivamente le derivate parziali prime (in senso generalizzato) della u rispetto ad x ed y.

Si mostra che per ogni compatto $K \subset A$ è:

$$\frac{\partial u^{(h)}}{\partial x} = g_1^{(h)}, \quad \frac{\partial u^{(h)}}{\partial y} = g_2^{(h)}, \quad \text{con } 0 < h < \text{dist.}(K, \mathcal{F}A)/2 ,$$

e quindi quasi ovunque in K risulta:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\partial u^{(h)}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \lim_{h \to 0} \frac{\partial u^{(h)}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Per queste proprietà Cfr. anche [10] pag. 14.

Una Φ che sia non soltanto I_S-confrontabile con f ma anche I-confrontabile con f verrà detta (I_S, I)-*confrontabile* con f.

Esempi di funzioni che siano (I_S, I)-confrontabili con f sono dati dalle Φ definite in [12] pag. 96.

LEMMA 1. *Se $f(x, y, u, p, q)$ soddisfa le condizioni:*

i) *sia convessa in senso lato, secondo Jensen, rispetto a (p, q) per ogni (x, y, u), $(x, y) \in A$, u qualunque, cioè si abbia:*

$$f\left(x, y, u, \frac{p_1 + p_2}{2}, \frac{q_1 + q_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \{f(x, y, u, p_1, q_1) + f(x, y, u, p_2, q_2)\},$$

comunque si scelgano le coppie (p_1, q_1), (p_2, q_2);

ii) *per ogni compatto $K \subset A$ si abbia:*

$$|f(x, y, u, p, q) - f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, p, q)| \leq \lambda_K(|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|) \cdot$$
$$\cdot \Phi(x, y, u, p, q) + \mu(|u - \bar{u}|),$$

comunque si scelgano (x, y, u, p, q), $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, p, q)$, $(x, y) \in K$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in K$, ove Φ è I_S-confrontabile con f e $\lambda_K(t)$, $\mu(t)$, $t \in [0, +\infty]$, con $\lambda_K(t)$ dipendente da K, sono non negative, continue, ammettono per $t > 0$ le derivate $\dfrac{d\lambda_K(t)}{dt}$, $\dfrac{d\mu(t)}{dt}$, $\dfrac{d^2\mu(t)}{dt^2}$ e inoltre $\lambda_K(0) = \mu(0) = 0$, $\dfrac{d\lambda_K(t)}{dt} \geq 0$, $\dfrac{d^2\mu(t)}{dt^2} \leq 0$;

ed $u(x, y)$ è localmente sommabile in A, risulta:

$$\overline{\lim_{h \to 0}}\, I[f, u^{(h)}, K] \leq I_S[f, u, A],$$

per ogni compatto $K \subset A$.

Supponiamo $I_S[f, u, A] < +\infty$, in caso contrario il lemma è evidente.

Siano: $K \subset A$ un compatto; $d > 0$ la distanza di K da $\mathcal{F}A$; $\bar{K} \subset A$ un altro compatto contenente quei punti di A che distano da $\mathcal{F}A$ per non meno di $d/2$. Essendo Φ una funzione I_S-confrontabile con f esiste una successione $\{u_n(x, y)\}_n$, $(x, y) \in A_n$, con le proprietà 1⁰), 2⁰) del N. 1, tale che:

$$\lim_{n \to \infty} I[f, u_n, A_n] = I_S[f, u, A], \qquad \lim_{n \to \infty} I[\Phi, u_n, A_n] < +\infty, \tag{1}$$

e poichè $A_n \to A$ esiste un $\bar{n} > 0$ tale che per $n > \bar{n}$ è $A_n \supset \bar{K}$. D'ora in avanti si supponga $n > \bar{n}$.

Per ogni $0 < h < d/4$, denotiamo con $u_n^{(h)}$ la media integrale della u_n, che è definita per $(x, y) \in K$, dalla

$$u_n^{(h)}(x, y) = \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} u_n(x + \varrho, y + \eta)\, d\varrho\, d\eta,$$

A causa della proprietà i) a cui soddisfa la f, in virtù di una nota disuguaglianza di Jensen (3), è:

$$f(x, y, z, u_{n,x}^{(h)}, u_{n,y}^{(h)}) \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} f(x, y, z, u_{n,x}(x + \varrho, y + \eta), u_{n,y}(x + \varrho, y + \eta))\, d\varrho\, d\eta,$$

per $(x, y) \in K$, z qualunque, e da questa per $z = u^{(h)}$ segue:

$$f(x, y, u^{(h)}, u_{n,x}^{(h)}, u_{n,y}^{(h)}) \leq \tag{2}$$

$$\leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} f(x+\varrho, y+\eta, u_n(x+\varrho, y+\eta), u_{n,x}(x+\varrho, y+\eta), u_{n,y}(x+\varrho, y+\eta))\, d\varrho\, d\eta + \Delta,$$

ove s'è posto:

$$\Delta = \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \{ f(x, y, u^{(h)}(x, y), u_{n,x}(x + \varrho, y + \eta), u_{n,y}(x + \varrho, y + \eta)) -$$

$$- f(x + \varrho, y + \eta, u_n(x + \varrho, y + \eta), u_{n,x}(x + \varrho, y + \eta), u_{n,y}(x + \varrho, y + \eta)) \}\, d\varrho\, d\eta.$$

Osserviamo che per la ii) a cui soddisfa la f, si ha per il modulo di Δ la maggiorazione:

$$|\Delta| \leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \{ \lambda_{\overline{K}}(|\varrho| + |\eta|) \cdot \Phi(x+\varrho, y+\eta, u_n(x+\varrho, y+\eta), u_{n,x}(x+\varrho, y+\eta), u_{n,y}(x+\varrho, y+\eta)) +$$

$$+ \mu(| u_n(x + \varrho, y + \eta) - u^{(h)}(x, y) |) \}\, d\varrho\, d\eta,$$

---

(3) Cfr. ad es. [10] pag. 19.

