Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Iacopo Barsotti

Metodi analitici per varietà abeliane in caratteristica positiva. Capitolo 6

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 20, nº 1 (1966), p. 101-136

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1966_3_20_1_101_0>

METODI ANALITICI PER VARIETÀ ABELIANE IN CARATTERISTICA POSITIVA. CAPITOLO 6.

IACOPO BARSOTTI (1)

I capitoli 1 e 2 sono pubblicati in questi stessi Annali, vol. 18, 1964, pp. 1-25; i capitoli 3 e 4 nel vol. 19, 1965, pp. 277-330; il capitolo 5 nel vol. 19, 1965, pp. 481-512; la numerazione prosegue quella dei capitoli precedenti; i numeri in parentesi quadra rimandano alla bibliografia posta alla fine di questo capitolo.

CAPITOLO 6.

Varietà abeliane.

58. Sia k, al solito, un corpo algebricamente chiuso di caratteristica $p \neq 0$, e sia A una varietà abeliana (sempre nel seguito supposta non singolare) su k; sia $C = k(A)$ il corpo delle funzioni razionali su A. Per « varietà » intendiamo una varietà proiettiva, insieme dei propri punti; e con « punto » intendiamo un punto a coordinate in k, ossia un omomorfismo $P : x \longrightarrow x(P)$ di un sottoinsieme $Q(P/A)$ di $k(A)$ su k; $Q(P/A)$ è l'anello quoziente di P su A. L'operazione di composizione fra punti di A sarà indicata con $+$; e l'applicazione razionale di $A \times A$ su A che dà l'operazione sarà indicata con $\mu = \mu_A$: se $P + Q = R$, diremo anche che $\mu_A(P \times Q) = R$. Il « trasposto » di μ_A è un isomorfismo $\mathbf{P} = \mathbf{P}_C$ del corpo C sul corpo quoziente di $C \otimes_k C$, ma noi diremo brevemente « di C su $C \otimes C$ »; più precisamente, per $x \in C$ e P, $Q \in A$ si ha $x(\mu(P \times Q)) = x(P + Q) = (\mathbf{P}x)(P \times Q)$, ove $x(P)$ indica il valore, in k, che x assume in P quando tale valore esiste. Il $\mathbf{P}_C$ soddisfa formalmente alle proprietà di

Pervenuto alla Redazione il 17 Settembre 1965.

(1) Lavoro parzialmente finanziato dal grant AFEOAR 65-42. Le spese di stampa dei capitoli 3, 4, 5 sono state sostenute dal Centro Ricerche Fisica e Matematica di Pisa.

un coprodotto commutativo (n⁰ 19), la cui coidentità è data da $\varepsilon_C x = x(O)$ (ove O è il punto zero su A), e la cui inversione è la ϱ_C data da $(\varrho_C x)(P) = x(-P)$.

Un corpo C (di funzioni algebriche su k), costruito come sopra, insieme a $\mathbf{P}_C$, ed agli ε_C, ϱ_C che risultano univocamente determinati, sarà detto un *corpo abeliano*; esso determina univocamente, a meno di isomorfismi, la varietà abeliana A tale che $C = k(A)$: essa è un modello proiettivo minimo, non singolare, di C su k. La corrispondenza $A \longleftrightarrow C$ è un funtore contravariante, e gli omomorfismi si comportano come richiede la teoria dei funtori: un omomorfismo α di A su una varietà abeliana A' è definito da un ente $\tilde{\alpha}$, che chiameremo *omomorfismo* di $C' = k(A')$ su $C = k(A)$, nel modo seguente: $x(\alpha P) = (\tilde{\alpha} x)(P)$ per $x \in C'$ e $P \in A$; in realtà $\tilde{\alpha}$ è un omomorfismo, su C, dell'anello locale $Q(\alpha A/A')$ dell'immagine αA considerata come sottovarietà di A'; e il nucleo di tale omomorfismo è l'ideale massimo $M(\alpha A/A')$ di $Q(\alpha A/A')$. La somma di omomorfismi di A è definita nel modo solito: $(\alpha + \beta)P = \alpha P + \beta P$; quella di omomorfismi di C è definita dualmente: $(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})x = \mu_C(\tilde{\alpha} \otimes \tilde{\beta})\mathbf{P}_C x$, che è analoga alla 3.12.

59. Sia A varietà abeliana su k, di dimensione n; indicheremo con $\mathcal{G}A$ il gruppo additivo dei $P \in A$ tali che $p^i P = O$ per i elevato; se $C = k(A)$, ad ogni $P \in A$ corrisponde un'applicazione razionale $Q \longrightarrow Q - P$ di A su A; il trasposto di questa applicazione è un'applicazione σ_P di C su tutto C; tale σ_P è un automorfismo di C come k-algebra, dato quindi da $(\sigma_P x)(Q) = x(Q - P)$ per ogni $x \in C$, e per punti generici Q di A. Si noti che se $R \in A$, si ha $\sigma_P Q(R/A) =$ {*insieme dei* $\sigma_P x$ *per* x *tale che* $x(R) \in k$} $=$ {*insieme degli* $y \in C$ *tali che* $y(R + P) \in k$} $= Q(R + P/A)$; per questo il punto $R + P$ viene talvolta indicato con $\sigma_P R$.

Indicheremo con $\mathcal{G}C$ il gruppo moltiplicativo dei σ_P quando P percorre $\mathcal{G}A$; se p^f è il grado ridotto dell'endomorfismo $p\iota$ di A, ossia se $p^f = [C : p\iota\, C]_s$ (parte separabile), f sarà chiamato la *codimensione separabile* di A, o di C, ed è ben noto che allora $\mathcal{G}A$ è isomorfo ad $H \oplus \ldots \oplus H$ (f addendi), ove $H = \operatorname{cov} C_p$; il punto di $\mathcal{G}A$ che corrisponde all'elemento $h = (h_1, \ldots, h_f)$ ($h_i \in H$) verrà indicato con P_h, mentre si porrà $\sigma_h = \sigma_{P_h}$. Definiremo:

$$S = S(A) = S(C) = \bigcap_h Q(P_h/A); \tag{6.1}$$

se k non è numerabile, esiste qualche sezione iperpiana di A che non contiene nessun P_h; quindi in tal caso S contiene uno degli anelli affini di cui C è corpo quoziente; ne segue che gli $M_h = S \cap M(P_h/A)$ sono ideali massimali distinti di S. Ma allora questa asserzione resta vera anche se k è numerabile.

Si doti S della topologia S-lineare un cui sistema fondamentale di intorni dello zero è dato dai prodotti di potenze degli M_h, e si indichi con $R = R(A)$ il completamento di S secondo tale topologia; per ogni h vi è un omomorfismo canonico α_h di R sul completamento S_h di S secondo la topologia M_h-adica; ed S_h coincide col completamento dell'anello locale $Q(P_h/A)$ secondo la propria topologia di anello locale. Dato un $x \in S$, e dati gli interi positivi $r, r_1, \dots, r_l$, e gli elementi distinti $h, h_1, \dots, h_l$ di $H \oplus \dots \oplus H$, è possibile trovare un $y \in S$ che soddisfa le $y \equiv x \pmod{M_h^r}$, $y \equiv 0 \pmod{M_{h_1}^{r_1} \dots M_{h_l}^{r_l}}$; ciò mostra che $\alpha_h R = S_h$; in modo analogo si dimostra che un $x \in R$ è completamente determinato da tutti gli $\alpha_h x$, e che questi possono essere assegnati arbitrariamente, ossia che: dato un $x_h \in S_h$ per ogni h, esiste un (solo) $x \in R$ tale che $\alpha_h x = x_h$ per ogni h. Si conclude che R è isomorfo alla somma diretta completa di tutti gli S_h; se allora e_h è l'identità di S_h, e se R' è la somma diretta completa di tutti i ke_h, l'essere ogni S_h bicontinuamente isomorfo ad S_0 comporta che R è bicontinuamente isomorfo ad $R' \mathbin{\overline{\times}} S_0$. Il $\mathbf{P}_C$ induce un isomorfismo continuo $\mathbf{P}_R$ di R su $R \mathbin{\overline{\times}} R$, che a sua volta induce, come è noto, un $\mathbf{P}_{S_0}$; esso induce anche un $\mathbf{P}_{R'}$ dato da $\mathbf{P}e_h = \sum_{i+j=h} e_i \mathbin{\overline{\times}} e_j$: infatti $\mathbf{P}e_h$ deve essere un automodulo di $R \mathbin{\overline{\times}} R$; se $\mathbf{P}e_h = \sum_{ij} x_{ij}\, e_i \mathbin{\overline{\times}} e_j$, con $x_{ij} \in S_0 \mathbin{\overline{\times}} S_0$, ciò dà intanto che ogni x_{ij} è o 0, o 1; poi, $\mathbf{P}e_h$ deve assumere in $P_i \times P_j$ il valore che e_h assume in $P_i + P_j = P_{i+j}$; ma $e_h(P_{i+j}) = \delta_{h,\, i+j}$, e quindi $x_{ij}(P_i \times P_j) = \delta_{h,\, i+j}$, onde appunto $x_{ij} = \delta_{h,\, i+j}$, come annunciato.

È così stabilito che R' è un ipercampo isomorfo ad $R_{0,1} \mathbin{\overline{\times}} \dots \mathbin{\overline{\times}} R_{0,1}$ (f fattori se f è la codimensione separabile di C) (cfr. 3.27 e 3.13); poichè inoltre $p\iota_C$ è un omomorfismo che, esteso ad S_0, ha nucleo 0, S_0 è un ipercampo nel senso di MC (equidimensionale nel senso di MC), ossia un ipercampo inseparabile (cfr. 3.40); la componente R' dell'ipercampo R non è altro che R_t, secondo le notazioni del capitolo 3; invece $S_0 = R_r \mathbin{\overline{\times}} R_\pi$, ed S_0 ha dimensione $n = \dim A$ come anello locale; si sa anzi che R_π, componente logaritmica di R, ha dimensione f (cfr. l'asserzione 4 del 4.3 di [1], oppure il (2.2) di [2]).

L'ipercampo R sarà chiamato d'ora in poi il *completamento* di C. Il cocampo D duale di R sarà il prodotto tensoriale del D_π duale di R_t, e del $D_t \mathbin{\overline{\times}} D_r$ duale di $R_r \mathbin{\overline{\times}} R_\pi$; gli elementi di $D_t \mathbin{\overline{\times}} D_r$, interpretati come endomorfismi continui del k-modulo $R_r \mathbin{\overline{\times}} R_\pi$ (cfr. n^0 21 e 3.17), sono le iperderivazioni invarianti di $R_r \mathbin{\overline{\times}} R_\pi$ (cfr. 3.18, 3.19); le loro restrizioni a C applicano C in sè, come si è già visto nel lavoro [1] sopracitato, e sono le iperderivazioni invarianti di C (anche dette « su A »). Quanto a D_π, una sua base è data dagli f_h descritti al 3.26, ove ora $h = (h_1, \dots, h_f)$; il modo in cui essi operano sugli e_h è descritto nel 3.29, e mostra che $(f_h\, e_l)(P_j) = \delta_{l-h,\,j} = \delta_{l,\,h+j} = e_l(P_j + P_h)$, cosicchè la restrizione dell'operatore f_h a C coincide con $\sigma_{-h} = \sigma_h^{-1}$.

60. Si mantengano le notazioni del numero precedente; è noto (cfr. per es. il 2.5 di [1]) che $p\iota_O = \pi_O\, t_O = t_O\, \pi_O$, ove t_O, π_O sono isomorfismi di C su C (o semi-isomorfismi quando C è considerato come una k-algebra), e $\pi_O = \pi$; inoltre $[C : \pi_O\, C] = [C : t_O\, C] = p^n$.

Dico che $\bigcap_0^\infty{}_i\,(t_O^i\, M_0)\, S = 0$, e che quindi i $(t_O^i\, M_0)\, S$ formano un sistema fondamentale di intorni dello 0 per una topologia S-lineare di S. Il risultato sarà vero se è vero sotto l'ulteriore ipotesi che A sia semplice; ora, sotto questa ipotesi si possono dare due casi:

1. $f > 0$; in tal caso $\bigcap_0^\infty{}_i\,(t_O^i\, M_0)\, S \subseteq \bigcap_h M_h$, e questo è $= 0$ perchè se contenesse un ideale non nullo, il radicale di tale ideale determinerebbe una sottovarietà abeliana propria di dimensione positiva di A, assurdo;

2. $f = 0$, cosicchè $S = Q(O/A)$; in tal caso R è ipercampo radicale, e perciò ogni potenza di $p\iota_O$ divide qualche potenza di t_O; ne segue che $\bigcap_0^\infty{}_i\,(t_O^i\, M_0)\, S = \bigcap_0^\infty{}_i\,(p^i\, \iota_O\, M_0)\, S = \bigcap_0^\infty{}_i\,(\pi^i\, M_0)\, S = 0$.

La topologia così definita su S è meno fina della topologia naturale di S usata nel n^0 59, e sarà detta la *t-topologia*. Sia ${}^tR$ (notazione mantenuta nel seguito) il t-completamento di S; vi è un omomorfismo continuo canonico σ di R su ${}^tR$; intendiamo dimostrare che:

6.2 LEMMA. *Nelle notazioni precedenti, il nucleo di σ è $R_\pi^+ R$, e la restrizione di σ a $Z = R_t \mathbin{\overline{\times}} R_r$ è un isomorfismo bicontinuo di Z su tutto ${}^tR$.*

DIM. Si sa che $R_\pi^+ R$ è generato, come ideale, dagli elementi canonici y di R che soddisfano la $t_R\, y = y$; sia $y = \lim_{i\to\infty} y_i$, con $y_i \in S$; allora $y = \lim_{i\to\infty} t^j\, y_i$ per ogni j; per ogni intorno U dello 0 in R, e per ogni j, esiste un $i(j)$ tale che $y - t^j\, y_{i(j)} \in U$; quindi $\lim_{j\to\infty} t^j\, y_{i(j)} = y$, ma $t\text{-}\lim_{j\to\infty} t^j\, y_{i(j)} = 0$, cosicchè $\sigma y = 0$ (qui, t-lim significa lim nella t topologia). Reciprocamente, sia $y \in R$ tale che $\sigma y = 0$, e sia $y = \lim_{i\to\infty} y_i$, $y_i \in S$; si può supporre $y_i \in (t^i\, M_0)\, S$; allora $y_i \in (t^i\, R_t^+)\, R + (t^i\, R_r^+)\, R + R_\pi^+\, R$. Dato j, esiste un $i > j$ tale che $y - y_i \in (t^j\, R_t^+)\, R + (t^j\, R_r^+)\, R + (\pi^j\, R_\pi^+)\, R$; perciò $y \in (t^j R_t^+)\, R + (t^j\, R_r^+)\, R + R_\pi^+\, R$ per ogni j, e infine $y \in R_\pi^+\, R$.

Dimostriamo ora la seconda asserzione: che la restrizione di σ a Z sia un isomorfismo discende da quanto precede. Sia poi $y \in {}^tR$, e $y = t\text{-}\lim_{i \to \infty} \sigma y_i$, $y_i \in S$ (si ricordi che la restrizione di σ ad S è per definizione l'isomorfismo identico); dato che $S \subset R$, si esprima ogni y_i come serie di potenze in un insieme regolare di parametri di R_π, a coefficienti in $R_t \overline{\times} R_r$, e sia y'_i il coefficiente di 1. Dato i, per h elevato t^h_Z è divisibile per $p^i \iota_Z$; e poi, per j elevato si deve avere $y_j - y_{j+1} \in t^h_R R^+$, onde $y'_j - y'_{j+1} \in [t^h(R_t \overline{\times} R_r)^+](R_t \overline{\times} R_r) = t^h_Z Z^+ \subseteq p^i \iota_Z Z^+ \subseteq p^i \iota_R R^+$. Quindi la $j \to y'_j$ è di Cauchy in R, e il suo limite y' è tale che $\sigma y' = y$, dato che $\sigma y'_i = y_i$, C.V.D..

Oltre alle due topologie usate, vi è in S la topologia un cui sistema fondamentale di intorni dello 0 è dato dai $(\pi^i_C M_0)S$; questa non è altro che la topologia M_0-adica, che verrà perciò anche chiamata la *π-topologia*; si è già visto nel n⁰ 59 che il π-completamento di S, che indicheremo sempre con ${}^\pi R$, è $S_0 \cong R_r \overline{\times} R_\pi$; l'isomorfismo qui indicato è la restrizione ad $R_r \overline{\times} R_\pi$ dell'omomorfismo continuo canonico di R su tutto ${}^\pi R$ che induce l'identità su S; il nucleo di tale omomorfismo è $R_t^+ R$.

