ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIUSEPPE GEMIGNANI

Gruppi e cogruppi in una categoria

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 20, nº 1 (1966), p. 139-171

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1966_3_20_1_139_0>

GRUPPI E COGRUPPI IN UNA CATEGORIA

di GIUSEPPE GEMIGNANI

In molte questioni di algebra omologica e di geometria algebrica, allo scopo di conoscere le proprietà di una categoria $\mathfrak{C}$, si studiano le proprietà della categoria $\mathfrak{C}^*$ dei funtori rappresentabili covarianti definiti in $\mathfrak{C}$ ed a valori nella categoria $\mathbb{E}$ degli insiemi. Tale $\mathfrak{C}^*$ è equivalente alla categoria duale di $\mathfrak{C}$ (cfr. Grothendieck [17]).

Altre volte conviene studiare proprietà della categoria ${}^*\mathfrak{C}$ dei funtori rappresentabili contravarianti.

Sono principalmente le *proprietà universali* che ricevono nell'ambiente $\mathfrak{C}^*$ o ${}^*\mathfrak{C}$ una elegante interpretazione; la additività di una categoria, l'esistenza del nucleo o del conucleo di un morfismo, l'esistenza del limite induttivo o proiettivo di un sistema diretto o inverso in $\mathfrak{C}$ possono essere espresse come proprietà di oggetti o di morfismi di $\mathfrak{C}^*$ o di ${}^*\mathfrak{C}$.

P. Cartier ha mostrato [6] come lo studio dei gruppi algebrici affini su un corpo k sia essenzialmente lo studio dei funtori rappresentabili definiti nella categoria $\mathbb{R}$ delle k-algebre commutative dotate di identità ed a valori nella categoria dei gruppi. Le proprietà della categoria $\mathbb{R}$ che intervengono in modo essenziale nella trattazione sono:

a) l'esistenza in $\mathbb{R}$ di un *oggetto iniziale* (il corpo k),

b) l'esistenza, per ogni coppia di oggetti di $\mathbb{R}$, di un *prodotto inverso* (il loro prodotto tensoriale).

La teoria dei gruppi algebrici e, conseguentemente, anche la teoria dei gruppi formali si collegano perciò allo studio delle strutture in una categoria, studio iniziato da B. Eckmann e P. J. Hilton in [15].

Pervenuto alla Redazione il 22 Novembre 1965.

Questo lavoro è stato eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca per la Matematica n. 35 del C.N.R., nell'anno 1965/66 ed è stato parzialmente finanziato mediante una borsa all'estero della N.A.T.O..

Essi mostrano come possa svolgersi una teoria generale delle strutture gruppali partendo da una qualunque categoria $\mathfrak{C}$ dotata di oggetto nullo (cioè oggetto iniziale e finale simultaneamente) e nella quale ogni coppia di oggetti possieda prodotto diretto.

Scopo del presente lavoro è quello di presentare una parte della teoria dei gruppi su una categoria $\mathfrak{C}$ (o $\mathfrak{C}$-gruppi) scomponendo la teoria nei suoi elementi essenziali. I nn. 1 e 2 sono introduttivi; nel n. 1 si studiano le proprietà elementari della categoria dei funtori covarianti e contravarianti definiti in $\mathfrak{C}$ ed a valori in $\mathfrak{E}$; nel n. 2 si descrivono la antiequivalenza (dualità) tra $\mathfrak{C}$ e la categoria $\mathfrak{C}^*$ e l'equivalenza tra $\mathfrak{C}$ e $^*\mathfrak{C}$.

Nel n. 3 si studiano le *I-categorie* (denominazione introdotta da B. Eckmann) cioè le categorie dotate di oggetto iniziale, e di prodotto inverso per ogni coppia di oggetti; si mostra altresì che le I-categorie sono caratterizzate dalla presenza di una *legge di composizione interna* associativa, commutativa e unitaria e di una *struttura moltiplicativa* associativa, commutativa e unitaria; sempre nel n. 3 si studiano le *D-categorie,* cioè le categorie possedenti oggetto finale, e prodotto inverso per ogni coppia di oggetti, o (*equivalentemente*) possedenti una legge di composizione interna associativa, commutativa e unitaria e una *struttura comoltiplicativa* coassociativa, cocommutativa e unitaria.

Nel n. 4 si danno numerosi esempi di I-categorie e di D-categorie.

Nel n. 5 si introduce la nozione di *gruppo su una I-categoria* $\mathfrak{C}$ (o $\mathfrak{C}$-gruppo) e di cogruppo su una D-categoria $\overline{\mathfrak{C}}$ (o $\overline{\mathfrak{C}}$ cogruppo) e si studiano gli *iperoggetti* di $\mathfrak{C}$ (o $\overline{\mathfrak{C}}$) cioè gli oggetti rappresentanti un $\mathfrak{C}$-gruppo (o $\overline{\mathfrak{C}}$ cogruppo).

Nel n. 6 si caratterizzano gli iperoggetti di $\mathfrak{C}$ rappresentanti $\mathfrak{C}$-gruppi commutativi mostrando che essi costituiscono una categoria additiva; simili considerazioni si svolgouo sugli iperoggetti di $\overline{\mathfrak{C}}$ che rappresentano $\overline{\mathfrak{C}}$-cogruppi cocommutativi; infine si caratterizzano le categorie additive.

Nel n. 7 si dà inizio ad un metodo di studio di una categoria addittiva $\mathfrak{C}$ attingendo informazione dalle categorie dei funtori additivi covarianti e contravarianti di $\mathfrak{C}$ nella categoria $\mathfrak{A}$ dei gruppi abeliani, in analogia a quanto fatto nei nn. precedenti con le categorie dei funtori di $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{E}$; dopo aver provato che tali categorie sono abeliane (risultato questo già trovato da P. Gabriel) si dà una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del nucleo e del conucleo di un morfismo, condizione espressa nell'ambito delle categorie dei funtori addittivi (covarianti e contravarianti) di $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{A}$.

Vengono in tal modo unificate tutte le teorie nelle quali è stata in qualche modo adoperata la parola gruppo; in particolare:

i gruppi algebrici affini,

i gruppi analitici (con i vari significati che ha avuto questo aggettivo),

i gruppi formali di J. Dieudonné,

i gruppi aritmetici,

i gruppi topologici,

i gruppi di Lie,

i gruppi di omotopia.

1. Sia $\mathfrak{C}$ una categoria. Seguendo l'uso corrente scriveremo $A \in \mathfrak{C}$ per indicare che A è un oggetto di $\mathfrak{C}$; l'insieme dei morfismi di A in B verrà indicato con $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ o semplicemente con $\mathrm{Hom}(A, B)$ quando ciò non dia luogo ad equivoco.

Per ogni $A \in \mathfrak{C}$ indicheremo con ι_A il *morfismo identico* di A in sè, cioè il morfismo tale che $\iota_A \circ f = f$ e $g \circ \iota_A = g$ ogniqualvolta i morfismi f e g diano significato ai primi membri.

Indicheremo sempre con $\mathfrak{E}$ la categoria degli insiemi, cioè la categoria i cui oggetti sono gli insiemi appartenenti ad un universo che supponiamo fissato una volta per tutte, ed i cui morfismi sono le applicazioni.

Siano $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ categorie: indicheremo con $\mathfrak{Hom}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$ la *categoria dei funtori covarianti* di $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{D}$, cioè la categoria $\mathfrak{H}$ tale che:

a) gli oggetti di $\mathfrak{H}$ sono i funtori covarianti di $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{D}$,

b) se $F, G \in \mathfrak{H}$ $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{H}}(F, G)$ è l'insieme dei *morfismi funtoriali* di F in G; cioè $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{H}}(F, G)$ significa che $\varphi = (\varphi_X)_{X \in \mathfrak{C}}$ è una collezione di morfismi di $\mathfrak{D}$, con $\varphi_X \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(FX, GX)$ tale che, quali che siano $X_1, X_2 \in \mathfrak{C}$ e $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X_1, X_2)$ sia:

$$(Gf) \circ \varphi_{X_1} = \varphi_{X_2} \circ (Ff).$$

c) se $F, G, H \in \mathfrak{Hom}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{H}}(F, G)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{H}}(G, H)$, allora:

$$(\psi \circ \varphi)_X = \psi_X \circ \varphi_X \quad \text{per ogni} \quad X \in \mathfrak{C}.$$

Indicheremo poi con $\mathfrak{Contr}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$ la *categoria dei funtori contravarianti* di $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{D}$, cioè la categoria $\mathfrak{K}$ tale che:

a) gli oggetti di $\mathfrak{K}$ sono i funtori contravarianti di $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{D}$,

b) $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{K}}(F, G)$ significa $\varphi = (\varphi_X)_{X \in \mathfrak{C}}$ con $\varphi_X \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(FX, GX)$ e tale che,

$$(Gf) \circ \varphi_{X_2} = \varphi_{X_1} \circ (Ff)$$

quali che siano $X_1, X_2 \in \mathfrak{C}$ e $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X_1, X_2)$.

c) $(\psi \circ \varphi)_X = \psi_X \circ \varphi_X$ ogni volta che ciò abbia significato.

Si intende che per considerare le categorie $\mathfrak{Hom}$ e $\mathfrak{Contr}$ occorre, in generale, un universo più vasto.

Sia $\mathfrak{C}$ una categoria e siano $\mathfrak{H} = \mathfrak{Hom}(\mathfrak{C}, \mathfrak{E})$ e $\mathfrak{K} = \mathfrak{Contr}(\mathfrak{C}, \mathfrak{E})$. Siano $F, G \in \mathfrak{H}$ (rispettivamente $F, G \in \mathfrak{K}$). Indicheremo con $F \times G$ l'oggetto di $\mathfrak{H}$ (rispettivamente l'oggetto di $\mathfrak{K}$) tale che

$$(F \times G)X = FX \times GX \qquad \text{per ogni } X \in \mathfrak{C}$$

$$(F \times G)f = Ff \times Gf \qquad \text{per ogni morfismo } f \text{ di } \mathfrak{C}.$$

Indichiamo con p_F e p'_G i morfismi di $F \times G$ in F e G rispettivamente:

$$\left.\begin{aligned}(p_F)_X(P, Q) &= P\\ (p'_G)_X(P, Q) &= Q\end{aligned}\right. \qquad P \in FX; \quad Q \in GX; \quad X \in \mathfrak{C}.$$

La terna $(F \times G, p_F, p'_G)$ gode della seguente proprietà universale:

1.1. *Ogni terna* (H, f, g) *con* $H \in \mathfrak{H}$ (*rispettivamente* $H \in \mathfrak{K}$), $f \in \mathrm{Hom}(H, F)$, $g \in \mathrm{Hom}(H, G)$ *individua un morfismo* $\{f, g\} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{H}}(H, F \times G)$ (*rispettivamente* $\{f, g\} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{K}}(H, F \times G)$) *che rende commutativo il diagramma:*

$$\begin{tikzcd} & F \\ H \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\{f,g\}"'] \arrow[dr, "g"'] & F \times G \arrow[u, "p_F"'] \arrow[d, "p'_G"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Per ogni $X \in \mathfrak{C}$ e per ogni $R \in HX$ si ha:

$$\{f, g\}_X R = (f_X R, g_X R).$$

Il morfismo $\{f, g\}$ è unico.

Con $s_{F,G}$ indicheremo l'isomorfismo di $F \times G$ in $G \times F$:

$$(s_{F,G})_X(P, Q) = (Q, P);$$

si ha $s_{G,F} = (s_{F,G})^{-1}$.

