

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

VINICIO VILLANI

Fibrati vettoriali olomorfi su una varietà complessa q -completa

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 20, n° 1 (1966), p. 15-23

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1966_3_20_1_15_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FIBRATI VETTORIALI OLMORFI SU UNA VARIETA' COMPLESSA q -COMPLETA (*)

di VINICIO VILLANI

Introduzione.

Scopo della presente nota è la dimostrazione del

TEOREMA 1. *Ogni fibrato vettoriale olomorfo E su una varietà complessa q -completa X , è a sua volta una varietà q -completa.*

Ricordiamo che una varietà complessa X si dice q -completa se esiste su X una funzione $\varphi(x)$ a valori reali, differenziabile di classe C^∞ , fortemente q -pseudoconvessa in ogni punto di X , e tale che gli insiemi $B_c = \{x \in X; \varphi(x) < c\}$ sono relativamente compatti in X , per ogni $c \in \mathbb{R}$.

La funzione $\varphi(x)$ si dirà (*debolmente*) q -pseudoconvessa nel punto $x_0 \in X$ se, fissato un sistema di coordinate locali olomorfe z_1, \dots, z_n su un intorno di x_0 , la forma di Levi

$$\mathcal{L}(\varphi, x) = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} \right)_x dz_\alpha d\bar{z}_\beta$$

ha almeno $n - q$ autovalori ≥ 0 nel punto x_0 ; $\varphi(x)$ si dirà poi *fortemente q -pseudoconvessa* ⁽¹⁾ in x_0 , se tali autovalori sono tutti > 0 nel punto x_0 .

Pervenuto in Redazione il 10 Agosto 1965.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

⁽¹⁾ Seguendo la letteratura più recente, in questo lavoro si è usata una terminologia diversa da quella abituale; precisamente le funzioni (debolmente o fortemente) q -pseudoconvesse secondo la nostra definizione sono le funzioni che precedentemente (ad es. in [1]) venivano dette $(q + 1)$ -pseudoconvesse. Di conseguenza le varietà q -complete secondo la nostra definizione sono le varietà che precedentemente venivano dette $(q + 1)$ -complete. Questa modifica appare giustificata da una maggiore semplicità di talune formule.

Le varietà 0-complete sono le varietà di Stein (cfr. [2]). Quindi il nostro teorema 1 estende al caso di q arbitrario il teorema 7 di [2]: *Ogni fibrato vettoriale olomorfo E su una varietà di Stein X , è a sua volta una varietà di Stein*⁽²⁾.

La dimostrazione del nostro teorema 1 ricalca quella del teorema 7 di [2]; tuttavia l'estensione non è del tutto banale, in quanto occorre superare delle difficoltà tecniche, derivanti dal fatto che per $q \geq 1$ la somma di due funzioni (fortemente o debolmente) q -pseudoconvesse non è in generale una funzione debolmente (e tanto meno fortemente) q -pseudoconvessa.

Accanto alle varietà q -complete, Andreotti e Grauert hanno introdotto in [1] le nozioni di *varietà fortemente q -pseudoconvessa* e di *varietà fortemente q -pseudoconcava*: la varietà complessa X si dirà fortemente q -pseudoconvessa (rispett. fortemente q -pseudoconcava)⁽³⁾ se esiste su X una funzione $\varphi(x)$ a valori reali (rispett. a valori reali > 0), differenziabile di classe C^∞ , fortemente q -pseudoconvessa al di fuori di un opportuno compatto K di X , e tale che: gli insiemi $B_c = \{x \in X; \varphi(x) < c\}$ sono relativamente compatti in X per ogni c reale (rispett.: gli insiemi $B_c = \{x \in X; \varphi(x) > c\}$ sono relativamente compatti in X per ogni c reale > 0). Sotto molti aspetti le varietà fortemente q -pseudoconvesse e fortemente q -pseudoconcave sono simili alle varietà q -complete (del resto le varietà q -complete sono particolari varietà fortemente q -pseudoconvesse); ci si potrebbe quindi aspettare che un teorema analogo al teorema 1 valga anche per varietà fortemente q -pseudoconvesse e fortemente q -pseudoconcave. Con due semplici esempi (precisamente con delle fibrazioni vettoriali banali) faremo vedere che così non è.