È bene raccogliere qui ciò che si sa sul completamento di C:

6.3 Teorema. *Sia A una varietà abeliana su k, di dimensione n e codimensione separabile f; sia S l'anello legato a $C = k(A)$ come spiegato al* n⁰ 59, *e sia R il completamento di C, ossia il completamento topologico di S. Allora R è, rispetto al coprodotto* **P** *indottovi da quello di C, un ipercampo; se lo si decompone in $R = R_t \overline{\times} R_r \overline{\times} R_\pi$, si ha che: R_t ha codimensione f, R_π ha dimensione f, ed R_r ha dimensione e codimensione $n - f$; inoltre ${}^tR \cong R_t \overline{\times} R_r$, ${}^\pi R \cong R_r \overline{\times} R_\pi$, nel senso preciso seguente: se σ è l'omomorfismo continuo canonico di R su ${}^tR$ (risp. su ${}^\pi R$) la cui restrizione ad S è l'identità, il nucleo di σ è $R_\pi^+ R$ (risp. $R_t^+ R$), e la restrizione di σ a $R_t \overline{\times} R_r$ (risp. a $R_r \overline{\times} R_\pi$) è un isomorfismo bicontinuo su tutto ${}^tR$ (risp. ${}^\pi R$).*

Dim. Che $R_t \cong R_{0,1} \overline{\times} \ldots \overline{\times} R_{0,1}$ (f fattori) lo si è già visto al n⁰ 59; e si è anche visto al n⁰ 60 che ${}^tR \cong R_t \overline{\times} R_r$ e ${}^\pi R \cong R_r \overline{\times} R_\pi$. Si sa che ${}^\pi R$ è, come anello locale, di dimensione n, e quindi di dimensione n anche come ipercampo; si sa poi in vari modi (cfr. (2.2) di [2], ovvero 4.3 di [1]) che ${}^\pi R_\pi$ ha dimensione f; quindi ${}^\pi R_r$ ha dimensione $n - f$. Si sa anche che $p\iota_A$ ha grado p^{2n}, mentre $p\iota_{R_t}$ e $p\iota_{R_\pi}$ hanno grado p^f; quindi $p\iota_{R_r}$ ha grado $p^{2(n-f)}$. Ma l'esponente $2(n - f)$ è (cfr. MC) la somma della dimensione e della codimensione; perciò ${}^\pi R_r$ ha codimensione $n - f$, C.V.D..

È bene precisare molto chiaramente le relazioni in cui terremo S, ${}^tR$, ${}^\pi R$, R; parlando di ${}^tR$, o ${}^\pi R$, o R, si supporrà sempre che S ne sia un sottoanello, secondo l'immersione canonica di un anello nel proprio completamento; l'omomorfismo canonico di, per esempio, R su tutto ${}^tR$ induce l'isomorfismo identico di S; però l'isomorfismo di ${}^tR$ su tutto il sottoanello $R_t \overline{\times} R_r$ di R, descritto nel 6.2 e 6.3, non induce un isomorfismo di S su S, in quanto in generale $R_t \overline{\times} R_r$ non contiene S.

Poichè R e C sono S-algebre, esiste il prodotto $C \otimes_S R$; si ha che S è schiera di C (ossia che C è corpo quoziente di S), e che nessun elemento di S è divisore dello 0 in R; pertanto $C \otimes_S R$ è l'anello quoziente di R rispetto all'insieme moltiplicativamente chiuso formato dagli elementi non nulli di S; questo anello quoziente sarà indicato sempre nel seguito con R_q; analogamente dicasi per ${}^tR_q$ e ${}^\pi R_q$; si noti che ${}^\pi R_q$ è il corpo quoziente di ${}^\pi R$.

Dato uno qualsiasi degli ipercampi R, ${}^tR$, ${}^\pi R$, se ne può costruire un bicampo $\mathcal{R}$, o ${}^t\mathcal{R}$, o ${}^\pi\mathcal{R}$, legato ad esso da un isomorfismo τ (n^0 36); se τ viene considerato come un'immersione, anche S resta immerso in uno di questi; ed allora tanto $\mathcal{R}^0$, quanto ${}^t\mathcal{R}^0$ e ${}^\pi\mathcal{R}^0$ contengono il limite diretto S^∞ di $S \xrightarrow[p\iota]{} S \xrightarrow[p\iota]{} S \longrightarrow \dots$, che è a sua volta schiera del limite diretto C^∞ di $C \xrightarrow[p\iota]{} C \xrightarrow[p\iota]{} C \longrightarrow \dots$ Come prima, si possono costruire $\mathcal{R}_q = C^\infty \otimes_{S^\infty} \mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}_q^0 = C \otimes_{S^\infty} \mathcal{R}^0$; lo stesso dicasi per ${}^\pi\mathcal{R}_q$, ${}^t\mathcal{R}_q$, ${}^\pi\mathcal{R}_q^0$, ${}^t\mathcal{R}_q^0$. Per esempio, $\mathcal{R}_q^0$ è il limite diretto di $R_q \xrightarrow[p\iota]{} R_q \xrightarrow[p\iota]{} \dots$ Valgono i risultati seguenti (il primo ben noto, il secondo conseguenza immediata del lemma di Hensel):

$C \cap {}^\pi R = Q(O/A)$, quando C e ${}^\pi R$ sono immersi in ${}^\pi R_q$;

$C^\infty \cap {}^\pi R_q = [$*corpo quoziente di* $C^\infty \cap {}^\pi R)] = [$*chiusura separabile di* C *in* $C^\infty]$, quando $C^\infty, {}^\pi R, \cdot {}^\pi R_q$ sono immersi in ${}^\pi\mathcal{R}_q$.

L'isomorfismo $p\iota_O$ si decompone in $p\iota_O = \pi_O t_O = t_O \pi_O$; quindi l'omomorfismo $p\iota_A$ si decompone in $p\iota_A = \pi_A t_A = t_A \pi_A$, ove t_A, π_A sono i trasposti di π_O, t_O rispettivamente.

Essendo S denso in R (e lo stesso vale per ${}^\pi R$ e ${}^tR$), S^∞ è denso in $\mathcal{R}^0$, e quindi $\mathcal{R}$. Definiremo anche A^∞ come limite inverso di $A \xleftarrow[p\iota]{} A \xleftarrow[p\iota]{} A \longleftarrow \dots$; A^∞ è l'insieme dei suoi punti, un *punto* P di A^∞ essendo una successione $P_1, P_2, \dots$ di punti di A, con $pP_{i+1} = P_i$; ad esso è legato un automorfismo σ_P di C^∞. Fra i punti di A^∞ vi sono quelli tali che $P_i \in \mathcal{G}A$ per ogni i; il loro gruppo sarà indicato con $\mathcal{G}A^\infty$; i σ_P, per $P \in \mathcal{G}A^\infty$, coincidono, come operatori su $\mathcal{R}$, coi $d \in \widetilde{\mathcal{R}}$ tali che $\log\{d\} = d'$ sia elemento di $\mathcal{C}'\widetilde{\mathcal{R}}^0$ con la proprietà $td' = d'$ (cfr. n^0 55, caso 2).

Avvertiamo qui subito che espressioni come $\widetilde{\mathcal{R}}_\pi$, ${}^t\widetilde{\mathcal{R}}_\pi$, ecc., significano $(\widetilde{\mathcal{R}})_\pi$, $(\widetilde{{}^t\mathcal{R}})_\pi$, ecc..

61. Nel seguito, se C è un anello, indicheremo con $\mathrm{vect}_r\, C$ l'anello dei vettori di Witt ad r componenti, con componenti in C; r può essere un intero positivo o il simbolo ∞, ma per uniformarci a quanto precede si

scriverà vect C in luogo di $\mathrm{vect}_\infty C$; naturalmente $\mathrm{vect}_1 C = C$. L'operatore t, applicato ad un vettore finito, avrà il significato seguente: $t(c_0, \dots, c_n) = (0, c_0, \dots, c_{n-1})$; l'operatore ϱ_r, applicato ad un vettore finito o infinito, ha il significato seguente: $\varrho_r(c_0, \dots, c_s) = (c_0, \dots, c_{r-1})$ se $r-1 \leq s$, oppure $= (c_0, \dots, c_s)$ se $r-1 \geq s$.

Sia A una varietà irriducibile di dimensione n su k, e sia essa localmente normale. Se X è sottovarietà irriducibile di A, indicheremo al solito con $Q(X/A)$ l'anello (locale) quoziente di X su A; localmente normale significa che ogni $Q(X/A)$ è aritmeticamente chiuso. Si fissi un r, intero positivo oppure $= \infty$, e si consideri un'applicazione $\mathfrak{b}$ che ad ogni divisore primo X su A (ossia ad ogni sottovarietà irriducibile X di A, di dimensione $n-1$) fa corrispondere un elemento di $\mathrm{vect}_r k(A)/\mathrm{vect}_r Q(X/A)$: $\mathfrak{b}X = x(X) + \mathrm{vect}_r Q(X/A)$, con $x(X) \in \mathrm{vect}_r k(A)$. Diremo che $\mathfrak{b}$ è una *iperclasse di lunghezza* r su A se per ogni intero $s \leq r$, $\varrho_s x(X) \in \mathrm{vect}_s Q(X/A)$ per quasi tutti gli X, ossia per tutti gli X eccetto al più un numero finito. Un X tale che $x(X) \notin \mathrm{vect}_r Q(X/A)$, ossia tale che $\mathfrak{b}X \neq \mathrm{vect}_r Q(X/A)$, è un *polo* di $\mathfrak{b}$. Se $x \in \mathrm{vect}_r k(A)$ esiste l'iperclasse $\mathfrak{b} = \mathrm{cl}\, x$ definita da: $\mathfrak{b}X = x + \mathrm{vect}_r Q(X/A)$; tali iperclassi diconsi *esatte*. La somma di due iperclassi $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ è definita da $(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})X = \mathfrak{b}X + \mathfrak{c}X$; il prodotto di una iperclasse $\mathfrak{b}$ per un elemento $a \in \mathrm{vect}_r k$ è definito da $(a\mathfrak{b})X = a(\mathfrak{b}X) + Q(X/A)$. Gli operatori t, π, ϱ_s sulle iperclassi sono definiti da: $(t\mathfrak{b})X = t(\mathfrak{b}X) + \mathrm{vect}_r Q(X/A)$, $(\pi\mathfrak{b})X = \pi(\mathfrak{b}X) + \mathrm{vect}_r Q(X/A)$, $(\varrho_s \mathfrak{b})X = \varrho_s(\mathfrak{b}X)$.

Sia h un prolungamento algebricamente chiuso di k; se $\mathfrak{b}$ è iperclasse su A, $\mathfrak{b}_h$ sarà l'iperclasse su A_h così definita: se Y è divisore primo di A_h, e Y non è del tipo X_h, con X divisore primo su A, allora $\mathfrak{b}_h Y = \mathrm{vect}_r Q(Y/A_h)$; se invece $Y = X_h$, $\mathfrak{b}_h Y = \mathfrak{b}X + \mathrm{vect}_r Q(Y/A_h)$.

Due iperclassi $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ di lunghezza r diconsi (*linearmente*) *equivalenti*, e si scrive $\mathfrak{b} \backsim \mathfrak{c}$, se $\mathfrak{b} - \mathfrak{c}$ è esatta; se Y è sottovarietà irriducibile di A, l'iperclasse $\mathfrak{b}$ dicesi *chiusa in* Y se è linearmente equivalente ad una iperclasse nessuno dei cui poli contenga Y; equivalentemente, $\mathfrak{b}$ è chiusa in Y se esiste un $y \in \mathrm{vect}_r k(A)$ tale che $\mathfrak{b}X = y + \mathrm{vect}_r Q(X/A)$ per ogni X contenente Y; ogni tale y sarà allora detto un *rappresentante* di $\mathfrak{b}$ in Y; due rappresentanti differiscono per un elemento di $\mathrm{vect}_r Q(Y/A)$. Se $\mathfrak{b}$ è chiusa in Y, e Z è sottovarietà irriducibile di A contenente Y, $\mathfrak{b}$ è chiusa anche in Z; ogni $\mathfrak{b}$ è chiusa in ogni X di dimensione $n-1$. Diremo che $\mathfrak{b}$ è *chiusa* se è chiusa in ogni punto di A, e quindi in ogni sottovarietà irriducibile di A; ogni iperclasse esatta è chiusa; e ogni iperclasse è chiusa se $n = 1$. Le iperclassi chiuse di lunghezza r formano un $(\mathrm{vect}_r k)$-modulo, indicato con $\mathcal{B}_r A$; quelle esatte ne formano un sotto-$(\mathrm{vect}_r k)$-modulo, indicato con $\mathcal{E}_r A$; porremo $\mathcal{M}_r A = \mathcal{B}_r A / \mathcal{E}_r A$; il suffisso r può essere tralasciato per significare che $r = \infty$.

Sia B una varietà irriducibile su k, localmente normale, e sia α un'applicazione razionale di B su A ; sia $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_r A$ tale che nessun polo di $\mathbf{a}$ contenga αB; la *cotraccia* di $\mathbf{a}$ secondo α è la iperclasse $\mathbf{b}$ su B così definita : se Y è un divisore primo su B, sia $y \in \mathrm{vect}_r\, k(A)$ un rappresentante di $\mathbf{a}$ in αY, e, in particolare, sia $y = 0$ se $\alpha Y = A$; si noti che αY sta a denotare la minima sottovarietà di A che contiene tutti gli αP quando P percorre i punti di Y che non sono fondamentali per α. Allora y non ha poli contenenti αB, e se quindi $\tilde{\alpha}$ è il trasposto (da $k(A)$ a $k(B)$) di α, $\tilde{\alpha} y$ esiste ed è elemento di $\mathrm{vect}_r\, k(B)$. Si porrà allora $\mathbf{b} Y = \tilde{\alpha} y + \mathrm{vect}_r\, Q(Y/B)$; più brevemente, e soggetto all'interpretazione precedente :

$$\mathbf{b} Y = \tilde{\alpha}\, \mathbf{a} \alpha Y + \mathrm{vect}_r\, Q(Y/B).$$

La iperclasse $\mathbf{b}$ è chiusa, e sarà indicata con $(\mathrm{cl}\,\alpha)\,\mathbf{a}$; in particolare, se $\mathbf{a}$ è esatta tale è $(\mathrm{cl}\,\alpha)\,\mathbf{a}$. Casi speciali di questa definizione sono :

1. $B \subseteq A$, α è l'immersione di B in A, e nessun polo di $\mathbf{a}$ contiene B ; la $(\mathrm{cl}\,\alpha)\,\mathbf{a}$ sarà allora indicata con $\mathbf{a} \cap B = B \cap \mathbf{a}$;

2. α è applicazione razionale di B su tutta A ; non vi è nessuna condizione su $\mathbf{a}$ (altro che l'essere chiusa) in questo caso ;

3. $B = A \times A'$, ove A' è una varietà irriducibile localmente normale su k, e α è la proiezione di B su tutta A ; in tal caso $(\mathrm{cl}\,\alpha)\,\mathbf{a}$ sarà indicata con $\mathbf{a} \times A'$; i suoi poli sono tutti e soli gli $X \times A'$, ove X percorre i poli di $\mathbf{a}$.

Se $\mathbf{m}$ è elemento di $\mathcal{M}_r A$, e per esempio $\mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathcal{E}_r A$, con $\mathbf{a}$ scelto in modo che nessun suo polo contenga αB, definiremo $(\mathrm{cl}\,\alpha)\,\mathbf{m} = (\mathrm{cl}\,\alpha)\,\mathbf{a} + \mathcal{E}_r B$, cosicchè $\mathrm{cl}\,\alpha$ opera anche su $\mathcal{M}_r A$; analogamente si definiscono i casi particolari $\mathbf{m} \cap B = B \cap \mathbf{m}$ e $\mathbf{m} \times A'$. Infine, si porrà $\pi \mathbf{m} = \pi \mathbf{a} + \mathcal{E}_r A$, $t\mathbf{m} = t\mathbf{a} + \mathcal{E}_r A$. Queste definizioni sono ovviamente estensibili al caso in cui α sia una applicazione $\varkappa$-razionale, con $\varkappa$ automorfismo di k ; in tal caso $\tilde{\alpha}$ sarà un $\varkappa^{-1}$-semiomomorfismo di (parte di) $k(A)$ su $k(B)$, come k algebre : $\varkappa(\tilde{\alpha} x)(P) = x(\alpha P)$, $x \in k(A)$, $P \in B$; la formula per $\mathrm{cl}\,\alpha$ resta la :

$$((\mathrm{cl}\,\alpha)\,\mathbf{a})\, Y = \tilde{\alpha}\, \mathbf{a} \alpha Y + \mathrm{vect}_r\, Q(Y/B),$$

per $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_r A$ ed Y divisore primo su B.