Inoltre se $F, G, H \in \mathfrak{H}$ (rispettivamente $F, G, H \in \mathfrak{K}$) identificheremo i funtori $(F \times G) \times H$ e $F \times (G \times H)$ mediante l'isomorfismo $t_{F,G,H}$:

$$(t_{F,G,H})_X((P, Q), R) = (P, (Q, R));$$

tale isomorfismo consentirà di indicare con $F \times G \times H$ il funtore covariante (rispettivamente controvariante) di $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{E}$:

$$(F \times G \times H)X = FX \times GX \times HX; \qquad X \in \mathfrak{C}.$$

Siano $F_1, F_2, G_1, G_2 \in \mathfrak{h}$ (rispettivamente $\in \mathfrak{k}$), e siano $f \in \mathrm{Hom}(F_1, F_2)$ e $g \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$. Con $f \times g$ indicheremo il morfismo di $F_1 \times G_1$ in $F_2 \times G_2$:

$$f \times g = \{f \circ p_{F_1}, \; g \circ p'_{G_1}\}.$$

Si ha allora:

$$(f \times g)_X (P, Q) = (f_X P, g_X Q).$$

Infine per ogni $F \in \mathfrak{h}$ (rispettivamente $F \in \mathfrak{k}$) indicheremo con δ_F il morfismo di F in $F \times F$:

$$(\delta_F)_X P = (P, P).$$

Si ha allora:

1.2 $\qquad \delta_F = s_{F,F} \circ \delta_F$

1.3 $\qquad (\iota_F \times \delta_F) \circ \delta_F = (\delta_F \times \iota_F) \circ \delta_F$

1.4 $\qquad \delta_G \circ f = (f \times f) \circ \delta_F$

1.5 $\qquad \delta_{F \times G} = (\iota_F \times s_{F,G} \times \iota_G) \circ (\delta_F \times \delta_G)$

quali che siano $F, G \in \mathfrak{h}$ (rispettivamente $F, G \in \mathfrak{k}$) ed $f \in \mathrm{Hom}(F, G)$.

Sia poi Φ il funtore (covariante e simultaneamente contravariante) di $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{E}$:

$$\Phi X = \{\varnothing\} \qquad \text{per ogni } X \in \mathfrak{C}$$

$$\Phi f = \iota_{\{\varnothing\}} \qquad \text{per ogni morfismo } f \text{ di } \mathfrak{C}.$$

Per ogni $F \in \mathfrak{h}$ (rispettivamente $F \in \mathfrak{k}$) sia $\varepsilon_F \in \mathrm{Hom}(F, \Phi)$:

$$(\varepsilon_F)_X P = \varnothing \quad P \in FX; \quad X \in \mathfrak{C}.$$

Allora, per ogni $F \in \mathfrak{h}$ (rispettivamente per ogni $F \in \mathfrak{k}$) è $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{h}}(F, \Phi) = \{\varepsilon_F\}$ (rispettivamente $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}(F, \Phi) = \{\varepsilon_F\}$). Inoltre, per ogni $F \in \mathfrak{h}$ (rispettivamente per ogni $F \in \mathfrak{k}$), $\vartheta_F \in \mathrm{Hom}(F, F \times \Phi)$ e $\tau_F \in \mathrm{Hom}(F, \Phi \times F)$:

$$(\vartheta_F)_X P = (P, \varnothing), \quad (\tau_F)_X P = (\varnothing, P)$$

sono isomorfismi.

Identificando allora F con $F \times \Phi$ e $\Phi \times F$ si ha:

1.6 $$(\iota_F \times \varepsilon_F) \circ \delta_F = (\varepsilon_F \times \iota_F) \circ \delta_F = \iota_F .$$

Infine è

1.7 $$\varepsilon_{F \times G} = \varepsilon_F \times \varepsilon_G$$

$$\varepsilon_G \circ f = \varepsilon_F$$

quali che siano $F, G \in \mathfrak{H}$ (rispettivamente $\in \mathfrak{K}$) e $f \in \mathrm{Hom}(F, G)$.

In particolare è $\varepsilon_\Phi = \delta_\Phi = s_{\Phi, \Phi} = \iota_\Phi$.

2. Sia $\mathfrak{C}$ una categoria; per ogni $A \in \mathfrak{C}$ sia A^* il funtore covariante di $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{E}$:

$$A^* X = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, X)$$

$$(A^* f)\, \sigma = f \circ \sigma; \qquad X, Y \in \mathfrak{C}; \quad f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y).$$

$$\sigma \in A^* X.$$

Con $^*A$ indichiamo poi il funtore contravariante di $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{E}$:

$$^*A X = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, A)$$

$$(^*A f)\, \sigma = \sigma \circ f; \qquad X, Y \in \mathfrak{C}; \quad f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y);$$

$$\sigma \in {}^*A Y.$$

Un funtore covariante (rispettivamente contravariante) F di $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{E}$ verrà chiamato *rappresentabile* se esiste un $A \in \mathfrak{C}$ tale che F è isomorfo ad A^* (rispettivamente ad $^*A$).

I funtori covarianti (rispettivamente contravarianti) rappresentabili di $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{E}$ costituiscono una sottocategoria piena di $\mathfrak{Hom}(\mathfrak{C}, \mathfrak{E})$ (rispettivamente $\mathfrak{Contr}(\mathfrak{C}, \mathfrak{E})$) che indichiamo con $\mathfrak{C}^*$ (rispettivamente con $^*\mathfrak{C}$).

Siano $A, B \in \mathfrak{C}$ e sia $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$; siano poi $\lambda^* \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^*}(B^*, A^*)$ e $^*\lambda \in \mathrm{Hom}_{^*\mathfrak{C}}(^*A, {}^*B)$:

$$(\lambda^*)_X\, \sigma = \sigma \circ \lambda; \qquad \sigma \in B^* X; \quad X \in \mathfrak{C};$$

$$(^*\lambda)_X\, \varphi = \lambda \circ \varphi; \qquad \varphi \in {}^*A X; \quad X \in \mathfrak{C}.$$

Allora l'applicazione:

$$A \longmapsto A^*; \qquad \lambda \longmapsto \lambda^*$$

risulta un funtore contravariante di $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{C}^*$; similmente l'applicazione:

$$A \longmapsto {}^*A\,; \qquad \lambda \longmapsto {}^*\lambda$$

risulta un funtore covariante di $\mathfrak{C}$ in ${}^*\mathfrak{C}$.

Si ha allora (cfr. [17]).

2.1. *Per ogni coppia di oggetti* $A, B \in \mathfrak{C}$ *l'applicazione* $\lambda \longmapsto \lambda^*$ (*rispettivamente* $\lambda \longmapsto {}^*\lambda$) *di* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ *in* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^*}(B^*, A^*)$ (*rispettivamente in* $\mathrm{Hom}_{{}^*\mathfrak{C}}({}^*A, {}^*B)$), *è biunivoca.*

2.2. *Se* $A, B \in \mathfrak{C}$ *sono tali che* $A^* \cong B^*$ (*rispettivamente* ${}^*A \cong {}^*B$) *allora* $A \cong B$.

In conseguenza di ciò si possono definire:

un funtore contravariante di $\mathfrak{C}^*$ in $\mathfrak{C}$:

$$\begin{matrix} F \longmapsto F^0 \\ \sigma \longmapsto \sigma^0 \end{matrix} \qquad F, G \in \mathfrak{C}^*\,; \quad \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^*}(F, G)$$

tale che $(A^*)^0$ è isomorfo ad A per ogni $A \in \mathfrak{C}$, $(F^0)^*$ è isomorfo ad F per ogni $F \in \mathfrak{C}^*$;

un funtore covariante:

$$\begin{matrix} F \longmapsto {}^0F \\ \sigma \longmapsto {}^0\sigma \end{matrix}$$

di ${}^*\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{C}$ tale che ${}^0({}^*A)$ è isomorfo ad A per ogni $A \in \mathfrak{C}$, ${}^*({}^0F)$ è isomorfo ad F per ogni $F \in {}^*\mathfrak{C}$.

Mediante tali funtori $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{C}^*$ risultano antiequivalenti, mentre $\mathfrak{C}$ e ${}^*\mathfrak{C}$ risultano equivalenti.

Esempi.

1. Sia Φ il funtore (covariante e contravariante) di cui al n. 1.

Come funtore covariante Φ è rappresentabile se e solo se $\mathfrak{C}$ possiede un *oggetto iniziale* Θ, cioè un oggetto tale che, per ogni $A \in \mathfrak{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Theta, A) = \{i_A\}$, ove $i_A^* = \varepsilon_{A^*}$.

Dualmente, il funtore Φ come funtore contravariante è rappresentabile se e solo se esiste in $\mathfrak{C}$ un *oggetto finale*, cioè un oggetto Λ tale che $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, \Lambda) = \{\varepsilon_A\}$ per ogni $A \in \mathfrak{C}$.

2. Siano $A, B \in \mathfrak{C}$, sia $F = A^*$ e $G = B^*$. Se il funtore $F \times G$ è rappresentabile, sia $A * B \in \mathfrak{C}$ tale che $(A * B)^* \cong F \times G$. Indichiamo poi con j_A e j'_B i morfismi $(p_F)^0$ e $(p'_G)^0$.

La terna $(A * B, j_A, j'_B)$ gode della seguente proprietà universale:

ogni terna (D, f, g) *con* $D \in \mathfrak{C}$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, D)$ *e* $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B, D)$ *individua un morfismo (ed uno solo)* $\langle f, g \rangle \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A * B, D)$ *tale che* $f = \langle f, g \rangle \circ j_A$ *e* $g = \langle f, g \rangle \circ j'_B$.

Tale proprietà si esprime dicendo che la terna $(A * B, j_A, j'_B)$ è un *prodotto inverso* della coppia (A, B).

Viceversa se la coppia (A, B) ha prodotto inverso allora il funtore $A^* \times B^*$ è rappresentabile; $A^* \times B^*$ e $(A * B)^*$ sono isomorfi in un isomorfismo che associa ad ogni coppia (P, Q) $(P \in A^*X;\ Q \in B^*X;\ X \in \mathfrak{C})$ il morfismo $\langle P, Q \rangle$.

3. Siano $A, B \in \mathfrak{C}$. Un *prodotto diretto* della coppia (A, B) è una terna $(A \times B, p_A, p'_B)$ con $A \times B \in \mathfrak{C}$, $p_A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A \times B, A)$, $p'_B \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A \times B, B)$ godente della seguente proprietà universale:

ogni terna (D, f, g) *con* $D \in \mathfrak{C}$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(D, A)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(D, B)$ *individua uno (ed unico) morfismo* $\{f, g\} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(D, A \times B)$ *tale che:*

$$f = p_A \circ \{f, g\} \qquad g = p'_B \circ \{f, g\}.$$

La coppia (A, B) ammette prodotto diretto se e solo se il funtore ${}^*A \times {}^*B$ è rappresentabile e si ha ${}^*(A \times B) = {}^*A \times {}^*B$.

Ricordiamo inoltre che se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$, f dicesi *surgettivo* se l'applicazione $(f^*)_X$ è iniettiva per ogni $X \in \mathfrak{C}$; f dicesi *iniettivo* se $({}^*f)_X$ è iniettiva per ogni $X \in \mathfrak{C}$.

3. Siano $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ categorie. Ricordiamo che si chiama *categoria prodotto* della coppia $(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$ e si indica con $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ la categoria tale che:

a) gli oggetti di $\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ sono le coppie (A, X) con $A \in \mathfrak{C}$ e $X \in \mathfrak{D}$,

b) $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}}((A_1, X_1), (A_2, X_2)) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_1, X_1) \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(A_2, X_2)$,

c) $(f, u) \circ (g, v) = (f \circ g, u \circ v)$ quali che siano i morfismi f, g, u, v tali da dare significato a uno dei membri.