1. Sia X una varietà complessa q -completa, di dimensione complessa n ; esiste dunque su X una funzione $p(x)$ a valori reali, differenziabile di classe C^∞ , fortemente q -pseudoconvessa in ogni punto di X , e tale che per ogni $c \in \mathbf{R}$ l'insieme $B_c = \{x \in X; p(x) < c\}$ è relativamente compatto in X . Poichè $p(x)$ assume un valore minimo μ su X , modificando se necessario la funzione $p(x)$ con l'aggiunta di una opportuna costante, non è restrittivo supporre che sia $\mu \geq 0$; nel seguito supporremo tacitamente soddisfatta anche questa ulteriore condizione.

Supponiamo ora che sulla varietà X sia data una forma hermitiana \mathcal{H} di classe C^∞ , definita negativa in ogni punto di X .

⁽²⁾ Sempre riguardo alle varietà di Stein sussiste anzi un risultato più generale, dovuto a Matsushima e Morimoto (Bull. Soc. Math. de France 88 (1960)): *Ogni fibrato olomorfo con gruppo strutturale connesso la cui base e la cui fibra sono varietà di Stein, è a sua volta una varietà di Stein.*

⁽³⁾ Quanto alla terminologia usata in questo lavoro, si veda la nota (1).

LEMMA 1. Si può trovare una funzione $\psi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, differenziabile di classe C^∞ , con $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \psi(\lambda) = +\infty$, tale che, posto $u(x) = \psi(p(x))$, la forma hermitiana $\mathcal{L}(u, x) + \mathcal{H}(x)$ abbia almeno $n - q$ autovalori > 0 in ogni punto $x \in X$.

DIMOSTRAZIONE: In primo luogo ricordiamo che condizione necessaria e sufficiente affinché una forma hermitiana $\mathcal{G}(x)$ (di classe C^∞) sulla varietà X abbia almeno $n - q$ autovalori > 0 (oppure ≥ 0) in un punto $x \in X$ è che esista una sottovarietà complessa $\Delta_x^{n-q} \ni x$, di dimensione $n - q$, regolarmente immersa in un opportuno intorno aperto di x , e tale che la restrizione (4) $\mathcal{G}(x)|_{\Delta_x^{n-q}}$ sia definita > 0 (oppure ≥ 0) nel punto x .

Con questa premessa, dimostriamo il lemma 1. A partire dalla funzione $p(x)$ che dà la q completezza di X , poniamo

$$F_j = \{x \in X; j \leq p(x) \leq j + 1\} \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Si ha evidentemente $\bigcup_j F_j = X$, e ciascun F_j è compatto. Per ogni j esiste un ricoprimento finito $\{W_\alpha^{(j)}\}$ di F_j , mediante aperti di X , godente delle due proprietà seguenti:

- (I) Ciascun $W_\alpha^{(j)}$ è una carta locale olomorfa;
- (II) Indicato con D^{n-q} il poliecilindro unitario di \mathbf{C}^{n-q} , ossia $D^{n-q} = \{(\xi_1, \dots, \xi_{n-q}) \in \mathbf{C}^{n-q}; |\xi_j| < 1, j = 1, \dots, n - q\}$, esiste un'applicazione differenziabile $\tau: W_\alpha^{(j)} \times D^{n-q} \rightarrow X$ tale che $\tau(x, \{0\}) = x$ per ogni $x \in W_\alpha^{(j)}$, e tale inoltre che per ogni fissato $x \in W_\alpha^{(j)}$ l'applicazione $\tau_x = \tau|_{x \times D^{n-q}}$ è una applicazione biolomorfa di D^{n-q} su una sottovarietà complessa Δ_x^{n-q} , regolarmente immersa in un intorno aperto di x , con la proprietà che la forma di Levi $\mathcal{L}(p)|_{\Delta_x^{n-q}}$ sia definita > 0 nel punto x .

La possibilità di scegliere un ricoprimento $\{W_\alpha^{(j)}\}$ godente di queste due proprietà, segue dalla compattezza di F_j , e dal fatto che $p(x)$ è una funzione differenziabile, fortemente q -pseudoconvessa.