e quindi dalla (2), integrando su K, tenendo presente quest'ultima, adoperando il teorema di riduzione di Fubini-Tonelli, e ricordando che $\lambda_{\overline{K}}(t)$ è non decresceute, si ha :

$$(3)\qquad \int_K f(x,\, y,\, u^{(h)},\, u^{(h)}_{n,\,x},\, u^{(h)}_{n,\,y})\, dx\, dy \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2h)^2}\int_{-h}^{h} d\varrho \int_{-h}^{h} d\eta \int_K f(x+\varrho,\, y+\eta,\, u_n(x+\varrho,\, y+\eta),\, u_{n,x}(x+\varrho,\, y+\eta)\, u_{n,y}(x+\varrho,\, y+\eta))\, dx\, dy +$$

$$+\frac{1}{(2h)^2}\int_{-h}^{h} d\varrho \int_{-h}^{h} d\eta \int_K \lambda_{\overline{K}}(2h)\cdot \Phi(x+\varrho,\, y+\eta,\, u_n(x+\varrho,\, y+\eta),\, u_{n,x}(x+\varrho,\, y+\eta),\, u_{n,y}(x+\varrho,\, y+\eta))\, dx dy +$$

$$+\frac{1}{(2h)^2}\int_{-h}^{h} d\varrho \int_{-h}^{h} d\eta \int_K \mu\,(\,|\, u_n(x+\varrho,\, y+\eta) - u^{(h)}(x,\, y)\,|\,)\, dx\, dy \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2h)^2}\int_{-h}^{h} d\varrho \int_{-h}^{h} d\eta \int_{K_{(\varrho,\eta)}} f(x,\, y,\, u_n(x,\, y),\, u_{n,\,x}(x,\, y),\, u_{n,\,y}(x,\, y))\, dx\, dy +$$

$$+\lambda_{\overline{K}}(2h)\frac{1}{(2h)^2}\int_{-h}^{h} d\varrho \int_{-h}^{h} d\eta \int_{K_{(\varrho,\eta)}} \Phi(x,\, y,\, u_n(x,\, y),\, u_{n,\,x}(x,\, y),\, u_{n,\,y}(x,\, y))\, dx\, dy +$$

$$+\frac{1}{(2h)^2}\int_{-h}^{h} d\varrho \int_{-h}^{h} d\eta \int_K \mu\,(\,|\, u_n(x+\varrho,\, y+\eta) - u^{(h)}(x,\, y)\,|\,)\, dx\, dy,$$

ove con $K_{(\varrho,\,\eta)}$ s'è denotato il compatto ottenuto da K per traslazione del vettore $(\varrho,\, \eta)$.

Adoperiamo ora il fatto che $\mu(t)$, $t \in [0,\, +\infty]$ è concava in senso lato secondo Jensen, proprietà questa che discende immediatamente dalle ipotesi poste su $\mu(t)$.

In virtù allora della nota disuguaglianza di Jensen è:

$$(4)\qquad \int_K \mu\,(\,|\, u_n(x+\varrho,\, y+\eta) - u^{(h)}(x,\, y)\,|\,)\, dx\, dy \leq$$

$$\leq (\text{mis}\, K)\cdot \mu\left(\frac{1}{\text{mis}\, K}\int_K |\, u_n(x+\varrho,\, y+\eta) - u^{(h)}(x,\, y)\,|\, dx\, dy\right),$$

e procediamo a valutare il secondo membro di quest'ultima. Si ha manifestamente:

$$(5) \qquad \int_K |u_n(x+\varrho, y+\eta) - u^{(h)}(x,y)|\,dx\,dy \leq$$

$$\leq \int_K |u_n(x+\varrho, y+\eta) - u(x+\varrho, y+\eta)|\,dx\,dy + \int_K |u(x+\varrho, y+\eta) - u(x,y)|\,dx\,dy +$$

$$+ \int_K |u(x,y) - u^{(h)}(x,y)|\,dx\,dy \leq \int_{\overline{K}} |u_n(x,y) - u(x,y)|\,dx\,dy +$$

$$+ \int_K |u(x+\varrho, y+\eta) - u(x,y)|\,dx\,dy + \int_K |u(x,y) - u^{(h)}(x,y)|\,dx\,dy.$$

Ed essendo:

$$a) \qquad \lim_{h\to 0} \int_K |u(x,y) - u^{(h)}(x,y)|\,dx\,dy = 0,$$

(basta osservare che $u^{(h)}(x,y) \xrightarrow[h\to 0]{} u(x,y)$ quasi ovunque in K, e inoltre è:

$$\int_E |u(x,y) - u^{(h)}(x,y)|\,dx\,dy \leq \int_E |u(x,y)|\,dx\,dy +$$

$$+ \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} d\varrho \int_{-h}^{h} d\eta \int_{E_{(\varrho,\eta)}} |u(x,y)|\,dx\,dy,$$

per ogni insieme misurabile $E \subset K$) cioè $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \overline{h}(\varepsilon) > 0$ tale che risulti:

$$\int_K |u(x,y) - u^{(h)}(x,y)|\,dx\,dy < \varepsilon, \qquad \text{per} \quad 0 < h < \overline{h};$$

$$b) \qquad \lim_{(\varrho,\eta)\to 0} \int_K |u(x+\varrho, y+\eta) - u(x,y)|\,dx\,dy = 0,$$

e quindi esiste un $h^*(\varepsilon) > 0$ $(h^* < \overline{h})$ tale che risulti:

$$\int_K |u(x+\varrho, y+\eta) - u(x,y)|\,dx\,dy < \varepsilon, \qquad \text{per } |\varrho| < h^*, |\eta| < h^*;$$

$$c) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\overline{K}} | u_n(x, y) - u(x, y) | \, dx \, dy = 0,$$

(in virtù della proprietà 2°) del N. 1) e quindi $\forall \tau > 0$, $\exists \, n^*(\tau) > 0$ tale che:

$$\int_{\overline{K}} | u_n(x, y) - u(x, y) | \, dx \, dy < \tau, \qquad \text{per} \quad n > n^*;$$

dalla (5), in virtù delle *a*), *b*), *c*), segue:

$$(6) \qquad \int_K | u_n(x + \varrho, y + \eta) - u^{(h)}(x, y) | \, dx \, dy < 2\varepsilon + \tau,$$

per $n > n^*$, $0 < h < h^*$, $|\varrho| < h^*$, $|\eta| < h^*$.

Dalla (3) allora, tenendo conto delle (4), (6) (si tenga presente che $\mu(t)$ è non decrescente), e del fatto che $K_{(\varrho, \eta)} \subset \overline{K} \subset A_n$, si deduce

$$(7) \qquad \int_K f(x, y, u^{(h)}, u^{(h)}_{n,x}, u^{(h)}_{n,y}) \, dx \, dy \leq I[f, u_n, \overline{K}] + \lambda_{\overline{K}}(2h) \cdot I[\Phi, u_n, \overline{K}] +$$

$$(\text{mis } K) \cdot \mu\left(\frac{2\varepsilon + \tau}{\text{mis } K}\right) \leq I[f, u_n, A_n] + \lambda_{\overline{K}}(2h) \cdot I[\Phi, u_n, A_n] + (\text{mis } K) \cdot \mu\left(\frac{2\varepsilon + \tau}{\text{mis } K}\right),$$

per $n > n^*$, $0 < h < h^*$.