62. Le definizioni del n⁰ 61 sono generalizzazioni di quelle date al n⁰ 1 di [3] ; l'operatore qui indicato con $\mathrm{cl}\,\alpha$ era là indicato colla notazione T_α^{-1}. Dobbiamo ora estendere alcuni dei risultati di [3], e ciò sarà ottenuto in generale per induzione sull'indice r di $\mathcal{B}_r$. Si noti anzitutto che una

iperclasse $\mathfrak{b}$ di lunghezza infinita su A è esatta se e solo se tale è $\varrho_r \mathfrak{b}$ per ogni r finito; analogamente $\mathfrak{a} \backsim \mathfrak{b}$ se e solo se $\varrho_r \mathfrak{a} \backsim \varrho_r \mathfrak{b}$ per ogni r finito; per quanto riguarda la proprietà di essere chiusa, resta vero che $\mathfrak{b}$ è chiusa in Y se e solo se $\varrho_r \mathfrak{b}$ è chiusa in Y per ogni r, ma è però bene dare una dimostrazione di questo fatto: dimostreremo per induzione che se $(x_0, \dots, x_{r-1})$ rappresenta $\varrho_r \mathfrak{b}$ in Y, allora $\varrho_{r+1} \mathfrak{b}$ è rappresentato, in Y, da $(x_0, \dots, x_r)$, con x_r opportuno; da ciò seguirà subito che $(x_0, x_1, \dots)$ rappresenta $\mathfrak{b}$ in Y. Sia infatti $(y_0, \dots, y_r)$ un rappresentante di $\varrho_{r+1} \mathfrak{b}$ in Y; allora anche $(x'_0, \dots, x'_r) = (y_0, \dots, y_r) + (z_0 \dots, z_{r-1}, 0)$ rappresenta $\varrho_{r+1} \mathfrak{b}$ in Y se $(z_0, \dots, z_{r-1}) = (x_0, \dots, x_{r-1}) - (y_0, \dots, y_{r-1})$; e si ha, come si voleva, $x'_i = x_i$ per $i < r$.

Sia A varietà abeliana di dimensione n sul corpo k (algebricamente chiuso), e sia $C = k(A)$; se $P \in A$ e $\mathfrak{b}$ è iperclasse su A, $\sigma_P \mathfrak{b}$ è l'iperclasse definita da $(\sigma_P \mathfrak{b}) X = \sigma_P [\mathfrak{b} \sigma_P^{-1} X]$ per ogni X; si noti che ciò è equivalente a porre $\sigma_P \mathfrak{b} = (\mathrm{cl}\, \alpha) \mathfrak{b}$, ove α è l'applicazione $Q \to Q - P$ di A su se stesso. La $\mathfrak{b}$ è *semiinvariante* se $\sigma_P \mathfrak{b} \backsim \mathfrak{b}$ per ogni $P \in A$; la sola iperclasse invariante, ossia con $\sigma_P \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$, è priva di poli, ed è quindi l'iperclasse 0. Ogni iperclasse semiinvariante è chiusa: se infatti la iperclasse ha lunghezza finita, dato $P \in A$ si ha che per un $Q \in A$ generico la $\sigma_Q \mathfrak{b}$ non ha poli contenenti P; ed allora, per l'osservazione fatta sopra, l'asserzione resta vera anche se l'iperclasse ha lunghezza infinita. Nel 6.5 stabiliremo che ogni iperclasse chiusa è semiinvariante, ma per ora indichiamo con $\mathcal{J}_r A$ il $(\mathrm{vect}_r\, k)$-modulo delle iperclassi semiinvarianti di lunghezza r su A.

6.4 Lemma. *Sia A varietà abeliana di dimensione n su k; allora $\mathcal{M}A$ ed $\mathcal{J}A/\mathcal{E}A$ sono T-moduli canonici di dimensioni $\leq n$.*

Dim. Daremo la dimostrazione per $\mathcal{M}A$; le condizioni 2.1, 2.2 di MC (con ω sostituito da p) sono soddisfatte, onde basta dimostrare che $\mathcal{M} = \mathcal{M}A$ è generato da al più n generatori; pongasi $\mathcal{B} = \mathcal{B}A$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}A$. L'operatore ϱ_1 dà un semiomomorfismo del T-modulo $\mathcal{M}$ sul k-modulo $\mathcal{M}_1$; questo, per il 2.7 di [3], ha ordine n; se $\mathfrak{b} + \mathcal{E}$ appartiene al nucleo di ϱ_1, sarà $\varrho_1 \mathfrak{b} = \mathrm{cl}\, x_0$ per qualche $x_0 \in C = k(A)$; posto $x = (x_0, 0, 0, \dots) \in \mathrm{vect}\, C$, avremo $\varrho_1(\mathfrak{b} - \mathrm{cl}\, x) = 0$, onde $\mathfrak{b} - \mathrm{cl}\, x \in t\mathcal{B}$, e infine $\mathfrak{b} + \mathcal{E} \in t\mathcal{B} + \mathcal{E}$. Pertanto il nucleo di ϱ_1, come operatore su $\mathcal{M}$, è $t\mathcal{M}$, il che significa che ϱ_1 coincide col μ del 2.4 di MC; ma allora, se $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_h$ sono elementi di $\mathcal{M}$ tali che i $\varrho_1 \mathfrak{m}_j$ formino una base di $\varrho_1 \mathcal{M}$ (onde $h \leq n$), il 2.4 di MC comporta che gli $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_h$ generano il T-modulo $\mathcal{M}$, C.V.D..

6.5 Teorema. *Sia A come al 6.4, e sia $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}A$; allora $(\mathrm{cl}\, \mu_A) \mathfrak{b} \backsim \mathfrak{b} \times A + A \times \mathfrak{b}$. Inoltre $\mathcal{B}A = \mathcal{J}A$.*

DIM. I risultati sono veri se sono veri gli analoghi per ogni $\mathcal{B}_r A$ ed $\mathcal{I}_r A$; dimostreremo quindi questi risultati per induzione su r, essendo essi veri quando $r = 1$ (cfr. 2.5 e 2.4 di [3]). Sia $r > 1$, e suppongansi i risultati veri per valori minori dell'indice; sia $\mathbf{b} \in \mathcal{B}_r A$, e suppongasi (il che si può fare senza perdita di generalità) che nessun polo di $\mathbf{b}$ contenga il punto O. Si ha $\varrho_{r-1}(\mathbf{b} \times A + A \times \mathbf{b} - \mathrm{cl}\,\mu\ \mathbf{b}) = \mathrm{cl}\, x'$ per un opportuno $x' \in \mathrm{vect}_{r-1} k(A \times A)$; si scelga un $x \in \mathrm{vect}_r k(A \times A)$ tale che $\varrho_{r-1} x = x'$, e che nessun polo di $\mathrm{cl}\, x$ contenga $O \times O$. Allora $\mathbf{a}' = \mathbf{b} \times A + A \times \mathbf{b} - \mathrm{cl}\,\mu\ \mathbf{b} - \mathrm{cl}\, x$ soddisfa la $\varrho_{r-1}\mathbf{a}' = 0$, ed è quindi del tipo $\mathbf{a}' = t^{r-1}\mathbf{a}$, con $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_1(A \times A)$. Si ha $\mathbf{a}' \cap (O \times A) \sim O \times \mathbf{b} - (\mathrm{cl}\,\mu\ \mathbf{b}) \cap (O \times A) = O \times \mathbf{b} - O \times \mathbf{b} = 0$; pertanto anche $\mathbf{a} \cap (O \times A) \sim 0$. Ma poichè $\mathbf{a} \in \mathcal{B}_1(A \times A)$, il 2.8 di [3] dà che $\mathbf{a} \sim \mathbf{c} \times A + A \times \mathbf{c}'$, per opportuni $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}' \in \mathcal{B}_1 A$; ne segue che $0 \sim \mathbf{a} \cap (O \times A) \sim O \times \mathbf{c}'$, onde $\mathbf{c}' \sim 0$, e analogamente $\mathbf{c} \sim 0$, e infine $\mathbf{a} \sim 0$, $\mathbf{a}' \sim 0$, che è il primo asserto da dimostrare.

Quanto al secondo asserto, per $\mathbf{b} \in \mathcal{B}_r A$ si è visto che è $\mathrm{cl}\,\mu\ \mathbf{b} \sim \mathbf{b} \times A + A \times \mathbf{b}$; quindi, per un $P \in A$ generico, $\mathrm{cl}\,\mu\ \mathbf{b} \cap (P \times A) \sim P \times \mathbf{b}$, ossia $\sigma_P^{-1}\mathbf{b} \sim \mathbf{b}$. Se questa è vera per un P generico, è vera per ogni P, onde $\mathbf{b} \in \mathcal{I}_r A$, C.V.D..

6.6 COROLLARIO. *Siano A, B varietà abeliane su k, e siano α, β omomorfismi di A su B; sia $\mathbf{b} \in \mathcal{B}B$. Allora* $\mathrm{cl}(\alpha + \beta)\,\mathbf{b} \sim \mathrm{cl}\,\alpha\,\mathbf{b} + \mathrm{cl}\,\beta\,\mathbf{b}$, *quando questo ha significato.*

DIM. Se δ è l'applicazione diagonale $P \to P \times P$ di A su $A \times A$, si ha $\alpha + \beta = \mu_B(\alpha \times \beta)\,\delta$, onde $\mathrm{cl}(\alpha + \beta) = (\mathrm{cl}\,\delta)(\mathrm{cl}(\alpha \times \beta))(\mathrm{cl}\,\mu_B)$; il 6.5 dà ora $\mathrm{cl}(\alpha + \beta)\,\mathbf{b} \sim (\mathrm{cl}\,\delta)(\mathrm{cl}(\alpha \times \beta))(\mathbf{b} \times B + B \times \mathbf{b}) = (\mathrm{cl}\,\delta)[(\mathrm{cl}\,\alpha\,\mathbf{b}) \times A + A \times (\mathrm{cl}\,\beta\,\mathbf{b})] = \mathrm{cl}\,\alpha\,\mathbf{b} + \mathrm{cl}\,\beta\,\mathbf{b}$, C.V.D..

6.7 TEOREMA. *Siano A, B come al 6.6; allora ogni elemento di $\mathcal{B}(A \times B)$ è equivalente ad uno del tipo $\mathbf{a} \times B + A \times \mathbf{b}$, con $\mathbf{a} \in \mathcal{B}A$ e $\mathbf{b} \in \mathcal{B}B$; $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono unici a meno di equivalenza.*

DIM. Siano pr_A, pr_B le proiezioni di $A \times B$ su A e B rispettivamente; siano i_A, i_B le immersioni $P \to P \times O$, $P \to O \times P$ di rispettivamente A, B in $A \times B$. Allora $\iota_{A \times B} = i_A\,\mathrm{pr}_A + i_B\,\mathrm{pr}_B$, e quindi se $\mathbf{b} \in \mathcal{B}(A \times B)$ si ha $\mathbf{b} = \mathrm{cl}\,\iota\,\mathbf{b} \sim (\mathrm{cl}\,\mathrm{pr}_A)(\mathrm{cl}\,i_A)\,\mathbf{b} + (\mathrm{cl}\,\mathrm{pr}_B)(\mathrm{cl}\,i_B)\,\mathbf{b}$ per 6.6. Questo significa appunto $\mathbf{b} \sim (\mathbf{b} \cap A) \times B + A \times (\mathbf{b} \cap B)$. Il resto è immediato, C.V.D..

63. Gli elementi canonici di ${}^{\pi}\tilde{\mathcal{R}}^0$ sono interpretabili come iperderivazioni di ${}^{\pi}\mathcal{R}^0$, che inducono iperderivazioni di S^{∞} ed anche di ogni $(p\iota)^{-r} S$ (quando l'isomorfismo τ che lega ${}^{\pi}R$ ad ${}^{\pi}\mathcal{R}$ viene interpretato come un'immersione);

essi sono anche interpretabili come iperderivazioni di C e di C^∞, e quindi anche di ${}^\pi\mathcal{R}_q^0$ ed ${}^\pi\mathcal{R}_q$. Se ${}^\pi\mathcal{R}_q^0$ viene dotato della topologia discreta, le condizioni $1, \dots, 5$ del n^0 44 sono soddisfatte quando vi si sostituisca D con ${}^\pi\tilde{\mathcal{R}}$ ed R con ${}^\pi\mathcal{R}_q^0$; pertanto si può definire $d * x$ quando $d \in \mathcal{C}' \, {}^\pi\tilde{\mathcal{R}}^0$ ed $x \in \operatorname{vect} {}^\pi\mathcal{R}_q^0$; esso sarà un elemento di $\operatorname{vect} {}^\pi\mathcal{R}_q^0$. Se in particolare le componenti di x appartengono a C, o C^∞, o S, o S^∞, anche quelle di $d * x$ appartengono allo stesso anello. Questo ragionamento non può essere ripetuto per ${}^t\tilde{\mathcal{R}}^0$ e ${}^t\mathcal{R}_q^0$, in quanto in generale gli elementi canonici di ${}^t\tilde{\mathcal{R}}^0$ non possono essere interpretati come endomorfismi di C.

Si possono vedere le cose in altro modo: l'omomorfismo σ di $\mathcal{R}$ su tutto ${}^\pi\mathcal{R}$, di cui al 6.3, dà, per dualità, un isomorfismo $\tilde{\sigma}$ di ${}^\pi\tilde{\mathcal{R}}$ su $\tilde{\mathcal{R}}$; il nucleo del primo, ossia $\mathcal{R}_t^+ \mathcal{R}$, è l'ortogonale dell'immagine del secondo, e ciò dice che tale immagine è $\tilde{\mathcal{R}}_t \mathbin{\overline{\times}} \tilde{\mathcal{R}}_r$. Per $\delta \in {}^\pi\tilde{\mathcal{R}}$ e $\xi \in \mathcal{R}^0$ si ha, con le solite relazioni di trasposizione, $\delta \, \sigma \, \xi = \sigma \, [(\tilde{\sigma} \, \delta) \, \xi]$; siccome $d * x$ è definibile, come prima, per $d \in \mathcal{C}' (\tilde{\mathcal{R}}_t \mathbin{\overline{\times}} \tilde{\mathcal{R}}_r)^0$ ed $x \in \operatorname{vect} \mathcal{R}_q^0$, la formula precedente assicura che, sotto queste condizioni, $(\tilde{\sigma}^{-1} \, d) * \sigma x = \sigma \, (d * x)$; è cioè indifferente, nel computare $d * x$ quando $x \in \operatorname{vect} C^\infty$, l'immergere C^∞ in ${}^\pi\mathcal{R}_q^0$ (e prendere d in $\mathcal{C}' \, {}^\pi\tilde{\mathcal{R}}^0$), o l'immergerlo in $\mathcal{R}_q^0$ (e prendere d in $\mathcal{C}' (\tilde{\mathcal{R}}_t \mathbin{\overline{\times}} \tilde{\mathcal{R}}_r)^0$).

Se $x \in \operatorname{vect}_r {}^\pi\mathcal{R}_q^0$ (ovvero $\operatorname{vect}_r \mathcal{R}_q^0$), l'espressione $d * x$ significherà

$$\varrho_r \, [d * (x_0, \dots, x_{r-1}, 0, 0, \dots)].$$

6.8 Lemma. *Si consideri R immerso in $\mathcal{R}$ mediante il τ che lega l'ipercampo R al bicampo $\mathcal{R}$; sia $x \in \operatorname{vect}_r \mathcal{R}^0$, ove r è finito o infinito; allora le due seguenti asserzioni sono equivalenti:*

1. $x \in \operatorname{vect}_r R$;
2. $(d * x)_i = 0$ *per ogni coppia* (i, d) *tale che* $0 \leq i < r$, $d \in \mathcal{C}' \, \tilde{\mathcal{R}}^0$, $d_i R = 0$.

Sia invece $x \in \operatorname{vect}_r C^\infty$; sono equivalenti le asserzioni seguenti:

1'. $x \in \operatorname{vect}_r C$;

2'. $(d * x)_i = 0$ *e* $\sigma x_i = x_i$ *per ogni terna* (i, d, σ) *tale che* $0 \leq i < r$, $d \in \mathcal{C}' \, {}^\pi\tilde{\mathcal{R}}^0$, $d_i C = 0$, $\sigma \in \mathcal{G}A^\infty$, $\sigma y = y$ *per ogni* $y \in C$.