(4) La restrizione di una forma hermitiana $\sum_{\alpha, \beta=1}^n \gamma_{\alpha\beta} dz_\alpha d\bar{z}_\beta$ ad una sottovarietà Δ^{n-q} regolarmente immersa in X , è la forma hermitiana su Δ^{n-q} che si ottiene dalla forma data, imponendo al vettore (dz_1, \dots, dz_n) di appartenere allo spazio $(n - q)$ -dimensionale dei vettori tangenti a Δ^{n-q} . Senza ledere la generalità, possiamo supporre che in un conveniente intorno U_0 di x siano state scelte coordinate locali olomorfe z_1, \dots, z_n tali che $\Delta^{n-q} = \{(z_1, \dots, z_n) \in U_0; z_{n-q+1} = \dots = z_n = 0\}$. La restrizione della forma $\sum_{\alpha, \beta=1}^n \gamma_{\alpha\beta} dz_\alpha d\bar{z}_\beta$ è allora la forma in $n - q$ variabili: $\sum_{\alpha, \beta=1}^{n-q} \gamma_{\alpha\beta} dz_\alpha d\bar{z}_\beta$.

Sia ora $\{Z_\alpha^{(j)}\}$ un nuovo ricoprimento di F_j , tale che $Z_\alpha^{(j)} \subset\subset W_\alpha^{(j)}$ (per ciascun α). Esiste una costante positiva opportunamente grande $c_\alpha^{(j)}$, tale che per ogni $x \in Z_\alpha^{(j)}$ la forma $c_\alpha^{(j)} \mathcal{L}(p)|_{\Delta_x^{n-q}} + \mathcal{H}|_{\Delta_x^{n-q}}$ sia definita > 0 su Δ_x^{n-q} nel punto x (si sfrutti la continuità degli autovalori di $\mathcal{L}(p)|_{\Delta_x^{n-q}}$ al variare di x in $\overline{Z_\alpha^{(j)}}$, tenuto conto anche delle proprietà (I) e (II) imposte al ricoprimento $\{W_\alpha^{(j)}\}$).

Posto $c_j = \max_\alpha c_\alpha^{(j)}$, ne segue che per ogni $h \geq c_j$ la forma $(h \mathcal{L}(p) + \mathcal{H})|_{\Delta_x^{n-q}}$ è definita > 0 su Δ_x^{n-q} nel punto x , qualunque sia $x \in F_j$.

Sia ora $h(t)$ una funzione a valori reali, di classe C^∞ , definita per $-\infty < t < +\infty$, tale che:

$$\begin{aligned} h(t) &= 0 & \text{per} & \quad t \leq -1 \\ h(t) &> c_j & \text{per} & \quad j \leq t \leq j+1 & \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \\ h'(t) &> 0 & \text{per} & \quad t > -1. \end{aligned}$$

Definiamo la funzione $\psi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, ponendo

$$\psi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} h(t) dt,$$

e sia $u(x) = \psi(p(x))$ ($x \in X$). Si calcola (per ogni punto $x_0 \in X$, e per dz_1, \dots, dz_n arbitrari):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u, x_0) &= \psi'(p) \mathcal{L}(p, x_0) + \psi''(p) |(dp)_{x_0}|^2 = \\ &= h(p(x_0)) \mathcal{L}(p, x_0) + (h'(p))_{x_0} |(dp)_{x_0}|^2 \geq \\ &\geq h(p(x_0)) \mathcal{L}(p, x_0); \end{aligned}$$

considerando ora soltanto i vettori (dz_1, \dots, dz_n) tangenti a $\Delta_{x_0}^{n-q}$, e ricordando che $\mathcal{L}(p, x_0)|_{\Delta_{x_0}^{n-q}}$ è una forma definita > 0 , ne segue che anche $\mathcal{L}(u, x_0)|_{\Delta_{x_0}^{n-q}}$ è definita > 0 in x_0 . Inoltre la scelta della funzione h prova che è definita > 0 in x_0 altresì la forma $(\mathcal{L}(u) + \mathcal{H})|_{\Delta_{x_0}^{n-q}}$; ciò prova il lemma 1.