Osserviamo poi che, per $0 < h < d/4$, è:

$$\int_K | u^{(h)}_{n,x} - u^{(h)}_x | \, dx \, dy =$$

$$= \int_K \left| \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} [u_n(x+h, y+\eta) - u_n(x-h, y+\eta) - u(x+h, y+\eta) + u(x-h, y+\eta)] \, d\eta \right| dx \, dy \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2h)^2}\int_{-h}^{h}\left\{\int_K |u_n(x+h, y+\eta)-u(x+h, y+\eta)|\, dx\, dy + \int_K |u_n(x-h, y+\eta)-u(x-h, y+\eta)|\, dx\, dy\right\} d\eta \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2h)^2}\int_{-h}^{h}\left\{\int_{\overline{K}} |u_n(x, y) - u(x, y)|\, dx\, dy + \int_{\overline{K}} |u_n(x, y) - u(x, y)|\, dx\, dy\right\} d\eta =$$

$$= \frac{1}{h}\int_{\overline{K}} |u_n(x, y) - u(x, y)|\, dx\, dy,$$

e analogamente:

$$\int_K |u^{(h)}_{n, y} - u^{(h)}_y|\, dx\, dy \leq \frac{1}{h}\int_{\overline{K}} |u_n(x, y) - u(x, y)|\, dx\, dy,$$

e quindi, per la proprietà 2⁰) del N. 1 a cui soddisfa la $\{u_n\}_n$, per ogni h, $0 < h < d/4$, si ha:

$$\lim_{n\to\infty}\int_K |u^{(h)}_{n, x} - u^{(h)}_x|\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty}\int_K |u^{(h)}_{n, y} - u^{(h)}_y|\, dx\, dy = 0,$$

e di conseguenza per ogni h, $0 < h < d/4$, esiste una sottosuccessione $\{u_{n_p}\}_p$ della $\{u_n\}_n$ tale che:

$$u^{(h)}_{n_p, x} \xrightarrow[p\to\infty]{} u^{(h)}_x, \qquad u^{(h)}_{n_p, y} \xrightarrow[p\to\infty]{} u^{(h)}_y,$$

quasi ovunque in K.

Per un noto lemma di Fatou risulta allora:

$$\varliminf_{p\to\infty}\int_K f(x, y, u^{(h)}, u^{(h)}_{n_p, x}, u^{(h)}_{n_p, y})\, dx\, dy \geq \int_K f(x, y, u^{(h)}, u^{(h)}_x, u^{(h)}_y)\, dx\, dy,$$

e quindi dalla (7), quando in essa al posto di u_n si pone u_{n_p}, prendendo di ambo i membri il minimo limite per $p \to \infty$ e tenendo conto delle (1) segue:

$$\text{(8)} \qquad I[f, u^{(h)}, K] \leq \lim_{p\to\infty} I[f, u_{n_p}, A_{n_p}] + \lambda_{\overline{K}}(2h)\cdot \lim_{p\to\infty} I[\Phi, u_{n_p}, A_{n_p}] +$$

$$+ (\text{mis } K) \cdot \mu \left(\frac{2\varepsilon + \tau}{\text{mis } K} \right) = I_S [f, u, A] + \lambda_{\overline{K}} (2h) \cdot \lim_{p \to \infty} I [\Phi, u_{n_p}, A_{n_p}] +$$

$$+ (\text{mis } K) \cdot \mu \left(\frac{2\varepsilon + \tau}{\text{mis } K} \right),$$

par ogni $0 < h < h^*$.

Da questa infine tenendo presente che $\lambda_{\overline{K}} (t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$, si deduce:

$$\overline{\lim_{h \to 0}} \, I [f, u^{(h)}, K] \leq I_S [f, u, A] + (\text{mis } K) \cdot \mu \left(\frac{2\varepsilon + \tau}{\text{mis } K} \right), \tag{9}$$

e quindi l'asserto del Lemma 1 tenuto conto dell'arbitrarietà di ε e τ e del fatto che $\mu (t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$.

OSSERVAZIONE 1. Le medie $u^{(h)}$ adoperate da noi differiscono da quelle u_h adoperate da J. Serrin in [6] per il fatto che hanno come nucleo non una funzione di classe C^∞ ma una funzione caratteristica d'intervallo.

Le u_h di Serrin sono infatti definite dalla:

$$u_h (x, y) = \int_A H_h (\varrho, \eta) \cdot u (x + \varrho, y + \eta) \, d\varrho \, d\eta, \qquad (x, y) \in A_h, \tag{10}$$

ove A_h è l'aperto, sottoinsieme di A, con la proprietà che ogni punto della frontiera di A_h dista h dalla frontiera di A, e il nucleo $H_h (\varrho, \eta)$, $(\varrho, \eta) \in R^2$, con $H_h \leq \text{cost.}/h^2$, è non negativo, identicamente nullo per $\sqrt{\varrho^2 + \eta^2} \geq h$, di classe C^∞, e inoltre tale che $\int_{R^2} H_h (\varrho, \eta) \, d\varrho \, d\eta = 1$.

Facilmente si vede che le medie u_h godono delle proprietà 1°), 2°) del N. 1; inoltre tutti i risultati che otteniamo in questo lavoro adoperando le medie $u^{(h)}$ sussistono con le medie u_h: basta ripetere, senza alterazione alcuna, gli stessi ragionamenti che si fanno per raggiungere questi risultati.

OSSERVAZIONE 1'. Se la proprietà espressa nella definizione di funzione Φ, I_S-confrontabile con f, sussiste non per tutte le $u (x, y)$ localmente sommabili in A ma soltanto per una di esse, per questa $u (x, y)$ vale l'asserto del Lemma 1 sempre sotto le ipotesi i), ii).

3. Conseguenza del Lemma 1 sono i seguenti due teoremi, dei quali il primo è una generalizzazione di uno di J. Serrin ([6], Teorema 7).