Dim. Primo caso, $x \in \operatorname{vect}_r \mathcal{R}^0$. Che da 1 segua 2 è conseguenza immediata della definizione di $d *$; suppongasi pertanto verificata la 2: per $i = 0$ essa comporta che $\delta x_0 = 0$ per ogni elemento canonico δ di $\tilde{\mathcal{R}}^0$ che soddisfi la $\delta R = 0$; tali δ sono anche tutti gli elementi canonici di $\tilde{\mathcal{R}}^0$ che soddisfano la $\delta \circ (R + \mathcal{R}) = 0$; e per le osservazioni che seguono il 4.22, essi sono anche tutti gli elementi canonici che appartengono ad un certo sottoipercampo $\widetilde{R}_m$ di $\widetilde{\mathcal{R}}$. Poichè $\widetilde{R}_m$ è generato, come algebra topologica completa, dai propri elementi canonici, la $\delta x_0 = 0$ per tutti i δ descritti comporta $\delta x_0 = 0$ per tutti i $\delta \in \widetilde{R}_m^+ \widetilde{\mathcal{R}}$; quindi, sempre per le osservazioni che seguono il 4.22, $x_0 \in R$. Il ragionamento è ora ripetibile per $x_1, \dots, x_{r-1}$, come voluto.

Secondo caso, $x \in \mathrm{vect}_r\, C^\infty$; supporremo r finito, la generalizzazione ad $r = \infty$ essendo banale. Di nuovo da 1′ segue 2′; supposta verificata la 2′, si scelga $P \in A^\infty$ in modo che $\sigma_P x \in \mathrm{vect}_r\, S^\infty$, e si supponga S^∞ immerso in ${}^\pi\mathcal{R}_q^0$. La condizione riguardante d comporta, come nel caso precedente, che $\sigma_P x \in \mathrm{vect}_r\, {}^\pi R$, onde ogni x_i appartiene a $C^\infty \cap {}^\pi R_q$. Questo non è altro che la chiusura separabile di C in C^∞, come si è visto al n⁰ 60; e gli elementi di $\mathcal{G}A^\infty$ la cui restrizione a C è l'identità ne formano il gruppo di Galois su C. Il resto della condizione 2′ comporta quindi che $x \in \mathrm{vect}_r\, C$, C.V.D..

6.9 LEMMA. *Sotto le stesse ipotesi del* 2.8, *sia* $x \in \mathrm{vect}_r\, \mathcal{R}^0$; *allora le due asserzioni seguenti sono equivalenti:*

1. $\mathbf{P}x - x \barwedge 1 - 1 \barwedge x \in \mathrm{vect}_r\, (R \barwedge R)$;
2. $(d * x)_i \in k$ *per ogni coppia* (i, d) *come al* n⁰ 2 *del* 6.8.

Sia invece $x \in \mathrm{vect}_r\, C^\infty$; *allora sono equivalenti le asserzioni seguenti:*

1′. $\mathbf{P}x - x \otimes 1 - 1 \otimes x \in \mathrm{vect}_r\, C'$, *se* C' *è il corpo quoziente di* $C \otimes C$;

2′. $(d * x)_i \in k$ *e* $(\sigma x - x)_i \in k$ *per ogni terna* (i, d, σ) *come al n⁰* 2′ *del* 6.8.

DIM. Caso $x \in \mathrm{vect}_r\, \mathcal{R}^0$. Posto $\mathbf{P}x - x \barwedge 1 - 1 \barwedge x = z$, per 5.19 si ha $(d \barwedge 1) * z = \mathbf{P}(d * x) - (d * x) \barwedge 1$; se $z \in \mathrm{vect}_r\, (R \barwedge R)$, il 6.8 comporta che $[\mathbf{P}(d * x) - (d * x) \barwedge 1] = 0$ per le coppie (i, d) descritte al 2. Ciò dà $\mathbf{P}(d * x)_i = (d * x)_i \barwedge 1$; come al n⁰ 50, questa comporta $(d * x)_i \in k$, come richiesto. Il ragionamento è invertibile.

Caso $x \in \mathrm{vect}_r\, C^\infty$. Come nel secondo caso del 6.8, si ragiona come prima, ma usando ${}^\pi R$ in luogo di R; e inoltre si ha anche, da $(\sigma \otimes 1) z_i = z_i$, la $(\mathbf{P}\sigma x - \sigma x \otimes 1)_i = (\mathbf{P}x - x \otimes 1)_i$, o $(\mathbf{P}(\sigma x - x))_i = ((\sigma x - x) \otimes 1)_i$, o infine la $(\sigma x - x)_i \in k$, C.V.D..

6.10 LEMMA. *Sia* x *un elemento di* $\mathrm{vect}_r\, S^\infty$ (*r finito*) *che soddisfa la* $\mathbf{P}x - x \otimes 1 - 1 \otimes x \in \mathrm{vect}_r\, C'$, *con* C' *corpo quoziente di* $C \otimes C$; *sia* y *elemento di* $\mathrm{vect}_{r+1}\, \mathcal{R}^0$ *che soddisfa la* $\mathbf{P}y - y \barwedge 1 - 1 \barwedge y \in \mathrm{vect}_{r+1}\, (R \barwedge R)$ *e la* $x - \varrho_r y \in \mathrm{vect}_r\, R$. *Esiste allora uno* $z \in \mathrm{vect}_{r+1}\, S^\infty$ *tale che:*

1. $\varrho_r z = x$;

2. $\mathbf{P}z - z \otimes 1 - 1 \otimes z \in \mathrm{vect}_{r+1}\, C'$;
3. $z - y \in \mathrm{vect}_{r+1}\, R$.

Tali z *sono tutti e soli gli elementi di* $\mathrm{vect}_{r+1}\, S^\infty$ *che soddisfano la* 1 *e la:*

4. $(d * z)_r = (d * y)_r$ *e* $(\sigma z - z)_r = (\sigma y - y)_r$ *per ogni* $d \in \mathcal{C}'\,(\widetilde{\mathcal{R}}_t \,\overline{\times}\, \widetilde{\mathcal{R}}_r)^0$ *tale che* $d_r\, R = 0$, *ed ogni* $\sigma \in \mathcal{G}A^\infty$ *che induca l'identità in* C.

DIM. L'ultima asserzione è conseguenza diretta dei 6.8, 6.9; basta quindi dimostrare che esiste uno $z \in \mathrm{vect}_{r+1}\, S^\infty$ che soddisfa le 1 e 4. Esisterà un $R^* = (p\iota)^{-m}\, R$ che contiene tutte le componenti di x e di y; per 3.42, R^* è un R-modulo libero finito, e se ne può scegliere un insieme libero di generatori, $u_1, \dots, u_s$, tutti appartenenti ad $S^* = (p\iota)^{-m}\, S$. I d descritti in 4 formano, per 5.41, un K-modulo canonico; sia $\delta_1, \dots, \delta_n$ un suo insieme libero di generatori. I σ descritti in 4 formano, tramite i log $\{\sigma\}$, un ($\mathrm{vect}\, C_p$)-modulo libero finito; ne sia $\sigma_1, \dots, \sigma_h$ un insieme libero di generatori. Le relazioni 4 si scrivono ora sotto la forma:

$$6.11 \qquad \begin{cases} \delta_{jr}\, z_r = z'_j & (j = 1, \dots, n) \\ \sigma_j\, z_r - z_r = z''_j & (j = 1, \dots, h), \end{cases}$$

per opportuni elementi z'_j, z''_j di S^*. Se z_r viene espresso sotto la forma $z_r = \sum_1^s{}_i\, \alpha_i u_i$, con $\alpha_i \in R$, le 6.11 si traducono in un sistema F di $s\,(n + h)$ equazioni lineari nelle α_i, a coefficienti in S. Tale F ha certamente una soluzione in R, e precisamente quella che rende $z = y + y'$, ove y' è dato da $y'_i = (x - \varrho_r\, y)_i$ per $i < r$, e $y'_r = 0$; perciò F ha una soluzione in C, il che significa che vi è uno z_r che soddisfa alle 6.11 e che appartiene al corpo quoziente C^* di S^*; il lemma sarà dimostrato col dimostrare che un tale z_r può essere trovato in S^*.

Lo z_r trovato dà uno $z \in \mathrm{vect}_{r+1}\, C^*$ che soddisfa le condizioni 1 e 4 dell'enunciato; per qualche $P \in A^\infty$ il $\sigma_P\, z$ appartiene a $\mathrm{vect}_{r+1}\, S^*$, e soddisfa le 4 (i cui secondi membri sono in k); inoltre, per 6.9, $z - \sigma_P\, z \in \mathrm{vect}_{r+1}\, C$, e le prime r componenti di questo appartengono anche ad S. Il vettore cercato, che soddisfa l'enunciato del lemma, è allora la somma di $\sigma_P\, z$ e del vettore le cui prime r componenti coincidono con quelle di $z - \sigma_P\, z$, mentre l'$(r + 1)$-esima è 0, C.V.D..

64. Al solito, A è una varietà abeliana su k, e $C = k\,(A)$; indicheremo con $\mathcal{X}C$ o $\mathcal{X}A$ il K-modulo degli $x \in \mathrm{vect}\, C^\infty$ che soddisfano la $\sigma_P\, x - x \in \mathrm{vect}\, C$ per ogni $P \in A^\infty$; naturalmente, C viene considerato immerso in C^∞ in maniera canonica. Equivalentemente, $\mathcal{X}C$ è l'insieme degli $x \in \mathrm{vect}\, C^\infty$ tali

che $\mathbf{P}x - x \otimes 1 - 1 \otimes x$ appartenga al corpo quoziente di $C \otimes C$; la dimostrazione dell'equivalenza delle due definizioni è analoga alla prima parte della dimostrazione del 3.1 di [1].

6.12 TEOREMA. *Sia A varietà abeliana su k, e sia $C = k(A)$; per ogni $x \in \mathcal{X}C$ esiste un unico $\mathbf{b} = \mathbf{b}(x) \in \mathcal{B}A$ tale che, per $r = 1, 2, \ldots$, si abbia* $\mathrm{cl}\, t^r_{C\infty}\, \varrho_r\, x = \varrho_r (\mathrm{cl}\, \pi^r_A)\, \mathbf{b}$. *L'applicazione $x \to \mathbf{b}(x)$ è un omomorfismo, di nucleo K, del K modulo $\mathcal{X}C$ sul K-modulo $\mathcal{B}A$; essa soddisfa alle relazioni $\mathbf{b}(\pi x) = \pi \mathbf{b}(x)$, $\mathbf{b}(tx) = t\mathbf{b}(x)$, $\mathbf{b}(t_{C\infty} x) = (\mathrm{cl}\, \pi_A)\, \mathbf{b}(x)$. Inoltre $\mathbf{b} \backsim 0$ se e solo se $x \in \mathrm{vect}\, C$.*

DIM. Intanto occorre dimostrare, per dar senso all'enunciato, che se $x \in \mathcal{X}C$ si ha $t^r_{C\infty}\, \varrho_r\, x \in \mathrm{vect}_r\, C$; ora, posto $y = \varrho_r\, x$, il 6.9 comporta che $(d * y)_i \in k$ e $(\sigma y - y)_i \in k$ per ogni terna (i, d, σ) tale che $0 \leq i < r$, $d \in \mathcal{C}'\, {}^{\pi}\tilde{\mathcal{R}}^0$, $d_i\, C = 0$, $\sigma \in \mathcal{G}A^\infty$, $\sigma z = z$ per ogni $z \in C$. Per una terna $(0, d, \sigma)$ si ha, per 5.19, e scrivendo t_C in luogo di $t_{C\infty}$: $(d * t^r_C\, y)_0 = t^r_C (\pi^r\, d * y)_0 = t^r_C [(\pi^r\, d_0)\, y_0]$; ma $d_0\, y_0 \in k$, onde $(\pi^r\, d_0)\, y_0 = d_0^{p^r - 1}\, d_0\, y_0 = 0$; inoltre $(\sigma t^r_C\, y - t^r_C\, y)_0 = t^r_C (\sigma^{p^r}\, y - y)_0 = t^r_C (\sigma^{p^r}\, y_0 - y_0)$; ma da $\sigma y_0 - y_0 \in k$ segue $\sigma^{p^r}\, y_0 - y_0 = \sigma^{p^r - 1} (\sigma y_0 - y_0) + \sigma^{p^r - 2} (\sigma y_0 - y_0) + \ldots + (\sigma y_0 - y_0) = p^r (\sigma y_0 - y_0) = 0$. Pertanto, per 6.8, $t^r_C\, y_0 \in C$. Stabilito questo, e passando ad una terna $(1, d, \sigma)$, si avrà, per 5.11, $(d * t^r_C y)_1 = d_1\, t^r_C\, y_1$, onde di nuovo (partendo ora da $d_1\, y_1 \in C$) si ottiene $(d * t^r_C\, y)_1 = 0$; poi, $\varrho_2 (\sigma t^r_C\, y - t^r_C y) = \varrho_2\, t^r_C (\sigma^{p^r}\, y - y)$; e da $\varrho_2 (\sigma y - y) \in \mathrm{vect}_2\, k$ segue, come prima, $\varrho_2 (\sigma t^r_C\, y - t^r_C\, y) = 0$; pertanto $t^r_C\, y_1 \in C$, ecc..

Dato un divisore primo X su A, per ogni r esiste qualche $P \in A^\infty$ tale che nessuna componente dell'immagine inversa $\pi_A^{-r}\, X$ di X, secondo π^r_A, sia polo di $\varrho_r\, t^r_{C\infty}\, \sigma_P\, x \in \mathrm{vect}_r\, C$; d'altra parte $\varrho_r (x - \sigma_P\, x) \in \mathrm{vect}_r\, C$; se perciò si definisce $\mathbf{b}_r\, X = \varrho_r (x - \sigma_P\, x) + \mathrm{vect}_r\, Q\, (X/A)$, $\mathbf{b}_r\, X$ è indipendente dalla scelta di P, in quanto se Q è un altro punto di A^∞ con la stessa proprietà di P, si ha $\varrho_r (x - \sigma_P\, x) - \varrho_r (x - \sigma_Q\, x) = \varrho_r (\sigma_Q\, x - \sigma_P\, x) \in \mathrm{vect}_r\, Q\, (X/A)$. Poi, $\mathbf{b}_r$ è una iperclasse, perchè $\mathbf{b}_r\, X = \mathrm{vect}_r\, Q\, (X/A)$ per tutti gli X tali che nessuna componente di $\pi_A^{-r}\, X$ sia polo di $\varrho_r\, t^r_{C\infty}\, x$; e cioè per quasi tutti gli X.

L'iperclasse $\mathbf{b}_r$ è chiusa, poichè dato $Q \in A$, se il P precedente è scelto in modo che nessuna componente di $\pi_A^{-r}\, Q$ sia contenuta in un polo di $\varrho_r\, t^r_{C\infty}\, \sigma_P\, x$, l'elemento $\varrho_r (x - \sigma_P\, x)$ rappresenta $\mathbf{b}_r$ in Q. Poichè $\varrho_r\, \mathbf{b}_{r+1} = \mathbf{b}_r$, esiste un unico $\mathbf{b} \in \mathcal{B}A$ tale che $\varrho_r\, \mathbf{b} = \mathbf{b}_r$ per ogni r.

Occorre dimostrare che $\mathbf{b}$ è l'unico elemento di $\mathcal{B}A$ che soddisfa al primo asserto dell'enunciato. Intanto si ha $[\varrho_r (\mathrm{cl}\, \pi^r_A)\, \mathbf{b}]\, X = [(\mathrm{cl}\, \pi^r_A)\, \mathbf{b}_r]\, X = t^r_C\, \mathbf{b}_r\, \pi^r_A\, X + \mathrm{vect}_r\, Q\, (X/A) = t^r_C\, \varrho_r (x - \sigma_P\, x) + \mathrm{vect}_r\, Q\, (X/A)$ per P opportuno; questa coincide con $t^r_{C\infty}\, \varrho_r\, x + \mathrm{vect}_r\, Q\, (X/A)$, cosicchè $\varrho_r (\mathrm{cl}\, \pi^r_A)\, \mathbf{b} = \mathrm{cl}\, t^r_{C\infty}\, \varrho_r\, x$, come desiderato. Se $\mathbf{b}'$ ha la stessa proprietà, si avrà $\varrho_r (cl\, \pi^r_A) (\mathbf{b} - \mathbf{b}') = 0$, ossia $\varrho_r (\mathbf{b} - \mathbf{b}') = 0$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}'$.

Che l'applicazione $x \longrightarrow \mathfrak{b}(x)$ sia un omomorfismo di nucleo K, e che $\mathfrak{b} \backsim 0$ se e solo se $x \in \mathrm{vect}\, C$, è ora chiaro; anche le proprietà $\mathfrak{b}(\pi x) = \pi \mathfrak{b}(x)$ e simili non presentano difficoltà, C.V.D..