Segnaliamo due conseguenze del lemma 1:

(1). Oltre alla funzione $p(x)$, anche la funzione $u(x)$ è atta a definire la q -completezza di X ; infatti in ogni punto $x \in X$ la forma di Levi

$\mathcal{L}(u)|_{\Delta_x^{n-q}}$ è definita > 0 ; quindi $\mathcal{L}(u)$ ha almeno $n - q$ autovalori > 0 in ogni punto di X , ossia u è fortemente q -pseudoconvessa. Inoltre dall'ipotesi $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \psi(\lambda) = +\infty$, segue che gli insiemi $\tilde{B}_c = \{x \in X; u(x) < c\}$ sono relativamente compatti in X , per ogni c reale.

(2). Sulla varietà X sia dato un ricoprimento localmente finito $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ con carte locali olomorfe; sia poi $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ un nuovo ricoprimento di X , tale che ciascun V_i sia relativamente compatto in U_i . Per ogni i , sia $\mathcal{H}_i = \sum_{\mu, \nu=1}^n h_{\mu\nu}^{(i)} dz_\mu d\bar{z}_\nu$ una forma hermitiana di classe C^∞ su U_i (sulla cui segnatura non facciamo alcuna ipotesi). Su X esiste chiaramente una forma hermitiana globale \mathcal{H} definita < 0 , con la proprietà che su ciascun V_i si abbia $\mathcal{H} < \mathcal{H}_i$. Sia $u(x)$ la funzione costruita nel lemma 1 in corrispondenza della forma \mathcal{H} ; da quanto precede risulta che su ciascun V_i la forma hermitiana $\mathcal{L}(u, x) + \mathcal{H}_i(x)$ ha almeno $n - q$ autovalori > 0 , e precisamente in ciascun punto $x \in V_i$ la forma $(\mathcal{L}(u, x) + \mathcal{H}_i(x))|_{\Delta_x^{n-q}}$ è definita > 0 .

Se poi su ciascun U_i , in luogo di una sola forma \mathcal{H}_i si considera una totalità di forme $\mathcal{H}_i(\xi)$, dipendenti con continuità da un numero finito di parametri ξ , varianti su un compatto, si può trovare ancora una forma globale \mathcal{H} definita < 0 su X , la quale su ciascun V_i minora tutte le forme $\mathcal{H}_i(\xi)$, onde ragionando come sopra si vede che tutte le forme hermitiane $\mathcal{L}(u, x) + \mathcal{H}_i(\xi)(x)$ hanno almeno $n - q$ autovalori > 0 in ogni punto di V_i .

2. Sia ora $\pi: E \rightarrow X$ un fibrato vettoriale olomorfo, con fibra \mathbf{C}^r , sulla varietà X . Su un opportuno ricoprimento $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ di X , E può essere rappresentato mediante un \mathfrak{V} -cociclo (olomorfo):

$$g_{ij}: V_i \cap V_j \rightarrow Gl(r, \mathbf{C}).$$

Per il seguito sarà utile supporre che esista un ricoprimento localmente finito $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ di X , mediante carte locali olomorfe, in modo tale che ciascun V_i sia contenuto come insieme relativamente compatto in U_i , e che il cociclo $\{g_{ij}\}$ sia l'immagine di un cociclo $g_{ij}^0: U_i \cap U_j \rightarrow Gl(r, \mathbf{C})$ nell'omomorfismo naturale di restrizione, relativo al passaggio da $\{U_i\}$ a $\{V_i\}$. Queste ipotesi chiaramente non sono restrittive.

Siano

$$\xi^{(i)} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(i)} \\ \vdots \\ \xi_r^{(i)} \end{pmatrix}$$

le coordinate sulle fibre, nella carta V_i . Su $V_i \cap V_j$ si ha dunque

$$\xi^{(i)} = g_{ij} \xi^{(j)}.$$

Fissiamo poi una metrica hermitiana (definita > 0) sulle fibre di E ; in termini del ricoprimento \mathfrak{U} si tratta di assegnare in corrispondenza ad ogni i , un'applicazione h_i , differenziabile di classe C^∞ , dei punti di V_i nello spazio delle matrici hermitiane definite positive di ordine r , con la proprietà che su $V_i \cap V_j$ si abbia $h_j = {}^t \bar{g}_{ij} h_i g_{ij}$.