TEOREMA 1. *Se f soddisfa le condizioni* i), ii) *del Lemma 1, ove però nella* ii) *la Φ è (I_S, I)-confrontabile con f, ed $u(x, y)$ è localmente in A di classe B_1 secondo C. B. Morrey, risulta:*

$$I[f, u, A] = I_S[f, u, A], \tag{11}$$

e quindi il funzionale $I[f, u, A]$ è semicontinuo inferiormente, rispetto alla convergenza locale in senso forte, nella classe delle funzioni $u \in B_1$ localmente in A.

Osserviamo intanto che la semicontinuità inferiore del funzionale $I[f, u, A]$ nella classe delle funzioni $u \in B_1$, localmente in A, è conseguenza immediata della (11) e del fatto che $I_S[f, u, A]$ è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza locale in senso forte nella classe delle funzioni $u(x, y)$ localmente sommabili in A.

Mostriamo la (11).

Supponiamo prima $I_S[f, u, A] < +\infty$. Per ogni compatto $K \subset A$, in in virtù del Lemma 1 e del noto lemma di Fatou, essendo $u \in B_1$ localmente in A, si ha [4]:

$$I[f, u, K] \leq \varliminf_{h \to 0} I[f, u^{(h)}, K] \leq I_S[f, u, A],$$

e quindi:

$$I[f, u, A] \leq I_S[f, u, A]. \tag{12}$$

Per mostrare la disuguaglianza contraria alla (12) si osservi intanto che, essendo $u \in B_1$ localmente in A, lo stesso procedimento col quale si è raggiunta la (7) (che viene stabilita senza fare uso delle (1)), con l'accorgimento però di cambiare u_n in u, ci porta a:

$$I[f, u^{(h)}, K] \leq I[f, u, A] + \lambda_{\overline{K}}(2h) \cdot I[\Phi, u, A] + (\text{mis}\, K) \cdot \mu\left(\frac{2\varepsilon}{\text{mis}\, K}\right), \tag{13}$$

per $0 < h < h^*(\varepsilon)$.

Tenendo poi presente che è $I[\Phi, u, A] < +\infty$, appunto perchè per la (12) è $I[f, u, A] < +\infty$ e Φ è I-confrontabile con f, dalla (13), prendendo in ambo i membri il massimo limite per $h \to 0$ e ricordando che ε è arbitrario e $\lambda_{\overline{K}}(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$, $\mu(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$, si ha:

$$\varlimsup_{h \to 0} I[f, u^{(h)}, K] \leq I[f, u, A]. \tag{14}$$

---

[4] Si tengano presente le proprietà delle $u \in B_1$ localmente in A riportate in nota [2].

Detta ora $\{\varepsilon_n\}_n$ una successione di numeri positivi decrescente e convergente a zero, ed $\{A_n\}_n$ una successione di aperti con $A_n \cup \mathcal{F}A_n \subset A$, $A_n \xrightarrow[n \to \infty]{} A$, dalla (14) segue che in corrispondenza ad ε_n esiste un $h_n = h(n) \leq \varepsilon_n$ tale che:

$$I[f, u^{(h_n)}, A_n] < I[f, u, A] + \varepsilon_n \tag{14'}$$

e da questa, in virtù della definizione di $I_S[f, u, A]$ e del fatto che $\{u^{(h_n)}(x, y)\}_n$, $(x, y) \in A_n$, gode (5) delle proprietà 1°), 2°) del N. 1, si deduce:

$$I_S[f, u, A] \leq I[f, u, A]. \tag{15}$$

La (12) assieme alla (15) mostrano la (11) nel caso $I_S[f, u, A] < +\infty$. Nel caso poi $I_S[f, u, A] = +\infty$, se fosse $I[f, u, A] < +\infty$ continuerebbe a sussistere la (14) e di conseguenza la (15) e dunque dovrebbe essere $I_S[f, u, A] < +\infty$.

OSSERVAZIONE 1''. Se le proprietà espresse nella definizione di funzione Φ, (I_S, I)-confrontabile con f, sussistono soltanto per una $u \in B_1$, localmente in A, per questa $u(x, y)$ vale l'uguaglianza (11) sempre sotto le ipotesi i), ii).

TEOREMA 2. *Se f soddisfa le condizioni* i), ii) *del Lemma 1, ove nella* ii) *la Φ è (I_S, I)-confrontabile con f, ed $u(x, y)$ è localmente sommabile in A, risulta:*

$$I_B[f, u, A] = I_S[f, u, A].$$

Dalla definizione di $I_B[f, u, A]$ e dal Lemma 1 segue intanto:

$$I_B[f, u, A] = \lim_{K \to A} \varliminf_{h \to 0} I[f, u^{(h)}, K] \leq I_S[f, u, A] \tag{16}$$

e quindi per mostrare il teorema basta far vedere che sussiste la disuguaglianza contraria a quest'ultima.

Detto infatti $K \subset A$ un compatto tale che $K^0 \equiv K - \mathcal{F}K$ sia un aperto, poichè per h sufficientemente piccolo è $u^{(h)} \in B_1$, localmente in K^0, dal Teorema 1 segue:

$$I[f, u^{(h)}, K] = I[f, u^{(h)}, K^0] = I_S[f, u^{(h)}, K^0], \tag{17}$$

(5) Si ricordino per la 1°) le proprietà in nota (2) e per la 2°) la *a*) del N. 2.

e da questa per $h \to 0$, tenuto conto che $u^{(h)} \xrightarrow[h \to 0]{} u$ localmente in K^0 in senso forte (a) del N. 2) e che $I_S[f, u, K^0]$ è semicontinuo inferiormente, si deduce:

$$\varliminf_{h \to 0} I[f, u^{(h)}, K] = \varliminf_{h \to 0} I_S[f, u^{(h)}, K^0] \geq I_S[f, u, K^0],$$

e ancora, sempre per la semicontinuità inferiore di $I_S[f, u, A]$:

$$I_B[f, u, A] = \lim_{K \to A} \varliminf_{h \to 0} I[f, u^{(h)}, K] \geq \lim_{K^0 \to A} I_S[f, u, K^0] \geq I_S[f, u, A].$$

Quest'ultima insieme alla (16) mostra il teorema.

Osservazione 2. Se nella definizione $I_B[f, u, A]$ le medie $u^{(h)}$ si sostituiscono con le medie u_h, espresse dalla (10), l'asserto del Teorema 2 continua a sussistere quando f soddisfa le condizioni i), ii) del Lemma 1. Sussiste infatti in tal caso la (16), e per mostrare la disuguaglianza contraria ad essa basta tenere presente che $u_h(x, y)$, $(x, y) \in A_h$, gode delle proprietà 1^0), 2^0) del N. 1 e procedere analogamente a come s'è mostrata in [11], pag. 272, indipendentemente dalle ipotesi i), ii), la disuguaglianza $I_B[f, u, A] \geq I_G[f, u, A]$.