Una *legge di composizione interna* nella categoria $\mathfrak{C}$ è un funtore covariante T di $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ in $\mathfrak{C}$:

$$(A, B) \longmapsto A \mathsf{T} B$$

$$(f, g) \longmapsto f \mathsf{T} g.$$

Una legge di composizione interna in $\mathfrak{C}$ dicesi *associativa* se esiste un *isomorfismo funtoriale* t del funtore (di $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ in $\mathfrak{C}$):

$$(A, B, C) \longmapsto (A \mathsf{T} B) \mathsf{T} C$$

$$(f, g, h) \longmapsto (f \mathsf{T} g) \mathsf{T} h$$

nel funtore (di $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ in $\mathfrak{C}$):

$$(A, B, C) \longmapsto A \mathsf{T} (B \mathsf{T} C)$$

$$(f, g, h) \longmapsto f \mathsf{T} (g \mathsf{T} h).$$

Una legge di composizione interna in $\mathfrak{C}$ dicesi *commutativa* se esiste un isomorfismo s del funtore T nel funtore (di $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ in $\mathfrak{C}$):

$$(A, B) \longmapsto B \mathsf{T} A.$$

Un oggetto $U \in \mathfrak{C}$ chiamasi *oggetto neutro* (o *oggetto unitario*) rispetto a T (associativa e commutativa) se esiste un isomorfismo ϑ del funtore identico $I_{\mathfrak{C}}$ nel funtore (di $\mathfrak{C}$ in sè):

$$A \longmapsto A \mathsf{T} U$$

$$f \longmapsto f \mathsf{T} \iota_U .$$

La legge T associativa e commutativa dicesi *unitaria* se ammette un oggetto neutro (necessariamente unico a meno di isomorfismi) (1).

Sia T una legge di composizione interna associativa, commutativa ed unitaria nella categoria $\mathfrak{C}$. Una *struttura* T-*moltiplicativa* (o, semplicemente, moltiplicativa) in $\mathfrak{C}$ è un morfismo μ del funtore:

$$A \longmapsto A \mathsf{T} A$$

$$f \longmapsto f \mathsf{T} f$$

nel funtore identità $I_{\mathfrak{C}}$ che *commuta con* T. In altre parole $\mu = (\mu_A)_{A \in \mathfrak{C}}$ è una collezione di morfismi, con $\mu_A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A \mathsf{T} A, A)$ tale che:

1) $$f \circ \mu_A = \mu_B \circ (f \mathsf{T} f)$$

2) $$\mu_{A \mathsf{T} B} = (\mu_A \mathsf{T} \mu_B) \circ (\iota_A \mathsf{T} s_{B,A} \mathsf{T} \iota_B)$$

quali che siano $A, B \in \mathfrak{C}$ ed $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$.

---

(1) L'isomorfismo t consente di identificare $(A \mathsf{T} B) \mathsf{T} C$ con $A \mathsf{T} (B \mathsf{T} C)$ e $(f \mathsf{T} g) \mathsf{T} h$ con $f \mathsf{T} (g \mathsf{T} h)$, quali che siano gli oggetti A, B, C ed i morfismi f, g, h di $\mathfrak{C}$; a identificazione avvenuta sarà legittimo l'uso di scritture come $A \mathsf{T} B \mathsf{T} C$ e $f \mathsf{T} g \mathsf{T} h$. Similmente l'isomorfismo ϑ consente di identificare l'oggetto A con $A \mathsf{T} U$ ed il morfismo f con $f \mathsf{T} \iota_U$.

Una struttura moltiplicativa μ dicesi *associativa* se, per ogni $A \in \mathfrak{C}$, è $\mu_A \circ (\iota_A \top \mu_A) = \mu_A \circ (\mu_A \top \iota_A)$; la μ dicesi *commutativa* se per ogni $A \in \mathfrak{C}$ è $\mu_A = \mu_A \circ s_{A,A}$. Infine la μ dicesi *unitaria* se esiste un morfismo funtoriale $i = (i_A)_{A \in \mathfrak{C}}$ del funtore:

$$A \longmapsto U$$

$$f \longmapsto \iota_U$$

nel funtore identità $I_{\mathfrak{C}}$ (cioè $i_A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(U, A)$ e $f \circ i_A = i_B$ quali che siano $A, B \in \mathfrak{C}$ ed $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$), tale che $\mu_A \circ (\iota_A \top i_A) = \mu_A \circ (i_A \top \iota_A) = \iota_A$ per ogni $A \in \mathfrak{C}$.

Il morfismo i si chiama la *identificazione* di μ.

3.1 LEMMA. *Sia $\top$ una legge di composizione interna nella categoria $\mathfrak{C}$ associativa, commutativa ed unitaria e sia μ una struttura moltiplicativa associativa, commutativa e unitaria. Allora la identificazione i è unica.*

DIM. Sia $i' = (i'_A)_{A \in \mathfrak{C}}$ un'altra identificazione.
Allora, per ogni $A \in \mathfrak{C}$,

$$\mu_A \circ (i_A \top i'_A) = \mu_A \circ [(\iota_A \circ i_A) \top (i'_A \circ \iota_U)] =$$
$$= \mu_A \circ (\iota_A \top i'_A) \circ (i_A \top \iota_U) = \iota_A \circ i_A = i_A .$$

D'altro canto

$$\mu_A \circ (i_A \top i'_A) = \mu_A \circ [(i_A \circ \iota_U) \top (\iota_A \circ i'_A)] =$$
$$= \mu_A \circ (i_A \top \iota_A) \circ (\iota_U \top i'_A) = \iota_A \circ i'_A = i'_A ,$$

onde $i_A = i'_A$, C. V. D.

Nelle stesse ipotesi si ha:

3.2 LEMMA. *Per ogni $A \in \mathfrak{C}$ è* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(U, A) = \{i_A\}$.

DIM. Osserviamo innanzitutto che è:

$$\mu_U \circ i_U = \mu_U \circ (i_U \top \iota_U) = \iota_U ,$$

e d'altro canto

$$\mu_U \circ i_U = i_U ,$$

onde $\iota_U = i_U = \mu_U$.

Conseguentemente, per ogni $A \in \mathfrak{C}$ e per ogni $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(U, A)$, è

$$f = f \circ \iota_U = f \circ i_U = i_A ,$$

C. V. D..

Sia ancora $\mathfrak{C}$ una categoria dotata di una legge di composizione interna $\top$ associativa, commutativa e unitaria. Una *struttura* $\top$-*comoltiplicativa* in $\mathfrak{C}$ è un morfismo funtoriale Δ del funtore $I_{\mathfrak{C}}$ nel funtore

$$A \longmapsto A \top A\,; \quad f \longmapsto f \top f,$$

che commuta con $\top$, tale cioè che $\Delta_{A \top B} = (\Delta_A \top s_{A,B} \top \Delta_B) \circ (\Delta_A \top \Delta_B)$ qualunque siano $A, B \in \mathfrak{C}$.

Una struttura comoltiplicativa Δ verrà chiamata *coassociativa* se, per ogni $A \in \mathfrak{C}$, è $(\iota_A \top \Delta_A) \circ \Delta_A = (\Delta_A \top \iota_A) \circ \Delta_A$. La Δ verrà detta *cocommutativa* se, per ogni $A \in \mathfrak{C}$, è $\Delta_A = s_{A,A} \circ \Delta_A$. Infine la Δ verrà detta *counitaria* se esiste un morfismo funtoriale $\varepsilon = (\varepsilon_A)_{A \in \mathfrak{C}}$ di $I_{\mathfrak{C}}$ nel funtore:

$$A \longmapsto U\,; \quad f \longmapsto \iota_U$$

tale che:

$$(\iota_A \top \varepsilon_A) \circ \Delta_A = (\varepsilon_A \top \iota_A) \circ \Delta_A = \iota_A$$

per ogni $A \in \mathfrak{C}$.

Il morfismo ε si chiama la *augmentazione* di Δ. Ragionando in modo analogo come in 3.1 e 3.2 si ha allora:

3.3 LEMMA. *Sia Δ una struttura $\top$-comoltiplicativa in $\mathfrak{C}$ coassociativa, cocommutativa e counitaria. Allora la augmentazione ε è unica.*

Nelle stesse ipotesi:

3.4 LEMMA. *Per ogni $A \in \mathfrak{C}$ è* $\mathrm{Hom}(A, U) = \{\varepsilon_A\}$.

Esempio :

La categoria $\mathfrak{H} = \mathfrak{Hom}(\mathfrak{C}, \mathfrak{E})$ studiata al n. 1 possiede la legge di composizione interna:

$$(F, G) \longmapsto F \times G$$

$$(f, g) \longmapsto f \times g.$$

Tale legge è associativa, commutativa ed unitaria.

L'oggetto neutro è il funtore Φ:

$$\Phi X = \{\emptyset\}\,; \quad \Phi f = \iota_{\{\emptyset\}}.$$

Poi $\delta = (\delta_F)_{F \in \mathfrak{H}}$ è una struttura comoltiplicativa in $\mathfrak{H}$ cocommutativa, coassociativa e counitaria.

Le stesse considerazioni possono ripetersi per la categoria $\mathbb{K}$ studiata anch'essa al n. 1.

Una categoria $\mathbb{C}$ verrà chiamata una *I-categoria* se:

a) esiste un oggetto iniziale Θ,

b) per ogni coppia di oggetti $A, B \in \mathbb{C}$ esiste il prodotto inverso.

Diremo invece che $\mathbb{C}$ è una *D-categoria* se:

a) esiste un oggetto finale Λ,

b) per ogni coppia di oggetti $A, B \in \mathbb{C}$ esiste il prodotto diretto.

3.5 TEOREMA. *Sia $\mathbb{C}$ una categoria. Le due seguenti asserzioni sono equivalenti:*

i) *$\mathbb{C}$ possiede una legge di composizione interna commutativa associativa ed unitaria $\top$ ed una struttura $\top$-moltiplicativa associativa, commutativa ed unitaria.*

ii) *$\mathbb{C}$ è una I-categoria.*

DIM.

i) implica ii). Per ogni coppia di oggetti $A, B \in \mathbb{C}$ siano $j_A = \iota_A \top i_B \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, A \top B)$ e $j'_B = i_A \top \iota_B \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(B, A \top B)$. Siano $X \in \mathbb{C}$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, X)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(B, X)$. Allora:

$$\mu_X \circ (f \top g) \circ j_A = \mu_X \circ (f \top g) \circ (\iota_A \top i_B) =$$

$$= \mu_X \circ [(f \circ \iota_A) \top (g \circ i_B)] = \mu_X \circ [(\iota_X \circ f) \top (i_X \circ \iota_U)] =$$

$$= \mu_X \circ (\iota_X \top i_X) \circ (f \top i_U) = \iota_X \circ f = f$$

e

$$\mu_X \circ (f \top g) \circ j'_B = g.$$

Poi, per ogni $\varphi \in \mathrm{Hom}(A \top B, X)$, si ha:

$$\mu_X \circ [(\varphi \circ j_A) \top (\varphi \circ j'_B)] = \mu_X \circ (\varphi \top \varphi) \circ (j_A \top j'_B) =$$

$$= \varphi \circ \mu_{A \top B} \circ (j_A \top j'_B) = \varphi \circ (\mu_A \top \mu_B) \circ (\iota_A \top s_{B,A} \top \iota_B) \circ (\iota_A \top i_B \top i_A \top \iota_B) =$$

$$= \varphi \circ (\mu_A \top \mu_B) \circ (\iota_A \top i_A \top i_B \top \iota_B) = \varphi \circ (\iota_A \top \iota_B) = \varphi.$$

Pertanto l'applicazione

$$(f, g) \longmapsto \mu_X \circ (f \top g)$$

di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(B, X)$ in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A \top B, X)$ è biunivoca e la sua reciproca è $\varphi \longmapsto (\varphi \circ j_A , \varphi \circ j'_B)$; quindi la terna $(A \top B, j_A , j'_B)$ è un prodotto inverso della coppia (A, B) e $\mu_X \circ (f \top g) = \langle f, g \rangle$.

La 3.1 prova poi che U è oggetto iniziale di $\mathfrak{C}$, la quale è una I-categoria, C. V. D..

ii) implica *i*).