A partire da questa metrica h , introduciamo la funzione globale Φ_h su E , definita localmente su $\pi^{-1}(V_i)$ da

$$\Phi_h(x, \xi^{(i)}) = {}^t \bar{\xi}^{(i)} h_i(x) \xi^{(i)}.$$

Su ciascun V_i consideriamo poi la matrice di ordine r , $\Theta_i = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \bar{\partial}(h_i^{-1} \partial h_i)$, i cui elementi sono forme alternanti nelle variabili dz_1, \dots, dz_n . Consideriamo infine su $\pi^{-1}(V_i)$ la forma alternante ${}^t \bar{\xi}^{(i)} h_i \Theta_i \xi^{(i)}$, e sia F_{h_i} la corrispondente forma hermitiana su $\pi^{-1}(V_i)$, nelle variabili dz_1, \dots, dz_n . Si verifica subito che al variare dell'indice i , le forme F_{h_i} danno luogo ad una forma hermitiana globale F_h su tutta la varietà E .

LEMMA 2. *In ogni punto $p_0 = (x_0, \xi^{(i)}) \in E$ si ha :*

$$\mathcal{L}(\Phi_h, p_0) = F_h(x_0, \xi^{(i)}) + S_h(x_0, \xi^{(i)}),$$

ove $S_h(x_0, \xi^{(i)})$ è una forma hermitiana ≥ 0 su E , la quale inoltre è definita > 0 nelle direzioni tangenti alle fibre di E .

DIMOSTRAZIONE: Basta evidentemente provare la tesi in un sistema di coordinate convenientemente scelto in corrispondenza a ciascun punto $p_0 \in E$. Seguendo il ragionamento di [1], pag. 257, possiamo fissare le coordinate $\xi^{(i)}$ sulle fibre, in modo tale che si abbia $(\partial h)_{x_0} = 0$; risulta allora :

$$S_h(x_0, \xi^{(i)}) = {}^t(d \bar{\xi}^{(i)}) h_i(x_0) d \xi^{(i)};$$

ciò prova il lemma 2.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1: Osserviamo preliminarmente che, data una metrica hermitiana $\{h_i\}$ sulle fibre di E , e indicata con u una funzione su X , a valori reali, differenziabile di classe C^∞ , anche il sistema $\{k_i\} = \{e^u h_i\}$ è una metrica hermitiana sulle fibre di E .

Sfruttando l'arbitrarietà di questa funzione u su X , e conseguentemente della metrica hermitiana $k = \{k_i\}$ sulle fibre di E , proveremo ora che per una scelta conveniente di u la varietà E è q -completa relativamente alla funzione

$$\varphi = u \circ \pi + \Phi_k.$$

Calcoliamo in primo luogo :

$$F_k(x, \xi^{(i)}) = e^u \{ \mathcal{L}(u) \bar{t}_{\xi^{(i)}} h_i \xi^{(i)} + F_h(x, \xi^{(i)}) \}.$$

Detta E_0 la sezione nulla del fibrato E (E_0 definita localmente su V_i da $\xi^{(i)} = 0$), facciamo vedere ora che è possibile scegliere la funzione u in modo che la forma hermitiana F_k abbia almeno $n - q$ autovalori > 0 in ogni punto di $E - E_0$ (ed almeno $n - q$ autovalori ≥ 0 in ogni punto di E , inclusi i punti di E_0). In virtù dell'espressione calcolata per F_k , basterà provare a tal fine che è possibile scegliere la funzione u in modo che su ciascun V_i la forma hermitiana $\mathcal{L}(u) \bar{t}_{\xi^{(i)}} h_i \xi^{(i)} + F_h(x, \xi^{(i)})$ abbia almeno $n - q$ autovalori > 0 quando il vettore $\xi^{(i)}$ descrive l'insieme compatto $\bar{t}_{\xi^{(i)}} \xi^{(i)} = 1$. Con tale limitazione per $\xi^{(i)}$, la funzione $\bar{t}_{\xi^{(i)}} h_i \xi^{(i)}$ è su V_i maggiore di una opportuna costante > 0 ; si può quindi applicare il lemma 1 (e più precisamente la sua conseguenza (2)) alle forme hermitiane $\mathcal{G}_i(\xi) = (\bar{t}_{\xi^{(i)}} h_i \xi^{(i)})^{-1} F_h(x, \xi^{(i)})$; ne segue l'esistenza di una funzione u su X , godente della proprietà richiesta. Più esattamente dalla dimostrazione del lemma 1 risulta che, fissato comunque un punto $x_0 \in X$, esiste una sottovarietà $\Delta_{x_0}^{n-q}$ regolarmente immersa in X , tale che :