Osservazione 2'. Per il Teorema 2 si può ripetere l'Osservazione 1' relativamente però alla I_S-confrontabilità con f della Φ.

4. In questo numero, sfruttando il ragionamento adoperato per mostrare il Lemma 1, stabiliremo, quando $u(x, y)$ è sommabile in A e quando nella condizione ii) del Lemma 1 la classe $[\lambda_K(t)]$, al variare di K, è limitata superiormente da una $\lambda(t)$, un teorema che ne generalizza uno di J. Serrin ([6], Teorema 6).

Teorema 3. *Se $f(x, y, u, p, q)$ soddisfa le condizioni:*

i) *per ogni (x, y, u), $(x, y) \in A$, u qualunque, sia convessa in senso lato, secondo Jensen, rispetto a (p, q);*

iii) *comunque si scelgano (x, y, u, p, q), $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, p, q)$, $(x, y) \in A$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$, si abbia:*

$$|f(x, y, u, p, q) - f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, p, q)| \leq$$
$$\leq \lambda(|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|) \cdot \Phi(x, y, u, p, q) + \mu(|u - \bar{u}|),$$

ove Φ è (I_S, I)-confrontabile con f e $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $t \in [0, +\infty]$, sono non negative, continue, ammettono per $t > 0$ le derivate $\dfrac{d\lambda(t)}{dt}$, $\dfrac{d\mu(t)}{dt}$, $\dfrac{d^2\mu(t)}{dt^2}$, e inoltre

$$\lambda(0) = \mu(0) = 0, \frac{d\lambda(t)}{dt} \geq 0, \frac{d^2\mu(t)}{dt^2} \leq 0;$$

ed $u(x, y)$ *è sommabile in* A*, risulta:*

$$\lim_{h \to 0} I[f, u^{(h)}, A_h] = I_S[f, u, A], \tag{18}$$

con $A_h \subset A$ *aperto tale che* $A_h \underset{h \to 0}{\longrightarrow} A$, dist $(A_h, \mathcal{F}A) \geq c \cdot h$, $c \geq \sqrt{2}$.

Fissato $h > 0$, siano: $K^* \subset A_h$ un compatto; $d_h > 0$ la distanza di K^* da $\mathcal{F}A_h$; $\bar{K}^* \subset A$ un altro compatto contenente quei punti di A che distano da $\mathcal{F}A$ per non meno del min $[h, d_h]$.

Supponiamo prima $I_S[f, u, A] < +\infty$.

Denotiamo con $\{u_n(x, y)\}_n$, $(x, y) \in A_n$, una successione che goda delle proprietà 1⁰), 2⁰) del N. 1 e per la quale siano soddisfatte le (1) del N. 2, e con n^* quell'intero tale che per $n > n^*$ risulti $A_n \supset \bar{K}^*$. D'ora in avanti supporremo $n > n^*$.

Sussiste la (2) per $(x, y) \in K^*$ e in virtù della iii) si ha per il modulo di Δ la maggiorazione:

$$|\Delta| \leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \{\lambda(2h) \cdot \Phi(x + \varrho, y + \eta, u_n(x + \varrho, y + \eta), u_{n,x}(x + \varrho, y + \eta),$$

$$u_{n,y}(x + \varrho, y + \eta)) + \mu(|u_n(x + \varrho, y + \eta) - u^{(h)}(x, y)|)\} \, d\varrho \, d\eta.$$

La (3) si scrive allora:

$$\int_{K^*} f(x, y, u^{(h)}, u^{(h)}_{n,x}, u^{(y)}_{n,y}) \, dx \, dy \leq \tag{19}$$

$$\leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} d\varrho \int_{-h}^{h} d\eta \int_{K^*_{(\varrho,\eta)}} f(x, y, u_n(x, y), u_{n,x}(x, y), u_{n,y}(x, y)) \, dx \, dy +$$

$$+ \frac{\lambda(2h)}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} d\varrho \int_{-h}^{h} d\eta \int_{K^*_{(\varrho,\eta)}} \Phi(x, y, u_n(x, y) \, u_{n,x}(x, y), u_{n,y}(x, y)) \, dx, \, dy +$$

$$+ \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} d\varrho \int_{-h}^{h} d\eta \int_{K^*} \mu(|u_n(x + \varrho, y + \eta) - u^{(h)}(x, y)|) \, dx \, dy.$$

Il primo membro della (5) poi, quando in esso si cambi K in K^*, si maggiora come segue:

$$(5') \quad \int_{K^*} |u_n(x+\varrho, y+\eta) - u^{(h)}(x,y)|\, dx\, dy \leq \int_{\overline{K}^*} |u_n(x,y) - u(x,y)|\, dx\, dy +$$

$$+ \int_{A_h} |u(x+\varrho, y+\eta) - u(x,y)|\, dx\, dy + \int_{A_h} |u(x,y) - u^{(h)}(x,y)|\, dx\, dy.$$

Ma si osservi che sussistono le a), b) del N. 2 quando in esse si cambi K in A_h, appunto perchè $u(x,y)$ è sommabile in A, e quindi posto:

$$\varepsilon_1(h) = \sup_{\varrho^2+\eta^2 \leq 2h^2} \int_{A_h} |u(x+\varrho, y+\eta) - u(x,y)|\, dx\, dy,$$

$$\varepsilon_2(h) = \int_{A_h} |u(x,y) - u^{(h)}(x,y)|\, dx\, dy,$$

si ha:

$$(20) \qquad \lim_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = \lim_{h\to 0} \varepsilon_2(h) = 0;$$

inoltre posto:

$$\tau(n) = \int_{\overline{K}^*} |u_n(x,y) - u(x,y)|\, dx\, dy,$$

per la 2^0) del N. 1, è:

$$(20') \qquad \lim_{n\to\infty} \tau(n) = 0.$$

Per la (5′) quindi si ha ulteriormente la maggiorazione:

$$(21) \qquad \int_{K^*} |u_n(x+\varrho, y+\eta) - u^{(h)}(x,y)|\, dx\, dy \leq \tau(n) + \varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(h).$$

Dalla (19) allora, tenendo presente la (4) quando in essa si cambi K in K^* e tenendo poi conto della (21) (si ricordi che $\mu(t)$ è non decrescente) e del fatto che $K^*_{(\varrho,\eta)} \subset \overline{K}^* \subset A_n$, si deduce:

$$(22) \qquad \int_{K^*} f(x, y, u^{(h)}, u^{(h)}_{n,x}, u^{(h)}_{n,y})\, dx\, dy \leq I[f, u^n, A_n] +$$

$$\lambda(2h) \cdot I[\Phi, u_n, A_n] + (\text{mis}\, K^*) \cdot \mu\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\tau}{\text{mis}\, K^*}\right).$$

Osserviamo ora che con lo stesso ragionamento col quale dalla (7) si è dedotta la (8), dalla (22), tenuto conto della (20′), segue :

$$I[f, u^{(h)}, K^*] \leq I_S[f,u,A] + \lambda(2h) \cdot \lim_{p\to\infty} I[\Phi, u_{n_p}, A_{n_p}] + (\text{mis}\, K^*) \cdot \mu\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\text{mis}\, K^*}\right),$$

con $\lim_{p\to\infty} I[\Phi, u_{n_p}, A_{n_p}] < +\infty$.