Per ogni coppia di oggetti $A, B \in \mathfrak{C}$ sia $(A * B, j_A , j'_B)$ il prodotto inverso.

Siano $A_1 , A_2 , B_1 , B_2 \in \mathfrak{C}$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_1 , A_2)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B_1 , B_2)$, e sia $f * g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_1 * B_1 , A_2 * B_2)$ tale che

$$(f * g)^* = f^* \times g^*.$$

Allora l'applicazione

$$(A, B) \longmapsto A * B$$

$$(f, g) \longmapsto f * g$$

è un funtore covariante di $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ in $\mathfrak{C}$.

Siano $A, B, C \in \mathfrak{C}$ e sia $F = A^*$, $G = B^*$, $H = C^*$. Allora $t_{A, B, C} = (t^{-1}_{F, G, H})^0$ è un isomorfismo di $(A * B) * C$ in $A * (B * C)$.

Poi $(s^{-1}_{F, G})^0 = s_{A, B}$ è un isomorfismo di $A * B$ in $B * A$.

Inoltre se Θ è oggetto iniziale di $\mathfrak{C}$ e si ha $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Theta, A) = \{i_A\}$ per ogni $A \in \mathfrak{C}$, $A^* \times \Theta^*$ è isomorfo ad A^* come $\Theta^* \times A^*$.

Pertanto è definita in $\mathfrak{C}$ una legge di composizione interna commutativa, associativa ed unitaria.

Poi, per ogni $A \in \mathfrak{C}$, sia $\mu_A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A * A, A)$ tale che $(\mu_A)^* = \delta_{A^*}$. Da 1.2 e seguenti si ha allora:

$$\mu_{A*B} = (\mu_A * \mu_B) \circ (\iota_A * s_{B, A} * \iota_B)$$

$$f \circ \mu_A = \mu_B \circ (f * f)$$

$$\mu_A \circ (\mu_A * \iota_A) = \mu_A \circ (\iota_A * \mu_A)$$

$$\mu_A = s_{A, A} \circ \mu_A$$

quali che siano $A, B \in \mathfrak{C}$ ed $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$.

Infine, per ogni $A \in \mathfrak{C}$, ricordando che $(i_A)^* = \varepsilon_{A^*}$, e tenendo conto di 1.6 e 1.7 si ha:

$$f \circ i_A = i_B$$

$$\mu_A \circ (\iota_A * i_A) = \mu_A \circ (i_A * \iota_A) = \iota_A ,$$

C. V. D..

Per dualità si ottiene allora il seguente:

3.6 TEOREMA. *Sia $\mathfrak{C}$ una categoria. Le due seguenti asserzioni sono equivalenti :*

i) $\mathfrak{C}$ possiede una legge di composizione interna associativa commutativa ed unitaria ed una struttura comoltiplicativa cocommutativa, coassociativa e counitaria,

ii) $\mathfrak{C}$ *è una D-categoria.*

4. *Esempi.*

4.1. *La categoria $\mathfrak{E}$ degli insiemi è una I-categoria.*

Per ogni coppia di oggetti $A, B \in \mathfrak{E}$ sia $A \vee B$ l'ordinaria *somma cartesiana* della coppia; cioè $A \vee B = A_1 \cup B_1$ ove A_1 e B_1 sono copie di A e B rispettivamente, tali che $A_1 \cap B_1 = \emptyset$. Ad esempio $A_1 = \{(x, 0) \mid x \in A\}$, $B_1 = \{(y, 1) \mid y \in B\}$.

Se $f \in \mathrm{Hom}(A, A')$ e $g \in \mathrm{Hom}(B, B')$ poniamo:

$$\begin{matrix} (f \vee g)(x, 0) = (fx, 0) \\ (f \vee g)(y, 1) = (gy, 1) \end{matrix} \qquad x \in A \ ; \quad y \in B.$$

Il funtore di $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}$ in $\mathfrak{E}$:

$$(A, B) \longmapsto A \vee B$$

$$(f, g) \longmapsto f \vee g$$

è una legge di composizione interna associativa, commutativa ed unitaria; l'oggetto unitario è $\emptyset$.

Il morfismo funtoriale $\mu = (\mu_A)_{A \in \mathfrak{E}}$:

$$\begin{matrix} \mu_A(x, 0) = x \\ \mu_A(x, 1) = x \end{matrix} \qquad x \in A,$$

è una struttura moltiplicativa associativa, commutativa e unitaria; per ogni $A \in \mathfrak{E}$ i_A è l'immersione di $\emptyset$ in A.

4.1′ *La categoria $\mathfrak{E}$ è una D-categoria.*

Il funtore di $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}$ in $\mathfrak{E}$:

$$(A, B) \longmapsto A \times B$$

$$(f, g) \longmapsto f \times g$$

è una legge di composizione interna associativa, commutativa e unitaria; l'oggetto unitario è $U = \{\emptyset\}$.

Il morfismo funtoriale $\delta = (\delta_A)_{A \in \mathfrak{E}}$:

$$\delta_A \, x = (x, x) \qquad x \in A$$

è una struttura comoltiplicativa, coassociativa, cocommutativa e counitaria; per ogni $A \in \mathfrak{E}$ ε_A è l'applicazione banale di A in U.

4.2. Sia $\mathfrak{S}$ la *categoria degli insiemi con punto privilegiato;* cioè: gli oggetti di $\mathfrak{S}$ sono gli insiemi A per ciascuno dei quali è definito un elemento $O_A \in A$; se $A, B \in \mathfrak{S}$ $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(A, B)$ è costituito dalle applicazioni f di A in B tali che $f O_A = O_B$.

Se $A, B \in \mathfrak{S}$, definendo $O_{A \times B} = (O_A, O_B)$, $A \times B$ diviene un oggetto di $\mathfrak{S}$. Ripetendo il ragionamento di 4.1′ si ha:

$\mathfrak{S}$ *è una D-categoria.*

Per ogni coppia di oggetti $A, B \in \mathfrak{S}$ sia poi $A * B$ il sottoinsieme di $A \times B$ formato dalle coppie di tipo (x, O_B) con $x \in A$ e dalle coppie di tipo (O_A, y) con $y \in B$; se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(A, A')$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(B, B')$ sia $f * g$ la restrizione di $f \times g$ ad $A * B$. Allora il funtore:

$$(A, B) \longmapsto A * B$$

$$(f, g) \longmapsto f * g$$

è una legge di composizione interna in $\mathfrak{S}$ associativa, commutativa e unitaria. L'oggetto unitario è $U = \{O_U\}$.

Il morfismo funtoriale $\mu = (\mu_A)_{A \in \mathfrak{S}}$:

$$\mu_A(x, O_A) = \mu_A(O_A, x) = x \qquad x \in A$$

è una struttura moltiplicativa associativa, commutativa e unitaria: per ogni $A \in \mathfrak{S}$ è $i_A \, O_U = O_A$. Pertanto

$\mathfrak{S}$ *è una I-categoria.*

4.3. Sia $\mathfrak{G}$ la categoria dei gruppi; se $A, B \in \mathfrak{G}$ indichiamo: con $A * B$ l'ordinario prodotto libero della coppia (A, B), con $A \times B$ l'ordinario prodotto diretto della coppia (A, B). Poi se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(A, A')$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(B, B')$, $f \times g$ e $f * g$ sono definiti in modo naturale:

$$\left.\begin{aligned} &(f \times g)(x, y) = (fx, gy) \\ &(f * g)\, x = fx; \quad (f * g)\, y = gy \end{aligned}\right. \qquad x \in A; \quad y \in B.$$

Ragionando come in 4.1′ si ha immediatamente:

$\mathfrak{G}$ *è una D-categoria.*

Precisamente la legge di composizione interna è il prodotto diretto e la struttura comoltiplicativa $\Delta = (\Delta_A)_{A \in \mathfrak{G}}$ è data da $\Delta_A\, x = (x, x)$. L'oggetto neutro è il gruppo banale.

Inoltre:

$\mathfrak{G}$ *è una I-categoria.*

Infatti il funtore $(A, B) \longmapsto A * B$, $(f, g) \longmapsto f * g$ è una legge di composizione interna associativa, commutativa e unitaria (l'oggetto neutro è il gruppo banale). Il morfismo funtoriale $\mu = (\mu_A)_{A \in \mathfrak{G}}$: $\mu_A\, x = x$ per ogni $x \in A$ è una struttura moltiplicativa associativa, commutativa e unitaria.

4.4. Sia $\mathfrak{A}$ la categoria dei gruppi abeliani (indicati qui additivamente). Il funtore:

$$(A, B) \longmapsto A \oplus B\,; \quad (f, g) \longmapsto f \oplus g$$

è una legge di composizione interna associativa, commutativa e unitaria. Rispetto a tale legge:

$\mathfrak{A}$ *è una D-categoria e una I-categoria.*

La struttura moltiplicativa $\mu = (\mu_A)_{A \in \mathfrak{A}}$ è definita da:

$$\mu_A(x, y) = x + y \qquad x, y \in A\,;$$

la struttura comoltiplicativa Δ è invece quella già definita in 4.3.

4.5. Sia k un corpo e sia $\mathfrak{V}$ la categoria dei k-moduli. Il funtore

$$(A, B) \longmapsto A \otimes B$$

$$(f, g) \longmapsto f \otimes g$$

è una legge di composizione interna in $\mathfrak{V}$ associativa, commutativa e unitaria; l'oggetto neutro è k.

Sia poi $\mathfrak{R}$ la categoria delle k-algebre commutative con identità, cioè la categoria tale che:

a) gli oggetti di $\mathfrak{R}$ sono i k-moduli A per ciascuno dei quali è definita una applicazione k-lineare μ_A di $A \otimes A$ in A ed una applicazione k-lineare i_A di k in A soddisfacenti alle seguenti relazioni:

$$\mu_A \circ (\mu_A \otimes \iota_A) = \mu_A \circ (\iota_A \otimes \mu_A),$$

$$\mu_A = \mu_A \circ s_{A,\,A}$$

$$\mu_A \circ (\iota_A \otimes i_A) = \mu_A \circ (i_A \otimes \iota_A) = \iota_A$$

b) se $A, B \in \mathbb{R}$ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(A, B)$ è costituito dalle applicazioni k-lineari f di A in B tali che

$$f \circ \mu_A = \mu_B \circ (f \otimes f)$$

$$f \circ i_A = i_B \,.$$

Allora se $A, B \in \mathbb{R}$, posto

$$\mu_{A \otimes B} = (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (\iota_A \otimes s_{B,A} \otimes \iota_B)$$

$$i_{A \otimes B} = i_A \otimes i_B$$

risulta $A \otimes B \in \mathbb{R}$, onde il prodotto tensoriale risulta una legge di composizione interna in $\mathbb{R}$ associativa, commutativa e unitaria; il morfismo $\mu = (\mu_A)_{A \in \mathbb{R}}$ diviene quindi una struttura moltiplicativa associativa commutativa e unitaria, onde:

$\mathbb{R}$ *è una I-categoria.*

Consideriamo poi l'altra legge di composizione interna esistente in $\mathfrak{V}$, cioè il funtore:

$$(A, B) \longmapsto A \oplus B$$

$$(f, g) \longmapsto f \oplus g$$

che rende $\mathfrak{V}$ una I categoria ed una D categoria.

Se $A, B \in \mathbb{R}$ $A \oplus B$ diviene un oggetto di $\mathbb{R}$ definendo

$$\mu_{A \oplus B}[(x, y) \otimes (x', y')] = (xx', yy') \qquad x, x' \in A\,; \quad y, y' \in B$$

$$i_{A \oplus B}\, 1 = (1, 1),$$

onde il funtore somma diretta è una legge di composizione interna in $\mathbb{R}$ associativa, commutativa e unitaria; l'oggetto neutro e la k-algebra 0 ($\mu_0 = 0$; $i_0\, 1 = 0$).