- (a) $\mathcal{L}(u, x)|_{\Delta_{x_0}^{n-q}} > 0$ nel punto $x_0 \in X$;
- (b) $F_k(x, \xi^{(i)})|_{\pi^{-1}(\Delta_{x_0}^{n-q})} \geq 0$ in ogni punto $p = (x_0, \xi^{(i)}) \in E$;
- (c) $F_k(x, \xi^{(i)})|_{\pi^{-1}(\Delta_{x_0}^{n-q})} > 0$ in ogni punto $p = (x_0, \xi^{(i)}) \in E - E_0$ e per tutti i vettori $(dz_1, \dots, dz_n, d\xi_1^{(i)}, \dots, d\xi_r^{(i)})$ non tangenti alle fibre di E .

Con questa scelta di u , la funzione $\varphi = u \circ \pi + \Phi_k$ è fortemente q -pseudoconvessa su E ; precisamente si ha $\mathcal{L}(\varphi, p_0)|_{\pi^{-1}(\Delta_{x_0}^{n-q})} > 0$ in ogni punto $p_0 = (x_0, \xi^{(i)}) \in E$; per verificarlo, basta ricorrere al lemma 2, tenuto conto anche delle proprietà (a), (b), (c) stabilite or ora; si noti che questa conclusione è possibile perchè in ogni punto p_0 le forme hermitiane $\mathcal{L}(u \circ \pi)$ ed $\mathcal{L}(\Phi_k)$ sono entrambe ≥ 0 su una medesima varietà $(n + r - q)$ -dimensionale $\pi^{-1}(\Delta_{x_0}^{n-q})$, e non sono simultaneamente nulle su alcun vettore tangente a tale varietà, escluso il vettore nullo.

Per terminare la dimostrazione del teorema 1 basta osservare a questo punto che gli insiemi $\{p \in E; \varphi(p) < c\}$ sono relativamente compatti in E per ogni $c \in \mathbb{R}$, e ciò è evidente dalla costruzione della funzione φ .

COROLLARIO. *Sia X un'arbitraria varietà complessa di dimensione complessa n ; ogni fibrato vettoriale olomorfo $\pi: E \rightarrow X$ è una varietà n -completa.*

DIMOSTRAZIONE: Basta ricordare che ogni varietà complessa X di dimensione n è n completa (cfr. [4]), dopodichè il corollario è conseguenza immediata del teorema 1.

3. Diamo ora un esempio di varietà fortemente q -pseudoconvessa (ma non q -completa) V ed un esempio di varietà fortemente q -pseudoconcava W , tali che le fibrazioni banali $V \times \mathbb{C}^r$, $W \times \mathbb{C}^r$ ($r \geq 1$) non siano più varietà fortemente q -pseudoconvesse, rispettivamente fortemente q -pseudoconcave. Ricordiamo preliminarmente la seguente proprietà coomologica delle varietà fortemente q -pseudoconvesse e fortemente q -pseudoconcave (cfr. [1], pag. 249):

PROPOSIZIONE 1: *Sia X una varietà complessa. Si ha*

$$\dim_{\mathbf{C}} H^j(X, \mathcal{F}) < +\infty$$

per ogni fascio \mathcal{F} coerente su X , e per i seguenti valori di j :

$j > q$ se X è fortemente q -pseudoconvessa;

$j < \text{prof}(\mathcal{F}) - q - 1$ se X è fortemente q -pseudoconcava.

ESEMPIO 1. Sia V^n una varietà kähleriana compatta, di dimensione complessa $n \geq 1$, e di genere geometrico > 0 (ossia, indicato con Ω^n il fascio dei germi di forme differenziali olomorfe di grado n su V^n , si abbia $\dim_{\mathbf{C}} H^0(V^n, \Omega^n) > 0$). Ad esempio si può prendere come V^n un toro complesso di dimensione n .