6.13 TEOREMA. *Sia A varietà abeliana su k, di dimensione n; allora il T-modulo canonico $\mathcal{M}A$ ha dimensione n, ed è equidimensionale (ossia $\pi\mathfrak{m} \neq 0$ se $0 \neq \mathfrak{m} \in \mathcal{M}A$). Se $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}A$, si ha $(\mathrm{cl}\, \pi_A)\, \mathfrak{b} \backsim t\mathfrak{b}$. Infine, l'applicazione $x \longrightarrow \mathfrak{b}(x)$ del 6.12 è su tutto $\mathcal{B}A$.*

DIM. Posto $C = k(A)$, si consideri R (risp. ${}^tR$) immerso in $\mathcal{R}$ (risp. ${}^t\mathcal{R}$) mediante un'immersione τ, che normalmente verrà non scritta; per 6.3, $\tau\mathcal{C}\,{}^tR$ è un T-modulo canonico equidimensionale (cfr. 3.1 di MC) di dimensione n. Sia $\eta \in \tau\mathcal{C}\,{}^tR$, e sia η' ottenuto da η sostituendo degli zeri al posto delle componenti di indice negativo; nell'isomorfismo fra ${}^t\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}_t \,\overline{\times}\, \mathcal{R}_r$ descritto nel 6.3, ad η' corrisponde un certo $\eta'' \in \mathrm{vect}\, \mathcal{R}^0$. Il 6.10 ci permette, per induzione sulle componenti, di trovare un $tz' \in t\, \mathrm{vect}\, S^\infty$ (S ed S^∞ immersi in $\mathcal{R}$) tale che $\mathbf{P}z' - z' \otimes 1 - 1 \otimes z'$ abbia tutte le componenti nel corpo quoziente di $C \otimes C$, e tale inoltre che $tz' - t\eta'' \in \mathrm{vect}\, R$. Ciò significa che $z' \in \mathcal{X}C \cap \mathrm{vect}\, S^\infty$ e che $z' - \eta'' \in \mathrm{vect}\, R$. Si costruisca il $\mathfrak{b}(z')$ secondo il 6.12; se z'' ha la stessa proprietà di z', è $z'' - z' \in \mathrm{vect}\,(R_q \cap C^\infty) = \mathrm{vect}\, C$, onde $\mathfrak{b}(z') \backsim \mathfrak{b}(z'')$ per 6.12; pertanto l'immagine $\mathfrak{m}(\eta)$ di $\mathfrak{b}(z')$ in $\mathcal{M}A$ dipende da η, ma non da z'.

L'applicazione $\eta \longrightarrow \mathfrak{m}(\eta)$ chiaramente è K-lineare e commuta con π; essa commuta anche con t, in quanto se $t\eta = \zeta$, si ha $\zeta'' - t\eta'' \in \mathrm{vect}\, R$, e perciò tz' è legato a ζ'' come z' lo è a η''. Si conclude che l'applicazione $\eta \longrightarrow \mathfrak{m}(\eta)$ è un omomorfismo di T-moduli canonici; essa è anche un isomorfismo: se infatti $\mathfrak{m}(\eta) = 0$, ciò significa, per 6.12, che $z' \in \mathrm{vect}\, C$, onde $\eta'' \in \mathrm{vect}\, R$, η ha ogni componente in ${}^tR$, e infine $\eta = 0$. Perciò la dimensione di $\mathcal{M}A$, come T-modulo canonico, è almeno n; ma essa è al più n per 6.4, onde essa è n; l'applicazione di $\tau\mathcal{C}\,{}^tR$ su $\mathcal{M}A$ è pertanto una isogenia, ed $\mathcal{M}A$ è equidimensionale, come desiderato.

Passiamo a dimostrare il secondo asserto; il 6.6 dà $(\mathrm{cl}\, p\iota_A)\, \mathfrak{b} \backsim p\mathfrak{b}$; poichè $\mathrm{cl}\, p\iota_A = (\mathrm{cl}\, t_A)(\mathrm{cl}\, \pi_A)$, e $(\mathrm{cl}\, t_A)\, \mathfrak{b} = \pi\mathfrak{b}$ (cfr. la fine del n⁰ 61 per le definizioni riguardanti i semiomomorfismi), la precedente si scrive $\pi\,[(\mathrm{cl}\pi_A)\mathfrak{b} - t\mathfrak{b}] \backsim 0$; l'equidimensionalità di $\mathcal{M}A$ dà allora $(\mathrm{cl}\, \pi_A)\, \mathfrak{b} \backsim t\mathfrak{b}$, come voluto.

Quanto all'ultimo asserto, occorre dimostrare che ogni $\mathfrak{a} \in \mathcal{B}A$ è del tipo $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}(x)$ per qualche $x \in \mathcal{X}C$; ora, da $(\mathrm{cl}\, \pi_A)\, \mathfrak{a} \backsim t\mathfrak{a}$ segue che, per ogni r intero positivo, $\varrho_r\, (\mathrm{cl}\, \pi_A^r)\, \mathfrak{a} = \mathrm{cl}\, y_r$ per qualche $y_r \in \mathrm{vect}_r\, C$; poichè $\varrho_r\, \mathrm{cl}\, y_{r+1} = \mathrm{cl}\, t_C\, y_r$, gli y_r possono essere scelti in modo che $\varrho_r\, y_{r+1} = t_C\, y_r$. Se $x \in C^\infty$ è determinato da $\varrho_r\, t^r_{C^\infty}\, x = y_r$ per ogni r, si ha che, per $P \in A^\infty$, $\mathrm{cl}\, \varrho_r\, t^r_{C^\infty}\, (\sigma_P\, x - x) = \mathrm{cl}\, \sigma_Q\, y_r - \mathrm{cl}\, y_r$ per un $Q \in A$; questa, a sua volta, coincide con $\varrho_r[\sigma_Q(\mathrm{cl}\,\pi_A^r)\,\mathbf{a} - (\mathrm{cl}\,\pi_A^r)\,\mathbf{a}] = \varrho_r(\mathrm{cl}\,\pi_A^r)(\sigma_P\,\mathbf{a} - \mathbf{a})$. Ma $\sigma_P\,\mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathrm{cl}\,z$ per qualche $z \in \mathrm{vect}\ C$ (cfr. 6.5), e perciò $\varrho_r\,t^r_{C^\infty}(\sigma_P\,x - x) = \varrho_r\,t^r_C\,z$, onde $\sigma_P\,x - x = z$, $x \in \mathcal{X}C$, e chiaramente $\mathbf{a} = \mathbf{b}(x)$, C.V.D..

Sia τ l'immersione canonica di C in C^∞, e si indichi con τ anche l'omomorfismo canonico di A^∞ su tutto A che è trasposto del τ di C; generalizzando le notazioni del n^0 61, ossia trattando A^∞ come se fosse una varietà, il contenuto dei 6.12, 6.13 può essere espresso con la notazione $(\mathrm{cl}\,\tau)\,\mathbf{b} = \mathrm{cl}\,x$; i 6.12, 6.13 danno anche un isomorfismo canonico fra $\mathcal{M}A$ e $\mathcal{X}A/\mathrm{vect}\,C$, quando τ sia stato assegnato.

6.14 TEOREMA. *Sia τ l'immersione che lega ${}^tR$ a ${}^t\mathcal{R}$, cosicchè τ è anche un'immersione di C in C^∞; per ogni $x \in \mathcal{X}A \cap \mathrm{vect}(S^\infty \cap {}^t\mathcal{R}^+)$ (ossia per ogni $x \in \mathcal{X}A \cap S^\infty$ tale che $\varepsilon x = 0$) pongasi $\xi = \xi(x) = \lim_{r\to\infty} t^{-r}\,t_0^r\,x$, ove t_0 denota il t di ${}^t\mathcal{R}$; allora $\xi \in \tau\,\mathcal{C}\,{}^tR$, e l'applicazione $x \longrightarrow \xi(x)$ è un omomorfismo del K-modulo $\mathcal{X}A \cap \mathrm{vect}(S^\infty \cap {}^t\mathcal{R}^+)$ su tutto $\tau\,\mathcal{C}\,{}^tR$, che commuta con t e π. Infine, ξ è l'unico elemento di $\mathcal{C}'\,{}^t\mathcal{R}^0$ tale che $x - \xi$ abbia ogni componente in ${}^tR$, e quindi in ${}^tR^+$.*

DIM. Indicheremo ${}^t\mathcal{R}$ semplicemente con $\mathcal{R}$; occorre anzitutto dimostrare che il limite esiste; si ha infatti, per 6.12, $\mathbf{b}(tx) = t\mathbf{b}(x)$, $\mathbf{b}(t_{\mathcal{R}}\,x) = (\mathrm{cl}\,\pi_A)\,\mathbf{b}(x)$, onde, per 6.13, $\mathbf{b}(tx) \backsim \mathbf{b}(t_{\mathcal{R}}\,x)$, e quindi, di nuovo per 6.12, $t_{\mathcal{R}}\,x - tx \in \mathrm{vect}\ C$, e $t^{-1}\,t_{\mathcal{R}}\,x - x \in t^{-1}\,\mathrm{vect}\ C$. Applicando a questa l'operatore $t^{-r+1}\,t_{\mathcal{R}}^{r-1}$ si ottiene $t^{-r}\,t^r_{\mathcal{R}}\,x - t^{-r+1}\,t_{\mathcal{R}}^{r-1}\,x \in t^{-r}\,\mathrm{vect}\,t_C^{r-1}\,C$ e quindi $\in t^{-r}\,\mathrm{vect}\,(t_{\mathcal{R}}^{r-1}\,R)^+$, ove anche qui R sta in luogo di ${}^tR$.

Perciò, nella topologia di biv $\mathcal{R}$, $\lim_{r\to\infty}(t^{-r}\,t^r_{\mathcal{R}}\,x - t^{-r+1}\,t_{\mathcal{R}}^{r-1}\,x) = 0$, cosicchè $\xi = \lim_{r\to\infty} t^{-r}\,t^r_{\mathcal{R}}\,x$ esiste in Biv $\mathcal{R}$; esso è poi in biv $\mathcal{R}$ per il 2.1, applicato agli addendi $t^{-r}\,t^r_{\mathcal{R}}\,x - t^{-r+1}\,t_{\mathcal{R}}^{r-1}\,x$; la dimostrazione del 2.1 mostra anche che $\xi_i = t\text{-}\lim_{r\to\infty}(t^{-r}\,t^r_{\mathcal{R}}\,x)_i = t\text{-}\lim_{r\to\infty} t^r_{\mathcal{R}}\,x_{i+r}$; ogni $t^r_{\mathcal{R}}x_{i+r}$ appartiene a $t_{\mathcal{R}}^{-i-1}\,R$, e perciò $\xi_i \in t_{\mathcal{R}}^{-i-1}\,R$, che è quanto dire che ogni componente di ξ appartiene ad $\mathcal{R}^0$. Si ha $\mathbf{P}\xi = \lim_{r\to\infty}\mathbf{P}t^{-r}\,t^r_{\mathcal{R}}\,x = \lim_{r\to\infty} t^{-r}\,t^r_{\mathcal{R}}\,(x \otimes 1 + 1 \otimes x + z)$, con $z \in \mathrm{vect}\,R \mathbin{\overline{\times}} R$; poichè $\lim_{r\to\infty} t^{-r}\,t^r_{\mathcal{R}}\,z = 0$, si conclude che $\mathbf{P}\xi = \xi \mathbin{\overline{\times}} 1 + 1 \mathbin{\overline{\times}} \xi$, ossia che $\xi \in \mathcal{C}'\,\mathcal{R}^0$; ma si è visto che $\xi_{-1} \in R = \tau\,R$; quindi $\xi \in \tau\,\mathcal{C}R$ (cfr. 4.31).

Che l'applicazione $x \longrightarrow \xi(x)$ sia un omomorfismo di K-moduli, e che esso commuti con t e π, è palese; è anche chiaro che $x - \xi$ ha ogni componente in R, dato che le componenti di indice negativo di ξ già appartengono ad R. Che poi ξ sia l'unico elemento di $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ con tale proprietà lo si vede nel modo seguente: se anche ξ' ha la stessa proprietà, ogni componente di $\xi' - \xi \in \mathcal{C}' \mathcal{R}^0$ appartiene ad R; ma allora la $t(\xi' - \xi) = t_{\mathcal{R}}(\xi' - \xi)$ (cfr. 4.31) mostra che $\xi' - \xi = 0$.

Resta da far vedere che l'applicazione $x \longrightarrow \xi(x)$ è su tutto $\tau \mathcal{C} R$; questo però è già stato visto nella prima parte della dimostrazione del 6.13: dato infatti $\eta \in \tau \mathcal{C}\, {}^tR$ (torniamo qui alle notazioni precise), si è visto là che esiste un elemento $z' \in \mathcal{X}\, C \cap \operatorname{vect} S^\infty$ tale che $z' - \eta' \in \operatorname{vect} {}^tR$ (se C^∞ viene considerato immerso in ${}^t\mathcal{R}$). Posto allora $z = z' - \varepsilon z'$, si ha $z \in \mathcal{X}\, C \cap \operatorname{vect}(S^\infty \cap {}^t\mathcal{R}^+)$, e $z - \eta' \in \operatorname{vect} {}^tR$; quindi ogni componente di $z - \eta$ appartiene a ${}^tR$, ed $\eta = \xi(z)$, C.V.D..

Sia $\mathbf{a} \in \mathcal{B}A$, e in base ai 6.12, 6.13 si costruisca un $x \in \mathcal{X}C$ tale che $\mathfrak{b}(x) = \mathbf{a}$; vogliamo anzitutto far vedere che esiste un $y \in \mathcal{X}C \cap \operatorname{vect}(S^\infty \cap {}^t\mathcal{R}^+)$ tale che $\mathfrak{b}(y) \backsim \mathbf{a}$; supposto infatti costruito $y_r \in \mathcal{X}C$ tale che $\mathfrak{b}(y_r) \backsim \mathbf{a}$, e che le prime r componenti di y_r appartengano ad $S \cap {}^t\mathcal{R}^+$ (per $r = 1$ un opportuno $\sigma_P x$, con $P \in A^\infty$, ha questa proprietà), per $P \in A^\infty$ opportuno lo $z = \sigma_P x$ ha la stessa proprietà di y_r, ma per le prime $r + 1$ componenti; pongasi allora $y_{r+1} = z + z'$, ove le prime r componenti di z' sono quelle di $y_r - z$ (e sono quindi in $S^\infty \cap C = S$), mentre le rimanenti sono uguali a 0; allora $y_{r+1} \in \mathcal{X}C$, $\varrho_r\, y_{r+1} = y_r$, e le prime $r + 1$ componenti di y_{r+1} sono in S^∞. Se queste non sono anche in ${}^t\mathcal{R}^+$, basta sottrarre da y_{r+1} l'elemento $\varepsilon\, y_{r+1}$. Ora l'y tale che $\varrho_r\, y = y_r$ per ogni r ha appunto le proprietà cercate. Perciò ad ogni x colle proprietà descritte al 6.14 corrispondono un $\mathfrak{b}(x) \in \mathcal{B}A$ ed un $\mathbf{m}(x) = \mathfrak{b}(x) + \mathcal{E}A \in \mathcal{M}A$; l'applicazione $x \longrightarrow \mathbf{m}(x)$ è un omomorfismo di K-moduli su tutto $\mathcal{M}A$, che commuta con π e t; il suo nucleo è, per 6.13, $\operatorname{vect}(S \cap {}^tR^+) = \operatorname{vect} M_0$. Dato allora $\mathbf{n} \in \mathcal{M}A$, si cerchi $x \in \mathcal{X}A \cap \operatorname{vect}(S^\infty \cap {}^t\mathcal{R}^+)$ tale che $\mathbf{m}(x) = \mathbf{n}$, e si costruisca $\xi = \xi(x)$ per mezzo del 6.14; l'elemento ξ dipende solo da $\mathbf{n}$ e non da x, in quanto, per 6.14, $\xi(y) = 0$ se $y \in \operatorname{vect} M_0$. Si è così trovato un omomorfismo del K-modulo $\mathcal{M}A$ su tutto il K-modulo $\tau\mathcal{C}\,{}^tR$, che commuta con π e t; per 6.13 $\mathcal{M}A$ è un T modulo canonico di dimensione $n = \dim A$, e per 6.3 $\mathcal{C}\,{}^tR$ è un T-modulo canonico di dimensione n; perciò l'omomorfismo trovato deve essere un isomorfismo; ciò comporta in particolare che il nucleo dell'applicazione $x \longrightarrow \xi(x)$ del 6.14 è proprio $\operatorname{vect} M_0$. Si è così provato il:

6.15 Teorema. *Sia A varietà abeliana su k; sia $C = k(A)$, e si costruiscano S, ${}^tR$, ${}^t\mathcal{R}$, ecc., ove l'isomorfismo τ che lega ${}^tR$ a ${}^t\mathcal{R}$ viene considerato come un'immersione. Allora $\mathcal{M}A$ è un K-modulo canonico, ed esiste un isomorfismo (canonico) ${}^t\chi$ di $\mathcal{M}A$ su tutto $\tau\mathcal{C}\,{}^tR$, costruito nel modo seguente: se $\mathbf{m} \in \mathcal{M}A$, si trovi un $x \in \mathcal{X}A \cap \operatorname{vect}(S^\infty \cap {}^t\mathcal{R}^+)$ tale che, nelle notazioni del 6.12, $\mathfrak{b}(x) \in \mathbf{m}$; allora ${}^t\chi\, \mathbf{m} = \xi(x)$, nelle notazioni del 6.14. Come conseguenza, il nucleo dell'omomorfismo $x \longrightarrow \xi(x)$ descritto nel 6.14 è* $\operatorname{vect} M_0$.