Si noti che per ogni $A \in \mathbb{R}$ non nulla è $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(0, A) = \emptyset$ e $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(A, 0) = \{0_A\}$ con $0_A\, x = 0$ per ogni $x \in A$.

Definendo allora $\delta_A\, x = (x, x)$ per ogni $x \in A$, il morfismo $\delta = (\delta_A)_{A \in \mathbb{R}}$ è una struttura comoltiplicativa in $\mathbb{R}$ rispetto alla quale:

$\mathbb{R}$ *è una D-categoria.*

Sia poi $\mathbb{C}$ la categoria delle k-coalgebre commutative e augmentate, cioè la categoria tale che:

a) gli oggetti di $\mathfrak{C}$ sono i k-moduli A per ciascuno dei quali esistono una applicazione k-lineare $\mathbf{P}_A$ di A in $A \otimes A$ ed una applicazione k-lineare ε_A di A in k soddisfacenti alle seguenti relazioni:

$$(\mathbf{P}_A \otimes \iota_A) \circ \mathbf{P}_A = (\iota_A \otimes \mathbf{P}_A) \circ \mathbf{P}_A\,,$$

$$\mathbf{P}_A = s_{A,A} \circ \mathbf{P}_A$$

$$(\iota_A \otimes \varepsilon_A) \circ \mathbf{P}_A = (\varepsilon_A \otimes \iota_A) \circ \mathbf{P}_A = \iota_A\,.$$

b) se $A, B \in \mathfrak{C}$ $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ è costituito dalle applicazioni k-lineari f di A in B tali che

$$(f \otimes f) \circ \mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B \circ f$$

$$\varepsilon_B \circ f = \varepsilon_A\,.$$

Ragionando in modo del tutto analogo a quello seguito per le considerazioni sulla categoria $\mathfrak{R}$ si ha che il funtore prodotto tensoriale è una legge di composizione interna su $\mathfrak{C}$, e il morfismo $\mathbf{P} = (\mathbf{P}_A)_{A \in \mathfrak{C}}$ è una struttura, comoltiplicativa coassociativa, cocommutativa e counitaria rispetto alla quale:

$\mathfrak{C}$ *è una D-categoria.*

Inoltre il funtore somma diretta è un'altra legge di composizione interna in $\mathfrak{C}$ associativa, commutativa e unitaria; l'oggetto neutro è la k-coalgebra $O\,(P_0 = 0,\ \varepsilon_0 = 0)$. Definendo per ogni $A \in \mathfrak{C}$,

$$m_A\,(x, y) = x + y \qquad x, y \in A$$

il funtore $m = (m_A)_{A \in \mathfrak{C}}$ è una struttura moltiplicativa associativa, commutativa e unitaria, rispetto alla quale:

$\mathfrak{C}$ *è una I-categoria.*

4.6 Sia k un corpo e sia $\mathfrak{M}$ la categoria del k-moduli linearmente compatti. Siano $A, B \in \mathfrak{M}$ e siano $(A_i)_{i \in I}$, $(B_j)_{j \in J}$ sistemi fondamentali di intorni dello O di A e B rispettivamente. Con $A \,\overline{\times}\, B$ indichiamo il completamento di $A \otimes B$ nella topologia avente $(A_i \otimes B + A \otimes B_j)_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ come sistema fondamentale di intorni dello O. Se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(A, A')$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(B, B')$ con $f \,\overline{\times}\, g$ indichiamo l'estensione ad $A \,\overline{\times}\, B$ di $f \otimes g$.

Allora il funtore

$$(A, B) \longmapsto A \mathbin{\overline{\times}} B$$

$$(f, g) \longmapsto f \mathbin{\overline{\times}} g$$

è una legge di composizione interna in $\mathfrak{W}$. Sia $\mathfrak{F}$ la categoria delle k-algebre linearmente compatte; cioè gli oggetti di $\mathfrak{F}$ sono gli $A \in \mathfrak{W}$ per ciascuno dei quali esistono $\mu_A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{W}}(A \mathbin{\overline{\times}} A, A)$; $i_A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{W}}(k, A)$ essendo μ_A e i_A applicazioni k-lineari continue tali che:

$$\mu_A \circ (\mu_A \mathbin{\overline{\times}} \iota_A) = \mu_A \circ (\iota_A \mathbin{\overline{\times}} \mu_A)$$

$$\mu_A = \mu_A \circ s_{A, A}$$

$$\mu_A \circ (\iota_A \mathbin{\overline{\times}} i_A) = \mu_A \circ (i_A \mathbin{\overline{\times}} \iota_A) = \iota_A ,$$

e $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{F}}(A, B)$ è costituito dagli $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{W}}(A, B)$ tali che

$$f \circ \mu_A = \mu_B \circ (f \mathbin{\overline{\times}} f)$$

$$f \circ i_A = i_B .$$

Allora il funtore $(A, B) \longmapsto A \mathbin{\overline{\times}} B$ risulta una legge di composizione interna in $\mathfrak{F}$ ed il morfismo $\mu = (\mu_A)_{A \in \mathfrak{F}}$ è una struttura moltiplicativa associativa, commutativa e unitaria rispetto alla quale:

$\mathfrak{F}$ *è una I-categoria.*

Altre considerazioni in tutto analoghe a quelle svolte in 4.5 possono svolgersi sulla categoria delle k-coalgebre linearmente compatte.

4.7 Siano $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ I-categorie e sia $\mathfrak{P} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ la loro categoria prodotto. Allora il funtore di $\mathfrak{P} \times \mathfrak{P}$ in $\mathfrak{P}$;

$$((A, X), (B, Y)) \longmapsto (A * B, X * Y)$$

$$A, B \in \mathfrak{C}; X, Y \in \mathfrak{D}$$

è una legge di composizione interna in $\mathfrak{P}$ associativa, commutativa ed unitaria; se U è l'oggetto neutro di $\mathfrak{C}$ e V è l'oggetto neutro di $\mathfrak{D}$, (U, V) è l'oggetto neutro di $\mathfrak{P}$. Definendo poi

$$\mu_{(A,\, X)} = (\mu_A,\, \mu_X)$$
$$i_{(A,\, X)} = (i_A,\, i_X)$$

si ottiene una struttura moltiplicativa in $\mathfrak{P}$ rispetto alla quale:

$\mathfrak{P}$ *è una I-categoria.*

Le considerazioni precedenti restano valide se si sostituisce la locuzione I-categoria con D-categoria.

4.8 Sia $\mathfrak{C}$ una I-categoria; con $\mathfrak{M}\,\mathfrak{C}$ indichiamo la *categoria dei morfismi di* $\mathfrak{C}$, cioè la categoria tale che:

a) gli oggetti di $\mathfrak{M}\mathfrak{C}$ sono i morfismi di $\mathfrak{C}$,

b) se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A', B')$, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}\mathfrak{C}}(f, g)$ è costituito dalle coppie (α, β) con $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, A')$, $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B, B')$ tali che $g \circ \alpha = \beta \circ f$. Allora:

$\mathfrak{M}\mathfrak{C}$ *è una I-categoria.*

La legge di composizione interna in $\mathfrak{M}\mathfrak{C}$ è data da

$$(f, g) \longmapsto f * g$$
$$[(\alpha, \beta), (\alpha', \beta')] \longmapsto (\alpha * \alpha', \beta * \beta').$$

Tale legge è associativa, commutativa ed unitaria e si ha

$$t_{f,\, g,\, h} = (t_{A,\, A',\, A''},\, t_{B,\, B',\, B''}) \qquad f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$$
$$s_{f,\, g} = (s_{A,\, A'},\, s_{B,\, B'}) \qquad g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A', B')$$
$$\vartheta_f = (\vartheta_A,\, \vartheta_B) \qquad h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A'', B'');$$

l'oggetto neutro è ι_U.

Poi il morfismo $\mu = (\mu_f)_{f \in \mathfrak{M}\mathfrak{C}}$ con $\mu_f = (\mu_A, \mu_B)$ (se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$) è una struttura $*$-moltiplicativa, associativa, commutativa e unitaria. Per ogni $f \in \mathfrak{M}\mathfrak{C}$ è $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}\mathfrak{C}}(\iota_U, f) = \{i_f\}$ con $i_f = (i_A, i_B)$.

5. Sia $\mathfrak{G}$ la categoria dei gruppi e sia Γ il funtore (covariante) di $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{E}$:

$$\Gamma G = \{x \mid x \in G\}$$
$$(\Gamma \sigma)\, x = \sigma x \qquad G, H \in \mathfrak{G};\ \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}}(G, H)$$
$$x \in G.$$

Sia $\mathfrak{C}$ una I-categoria. Un oggetto $F \in \mathfrak{C}^*$ sarà chiamato un *$\mathfrak{C}$-gruppo* se esiste un funtore $F' \in \mathfrak{Hom}(\mathfrak{C}, \mathfrak{G})$ tale che $F = \Gamma \circ F'$. Se F è un $\mathfrak{C}$-gruppo e $X \in \mathfrak{C}$ indicheremo ancora con FX il gruppo $F'X$.

Se $F = \Gamma \circ F'$ e $G = \Gamma \circ G'$ sono $\mathfrak{C}$-gruppi e $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^*}(F, G)$, diremo che φ è un *omomorfismo di $\mathfrak{C}$-gruppi* se esiste $\varphi' \in \mathrm{Hom}(F', G')$ tale che $\varphi_X = \Gamma \varphi'_X$ per ogni $X \in \mathfrak{C}$. I $\mathfrak{C}$-gruppi costituiscono pertanto una categoria che indichiamo con $\mathfrak{C}^\wedge$.

Sia Θ l'oggetto iniziale di $\mathfrak{C}$. Allora Θ^* è un $\mathfrak{C}$-gruppo che chiameremo il $\mathfrak{C}$-gruppo banale e indicheremo ancora con Φ; Φ è l'oggetto finale di $\mathfrak{C}^\wedge$: per ogni $F \in \mathfrak{C}^\wedge$ è $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^\wedge}(F, \Phi) = \{\varepsilon_F\}$ con

$$(\varepsilon_F)_X\, P = i_X \qquad P \in FX;\ X \in \mathfrak{C}.$$

D'altro canto Φ è anche oggetto iniziale di $\mathfrak{C}^\wedge$: per ogni $F \in \mathfrak{C}^\wedge$ si ha infatti:

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^\wedge}(\Phi, F) = \{e_F\}, \text{ ove}$$

$$(e_F)_X\, i_X = \text{Identità di } FX.$$

Per ogni $F \in \mathfrak{C}^\wedge$ siano:

$$m_F \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^*}(F \times F, F) \text{ tale che:}$$

$$(m_F)_X(P, Q) = PQ \qquad P, Q \in FX;\ X \in \mathfrak{C}$$

$$r_F \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^*}(F, F) \qquad \text{tale che}$$

$$(r_F)_X\, P = P^{-1} \qquad P \in FX;\ X \in \mathfrak{C}.$$

Si ha allora:

5.1 $$m_F \circ (m_F \times \iota_F) = m_F \circ (\iota_F \times m_F).$$

5.2 *Se $F, G \in \mathfrak{C}^\wedge$ e $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^*}(F, G)$, è*

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^\wedge}(F, G) \text{ se e solo se:}$$

$$\varphi \circ m_F = m_G \circ (\varphi \times \varphi)$$

e se questo è il caso si ha:

$$\varphi \circ e_F = e_G$$

$$\varphi \circ r_F = r_G \circ \varphi$$

5.3 $$m_F \circ (\iota_F \times e_F) = m_F \circ (e_F \times \iota_F) = \iota_F$$

5.4 $$m_F \circ (\iota_F \times r_F) \circ \delta_F = m_F \circ (r_F \times \iota_F) \circ \delta_F = e_F \circ \varepsilon_F .$$

D'altro canto ogni $F \in \mathfrak{C}^*$ per cui esistono $m_F \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^*}(F \times F, F)$, $e_F \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^*}(\Phi, F)$ ed $r_F \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^*}(F, F)$ soddisfacenti a 5.1, 5.3 e 5.4 è un $\mathfrak{C}$-gruppo.