V^n , in quanto varietà complessa compatta, è fortemente 0-pseudoconvessa. La fibrazione banale $E = V^n \times \mathbb{C}^r$ ($r \geq 1$) non è fortemente $(n-1)$ -pseudoconvessa, e di conseguenza non è neppure fortemente q -pseudoconvessa per alcun valore $q \leq n-1$; in particolare E non è fortemente 0-pseudoconvessa ⁽⁵⁾.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo su E il fascio strutturale \mathcal{O}_E . Per provare la nostra asserzione, tenuto conto della proposizione 1, basta far vedere che $\dim_{\mathbf{C}} H^n(E, \mathcal{O}_E) = +\infty$; ed inverso

$$\dim_{\mathbf{C}} H^n(E, \mathcal{O}_E) = \dim_{\mathbf{C}} H^n(V^n, \mathcal{O}_{V^n}) \cdot \dim_{\mathbf{C}} H^0(\mathbb{C}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^r})$$

⁽⁵⁾ Invece la varietà E è fortemente n -pseudoconvessa, anzi addirittura n -completa, in virtù del corollario al teorema 1.

(conseguenza della formula di Künneth-Grothendieck, cfr. ad es. [3], pag. 211). Ora $\dim_{\mathbf{C}} H^0(\mathbf{C}^r, \bar{O}_{\mathbf{C}^r}) = +\infty$, e d'altra parte, in virtù della kählerianità di V^n si ha $\dim_{\mathbf{C}} H^n(V^n, \bar{O}_{V^n}) = \dim_{\mathbf{C}} H^0(V^n, \Omega^n) > 0$.

ESEMPIO 2. Sia W^n una arbitraria varietà complessa fortemente 0-pseudoconcava, di dimensione complessa $n \geq 1$ (sono fortemente 0-pseudoconcave ad es. tutte le varietà complesse compatte; un esempio di varietà fortemente 0-pseudoconcava non compatta è dato da \mathbf{C}^1 : una funzione che dà la 0-pseudoconcavità si ottiene raccordando differenziabilmente la funzione $(z\bar{z})^{-1}$, definita al di fuori dell'origine di \mathbf{C}^1 , con un'arbitraria funzione differenziabile, definita su un opportuno intorno dell'origine stessa).

La fibrazione banale $E = W^n \times \mathbf{C}^r$ ($r \geq 1$) non è fortemente $(n+r-2)$ -pseudoconcava, e di conseguenza non è neppure fortemente q -pseudoconcava per alcun valore $q \leq n+r-2$; in particolare E non è fortemente 0-pseudoconcava.

DIMOSTRAZIONE: Ragionando esattamente come nell'esempio 1, ed osservando che $\text{prof } \bar{O}_E = n+r$, basta far vedere che $\dim_{\mathbf{C}} H^0(E, \bar{O}_E) = +\infty$. Ed invero, qualunque sia W^n , lo spazio vettoriale $H^0(W^n, \bar{O}_{W^n})$ contiene le costanti \mathbf{C} , onde $\dim_{\mathbf{C}} H^0(W^n, \bar{O}_{W^n}) > 0$; inoltre $\dim_{\mathbf{C}} H^0(\mathbf{C}^r, \bar{O}_{\mathbf{C}^r}) = +\infty$, onde (sempre per la formula di Künneth-Grothendieck) $\dim_{\mathbf{C}} H^0(E, \bar{O}_E) = +\infty$, come volevasi dimostrare.

Università di Pisa

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. ANDREOTTI-H. GRAUERT: *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*. Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 193-259.
- [2] A. ANDREOTTI-R. NARASIMHAN: *Oka's Hefungslemma and the Levi Problem for complex spaces*. Trans. Am. Math. Soc **111** (1964), 345-366.
- [3] J. FRENKEL: *Cohomologie non abélienne et espaces fibrés*. Bull. Soc. Math. France **85** (1957), 135-220.
- [4] V. VILLANI: *Su alcune proprietà coomologiche dei fasci coerenti su uno spazio complesso*. Rend. Sem. Mat. Università di Padova **35** (1964), 47-55.