65. Il 6.15 dà un isomorfismo di un ente globale su un ente locale; in questo numero daremo una interpretazione di vecchi risultati che fornirà un isomorfismo di un altro ente globale sull'ente locale $\mathcal{C}'^{\pi}\mathcal{R}^{0}_{\pi}$. Indicheremo con C_0 il gruppo moltiplicativo degli elementi non nulli di C, e analogamente per k_0, C_0^{∞}, ecc.; se B è sottovarietà irriducibile di A, indicheremo con $U(B/A)$ il gruppo delle unità di $Q(B/A)$. È bene interpretare i divisori su A come applicazioni $\mathbf{Y}$ che ad ogni divisore primo X su A (manteniamo questa espressione per indicare le sottovarietà irriducibili proprie massimali di A) fa corrispondere un elemento $\mathbf{Y}X = x(X)\,U(X/A)$ di $C_0/U(X/A)$, con la condizione che $x(X) \in U(X/A)$ per quasi tutti gli X. Ci occorreranno successioni $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots)$ di divisori su A, aventi la proprietà che $p\mathbf{Y}_1 \backsim 0$, e $p\mathbf{Y}_i \backsim \mathbf{Y}_{i-1}$ se $i > 1$ (qui, al solito, $\backsim$ indica equivalenza lineare di divisori); tali successioni possono essere sommate mediante somma delle componenti di ugual posto, e formano un gruppo addittivo, che sarà indicato con $\mathcal{B}'A$; esso possiede un π ed un t dati da $\pi\mathbf{Y} = p\mathbf{Y}$ e $t\mathbf{Y} = \mathbf{Y}$. Indicheremo con $\mathcal{E}'A$ il sottogruppo di $\mathcal{B}'A$ formato dagli $\mathbf{Y}$ in cui ogni $\mathbf{Y}_i$ è principale, e porremo $\mathcal{M}'A = \mathcal{B}'A/\mathcal{E}'A$; porremo anche $\mathbf{Y} \backsim \mathbf{Z}$ se $\mathbf{Y} - \mathbf{Z} \in \mathcal{E}'A$. Il gruppo $\mathcal{M}'A$ diviene un (vect C_p)-modulo nel modo seguente: se $\mathbf{Y} \in \mathcal{B}'A$ è un rappresentante di $\mathbf{m} \in \mathcal{M}'A$, e se $a = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots \in$ vect C_p, con gli a_i interi ≥ 0 e $< p$, indicheremo con $a\,\mathbf{m}$ l'immagine in $\mathcal{M}'A$ di

$$(a_0 \mathbf{Y}_1, (a_0 + a_1 p)\mathbf{Y}_2, (a_0 + a_1 p + a_2 p^2)\mathbf{Y}_3, \ldots).$$

Se α è un omomorfismo di A su B (varietà abeliana), e $\mathbf{Y}$ è un divisore su B, nessuna delle cui componenti contenga αA, è noto che si può definire una *conorma* di $\mathbf{Y}$, che è un divisore su A che indicheremo con $(\operatorname{div}\alpha)\mathbf{Y}$; il metodo è perfettamente analogo a quello esposto nel n⁰ 61 per definire $\operatorname{cl}\alpha$; lo stesso simbolo $\operatorname{div}\alpha$ sarà applicato agli elementi di $\mathcal{B}'B$ e di $\mathcal{M}'B$. Si noti anche subito che se $\mathbf{Y} \in \mathcal{B}'A$, ogni $\mathbf{Y}_i$ soddisfa la $p^i\mathbf{Y}_i \backsim 0$, onde ogni $\mathbf{Y}_i$ è aritmeticamente, e quindi algebricamente, equivalente a 0 ($\mathbf{Y}_i \equiv 0$); ciò significa che $\sigma_P \mathbf{Y}_i \backsim \mathbf{Y}_i$ per ogni $P \in A$; pertanto $\sigma_P \mathbf{Y} \backsim \mathbf{Y}$; questa si può scrivere:

6.16 $$(\operatorname{div}\mu_A)\mathbf{Y} \backsim \mathbf{Y} \times A + A \times \mathbf{Y},$$

ove $\mathbf{Y} \times A$ significa $(\operatorname{div}\operatorname{pr}_1)\mathbf{Y}$, essendo pr_1 la proiezione di $A \times A$ sul primo fattore.

Prima di proseguire vogliamo ricordare che $\mathcal{C}'^{\pi}\mathcal{R}^{0}_{\pi}$ ha un insieme di generatori x che soddisfano la $tx = x$; che si ha $\exp x = \{y\}$ per un opportuno $y \in {}^{\pi}\mathcal{R}^{0}_{\pi}$; che $y \equiv 1 \pmod{{}^{\pi}\mathcal{R}^{+}_{\pi}}$; che tali y formano un gruppo moltiplicativo, ed anzi un (vect C_p)-modulo moltiplicativo, isomorfo a $\mathcal{G}A^\infty$; vedansi per tutto ciò i nn[i] 18, 55, 60, ed il 2.10.

In analogia alle notazioni del n^0 3 di [1], indichiamo con $\mathcal{Y}C$ o $\mathcal{Y}A$ l'insieme dei « vettori » $y = [y_1, y_2, ...]$, con $y_i \in C_0^\infty$, tali che $\pi y_1 \in C_0$, $y_i^{-1} \pi y_{i+1} \in C_0$, e che $y_i^{-1} \sigma_P y_i \in C_0$ per ogni i e per ogni $P \in A^\infty$; se il prodotto di due tali vettori si intende fatto sulle componenti, l'insieme $\mathcal{Y}C$ diviene un gruppo moltiplicativo con l'identità $1 = [1, 1, 1, ...]$; esso è dotato di un π ed un t dati da $\pi y = y^p$, $ty = y$. Gli $y \in \mathcal{Y}C$ a componenti in C_0 formano un sottogruppo di $\mathcal{Y}C$, che verrà denotato con $\mathcal{Y}_0 C$; fra questi vi sono quelli a componenti in k_0, il cui gruppo verrà denotato con $\mathcal{Y}_c C$. Il gruppo $\mathcal{Y}C/\mathcal{Y}C_0$ diviene un (vect C_p)-modulo, scritto moltiplicativamente, nel modo seguente: se $a = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ... \in \text{vect}\, C_p$, con gli a_i interi ≥ 0 e $< p$, e se $y \in \mathcal{Y}C$ è un rappresentante di un elemento z di $\mathcal{Y}C/\mathcal{Y}_0 C$, indicheremo con az l'immagine di $[y_1^{a_0}, y_2^{a_0+a_1 p}, ...]$.

Possiamo ora dimostrare gli analoghi di 6.13, 6.14, 6.15, che sono del resto già contenuti nel (2.1) di [2] e nei 3.1 e 4.1 di [1], di cui faremo uso; notiamo prima subito che la condizione $y^{-1} \sigma_P y \in \mathcal{Y}_0 C$, usata nella definizione di $\mathcal{Y}C$, è equivalente alla $(\mathbf{P}y)(y \otimes y)^{-1} \in \mathcal{Y}_0 C'$, se C' è il corpo quoziente di $C \otimes C$.

6.17 Teorema. *Sia A varietà abeliana su k, e sia $C = k(A)$; per ogni $y \in \mathcal{Y}C$ esiste un unico $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(y) \in \mathcal{B}'A$ tale che, per $r = 1, 2, ...$, si abbia* $\text{div}\, \pi^r y_r = (\text{div}\, t_A^r)\, \mathbf{Y}_r$, *ossia* $= p^r\, \mathbf{Y}_r$. *L'applicazione $y \longrightarrow \mathbf{Y}(y)$ è un omomorfismo, di nucleo $\mathcal{Y}_c C$, del gruppo moltiplicativo $\mathcal{Y}C$ su tutto il gruppo $\mathcal{B}'A$; esso soddisfa alla relazione $\mathbf{Y}(\pi y) = \pi \mathbf{Y}(y)$; inoltre $\mathbf{Y} \backsim 0$ se e solo se $y \in \mathcal{Y}_0 C$.*

Dim. Dato un divisore primo X su A, per ogni r esiste qualche $P \in A^\infty$ tale che X non sia nè polo nè zero di $\pi^r \sigma_P y_r$ (che è un elemento di C_0); d'altra parte $y_r (\sigma_P y_r)^{-1} \in C_0$; se perciò si definisce $\mathbf{Y}_r X = y_r (\sigma_P y_r)^{-1}\, U(X/A)$, $\mathbf{Y}_r X$ è indipendente dalla scelta di P, in quanto se Q è un altro punto di A^∞ con la stessa proprietà di P, si ha $[y_r (\sigma_P y_r)^{-1}]\, [y_r (\sigma_Q y_r)^{-1}]^{-1} = (\sigma_Q y_r)(\sigma_P y_r)^{-1} \in U(X/A)$. Poi, $\mathbf{Y}_r$ è un divisore perchè $\mathbf{Y}_r X = U(X/A)$ per tutti gli X che non sono nè poli nè zeri di $\pi^r y_r$, e cioè per quasi tutti gli X.

Si ha $(p\mathbf{Y}_r) X = (\pi y_r)(\pi \sigma_P y_r)^{-1}\, U(X/A) = y_{r-1} (\sigma_Q y_{r-1})^{-1}\, z U(X/A)$, per opportuni P, $Q \in A^\infty$ dipendenti da X, e per uno $z \in C_0$ indipendente da X; per $r = 1$ la precedente rimane valida ponendovi $y_{r-1} = 1$; pertanto $p\mathbf{Y}_r \backsim \mathbf{Y}_{r-1}$, e ciò mostra che $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, ...) \in \mathcal{B}'A$.

Occorre dimostrare che $\text{div}\, \pi^r y_r = p^r\, \mathbf{Y}_r$, e che $\mathbf{Y}$ è l'unico elemento con tale proprietà. Si ha infatti $(p^r\, \mathbf{Y}_r) X = (\pi^r y_r)(\pi^r \sigma_P y_r)^{-1}\, U(X/A) = (\pi^r y_r)\, U(X/A)$ per un opportuno $P \in A^\infty$; se poi $\mathbf{Y}'$ ha la stessa proprietà, da $p^r\, \mathbf{Y}_r = p^r\, \mathbf{Y}'_r$ segue $\mathbf{Y}_r = \mathbf{Y}'_r$.

Che l'applicazione $y \longrightarrow \mathbf{Y}(y)$ sia un omomorfismo di gruppi commutante con π, è chiaro; il nucleo è $\mathcal{Y}_c C$ perchè $\mathbf{Y} = 0$ se e solo se $p^r \mathbf{Y}_r = 0$ per ogni r, ossia se e solo se $\pi^r y_r \in k_0$, o anche $y_r \in k_0$, per ogni r. L'equivalenza della $\mathbf{Y} \backsim 0$ con la $y \in \mathcal{Y}_0 C$ è palese. Resta da dimostrare che l'applicazione $y \longrightarrow \mathbf{Y}(y)$ è su tutto $\mathcal{B}'A$; per questo si ricordi che, dato $\mathbf{Z} \in \mathcal{B}'A$, si ha $p^r \mathbf{Z}_r = \operatorname{div} z_r$ per un opportuno $z_r \in C_0$; dato che $p\mathbf{Z}_{r+1} \backsim \mathbf{Z}_r$, gli z_r soddisfano la relazione $(\pi^{-r} z_{r+1})(\pi^{-r} z_r)^{-1} \in C_0$; posto allora $y_r = \pi^{-r} z_r$, si ha appunto $y_r^{-1} \pi y_{r+1} \in C_0$, e inoltre $y_r^{-1} \sigma_P y_r$, per $P \in A^\infty$, appartiene a C_0 in quanto $\operatorname{div} \pi^r (y_r^{-1} \sigma_P y_r) = \operatorname{div} (z_r^{-1} \sigma_Q z_r) = p^r (\sigma_Q \mathbf{Z}_r - \mathbf{Z}_r)$ è il divisore di un elemento di $\pi^r C_0$. Posto ora $y = [y_1, y_2, \ldots]$, si è visto che $y \in \mathcal{Y} C$, ed è chiaro da quanto precede che $\mathbf{Y}(y) = \mathbf{Z}$, C.V.D..

6.18 TEOREMA. *Sia τ l'immersione che lega ${}^\pi R$ a ${}^\pi\mathcal{R}$, cosicchè τ è anche un'immersione di C in C^∞; per ogni y di $\mathcal{Y} C$ le cui componenti appartengano ad S^∞ e soddisfino la $y_r \equiv 1 \pmod{{}^\pi\mathcal{R}^+}$, pongasi $\eta = \eta(y) = \lim_{r \to \infty} \pi^r y_r$ (si intende che in ${}^\pi R$* lim *significa* π-lim). *Allora l'applicazione $y \longrightarrow \{\eta(y)\} \in$* biv ${}^\pi\mathcal{R}$ *è un omomorfismo di un gruppo moltiplicativo sul gruppo moltiplicativo formato dagli* $\exp \eta'$, *quando η' percorre tutti gli elementi di $\tau\mathcal{C}\,{}^\pi R_\pi$ che soddisfano la $t\eta' = \eta'$; tale omomorfismo commuta con π, ed il suo nucleo è dato dagli y del tipo descritto che appartengono anche a $\mathcal{Y}_0 C$.*

DIM. Occorre anzitutto dimostrare che η esiste. Ora, se $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(y)$, il 6.17 assicura che $\operatorname{div}(\pi^{r+1} y_{r+1})(\pi^r y_r)^{-1} = p^{r+1} \mathbf{Y}_{r+1} - p^r \mathbf{Y}_r = p^r (p\mathbf{Y}_{r+1} - \mathbf{Y}_r)$; poichè $p\mathbf{Y}_{r+1} \backsim \mathbf{Y}_r$, ciò significa che $(\pi^{r+1} y_{r+1})(\pi^r y_r)^{-1}$ è elemento di $\pi^r C$, e quindi di $\pi^r C \cap S^\infty = \pi^r S$. Dato che ${}^\pi\mathcal{R}^+ \cap \pi^r S = \pi^r M_0$, ciò dice che $\pi \cdot \lim_{r \to \infty} (\pi^{r+1} y_{r+1})(\pi^r y_r)^{-1} = 1$, onde η esiste.

Che l'applicazione $y \longrightarrow \eta(y)$ sia un omomorfismo che commuta con π è chiaro; poichè $\eta \in {}^\pi R$, il 2.10 assicura che $\eta' = \log\{\eta\}$ esiste e soddisfa la $t\eta' = \eta'$; si ha $(\mathbf{P}\pi^r y_r)(\pi^r y_r \otimes \pi^r y_r)^{-1} \in \pi^r C_0$, ossia $\in \pi^r\, {}^\pi R$, ed anzi tale elemento è $\equiv 1 \pmod{\pi^r ({}^\pi R \,\overline{\times}\, {}^\pi R)^+}$; quindi $\mathbf{P}\eta = \eta \,\overline{\times}\, \eta$, od anche $\eta' \in \mathcal{C}'\,{}^\pi\mathcal{R}^0$; è anzi $\eta' \in \mathcal{C}'\,{}^\pi\mathcal{R}^0_\pi$ perchè $t\eta' = \eta'$; infine $\eta' \in \tau\mathcal{C}\,{}^\pi R_\pi$ perchè $\eta'_{-1} \in {}^\pi R_\pi$.

Resta da trovare il nucleo dell'omomorfismo $y \longrightarrow \eta(y)$; un y appartiene al nucleo se e solo se $\lim_{r \to \infty} \pi^r y_r = 1$; se $y_r \in C_0$ per ogni r, ciò accade certamente; reciprocamente, supposta verificata la precedente, scriviamo tale relazione sotto la forma

$$(\pi y_1) \prod_{1}^{\infty}{}_r (\pi^{r+1} y_{r+1})(\pi^r y_r)^{-1} = 1 ;$$

il $\prod_1^\infty {}_r$ è in πC, onde $\pi y_1 \in \pi C$, $y_1 \in C$; ma si può anche scrivere

$$(\pi^2 y_2) \prod_2^\infty {}_r (\pi^{r+1} y_{r+1}) (\pi^r y_r)^{-1} = 1\,;$$

il $\prod_2^\infty {}_r$ è in $\pi^2 C$, onde $y_2 \in C$, ecc., C.V.D..