Siano $F, G \in \mathfrak{C}^\wedge$; posto $u_{F,G} = e_G \circ \varepsilon_F$ è $u_{F,G} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^\wedge}(F, G)$; per ogni $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^\wedge}(G, H)$ $(H \in \mathfrak{C}^\wedge)$ è

$$g \circ u_{F,G} = u_{F,H}$$

e per ogni $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^\wedge}(D, F)$ $(D \in \mathfrak{C}^\wedge)$:

$$u_{F,G} \circ f = u_{D,G} .$$

Un $\mathfrak{C}$-gruppo F verrà detto *abeliano* se FX è un gruppo abeliano per ogni $X \in \mathfrak{C}$, cioè se e solo se

$$m_F = m_F \circ s_{F,F} .$$

Siano $F, G \in \mathfrak{C}^\wedge$; posto:

$$m_{F \times G} = (m_F \times m_G) \circ (\iota_F \times s_{G,F} \times \iota_G)$$
$$e_{F \times G} = e_F \times e_G$$
$$r_{F \times G} = r_F \times r_G ,$$

$F \times G$ diviene un $\mathfrak{C}$-gruppo; e si ha:

5.5 $$p_F \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^\wedge}(F \times G, F)$$
$$p'_G \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^\wedge}(F \times G, G)$$
$$\delta_F \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^\wedge}(F, F \times F)$$
$$s_{F,G} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^\wedge}(F \times G, G \times F)$$

qualunque siano $F, G \in \mathfrak{C}^\wedge$.

5.6 *Siano* $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^\Lambda}(F_1, G_1)$ *e* $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^\Lambda}(F_2, G_2)$ $(F_1, F_2, G_1, G_2 \in \mathfrak{C}^\Lambda)$. *Allora* $\varphi \times \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^\Lambda}(F_1 \times F_2, G_1 \times G_2)$.

5.7 *Il* $\mathfrak{C}$*-gruppo* F *è abeliano se e solo se* $m_F \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^\Lambda}(F \times F, F)$, *ed anche se e solo se* $r_F \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^\Lambda}(F, F)$. *Se* F *e* G *sono* $\mathfrak{C}$*-gruppi abeliani anche* $F \times G$ *è abeliano.*

Sia $A \in \mathfrak{C}$; diremo che A è un *iperoggetto* di $\mathfrak{C}$ se A^* è un $\mathfrak{C}$-gruppo; diremo poi che $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ (A e B iperoggetti) è un *morfismo di iperoggetti* se f^* è un omomorfismo di $\mathfrak{C}$-gruppi. Sia A un iperoggetto di $\mathfrak{C}$ e sia $F = A^*$; siano:

$$\mathbf{P}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, A * A) \qquad \text{tale che } \mathbf{P}_A^* = m_F;$$

$$\varepsilon_A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, \Phi) \qquad \text{tale che } \varepsilon_A^* = e_F;$$

$$\varrho_A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, A) \qquad \text{tale che } \varrho_A^* = r_F.$$

Tenendo conto di 5.1, 5.3, 5.4, si ha allora, per ogni iperoggetto A:

5.8 $$(\mathbf{P}_A * \iota_A) \circ \mathbf{P}_A = (\iota_A * \mathbf{P}_A) \circ \mathbf{P}_A$$

5.9 $$(\iota_A * \varepsilon_A) \circ \mathbf{P}_A = (\varepsilon_A * \iota_A) \circ \mathbf{P}_A = \iota_A$$

5.10 $$\mu_A \circ (\iota_A * \varrho_A) \circ \mathbf{P}_A = \mu_A \circ (\varrho_A * \iota_A) \circ \mathbf{P}_A = i_A \circ \varepsilon_A .$$

D'altro canto ogni oggetto $A \in \mathfrak{C}$ per cui esistano $\mathbf{P}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, A * A)$, $\varepsilon_A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, \Phi)$ e $\varrho_A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, A)$ soddisfacenti a 5.8, 5.9 e 5.10 è un iperoggetto; e se questo è il caso la legge di composizione in $A^* X$ (per ogni $X \in \mathfrak{C}$) è definita:

$$PQ = \mu_X \circ (P * Q) \circ \mathbf{P}_A \qquad P, Q \in A^* X;\ X \in \mathfrak{C};$$

l'identità di $A^* X$ è $i_X \circ \varepsilon_A$; infine, per ogni $X \in \mathfrak{C}$ e per ogni $P \in A^* X$ è $P^{-1} = P \circ \varrho_A$.

Da 5.2 si deduce inoltre che:

5.11 *Se,* A, B *sono iperoggetti di* $\mathfrak{C}$ *e* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ *allora* f *è un morfismo di iperoggetti se e solo se:*

$$(f * f) \circ \mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B \circ f$$

e se questo è il caso, allora:

$$\varepsilon_A = \varepsilon_B \circ f$$

$$f \circ \varrho_A = \varrho_B \circ f .$$

Un iperoggetto di $\mathfrak{C}$ verrà detto *cocommutativo se*:

$$\mathbf{P}_A = s_{A,\,A} \circ \mathbf{P}_A$$

cioè se A^* è un $\mathfrak{C}$-gruppo abeliano.

Se A e B sono iperoggetti di $\mathfrak{C}$, $A * B$ è un iperoggetto e si ha:

$$\mathbf{P}_{A*B} = (\iota_A * s_{A,B} * \iota_B) \circ (\mathbf{P}_A * \mathbf{P}_B)$$

$$\varepsilon_{A*B} = \varepsilon_A * \varepsilon_B$$

$$\varrho_{A*B} = \varrho_A * \varrho_B .$$

Tenendo conto di 5.5 si ha allora, per ogni coppia di iperoggetti.

5.12 *I morfismi j_A, j'_B e $s_{A,B}$ sono morfismi di iperoggetti.*

5.13. *Per ogni iperoggetto A, μ_A è un morfismo di iperoggetti.*

Da 5.6 si ha

5.14 *Siano A_1, A_2, B_1, B_2 iperoggetti di $\mathfrak{C}$ e siano $f: A_1 \longrightarrow B_1$ e $g: A_2 \longrightarrow B_2$ morfismi di iperoggetti. Allora $f * g$ è un morfismo di iperoggetti.*

Infine, da 5.7

5.15 *Se A è un iperoggetto allora $\mathbf{P}_A$ è un morfismo di iperoggetti se e solo se A è cocommutativo; in tal caso e solo in tal caso ϱ_A è un morfismo di iperoggetti. Se A e B sono iperoggetti cocommutativi anche $A * B$ è cocommutativo.*

Dalle considerazioni sopra svolte si deduce che gli iperoggetti di una I-categoria $\mathfrak{C}$ costituiscono una categoria che indicheremo con $\mathfrak{C}'$; $\mathfrak{C}'$ è una I-categoria ed il suo oggetto iniziale coincide con l'oggetto iniziale Φ di C.

Inoltre Φ è anche oggetto finale di $\mathfrak{C}'$. Infine:

5.16 *La categoria $\mathfrak{C}^\Lambda$ è equivalente a $(\mathfrak{C}')^\Lambda$.*

Infatti $\mathfrak{C}^\Lambda$ è antiequivalente a $\mathfrak{C}'$; poi $(\mathfrak{C}')^*$ è antiequivalente a $\mathfrak{C}'$. Inoltre $(\mathfrak{C}')^*$ coincide con $(\mathfrak{C}')^\Lambda$, onde l'asserto, C. V. D..

Supponiamo ora che $\mathfrak{C}$ sia una D-categoria. Un oggetto $F \in {}^*\mathfrak{C}$ sarà chiamato $\mathfrak{C}$-*cogruppo* se esiste $F' \in \mathfrak{Contr}(\mathfrak{C}, \mathfrak{G})$ tale che $F = \Gamma \circ F'$; se

$F = \Gamma \circ F'$ e $G = \Gamma \circ G'$ e $\varphi \in \mathrm{Hom}_{*\mathfrak{C}}(F, G)$ diremo che φ è un *omomorfismo di* $\mathfrak{C}$ *cogruppi* se esiste $\varphi' \in \mathrm{Hom}\,(F', G')$ tale che $\varphi_X = \Gamma \varphi'_X$ per ogni $X \in \mathfrak{C}$; un $\mathfrak{C}$-cogruppo F sarà chiamato *cocommutativo o abeliano* se il gruppo FX è commutativo per ogni $X \in \mathfrak{C}$.

Un oggetto A di $\mathfrak{C}$ sarà chiamato *iperoggetto* se $^*A$ è un $\mathfrak{C}$-cogruppo; l'oggetto finale Θ di $\mathfrak{C}$ è un iperoggetto e $^*\Theta$ è il $\mathfrak{C}$-cogruppo banale. Se A, B sono iperoggetti di $\mathfrak{C}$ $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ dicesi un *morfismo di iperoggetti* se $^*f$ è un omomorfismo di $\mathfrak{C}$-cogruppi.

Per ogni iperoggetto A di $\mathfrak{C}$ esistono i morfismi $\mu_A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A \times A, A)$, $i_A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Theta, A)$, $\varrho_A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, A)$ tali che

5.17 $$\mu_A \circ (\mu_A \times \iota_A) = \mu_A \circ (\iota_A \times \mu_A),$$

5.18 $$\mu_A \circ (i_A \times \iota_A) = \mu_A \circ (\iota_A \times i_A) = \iota_A\,,$$

5.19 $$\mu_A \circ (\iota_A \times \varrho_A) \circ \Delta_A = \mu_A \circ (\varrho_A \times \iota_A) \circ \Delta_A = i_A \circ \varepsilon_A\,,$$

ed ogni oggetto $A \in \mathfrak{C}$ per cui esistano μ_A, i_A e ϱ_A soddisfacenti a 5.17, 5.18 e 5.19 è un iperoggetto di A.

Poi $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ è un morfismo di iperoggetti se e solo se

$$\mu_A \circ f = \mu_B \circ (f \times f)$$

e se questo è il caso è $f \circ i_A = i_B$ e $f \circ \varrho_A = \varrho_B \circ f$.

Gli iperoggetti di $\mathfrak{C}$ costituiscono una categoria. Le considerazioni che si possono svolgere su essa sono duali di quelle sopra svolte a proposito della categoria degli iperoggetti di una I-categoria.

6. Sia $\mathfrak{C}$ una categoria dotata di una legge di composizione interna* associativa, commutativa ed unitaria con oggetto neutro O; siano μ e $\mathbf{P}$ strutture rispettivamente moltiplicativa e comoltiplicativa che rendono $\mathfrak{C}$ simultaneamente una I-categoria e una D-categoria. Ciò equivale a supporre che (cfr. 3.5 e 3.6):

a) esiste un *oggetto nullo*, cioè un oggetto simultaneamente iniziale e finale; tale oggetto coincide con l'oggetto neutro O,

b) per ogni coppia di oggetti $A, B \in \mathfrak{C}$ esiste una *somma diretta*, cioè una quintupla $(A * B, j_A, j'_B, p_A, p'_B)$ tale che $(A * B, j_A, j'_B)$ è un prodotto inverso e $(A * B, p_A, p'_B)$ è un prodotto diretto.

Siano i l'identificazione di μ, ε l'argomentazione di $\mathbf{P}$. Indichiamo con o il funtore di $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ in $\mathfrak{M}\mathfrak{C}$:

$$(A, B) \longmapsto o_{A,B} = i_B \circ \varepsilon_A$$

$$(\alpha, \beta) \longmapsto (\alpha, \beta);$$

il funtore o rende equivalenti la categoria $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ e la sottocategoria piena di $\mathfrak{M}\mathfrak{C}$ i cui oggetti sono del tipo $o_{A,B}$.