E poichè quest'ultima è vera per ogni compatto $K^* \subset A_h$, per $K^* \longrightarrow A_h$ ci dà :

$$I[f, u^{(h)}, A_h] \leq I_S[f, u, A] + \lambda(2h) \cdot \lim_{p\to\infty} I[\Phi, u_{n_p}, A_{n_p}] + (\text{mis}\, A) \cdot \mu\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\text{mis}\, A_h}\right);$$

e da questa per $h \longrightarrow 0$, tenendo presente le (20) e inoltre che $\lambda(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, $\mu(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, segue :

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\, I[f, u^{(h)}, A_h] \leq I_S[f, u, A]. \tag{23}$$

Per mostrare la (18) basta quindi far vedere che ;

$$\underline{\lim_{h\to 0}}\, I[f, u^{(h)}, A_h] \geq I_S[f, u, A]. \tag{24}$$

Si osservi a tale scopo che $u^{(h)} \in B_1$ localmente in A_h e quindi per il Teorema 1 è:

$$I[f, u^{(h)}, A_h] = I_S[f, u^{(h)}, A_h],$$

e da questa, tenendo presente che $u^{(h)}(x, y)$, $(x, y) \in A_h$, converge ad $u(x, y)$ localmente in A in senso forte (a) del N. 2), per la semicontinuità inferiore del funzionale $I_S[f, u, A]$ segue la (24).

Il teorema è quindi dimostrato se $I_S[f, u, A] < +\infty$. Nel caso poi che fosse $I_S[f, u, A] = +\infty$, basta osservare che continua ad essere vera la (24), appunto perchè si è dedotta senza l'ipotesi $I_S[f, u, A] < +\infty$, e dunque sussiste ancora la (18).

OSSERVAZIONE 3. La (18), se in essa le medie $u^{(h)}$ si sostituiscono con le medie u_h espresse dalla (10), sussiste quando f soddisfa le ipotesi i), iii) e con Φ soltanto I_S-confrontabile con f. Continua infatti a sussistere in tal caso la (23), perchè per dedurla non si è sfruttata la I-confrontabilità con f della Φ, e la (24) è poi conseguenza immediata della definizione di $I_S[f, u, A]$ tenendo presente che $u_h(x, y)$, $(x, y) \in A_h$ gode delle proprietà 1^0), 2^0) del N. 1.

OSSERVAZIONE 3'. Per il Teorema 3 vale anche l'Osservazione 1' del N. 2 relativamente però alla I_S-confrontabilità con f della Φ.

5. In questo numero mostreremo, soltanto sotto l'ipotesi della convessità della f rispetto al complesso dei suoi argomenti, un teorema di semicontinuità per il funzionale $I[f, u, A]$ nella classe B_1 e un teorema di equivalenza tra $I_B[f, u, A]$ ed $I_S[f, u, A]$ nella classe delle funzioni localmente sommabili in A.

TEOREMA 4. *Se f è convessa in senso lato, secondo Jensen, rispetto al complesso delle sue variabili, ed $u(x, y)$ è localmente in A di classe B_1 secondo C. B. Morrey, risulta:*

$$I[f, u, A] = I_S[f, u, A], \tag{25}$$

e quindi il funzionale $I[f, u, A]$ è semicontinuo inferiormente, rispetto alla convergenza locale in senso forte, nella classe delle funzioni $u \in B_1$ localmente in A.

Sia $\{u_n(x, y)\}_n$, $(x, y) \in A_n$, una successione con le proprietà 1°), 2°) del N. 1 e tale che:

$$\lim_{n \to \infty} I[f, u_n, A_n] = I_S[f, u, A]. \tag{26}$$

Denotiamo con K e $\overline{K}$ i compatti introdotti nella dimostrazione del Lemma 1, e con $\overline{n}$ quell'intero per cui si ha $A_n \supset \overline{K}$ quando è $n > \overline{n}$.

A causa della convessità globale della f sussiste la seguente disuguaglianza (6):

$$I[f, u_n^{(h)}, K] \leq I[f, u_n, \overline{K}] \leq I[f, u_n, A_n], \tag{27}$$

per $n > \overline{n}$, $0 < h < d/4$, avendo posto $d = \operatorname{dist}(K, \mathcal{F}A)$.

Osserviamo ora che per ogni h, $0 < h < d/4$ la sottosuccessione $\{u_{n_p}\}_p$ della $\{u_n\}_n$, considerata nel N. 2 per dedurre dalla (7) la (8), può scegliersi in modo che, quasi ovunque in K, risulti non soltanto:

$$\lim_{p \to \infty} u^{(h)}_{n_p, x} = u^{(h)}_x, \qquad \lim_{p \to \infty} u^{(h)}_{n_p, y} = u^{(h)}_y,$$

ma anche:

$$\lim_{p \to \infty} u^{(h)}_{n_p} = u^{(h)},$$

(6) Questa disuguaglianza si trova dimostrata in [10] pag. 23.

e quindi dalla (27), quando in essa si cambi u_n in u_{n_p}, in virtù del lemma di Fatou e della (26), segue:

$$I[f, u^{(h)}, K] \leq I_S[f, u, A] \tag{28}$$

per $0 < h < d/4$.