Per 6.17, il gruppo $\mathcal{M}'A$ è isomorfo a $\mathcal{Y}C/\mathcal{Y}_0 C$, l'isomorfismo essendo dato da $y \longrightarrow \mathbf{M}(y) = \mathbf{Y}(y) + \mathcal{E}'A$; e l'isomorfismo è anche C_p-lineare; ogni elemento $\mathbf{N}$ di $\mathcal{M}'A$ contiene un $\mathbf{Y}$ nessuno dei cui poli o zeri (ossia dei poli o zeri delle sue componenti) intersechi $\mathcal{G}A$; quindi fra gli y tali che $\mathbf{M}(y) = \mathbf{N}$ ve n'è uno, sia esso y', ogni cui componente appartiene ad S^∞; se $y'_i \equiv a_i \pmod{{}^\pi\mathcal{R}^+}$, con $a_i \in k_0$, posto $y_i = a_i^{-1} y'_i$ si ha che gli y_i sono le componenti di un $y \in \mathcal{Y}C$ tale che $\mathbf{M}(y) = \mathbf{N}$, e che $y_i \in S^\infty$ ed $y_i \equiv 1 \pmod{{}^\pi\mathcal{R}^+}$; tale y è cioè nelle condizioni descritte nel 6.18. Il 6.18 assicura quindi che esiste un isomorfismo $\mathbf{N} \longrightarrow \eta(y)$ di $\mathcal{M}'A$ sul (vect C_p)-modulo moltiplicativo V formato dagli $\zeta \in {}^\pi R$ che soddisfano la $\zeta \equiv 1 \pmod{{}^\pi R^+}$ e la $\mathbf{P}\zeta = \zeta \,\overline{\times}\, \zeta$. Vogliamo dimostrare che tale isomorfismo è su tutto V; essendo V un modulo libero su un campo d'integrità a ideali principali, con f generatori se f è la codimensione separabile di A, la teoria dei divisori elementari assicura che basta dimostrare l'asserzione seguente: per ogni $\zeta \in V$ esiste un $\mathbf{N}$ il cui corrispondente ζ' in V soddisfi la $\zeta' \zeta^{-1} \in \pi V$, ossia $\in \pi\, {}^\pi R$. Per trovare tale $\mathbf{N}$ procederemo come segue:

1. Poichè $\mathbf{P}\zeta = \zeta \,\overline{\times}\, \zeta$, per ogni derivazione invariante d di ${}^\pi R$ si ha $\zeta^{-1} d\zeta \in k$.

2. L'applicazione $\omega : d \longrightarrow \zeta^{-1} d\zeta$ è un differenziale invariante su A; esso è tale che $\omega d = 0$ per ogni d una cui potenza sia nulla; quindi, per l'asserzione 5) del 4.3 di [1], ω è combinazione lineare, a coefficienti in k, di differenziali del tipo $d \longrightarrow x^{-1} dx$, con $x \in C_0$. Poichè però $\omega(\pi d) = \pi(\omega d)$ per la 5.39 (caso $n = 1$), i coefficienti di tale combinazione sono tutti in C_p (cfr. il 4.2 di [1]), e quindi $\omega d = x^{-1} dx$ per un $x \in C_0$.

3. L'x precedente può essere scelto in S, e tale che $x \equiv 1 \pmod{{}^\pi R^+}$; dall'essere $x^{-1} dx \in k$ segue, per $P \in A$, $d(x^{-1} \sigma_P x) = 0$, ossia $x^{-1} \sigma_P x \in \pi C$, o infine $(\mathbf{P}x)(x \otimes x)^{-1} \in \pi C'$, se C' è il corpo quoziente di $C \otimes C$. E da $x^{-1} dx = \zeta^{-1} d\zeta$ segue $x^{-1} \zeta \in \pi\, {}^\pi R$.

4. Il divisore $\mathbf{Y}_1$ dato da $\mathbf{Y}_1 X = [\pi^{-1}(x(\sigma_P x)^{-1})]\, U(X/A)$, per P generico, soddisfa la $p\mathbf{Y}_1 \backsim 0$; esiste allora (per la teoria della varietà di Picard) un $\mathbf{Y} =$

$(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots) \in \mathcal{B}'A$ nessuno dei cui poli intersechi $\mathcal{G}A$; si ha $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(y)$ per un y nelle condizioni descritte nel 6.18, e tale inoltre che $y_1 = \pi^{-1} x$.

5. Se $\zeta' = \eta(y)$, si ha $x^{-1} \zeta' \in \pi\, {}^{\pi}R$, e quindi, per 3, $\zeta^{-1} \zeta' \in \pi\, {}^{\pi}R$; l'N richiesto è allora $\mathbf{Y} + \mathcal{E}'A$.

Abbiamo così dimostrato:

6.19 TEOREMA. *Sia A varietà abeliana su k; sia $C = k(A)$, e si costruiscano S, ${}^{\pi}R$, ${}^{\pi}\mathcal{R}$, ecc., ove l'isomorfismo τ che lega ${}^{\pi}R$ a ${}^{\pi}\mathcal{R}$ viene considerato un'immersione. Allora $\mathcal{M}'A$ è un* (vect C_p)*-modulo, ed esiste un isomorfismo ${}^{\pi}\chi$, commutante con π, di $\mathcal{M}'A$ su tutto il* (vect C_p)*-modulo formato dagli $x \in \tau\mathcal{C}\, {}^{\pi}R$ che soddisfano la $tx = x$; esso è costruito nel modo seguente: se $\mathbf{M} \in \mathcal{M}'A$, si trovi un $y \in \mathcal{Y}C$ tale che, nelle notazioni del* 6.17, $\mathbf{Y}(y) \in \mathbf{M}$, *e tale inoltre che $y_r \in S^{\infty}$, $y_r \equiv 1$* (mod ${}^{\pi}\mathcal{R}^{+}$) *per ogni r; allora, nelle notazioni del* 6.18, ${}^{\pi}\chi\mathbf{M} = \log\{\eta(y)\}$. *Inoltre l'omomorfismo descritto nel* 6.18 *è su tutto il gruppo là descritto.*

66. Nel seguito avremo spesso occasione di dover considerare contemporaneamente vari enti, come varietà abeliane, corpi abeliani, ipercampi, ecc.; sarà quindi utile usare, senza però farne un feticcio, notazioni funtoriali. Cominciamo dalla relazione fra ipercampi e K-moduli canonici: i 3.40, 3.39 mostrano che la corrispondenza $R \to \mathcal{C}R$ fra la categoria degli ipercampi e quella dei K-moduli canonici è un funtore covariante; pertanto, se α è un omomorfismo fra ipercampi, $\mathcal{C}\alpha$ denoterà il corrispondente omomorfismo fra K-moduli canonici; il grado di α è per definizione quello di $\mathcal{C}\alpha$ (e lo stesso dicasi per la nullità e la conullità), ed il 3.42 dà un'interpretazione del grado di α senza ricorrere a $\mathcal{C}\alpha$. Sono state introdotte fino ad ora varie dualità, ed altre verranno introdotte più tardi; per esse è stata usata indifferentemente la parola «duale» o la parola «trasposto» (la prima in generale per gli oggetti, la seconda per i morfismi); d'ora in poi la parola normalmente usata sarà *duale,* mentre *trasposto* verrà usata in due casi che descriveremo specificamente; la costruzione del duale, ma non del trasposto, verrà sempre indicata con una tilde ($\tilde{\ }$). Ecco i casi di dualità: se M è un K-modulo canonico, $\tilde{M}$ ne è il *duale* secondo il n° 18; analogamente per i K'-moduli canonici; se $M = \mathcal{C}R$, con R ipercampo, sarà $\tilde{M} = \mathcal{C}\tilde{R}$, ove $\tilde{R}$ è l'ipercampo *duale* di R descritto al 4.3; se α è omomorfismo di R su R', e $\beta = \mathcal{C}\alpha$, $\tilde{\beta}$ è un omomorfismo di $\mathcal{C}\tilde{R}'$ su $\mathcal{C}\tilde{R}$, cui corrisponde un $\tilde{\alpha}$ (*duale* di α) di $\tilde{R}'$ su $\tilde{R}$ tale che $\mathcal{C}\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$. Invece il cocampo D che è il «duale» di R secondo la definizione del n° 20, ossia che ne è il duale come iperalgebra, verrà d'ora in poi chiamato il *trasposto* di R, e nessun simbolo spe-

ciale verrà introdotto per denotarlo; naturalmente D ha un *duale* $\widetilde{D}$, che è per definizione il trasposto di $\widetilde{R}$.

Secondo quanto visto nel n⁰ 36, ad un ipercampo R corrisponde il bicampo che è il completamento del limite diretto $R \underset{p\iota}{\longrightarrow} R \underset{p\iota}{\longrightarrow} R \longrightarrow \ldots$; la corrispondenza sarà indicata con $\mathcal{R}$, ed è un funtore covariante per 4.16, 4.14; vi è poi un isomorfismo τ, ben determinato, di R su $\mathcal{R}\,R$; noi considereremo senz'altro R come sottoiperalgebra di $\mathcal{R}\,R$, ed ometteremo di menzionare τ; è come se usassimo, in luogo della categoria dei bicampi, la categoria delle coppie $(R, \mathcal{R}\,R)$, con R, $\mathcal{R}\,R$ legati da τ. Il bicampo $\mathcal{R}\,R$ ha un *duale* $\widetilde{\mathcal{R}}\,R = \mathcal{R}\,\widetilde{R}$ definito al n⁰ 38; l'immersione di $\widetilde{R}$ in $\widetilde{\mathcal{R}}\,R$ soddisfa la relazione seguente: un $y \in \widetilde{\mathcal{R}}\,R$ appartiene ad $\widetilde{R}$ se e solo se (per la 4 del 4.27) esso, considerato come applicazione di $(\mathcal{R}\,R)^0$ su se stesso, è R-lineare; od anche (per 3.20) se e solo se $y \circ R^+ (\mathcal{R}\,R)^0 = 0$. Sempre se R è ipercampo, vi è un ben determinato omomorfismo σ di $\widetilde{\mathcal{R}}\,R$ su tutto il trasposto D di R; tale omomorfismo è il duale (nel senso della dualità fra spazi vettoriali topologici su k) dell'immersione di R in $\mathcal{R}\,R$; il suo nucleo è l'ortogonale di R in $\widetilde{\mathcal{R}}\,R$, ossia $\widetilde{R}^+ (\mathcal{R}\,\widetilde{R})$; per non appesantire le notazioni, non useremo un simbolo fisso per σ, ma lo chiameremo « l'omomorfismo che lega $\widetilde{\mathcal{R}}\,R$ al trasposto di R ».

Nel n⁰ 18 si è introdotto il funtore $K' \otimes$, che applica la categoria dei K-moduli canonici su quella dei K'-moduli canonici; e nel n⁰ 40 è definito il funtore $\mathcal{C}'$ della categoria dei bicampi in quella dei K'-moduli canonici; i 4.31, 4.32 definiscono, per ogni isomorfismo τ di un ipercampo R su $\mathcal{R}\,R$, l'isomorfismo, là ancora indicato con τ, di $\mathcal{C}\,R$ su $\mathcal{C}'\,(\mathcal{R}\,R)^0$; poichè si è convenuto di non usare un simbolo speciale per il τ di R, non lo si userà neppure per il τ di $\mathcal{C}\,R$; gli elementi di $\tau\,\mathcal{C}\,R \subseteq \mathcal{C}'\,(\mathcal{R}\,R)^0$ verranno semplicemente chiamati gli *interi* di $\mathcal{C}'\,(\mathcal{R}\,R)^0$, e il loro insieme, ossia $\tau\,\mathcal{C}\,R$, verrà indicato con $\mathcal{C}'\,R$. Il *duale* di $\mathcal{C}'\,(\mathcal{R}\,R)^0$ è $\widetilde{\mathcal{C}}'\,(\mathcal{R}\,R)^0 = \mathcal{C}'\,(\widetilde{\mathcal{R}}\,R)^0 = \mathcal{C}'\,(\mathcal{R}\,\widetilde{R})^0$; ed il 5.41 assicura che la dualità $\circ$ fra $(\mathcal{R}\,R)^0$ e $(\mathcal{R}\,\widetilde{R})^0$ induce una dualità fra $\mathcal{C}'\,R$ e $\widetilde{\mathcal{C}}'\,R = \mathcal{C}'\,\widetilde{R}$.

Passiamo alle varietà abeliane: se A è varietà abeliana su k, ad A vengono collegati vari enti, per i quali ora si userà il simbolismo funtoriale: $S = SA$, $R = RA$, ${}^tR = {}^tRA = {}^t(RA)$, ${}^{\pi}RA$, $R_t\,A = (RA)_t$, A^∞, $\mathcal{G}A$, $\mathcal{G}A^\infty$, $\mathcal{B}A$, $\mathcal{M}A$, $\mathcal{B}'A$, $\mathcal{M}'A$, ecc.; vi sono poi $\mathcal{R}\,RA$, che si indicherà con $\mathcal{R}A$, e gli analoghi ${}^t\mathcal{R}A = {}^t\mathcal{R}\,RA = \mathcal{R}\,({}^tRA)$, $\mathcal{R}_{\pi}A, \ldots$, ed i loro duali $\widetilde{\mathcal{R}}A = \widetilde{\mathcal{R}}\,RA = \mathcal{R}\,\widetilde{R}A$, ecc.; ricordiamo che i simboli a sinistra precedono quelli a destra; così, $\widetilde{R}_{\pi}$ significa $(\widetilde{R})_{\pi}$, mentre ${}^{\pi}\widetilde{R}$ significa il duale di ${}^{\pi}R$; si noti anche che, per esempio, $\widetilde{\mathcal{C}}'\,(\mathcal{R}_{\pi}\,A)^0 = \mathcal{C}'\,(\widetilde{\mathcal{R}}_t\,A)^0$ e simili. Si presenta qui il secondo caso di uso della parola « trasposto »: A ha il « duale » $k(A)$ (n^0 58), che appartiene alla categoria dei corpi abeliani, e che chiameremo il *trasposto* di A; vedremo nel prossimo capitolo che esiste anche una varietà abeliana $\widetilde{A}$ tale che $R\widetilde{A} = \widetilde{R}A$. L'eccezione presentata dal simbolo $k(\ )$ deve essere rispettata, quando occorra precisione di linguaggio, nei morfismi; così, se α è un omomorfismo della varietà abeliana A sulla B, $k(\alpha)$ ne è il *trasposto*, ed è un omomorfismo, nel senso precisato nel n^0 58, di $k(B)$ su $k(A)$ (onde l' $\widetilde{\alpha}$ che compare, nel n^0 61, nella formula usata per definire cl α dovrebbe essere un $k(\alpha)$). Estendendo la cosa ai semiomomorfismi, ricordiamo che t_A, π_A sono i trasposti di, rispettivamente, π_C e t_C, se $C = k(A)$. Eccezioni all'uso dei simboli funtoriali sono: cl α in luogo di $\mathcal{B}\alpha$ o di $\mathcal{M}\alpha$, e div α in luogo di $\mathcal{B}'\alpha$ o di $\mathcal{M}'\alpha$. Quando non occorra eccessiva precisione di linguaggio ci considereremo liberi di usare uno stesso simbolo per un funtore e per l'oggetto ottenuto mediante quel funtore; potremo cioè porre, per esempio, $\mathcal{R} = \mathcal{R}A$.

Prima di enunciare i risultati che seguono, modificheremo l'esistente nomenclatura nel senso seguente: se α è omomorfismo di una varietà abeliana A su una B, la *nullità* di α è $\dim \ker \alpha = \dim A - \dim \alpha A$, e la *conullità* di α è $\dim B - \dim \alpha A$; l'*inseparabilità* di α, ins α, è al solito ins $[k(A) : (k(\alpha))(k(B))]$; il *grado* di α, indicato con $\nu(\alpha)$, è il prodotto di ins α per il numero di componenti irriducibili di $\ker \alpha$; se α ha nullità 0, questa coincide con la solita definizione, ossia $\nu(\alpha) = [k(A) : (k(\alpha))(k(B))]$; il *grado ridotto* di α è il numero delle componenti irriducibili di $\ker \alpha$.