La categoria $\mathfrak{C}$ sarà detta *additiva* se esiste un isomorfismo ϱ di $I_{\mathfrak{C}}$ in sè tale che, per ogni $A \in \mathfrak{C}$:

$$o_{A,A} = \mu_A \circ (\iota_A * \varrho_A) \circ \mathbf{P}_A = \mu_A \circ (\varrho_A * \iota_A) \circ \mathbf{P}_A .$$

Tenendo conto di 5.7 e segg. si ha allora:

6.1 *Sia* $\mathfrak{C}$ *una* I *-categoria. Allora la categoria* $\mathfrak{C}''$ *degli iperoggetti cocommutativi di* $\mathfrak{C}$ *è additiva.*

La proposizione resta vera se si sostituisce la locuzione I *-categoria con* D *-categoria e la parola cocommutativi con commutativi.*

6.2 *Sia* $\mathfrak{C}$ *una categoria; le tre seguenti asserzioni sono equivalenti.*

a) $\mathfrak{C}$ *è additiva*

b) $\mathfrak{C}$ *è una* I *-categoria che coincide con la categoria dei propri iperoggetti cocommutativi.*

c) $\mathfrak{C}$ *è una* D *-categoria che coincide con la categoria dei propri iperoggetti commutativi.*

Sia $\mathfrak{C}$ una categoria additiva; siano $A, B \in \mathfrak{C}$: si ha

6.3
$$p_A \circ j_A = \iota_A \qquad p'_B \circ j_A = o_{A,B}$$

$$p_A \circ j'_B = o_{B,A} \quad p'_B \circ j'_B = \iota_B .$$

DIM. Per ogni $X \in \mathfrak{C}$ è $^*(A * B) = {}^*AX \oplus {}^*BX$, onde $^*(p_A) \circ {}^*(j_A) = \iota_{*A}$, da cui $p_A \circ j_A = \iota_A$. In modo analogo si provano le altre, C. V. D.

Con ragionamento analogo si prova inoltre:

6.4 *Siano* $C \in \mathfrak{C}$, $j_A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, C)$, $p_A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C, A)$, $j'_B \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B, C)$, $p'_B \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C, B)$ *tali che* $p_A \circ j_A = \iota_A$, $p'_B \circ j_A = o_{A,B}$, $p_A \circ j'_B = o_{B,A}$, $p'_B \circ j'_B = \iota_B$; *allora* $(C, j_A, j'_B, p_A, p'_B)$ *è somma diretta della coppia* (A, B).

Siano $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ categorie addittive e sia F un funtore covariante (rispettivamente contravariante) di $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{D}$. Diremo che F è addittivo se:

a) $$F(A * B) \cong FA * FB$$

$$F(f * g) \cong Ff * Fg$$

quali che siano gli oggetti $A, B \in \mathfrak{C}$ ed i morfismi f, g;

b) $$FO = O$$

6.5 Teorema. *Siano $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ categorie additive e sia F un funtore covariante di $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{D}$.*

Allora F è addittivo se e solo se

$$F(P + Q) = FP + FQ \qquad P, Q \in \operatorname{Hom}(A, X),$$

$$A, X \in \mathfrak{C}.$$

La proposizione resta vera se si sostituisce la parola covariante con contravariante.

Dim. Sia $F(P + Q) = FP + FQ$ ogniqualvolta uno dei due membri abbia significato. Posto $A = FO$, si ha $o_{A,A} = i_A \circ \varepsilon_A = F(i_0 \circ \varepsilon_0) = F\iota_0 = \iota_A$; d'altro canto $\varepsilon_A \circ i_A = \iota_0$, onde A e O sono isomorfi. Conseguentemente si ha:

$$F i_A = i_{FA}\,;\; F\varepsilon_A = \varepsilon_{FA}\,;\; Fo_{A,B} = o_{FA,\,FB}\;(A, B \in \mathfrak{C}).$$

Per ogni coppia di oggetti $A, B \in \mathfrak{C}$ si ha allora:

$$Fp_A \circ Fj_A = \iota_{FA} \quad , \qquad Fp'_B \circ Fj_A = o_{FA,\,FB}$$

$$Fp_A \circ Fj'_B = o_{FB,\,FA}\,, \qquad Fp'_B \circ Fj'_B = \iota_{FB}\,,$$

e pertanto $(F(A * B), Fj_A, Fj'_B, Fp_A, Fp'_B)$ è una somma diretta della coppia (FA, FB). Possiamo perciò identificare $F(A * B)$ con $FA * FB$ ponendo:

$$Fp \;\; = p_{FA}\,, Fj_A = j_{FA}\,, Fp'_B = p'_{FB}\,, Fj'_B = j'_{FB}\,.$$

Siano poi $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, A')$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B, B')$; si ha allora:

$$F(f * g) \circ j_{FA} = F(j_{A'} \circ f) = j_{FA'} \circ Ff,$$

$$F(f * g) \circ j'_{FB} = F(j_{B'} \circ g) = j_{FB'} \circ Fg,$$

onde $F(f * g) = Ff * Fg$ ed F risulta additivo.

Sia F additivo. Per ogni coppia di oggetti $A, B \in \mathfrak{C}$ si ha allora

$$F\varepsilon_A = \varepsilon_{FA}, \; Fi_B = i_{FB}, \; Fo_{A,B} = o_{FA,FB},$$

onde

$$Fj_A = F(\iota_A * i_B) = \iota_{FA} * i_{FB} = j_{FA}$$

e analogamente

$$Fp_A = p_{FA}, \; Fj'_B = j'_{FB}, \; Fp'_B = p'_{FB}.$$

Conseguentemente, per ogni $A \in \mathfrak{C}$ si ha:

$$(F\mu_A) \circ j_{FA} = \iota_{FA}, \; (F\mu_A) \circ j'_{FA} = \iota_{FA},$$

onde $F\mu_A = \mu_{FA}$; similmente:

$$p_{FA} \circ (F\mathbf{P}_A) = \iota_{FA}, \; p'_{FA} \circ (F\mathbf{P}_A) = \iota_{FA},$$

e pertanto $F\mathbf{P}_A = \mathbf{P}_{FA}$.

Siano allora $P, Q \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ $(A, B \in \mathfrak{C})$; si ha:

$$F(P + Q) = F[\mu_B \circ (P * Q) \circ \mathbf{P}_A] = \mu_{FB} \circ (FP * FQ) \circ \mathbf{P}_{FA} = FP + FQ.$$

Con ragionamento del tutto analogo si prova l'asserto sotto l'ipotesi che F sia un funtore contravariante, C. V. D..

Siano $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{D}$ categorie additive e sia $\mathfrak{F}$ la sottocategoria piena di $\mathfrak{Hom}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$ i cui oggetti sono funtori additivi; ponendo:

$$(F * G)\, A = FA * GA \qquad F, G \in \mathfrak{F}, \qquad A \in \mathfrak{C}$$

$$(\mu_F)_A = \mu_{FA}$$

$$(\mathbf{P}_F)_A = \mathbf{P}_{FA}$$

$\mathfrak{F}$ diviene una categoria addittiva il cui oggetto nullo è il funtore

$$A \longmapsto o$$

$$f \longmapsto \iota_0 .$$

Similmente la categoria $\mathfrak{R}$ sottocategoria piena di $\mathfrak{Contr}$ $(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$ i cui oggetti sono funtori addittivi diviene una categoria addittiva ponendo:

$$(F * G)\, A = FA * GA$$

$$(\mu_F)_A = \mathbf{P}_{FA}$$

$$(\mathbf{P}_F)_A = \mu_{FA} ;$$

l'oggetto nullo di $\mathfrak{R}$ coincide con l'oggetto nullo della categoria $\mathfrak{F}$ sopra considerata.

Infine se $\mathfrak{C}$ è una categoria addittiva, la categoria $\mathfrak{MC}$ dei morfismi di $\mathfrak{C}$ diviene addittiva ponendo

$$\left.\begin{aligned} \mu_f &= (\mu_A , \mu_B) \\ \mathbf{P}_f &= (\mathbf{P}_A , \mathbf{P}_B) \end{aligned}\right. \qquad f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}} (A, B)$$

L'oggetto nullo di $\mathfrak{MC}$ è ι_0.

7. Sia $\mathfrak{C}$ una categoria addittiva (²) e sia $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}} (A, B)$. Ricordiamo che si chiama *nucleo* di f e si indica con ker f una coppia (N, n) con $N \in \mathfrak{C}$ ed $n \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}} (N, A)$ morfismo iniettivo tale che:

a) $f \circ n = o_{N,\, B}$

b) se $M \in \mathfrak{C}$ e $m \in \mathrm{Hom}\,(M, A)$ sono tali che $f \circ m = o_{M,\, B}$, allora esiste $m' \in \mathrm{Hom}\,(M, N)$ tale che $m = n \circ m'$.

Il nucleo quando esiste è unico a meno di isomorfismi in $\mathfrak{MC}$.

Si chiama *conucleo* di f una coppia (C, c) con $C \in \mathfrak{C}$ e $c \in \mathrm{Hom}\,(B, C)$ morfismo surgettivo tale che:

a) $c \circ f = o_{A,\, C}$

b) se $D \in \mathfrak{C}$ e $d \in \mathrm{Hom}\,(B, D)$ sono tali che $d \circ f = o_{A,\, D}$, allora esiste $d' \in \mathrm{Hom}\,(C, D)$ tale che $d = d' \circ c$.

Anche il conucleo se esiste è unico a meno di isomorfismi.

Sia $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}} (A, B)$ e siano (N, n) e (C, c) rispettivamente nucleo e conucleo di f; si chiama *coimmagine* di f il conucleo (H, h) di n; si chiama invece *immagine* di f il nucleo (K, k) di c.

(²) In questo n. supporremo che gli oggetti della categoria $\mathfrak{C}$ formino un insieme del prefissato universo.

Ricordiamo altresì che una categoria addittiva si chiama abeliana se:

a) ogni morfismo possiede nucleo e conucleo,

b) per ogni morfismo f esistono $H \in \mathfrak{C}$, $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, H)$, $f'' \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(H, B)$ tali che: $f = f'' \circ f'$, (H, f') è la coimmagine di f e (H, f'') è l'immagine di f.

Con $\mathfrak{A}$ indichiamo ancora la categoria dei gruppi abeliani; $\mathfrak{A}$ è abeliana.

Sia $\mathfrak{C}$ una categoria addittiva; con $\mathfrak{H}$ indichiamo la categoria dei funtori addittivi covarianti di $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{A}$; con $\mathfrak{K}$ la categoria dei funtori addittivi contravarianti di $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{A}$. Per ogni $A \in \mathfrak{C}$ possiamo interpretare A^* ed $^*A$ come funtori (rispettivamente covariante e contravariante) di $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{A}$. Con tale convenzione $\mathfrak{C}^*$ risulta una sottocategoria piena di $\mathfrak{H}$, poichè A^* è un funtore addittivo per ogni $A \in \mathfrak{C}$ come subito si verifica. Similmente $^*\mathfrak{C}$ risulta una sottocategoria piena di $\mathfrak{K}$.

Siano $F, G \in \mathfrak{H}$ (rispettivamente $F, G \in \mathfrak{K}$) e sia $\varphi \in \mathrm{Hom}(F, G)$; sia N il funtore (addittivo) di $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{A}$ tale che:

$$NX = \ker \varphi_X \quad \text{per ogni} \quad X \in \mathfrak{C};$$

$$Nf = \text{Restrizione di } Ff \text{ ad } NX$$

$$\text{per ogni } f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)\ (X, Y \in \mathfrak{C}).$$

Infine sia ν il morfismo di N in F tale che ν_X è l'immersione di NX in FX per ogni $X \in \mathfrak{C}$.