Dalla (28) poi, dato che $u \in B_1$ localmente in A, ancora per il lemma di Fatou si deduce:

$$I[f, u, K] \leq \varliminf_{h \to 0} I[f, u^{(h)}, K] \leq I_S[f, u, A],$$

e poichè quest'ultima è vera qualunque sia il compatto $K \subset A$, risulta:

$$I[f, u, A] \leq I_S[f, u, A]. \tag{29}$$

D'altra parte, sempre per la convessità globale della f e per il fatto che $u \in B_1$ localmente in A, sussiste la disuguaglianza ([10], pag. 23):

$$I[f, u^{(h)}, K] \leq I[f, u, \bar{K}] \leq I[f, u, A], \tag{27'}$$

per $0 < h < d/4$, dalla quale segue:

$$\varlimsup_{h \to 0} I[f, u^{(h)}, K], \leq I[f, u, A], \tag{30}$$

Adoperando infine lo stesso ragionamento fatto nel Teorema 1 a partire dalla (14), dalla (30) si deduce:

$$I_S[f, u, A] \leq I[f, u, A],$$

che assieme alla (29) mostra la (25).

TEOREMA 5. *Se f è convessa in senso lato, secondo Jensen, rispetto al complesso delle due variabili, ed $u(x, y)$ è localmente sommabile in A, risulta:*

$$I_B[f, u, A] = I_S[f, u, A] = \lim_{h \to 0} I[f, u^{(h)}, A_h], \tag{31}$$

con $A_h \subset A$ aperto tale che $A_h \underset{h \to 0}{\longrightarrow} A$, dist $(A_h, \mathcal{F}A) \geq c \cdot h$, $c \geq \sqrt{2}$.

Sia $\{u_n(x, y)\}_n$, $(x, y) \in A_n$, una successione che goda delle proprietà 1⁰), 2⁰) del N. 1 e tale che sia soddisfatta la (26). Sussiste allora, a causa della convessità globale della f, la (27) e di conseguenza la (28), e da quest'ultima segue:

$$I_B[f, u, A] = \lim_{K \to A} \overline{\lim_{h \to 0}} I[f, u^{(h)}, K] \leq I_S[f, u, A]. \tag{32}$$

Basta quindi dimostrare la disuguaglianza contraria alla (32) per stabilire la prima uguaglianza espressa dalla (31).

Detto $K \subset A$ un compatto tale che $K^0 \equiv K - \mathcal{F}K$ sia un aperto, poichè per $0 < h < \operatorname{dist}(K, \mathcal{F}A)/2$ è $u^{(h)} \in B_1$ localmente in K^0, in virtù del Teorema 4 risulta:

$$I[f, u^{(h)}, K] = I[f, u^{(h)}, K^0] = I_S[f, u^{(h)}, K^0],$$

e da questa, procedendo analogamente a come si è fatto a partire dalla (17), si deduce:

$$I_B[f, u, A] \geq I_S[f, u, A],$$

e quindi la prima uguaglianza delle (31) è provata.

Mostriamo ora la seconda uguaglianza espressa dalla (31).

Fissato $h > 0$ denotiamo con K^* e $\bar{K}^*$ i compatti introdotti nella dimostrazione del Teorema 3 e con n^* quell'intero per cui si ha $A_n \supset \bar{K}^*$ quando è $n > n^*$. A causa della convessità globale della f sussiste, per $n > n^*$, la disuguaglianza ([10], pag. 23):

$$I[f, u_n^{(h)}, K^*] \leq I[f, u_n, \bar{K}^*] \leq I[Af, u_n, n],$$

dalla quale, analogamente a come dalla (27) si è dedotta la (28), segue:

$$I[f, u^{(h)}, K^*] \leq I_S[f, u, A].$$

Da questa poi, che è vera per ogni compatto $K^* \subset A_h$, si deduce:

$$I[f, u^{(h)}, A_h] \leq I_S[f, u, A],$$

e quindi per $h \to 0$ si ha:

$$\overline{\lim_{h \to 0}} I[f, u^{(h)}, A_h] \leq I_S[f, u, A]. \tag{33}$$

Osserviamo ora che, essendo $u^{(h)} \in B_1$ localmente in A_h, per il Teorema 4 risulta:

$$I[f, u^{(h)}, A_h] = I_S[f, u^{(h)}, A_h],$$

dalla quale, per la semicontinuità inferiore del funzionale $I_S[f, u, A]$, tenendo presente che $u^{(h)}(x, y)$, $(x, y) \in A_h$, converge ad $u(x, y)$ localmente in A in senso forte (a) del N. 2), segue:

$$\underline{\lim}_{h \to 0} I[f, u^{(h)}, A_h] \geq I_S[f, u, A],$$

che assieme alla (33) ci mostra la seconda uguaglianza della (31).

6. Esaminiamo infine il caso che le condizioni sulla f siano di tipo intermedio tra le i), ii) e la convessità globale alla Jensen.

LEMMA 2. *Se f soddisfa le condizioni:*

i′) *sia convessa in senso lato, secondo Jensen, rispetto ad (u, p, q) per ogni $(x, y) \in A$;*

ii′) *per ogni compatto $K \subset A$ si abbia:*

$$|f(x, y, p, u, p, q) - f(\bar{x}, \bar{y}, u, p, q)| \leq \lambda_K(|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|) \cdot \Phi(x, y, u, p, q),$$

comunque si scelgano (x, y, u, p, q), $(\bar{x}, \bar{y}, u, p, q)$, $(x, y) \in K$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in K$, ove Φ è I_S-confrontabile con f e $\lambda_K(t)$, $t \in [0, +\infty]$, dipendente da K, è non negativa, continua, ammette per $t > 0$ la derivata prima e inoltre $\lambda_K(0) = 0$, $\dfrac{d\lambda_K(t)}{dt} \geq 0$;

ed $u(x, y)$ è localmente sommabile in A, risulta:

$$\overline{\lim}_{h \to 0} I[f, u^{(h)}, K] \leq I_S[f, u, A],$$

per ogni compatto $K \subset A$.

La dimostrazione è analoga a quella del Lemma 1; basta osservare che con i simboli adoperati nella dimostrazione del Lemma 1, a causa della i′), per $(x, y) \in K$, risulta:

$$f(x, y, u_n^{(h)}, u_{n,x}^{(h)}, u_{n,y}^{(h)}) \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} f(x, y, u_n(x+\varrho, y+\eta), u_{n,x}(x+\varrho, y+\eta), u_{n,y}(x+\varrho, y+\eta))\, d\varrho\, d\eta,$$

che può scriversi:

$$f(x, y, u_n^{(h)}, u_{n,x}^{(h)}, u_{n,y}^{(h)}) \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2h)^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} f(x+\varrho, y+\eta, u_n(x+\varrho, y+\eta), u_{n,x}(x+\varrho, y+\eta), u_{n,y}(x+\varrho, y+\eta))\, d\varrho\, d\eta + \Delta,$$

ove Δ è dato dalla:

$$\Delta = \frac{1}{(2h)^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} \{f(x, y, u_n(x+\varrho, y+\eta), u_{n,x}(x+\varrho, y+\eta), u_{n,y}(x+\varrho, y+\eta)) -$$

$$- f(x+\varrho, y+\eta, u_n(x+\varrho, y+\eta), u_{n,x}(x+\varrho, y+\eta), u_{n,y}(x+\varrho, y+\eta))\}\, d\varrho\, d\eta.$$

E poichè per la ii′) a cui soddisfa la f si ha per il modulo di Δ la maggiorazione:

$$|\Delta| \leq \frac{1}{(2h)^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} \lambda_K(|\varrho| + |\eta|) \cdot \Phi(x+\varrho, y+\eta, u_n(x+\varrho, y+\eta), u_{n,x}(x+\varrho, y+\eta)\, u_{n,y}(x+\varrho, y+\eta))\, d\varrho\, d\eta,$$

procedendo analogamente a come s'è fatto a partire dalla (2) segue l'asserto.

I ragionamenti usati per mostrare i Teoremi 1, 2, 3, adoperando il Lemma 2 invece che il Lemma 1, ci portano agli stessi risultati quando nei Teoremi 1, 2 le condizioni i), ii) si sostituiscono rispettivamente con le i′), ii′) e Φ sia (I_S, I)-confrontabile con f, e nel Teorema 3 la i) si sostituisce con la i′) e la iii) con la seguente:

iii′) comunque si scelgano (x, y, u, p, q), $(\bar{x}, \bar{y}, u, p, q)$, $(x, y) \in A$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$, si abbia:

$$|f(x, y, u, p, q) - f(\bar{x}, \bar{y}, u, p, q)| \leq \lambda(|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|) \cdot \Phi(x, y, u, p, q),$$

ove Φ è (I_S, I)-confrontabile con f e $\lambda(t)$, $t \in [0, +\infty]$, è non negativa, continua, ammette per $t > 0$ la derivata prima e inoltre $\lambda(0) = 0$, $\dfrac{d\lambda(t)}{dt} \geq 0$.

7. Diamo qualche esempio di funzione $f(x, y, u, p, q)$ che soddisfa le condizioni dei teoremi stabiliti, esempi che si ricavano da quelli dati in [12] al N. 5. Consideriamo le funzioni:

$$f = A(x, y) \cdot F(p, q),$$

con $A(x, y) \geq \alpha$, $\alpha \geq 0$, continua in A ed $F(p, q) \geq 0$ continua e convessa secondo Jensen;

$$f = a_1(x, y) \cdot p^{2h} + a_2(x, y) \cdot q^{2k} + a_3(x, y),$$

$$f = \{a_1(x, y) \cdot p^{2^k} + a_2(x, y) \cdot q^{2^k} + a_3(x, y]\}^{\frac{1}{2^k}},$$

con $a_i(x, y) \geq \alpha$, $\alpha \geq 0$, continua in A per $i = 1, 2, 3$, ed h, k interi positivi.

Quando è $\alpha > 0$ queste funzioni soddisfano le condizioni dei Teoremi 1, 2; se inoltre $A(x, y)$ ed $a_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3$, sono uniformemente continue in A anche quelle del Teorema 3.

Quando invece è $\alpha = 0$ soddisfano le condizioni dei Teoremi 1, 2, 3 (quelle del Teorema 3 se $A(x, y)$ ed $a_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3$, sono uniformemente continue in A) ma soltanto relativamente alle $u(x, y)$ sufficientemente regolari nei punti ove $A(x, y) = 0$, $a_i(x, y) = 0$, $i = 1, 2, 3$, appunto perchè in tal caso esistono delle Φ che siano (I_S, I)-confrontabili con f nel senso che la proprietà espressa nella definizione di (I_S, I)-confrontabilità sussiste per queste $u(x, y)$ e non per tutte (si tengano presenti le Osservazioni 1′, 1″, 2, 3). Gli esempi 7), 8), 9) 10) dati al N. 5 di [12] soddisfano le condizioni dei Teoremi 4, 5.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. BAIADA - G. TRIPICIANO, *Un integrale analogo a quello di Weierstrass nel Calcolo delle Variazioni in una variabile.* Rend. Circ. Mat. Palermo, vol. VI, 1957, pp. 263-270.

[2] E. DE GIORGI, *Sull'analiticità delle estremali degli integrali multipli.* Rend. Acc. Lincei, vol. XX, 1956, pp. 438-441.

[3] C. B. MORREY, *Functions of several variables and absolute continuity II.* Duke Math. Journal, vol. 6, 1940, pp. 187-215.

[4] C. B. MORREY, *Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics.* University of California pubblications in math., vol. I, 1943, pp. 1-130.

[5] J. SERRIN, *A new definition of the integral for non parametric problems in the calculus of variations.* Acta Math. vol. 102, 1959, pp. 23-32.

[6] J. SERRIN, *On the definition and properties of certain variational integrals.* Trans. Amer. Math. Soc. vol. 101, 1961, pp. 139-167.

[7] G. STAMPACCHIA, *Sopra una classe di funzioni di due variabili. Applicazioni agli integrali doppi del Calcolo delle Variazioni.* Giornale di matematiche di Battaglini, vol. 79, 1959-50, pp. 169-208.

[8] G. STAMPACCHIA, *Sistemi di equazioni di tipo ellittico a derivate parziali del primo ordine e proprietà delle estremali degli integrali multipli.* Ricerche di Matematica vol. I, 1952, pp. 200-226.

[9] G. STAMPACCHIA, *Problemi al contorno per equazioni di tipo ellittico a derivate parziali e questioni di calcolo delle variazioni connesse.* Annali di Mat. Pura e Appl. vol. XXXIII, 1952, pp. 211-238.

[10] C. VINTI, *L'integrale multiplo del Calcolo delle Variazioni e il problema dell'approssimazione delle funzioni.* Annali di Mat. Pura e Appl. vol. LII, 1960, pp. 11-26.

[11] C. VINTI, *L'integrale multiplo del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria come generalizzazione dell'approssimazione dell'area di una superficie.* Rend. Sem. Mat. Padova, vol. XXXI, 1961, pp. 266-280.

[12] C. VINTI, *Sopra una definizione dell'integrale multiplo del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria.* Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, vol XVII, 1963, pp. 81-98.