Allora (N, ν) *è il nucleo di* φ. Per rendere evidente questa proposizione è sufficiente provare il seguente:

7.1 LEMMA. *Siano* $F, G \in \mathfrak{H}$ (*rispettivamente* $F, G \in \mathfrak{K}$) *e sia* $\varphi \in \mathrm{Hom}(F, G)$. *Se* φ_X *è iniettivo per ogni* $X \in \mathfrak{C}$ *allora* φ *è iniettivo; se* φ_X *è surgettivo per ogni* $X \in \mathfrak{C}$ *allora* φ *è surgettivo.*

DIM. La dimostrazione è identica per i due casi $F, G \in \mathfrak{H}$ e $F, G \in \mathfrak{K}$; supponiamo per fissare le idee $F, G \in \mathfrak{H}$.

Sia φ_X iniettivo per ogni $X \in \mathfrak{C}$; sia $Z \in \mathfrak{H}$ e siano $\xi_1, \xi_2 \in {}^*FZ$ tali che $\varphi \circ \xi_1 = ({}^*\varphi)_Z\, \xi_1 = ({}^*\varphi)_Z\, \xi_2 = \varphi \circ \xi_2$.

Per ogni $X \in \mathfrak{C}$ e per ogni $P \in ZX$ si ha allora $\varphi_X \circ (\xi_1)_X P = \varphi_X \circ (\xi_2)_X P$; ma essendo φ_X iniettivo è $(\xi_1)_X P = (\xi_2)_X P$, onde $\xi_1 = \xi_2$. Pertanto $({}^*\varphi)_Z$ è iniettiva per ogni $Z \in \mathfrak{H}$, e φ è iniettivo.

Sia φ_X surgettivo per ogni $X \in \mathfrak{C}$. Sia $Z \in \mathfrak{H}$ e siano $h_1, h_2 \in G^*Z$ tali che $h_1 \circ \varphi = (\varphi^*)_Z\, h_1 = (\varphi^*)_Z\, h_2 = h_2 \circ \varphi$.

Per ogni $X \in \mathfrak{C}$ e per ogni $P \in FX$ si ha allora $(h_1)_X \circ \varphi_X P = (h_2)_X \circ \varphi_X P$; da cui, essendo φ_X surgettiva, $(h_1)_X\, Q = (h_2)_X\, Q$ per ogni $Q \in GX$. Ne segue $h_1 = h_2$, onde $(\varphi^*)_Z$ è iniettivo per ogni $Z \in \mathfrak{H}$, e φ è surgettivo, C. V. D..

Con le stesse notazioni si ha poi:

7.2 TEOREMA — *La categoria* $\mathfrak{H}$ *è abeliana.*

DIM. Abbiamo già provato che ogni morfismo di $\mathfrak{H}$ possiede nucleo.

Siano $F, G \in \mathfrak{H}$ e sia ψ un morfismo di G in F tale che ψ_X sia iniettivo per ogni $X \in \mathfrak{C}$; poniamo $(F/G)X = FX/GX$ e indichiamo con σ_X l'omomorfismo (di gruppi) naturale di FX su $(F/G)X$.

Sia $Y \in \mathfrak{C}$ e sia $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$; se $P, Q \in FX$ sono tali che $P - Q \in GX$, allora $(Ff)(P - Q) = (Gf)(P - Q) = (Gf)P - (Gf)Q \in GY$. Pertanto esiste un omomorfismo $(F/G)f$ di $(F/G)X$ in $(F/G)Y$ tale che $(F/G)f \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ Ff$. L'applicazione

$$X \mapsto F/G\,X;\ f \mapsto F/G f$$

è allora un funtore covariante di $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{A}$ e $\sigma = (\sigma_X)_{X \in \mathfrak{C}}$ è un morfismo funtoriale. Inoltre $F/G \in \mathfrak{H}$; infatti se $X, Y \in \mathfrak{C}$ è $F/G(X * Y) = F/G\,X \oplus F/GY$; poi $F/G(f * g) = F/G f \oplus F/Gg$ qualunque siano i morfismi f e g; infine $(F/G)\,O = O$.

La coppia $(F/G, \sigma)$ è il conucleo di ψ come subito si verifica tenendo conto anche di 7.1.

Ciò premesso sia $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(F, G)$ un morfismo qualsiasi e sia (N, ν) il nucleo di φ. Indichiamo con φF il funtore additivo di $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{H}$ tale che $(\varphi F)X = \varphi_X FX$ per ogni $X \in \mathfrak{C}$ e $(\varphi F)f =$ restrizione di Gf a $(\varphi F)X$, qualunque sia il morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$.

Si ha $\varphi F = F/N$. Sia λ il morfismo di immersione di φF in G e sia infine γ il morfismo naturale di G in $G/\varphi F$; la coppia $(G/\varphi F, \gamma)$ è allora il conucleo di φ.

Inoltre detto φ' il morfismo di F in φF tale che $\varphi'_X P = \varphi_X P$ per ogni $P \in FX$ e per ogni $X \in \mathfrak{C}$, è $\varphi = \lambda \circ \varphi'$; la coppia $(\varphi F, \varphi')$ è la coimmagine di φ e la coppia $(\varphi F, \lambda)$ è l'immagine di φ.

Pertanto $\mathfrak{H}$ è abeliana, C. V. D..

In modo del tutto analogo si prova il seguente:

7.3 TEOREMA — *La categoria* $\mathfrak{K}$ *è abeliana.*

Le proposizioni che seguono danno una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del nucleo e del conucleo di un morfismo f di una categoria additiva.

7.4 TEOREMA *Sia* $\mathfrak{C}$ *una categoria additiva e sia* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ *un morfismo di* $\mathfrak{C}$; *sia* (N, ν) *il nucleo di* $^*f$. *Allora* f *possiede nucleo se e solo se* N *è rappresentabile; e se questo è il caso posto* (C, n) *il nucleo di* f, *si ha* $N = {}^*C$, $\nu = {}^*n$.

DIM. Sia N rappresentabile e siano $C \in \mathfrak{C}$ tale che $^*C = N$ e $n \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C, A)$ tale che $^*n = \nu$. Allora $f \circ n = o_{C,B}$. Se poi $m \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(D, A)$ $(D \in \mathfrak{C})$ è tale che $f \circ m = o_{D,B}$, allora $^*f \circ {}^*m = o$, onde esiste $\tau \in \mathrm{Hom}_{*\mathfrak{C}}(^*D, {}^*C)$ tale che $^*m = \nu \circ \tau$; pertanto detto m' il morfismo di D in C tale che $^*(m') = \tau$, si ha $m = n \circ m'$; (C, n) risulta perciò il nucleo di f.

Viceversa sia (C, n) il nucleo di f; per ogni $X \in \mathfrak{C}$ possiamo identificare gli elementi di $^*CX$ con i corrispondenti elementi di $^*AX$. Sia $P \in {}^*CX$; allora $f \circ P = (^*f)_X P = 0$, onde $P \in NX$; d'altro canto se $P \in NX$, è $(^*f)_X P = f \circ P = 0$, onde $P \in {}^*CX$; ne segue $N = {}^*C$, C. V. D..

In modo del tutto analogo si prova il seguente:

7.5 TEOREMA. *Sia $\mathfrak{C}$ una categoria additiva, sia $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ un morfismo di $\mathfrak{C}$ e sia (N, ν) il nucleo di f^*. Allora f ha conucleo se e solo se N è rappresentabile. E se questo è il caso posto (C, c) il conucleo di f si ha $C^* = N$, $c^* = \nu$.*

Infine le seguenti proposizioni danno una condizione sufficiente per l'esistenza del nucleo e del conucleo di un morfismo f di una categoria additiva.

7.6 TEOREMA. *Sia $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ e sia (H, γ) il conucleo di $^*f$. Allora se H è rappresentabile f ha conucleo.*

DIM. Siano $C \in \mathfrak{C}$ tale che $^*C = H$ e $c \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B, C)$ tale che $^*c = \gamma$. Si ha allora $c \circ f = 0_{A,C}$.

Se poi $D \in \mathfrak{C}$ e $d \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B, D)$ sono tali che $d \circ f = 0_{A,D}$, allora $^*d \circ {}^*f = 0$, onde esiste $\lambda \in \mathrm{Hom}_{*\mathfrak{C}}(H, {}^*D)$ tale che $^*d = \lambda \circ \gamma$; detto d' il morfismo di C in D tale che $^*(d') = \lambda$ si ha $d = d' \circ c$. Pertanto (C, c) è il conucleo di f, C. V. D..

In modo del tutto analogo si prova il seguente:

7.7 TEOREMA. *Sia $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ e sia (H, γ) il conucleo di f^*. Allora se H è rappresentabile f ha nucleo.*

Le proposizioni 7.6 e 7.7 non sono invertibili.

Pisa, Università

BIBLIOGRAFIA

1 - BARSOTTI I., *Risultati e problemi nella teoria delle varietà gruppali*; Atti Convegno Internaz. Geom. Algebrica, Taormina, Nov. 1958.

2 - BARSOTTI I., *On Witt vectors and periodic group-varieties*; Illinois Journ. of Math., 2, 1958, p. 99.

3 - BARSOTTI I., *Analytical methods for abelian varieties in positive characteristic*; Colloque sur la théorie des Groupes Alg., Bruxelles 1962.

4 - BARSOTTI I., *Metodi analitici per varietà abeliane in caratteristica positiva*, cap. 1, 2; Ann. Scuola Norm. Sup. 18, 1964 p. 1; cap. 3, 4 ibidem 19, 1965 p. 277.

5 - CARTIER P., *Théorie differentielle des groupes algébriques*; Comptes Rend. Ac. Sc., Paris 244, 1957, p. 540.

6 - CARTIER P., *Groupes algébriques et groupes formels*; Colloque sur la Théorie des Groupes Algébriques, Bruxelles, 1962.

7 - DIEUDONNÉ J., *Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique*, $p > 0$; Comm. Math. Helv., 28, 1954, p. 87.

8 - DIEUDONNÉ J., *Sur les groupes de Lie algébriques sur un corps de caractéristique* $p > 0$; Rend. Circ. Mat. Palermo, 1, 1952, p. 126.

9 - DIEUDONNÉ J., *Witt groups and hyperexponential groups*; Mathematika, 2, 1955, p. 21.

10 DIEUDONNÉ J., *On the Artin-Hasse exponential series*; Proc. Amer. Math. Soc., 8, 1957, p. 210.

11 - DIEUDONNÉ J., *Lie groups and Lie hyperalgebras over a field of characteristic* $p > 0$ (IV); Amer. Journ. of Math., 77, 1955, p. 429.

12 - DIEUDONNÉ J., *Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caracteristique* $p > 0$ (V); Bull. Soc. Math. de France, 84, 1956, p. 207.

13 - DIEUDONNÉ J., *Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caracteristique* $p > 0$ (VII), Math. Ann. 134, 1957, p. 114.

14 - DIEUDONNÉ J., *Hiperalgèbres et groupes formels*; note ciclostilate; Institut des Hautes Études Scient., 1962.

15 - ECKMANN B. and, HILTON P. J. *Group-like Structures in General Categories* I, Math. Annalen 145, p. 227 (1962).

16 - GABRIEL P., *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France, 90, 1962, p. 323.

17 - GROTHENDIECK A. *Elément de Géometrie Algebrique* III, Publ. Math. I. H. E. S. No. 11, Paris, 1961.

18 - GROTHENDIECK A. *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohôku Math. Journ. 9, 1957, p. 119.

19 - LAZARD M., *Groupes analytiques* p-*adiques*, I. H. E. S., No. 26, Paris, 1965.

20 - MANIN J, K *teorii abelevich mnogoobraziy nad polem konecnoy charakteristiki*; Izv. Akad. Nauk. S. S. S. R. 26, 1962, p. 281.

21 - MANIN J., *On the classification of formal Abelian groups*, (Russo) Doxl. Akad. Nauk. 144, 1962 p. 490.

22 - SERRE J. P., *Groupes algébriques et corps de classes*; Act. Scient. et ind., 1959.