6.20 LEMMA. *Sia α un omomorfismo della varietà abeliana A (su k) sulla varietà abeliana B; allora la nullità di $\widetilde{\mathcal{C}}'R\alpha$ è il doppio della nullità di α; il grado di $\widetilde{\mathcal{C}}'R\alpha$ coincide con la potenza di p che divide esattamente $\nu(\alpha)$; il grado di $\widetilde{\mathcal{C}}'^{\pi}R\alpha$ coincide con* ins α*; la conullità di $\widetilde{\mathcal{C}}'R\alpha$ è il doppio della conullità di α.*

DIM. La nullità di $\widetilde{\mathcal{C}}'R\alpha$ non è altro che la differenza fra gli ordini di $\widetilde{\mathcal{C}}'RA$ e $\widetilde{\mathcal{C}}'R(\alpha A)$, che per 6.3 sono i doppi delle dimensioni di A e di αA rispettivamente; analogamente dicasi per la conullità. Per dimostrare le altre asserzioni possiamo supporre che α sia una isogenia, ossia che abbia nullità e conullità uguali a zero. Pongasi allora $C = k(A)$, $C' = k(B)$, e si identifichi C' con $k(\alpha)\, C'$; sia $\nu(\alpha) = qp^{s+i}$, ove q è primo con p, e $p^i = \text{ins}\, \alpha = \text{ins}\, [C : C']$. Porremo $S = SA$, $S' = SB$, $R = RA$, $R' = RB$, e in generale indicheremo con apice il legame con B. Il nucleo $\alpha^{-1}\, O'$ di α è un gruppo di punti che è somma diretta di gruppi G_q, G_s di cardinalità q, p^s rispettivamente; in particolare, nelle notazioni del n^0 59, G_s consiste dei punti P_h, quando h percorre un certo sottogruppo V di $H \oplus \ldots \oplus H$. Gli M_h, per $h \in V$, sono tutti e soli i primi minimali di $M_0'S$; si indichi con $\mathcal{T}_h$ la topologia $(\prod_{l \in V} M_{h+l})$-adica di S; essa induce la M_h'-adica di S'. Se S^h è il $\mathcal{T}_h$-completamento di S, S^h contiene canonicamente S_h', che a sua volta è il completamento dell'anello locale $Q(P_h'/B)$; ma $S^h = \sum_{l \in V} S_{h+l}$ (a meno di isomorfismi), e quindi $\sum_{l \in V} e_{h+l} = e_h'$. Di qui, e da quanto esposto nel n⁰ 59, e ponendo $R_t = R_t A$ (indicato con R' nel n⁰ 59), e $R_t' = R_t B$, si deduce $R' = R_t' \,\overline{\times}\, S_0'$, come è già noto, e $R = R_t' \,\overline{\times}\, S^0$. Ora, S^0 è il completamento dell'anello semilocale $\bigcap_{l \in V} Q(P_l/A)$, ed è quindi la somma diretta degli S^l, per $l \in V$; se ζ è un sistema regolare di parametri di $Q(P_0'/B) = Q(O'/B)$, le molteplicità $e = e(Q(P/A); \zeta)$, per $P \in G_q + G_s$, sono tutte uguali, onde per il lemma 2.2 di [4] si deve avere $qp^s e = \nu(\alpha)$, ossia $e = p^i$; ma allora $e(S^l; \zeta) = p^i$ per ogni $l \in V$, e pertanto ogni S_l, per $l \in V$, è un S_0'-modulo libero con p^i generatori, ed S^0 è un S_0'-modulo libero con p^{i+s} generatori. Questo dice due cose: dice che S_0, che coincide con ${}^{\pi}R$, è un S_0'-modulo libero, ossia un ${}^{\pi}R'$-modulo libero, con p^i generatori; ciò significa, per 3.42, che p^i è il grado di ${}^{\pi}R\alpha$, e quindi di $\widetilde{\mathcal{C}}'{}^{\pi}R\alpha$; dice anche che R' è un R-modulo libero con p^{i+s} generatori, cosicchè, per lo stesso motivo, p^{i+s} è il grado di $R\alpha$, e quindi di $\widetilde{\mathcal{C}}'R\alpha$, C.V.D..

Se in 6.20 è $B = A$, e se α è isogenia, si avrà $v(\nu(\alpha)) = v(\det \widetilde{\mathcal{C}}'R\alpha)$, se v indica al solito la valutazione p-adica, come conseguenza della relazione, precedente il 3.3, fra la base di un K-modulo canonico e quella di un suo sotto-K-modulo canonico. Se $\{d_i\}$ è un insieme minimo di generatori di $\widetilde{\mathcal{C}}'RA$, e se $(\widetilde{\mathcal{C}}'R\alpha)\, d_i = \Sigma_j\, m_{ji}\, d_j$, è $\det \widetilde{\mathcal{C}}'R\alpha = \det M$, se M è la matrice degli m_{ji}; allora $(\widetilde{\mathcal{C}}'R\alpha)\, \pi d_i = \pi\, (\widetilde{\mathcal{C}}'R\alpha)\, d_i = \Sigma_j\, (\pi m_{ji})\, (\pi d_j)$, onde $\det \widetilde{\mathcal{C}}'R\alpha = \pi \det M$. Ma allora $\det M \in \operatorname{vect} C_p$; ciò permette di usare il lemma 12 di [5] (p. 134), nello stesso modo in cui è usato nella dimostrazione del teorema 36 di [5] (p. 136) (e ripetuto per dedurre, nel (2.3) di [2], l'asserto 5 dal 4); il risultato che si ottiene è il seguente:

6.21 Teorema. *Notazioni come nel* 6.20, *ma si supponga che* $B = A$ *e che* α *sia una isogenia; allora il polinomio caratteristico di* $\widetilde{\mathcal{C}}'R\alpha$ *coincide con quello di* α; *in particolare,* $\nu(\alpha) = \det \widetilde{\mathcal{C}}'R\alpha$.

Si intende che il polinomio caratteristico di $\widetilde{\mathcal{C}}'R\alpha$ è quel polinomio $f(x)$ in una indeterminata x, a coefficienti in K e a posteriori a coefficienti interi razionali, tale che $f(n) = \det(n\iota - \widetilde{\mathcal{C}}'R\alpha)$ per ogni intero n; qui, ι è l'ι di $\widetilde{\mathcal{C}}'RA$.

Se gli omomorfismi di $\widetilde{\mathcal{C}}'RA$, o $\widetilde{\mathcal{C}}'(\mathcal{R}A)^0$, vengono dati mediante matrici, dopo aver scelto basi di $\widetilde{\mathcal{C}}'(\mathcal{R}A)^0$ che siano insiemi liberi di generatori di $\widetilde{\mathcal{C}}'RA$, ad ogni α viene legata una matrice $M(\alpha)$; la decomposizione di $\widetilde{R}A$ in $\widetilde{R}_tA \,\overline{\times}\, \widetilde{R}_rA \,\overline{\times}\, \widetilde{R}_\pi A$ mostra che $M(\alpha)$ è del tipo

$$M(\alpha) = \begin{bmatrix} M_t(\alpha) & & \\ & M_r(\alpha) & \\ & & M_\pi(\alpha) \end{bmatrix};$$

ed allora si riconosce che $M_\pi(\alpha)$ coincide con l'$M_p(\alpha)$ del (2.3) di [2], mentre $M_t(\alpha)$ è l'$M_{pl}(\alpha)$ di quel risultato; l'$M_r(\alpha)$ completa perciò la rappresentazione p-adica di End A, con una matrice che però non è più ad elementi in vect C_p, ma è in generale ad elementi in K. Anzichè usare $\widetilde{\mathcal{C}}'R\alpha$ si sarebbe potuto usare $\mathcal{C}'R\alpha$, ottenendo una $\widetilde{M}(\alpha)$ trasposta di $M(\alpha)$; i 6.15, 6.19 mostrano che ciò sarebbe stato equivalente ad usare cl α e div α; è ciò che è stato fatto da Serre in [6]; in tale lavoro, $\mathcal{M}A$ è indicato con $H^1(A, \mathcal{W})$, ed $\mathcal{M}'A$ con $T_p(A^*)$.

La disponibilità della rappresentazione p-adica $\alpha \longrightarrow M(\alpha)$ permette di estendere la validità del (4.2) di [2] a tutte le varietà abeliane, e non soltanto a quelle là chiamate « non-speciali », che nelle notazioni presenti sono caratterizzate dalla proprietà $R_r A = k$. Enunceremo il risultato esteso (la cui dimostrazione è identica a quella del (4.2) di [2]) dopo un breve richiamo delle definizioni usate nel n^0 4 di [2]. Se A è varietà abeliana su k, indichiamo con cat A un insieme $\{\dots, A_i, \dots\}$ di varietà abeliane su k, tale che ogni varietà abeliana isogena ad A sia isomorfa ad un solo elemento di cat A; $\mathbf{H}$ (cat A) indica l'anelloide di tutti gli elementi di tutte le Hom(A_i, A_j); si sa che le Q-algebre $Q \otimes_I \mathrm{End}\, A_i$ sono tutte isomorfe fra loro; se $\mathbf{A}$ è un'algebra isomorfa ad esse, un *quasi-isomorfismo* di $\mathbf{H}$ (cat A) su $\mathbf{A}$ è un omomorfismo ζ fra anelloidi, che induce l'isomorfismo identico su I, e tale che le relazioni (1) $\alpha, \beta \in \mathbf{H}$ (cat A), (2) $\zeta\alpha = \zeta\beta$, (3) $\beta - \alpha$ esiste, implichino $\alpha = \beta$. Il risultato è il seguente:

6.22 TEOREMA. *Sia A varietà abeliana su k; sia $\mathbf{A}$ un'algebra su Q isomorfa a $Q \otimes_I \mathrm{End}\, A$; sia ζ un quasi-isomorfismo di $\mathbf{H}$ (cat A) su tutta $\mathbf{A}$; sia $\mathbf{o}$ schiera massimale di $\mathbf{A}$ su I; esistono allora un $A' \in$ cat A, ed un $b \in \mathbf{A}$, tali che $\mathbf{o} = b^{-1}[\zeta\, \mathrm{End}\, A']\, b$; in particolare,* End A' *è schiera massimale di $Q \otimes_I \mathrm{End}\, A'$ su I.*

La validità di questa estensione del (4.2) di [2] era già stata enunciata, senza dimostrazione, nell'ultimo capoverso di [2]. Come dal (4.2) di [2] segue il (4.4) di [2], così, con la stessa dimostrazione, dal 6.22 segue il

6.23 COROLLARIO. *Sia A varietà abeliana su k, e suppongasi che A sia estensione su k di una varietà abeliana su un corpo assolutamente algebrico. Allora $Q \otimes_I \mathrm{End}\, A$ ha ordine > 1 su Q, e se $\mathfrak{o}$ è una sua schiera massimale su I, $p\mathfrak{o}$ non è ideale primo.*

67.

6.24 LEMMA. *Sia A varietà abeliana su k, e sia $\mathfrak{a}$ un elemento di $\mathcal{B}A$ dato da $\mathfrak{a}X = z(X) + \mathrm{vect}\, Q(X/A)$; sia $C = K(A)$, e sia $x \in \mathcal{X}C$ tale che $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}(x)$ nel senso del 6.12 (cfr. 6.13). Se $d \in \mathcal{C}'({}^{\pi}\widetilde{\mathcal{R}}A)^0$ si ha $d * x \in \mathrm{vect}\, C$, e l'elemento $\mathfrak{b} = \mathrm{cl}(d * x) = \mathfrak{b}(d * x)$ di $\mathcal{E}A$ è legato ad $\mathfrak{a}$ da: $\mathfrak{b}X = d * z(X) + \mathrm{vect}\, Q(X/A)$.*

La $\mathfrak{b}$ sopra descritta verrà indicata con $d * \mathfrak{a}$.

DIM. Poichè, per 6.12 e 6.13, x è determinato da $\mathfrak{a}$ a meno di un addendo in K, $d * x$ è univocamente determinato da d ed $\mathfrak{a}$. Per dimostrare che $d * x \in \mathrm{vect}\, C$ basta applicare i 6.9 e 6.8: per r qualsiasi, e per ogni terna (i, δ, σ) descritta al 2′ del 6.8, il 2′ di 6.9 dà $(\delta * x)_i \in k$ e $(\sigma x - x)_i \in k$; quindi $(\delta * d * x)_i = (d * \delta * x)_i = 0$ e $(\sigma(d * x) - d * x)_i = (d * (\sigma x - x))_i = 0$, che per il 2′ del 6.8 assicurano che $d * x \in \mathrm{vect}\, C$. Allora $\mathfrak{b}(d * x)$ coincide con $\mathrm{cl}(d * x)$; poichè, per 6.12, $\varrho_r[t^r_{C\infty} x - t^r_C z(\pi^r_A X)] \in \mathrm{vect}_r\, Q(X/A)$, si avrà, applicando $\pi^{-r} d *$ e tenendo presente la seconda 5.19:

$$\varrho_r[t^r_C(d * x) - t^r_C(d * z(\pi^r_A X))] \in \mathrm{vect}_r [Q(X/A) \cap t^r_C C] = t^r_C \mathrm{vect}_r\, Q(\pi^r_A X/A),$$

onde appunto $d * x - d * z(X) \in \mathrm{vect}\, Q(X/A)$, C.V.D..

Nelle notazioni del 6.24, si osservi che mentre l'y che soddisfa la $\mathrm{cl}\, y = d * \mathfrak{a}$ è determinato a meno di un addendo in K, il $d * x$, che è uno di tali y, è invece completamente determinato, in quanto x è determinato a meno di un addendo in K; ciò è chiarificato dal risultato seguente:

6.25 LEMMA. *Sia $\mathfrak{a} \in \mathcal{B}A$, e sia $C = k(A)$; allora i soli elementi $x \in \mathrm{vect}\, C^\infty$ tali che $\mathrm{cl}(d * x) = d * \mathfrak{a}$ per ogni $d \in \mathcal{C}'({}^{\pi}\widetilde{\mathcal{R}}A)^0$ sono gli elementi di $\mathcal{X}C$ che soddisfano la $\mathfrak{b}(x) = \mathfrak{a}$, nel senso del 6.12 (cfr. 6.13).*

DIM. Sia $x \in \mathcal{X}C$ tale che $\mathfrak{b}(x) = \mathfrak{a}$, e sia $y \in \mathrm{vec}\, C^\infty$ tale che $\mathrm{cl}(d * y) = d * \mathfrak{a}$; allora, per 6.24, $d * (y - x) \in K$ per ogni d; si scelga un intero s; per ogni coppia (i, d) tale che $0 \leq i$, e che $d_i(p\iota)^s C = 0$, si ha $(d * (y - x))_i \in k$; se $y - x \in S^\infty A$, il 6.9 comporta allora che $c = \mathbf{P}(y - x) - (y - x) \,\overline{\times}\, 1 - 1 \,\overline{\times}\, (y - x) \in \mathrm{vect}\,(p\iota)^s({}^{\pi}R \,\overline{\times}\, {}^{\pi}R)$, avendo posto ${}^{\pi}R = {}^{\pi}RA$; ciò essendo valido per ogni s, si dovrà avere $c \in \bigcap_s \mathrm{vect}\,(p\iota)^s({}^{\pi}R \,\overline{\times}\, {}^{\pi}R) = K$; ma allora

$\mathbf{P}(y-x-c)=(y-x-c)\,\overline{\times}\,1+1\,\overline{\times}\,(y-x-c)$, ossia $y-x-c\in\mathcal{C}'({}^{\pi}\mathcal{R}A)^0$. Poichè $y-x-c\in\operatorname{vect}C^\infty$, ciò comporta $y=x+c$, come voluto. Se invece $y-x\notin S^\infty A$, per opportuni $P\in A^\infty$ si può fare in modo che $\sigma_P(y-x)$ abbia quante si vogliano componenti in S^∞, dopodichè si ragionerà nello stesso modo (cfr. la dimostrazione del 6.8), C.V.D..

Se x è elemento di ${}^{\pi}R={}^{\pi}RA$, ovvero di $R_r\,\overline{\times}\,R_\pi$, congruo ad 1 modulo ${}^{\pi}R^+$, o rispettivamente modulo $(R_r\,\overline{\times}\,R_\pi)^+$, il 2.10 assicura l'esistenza di $\log\{x\}\in\operatorname{biv}{}^{\pi}\mathcal{R}$, o rispettivamente $\in\operatorname{biv}(\mathcal{R}_r\,\overline{\times}\,\mathcal{R}_\pi)$, e quindi anche di $d*\log\{x\}$ se $d\in\mathcal{C}'{}^{\pi}\widetilde{\mathcal{R}}^0$, o rispettivamente $\in\mathcal{C}'(\widetilde{\mathcal{R}}_t\,\overline{\times}\,\widetilde{\mathcal{R}}_r)^0$; per il 5.40, $d*\log\{x\}\in\operatorname{vect}{}^{\pi}R$, o rispettivamente $\in\operatorname{vect}(R_r\,\overline{\times}\,R_\pi)$, se $d_{-1}{}^{\pi}R=0$ (ossia se $d\in\mathcal{C}'{}^{\pi}\widetilde{R}$), o rispettivamente se $d_{-1}(R_r\,\overline{\times}\,R_\pi)=0$ (ossia se $d\in\mathcal{C}'(\widetilde{R}_t\,\overline{\times}\,\widetilde{R}_r)$; e inoltre in tal caso $d*\log\{x\}$ coincide con ciò che nel n^0 6 di MC veniva chiamato $(d_0, d_1, \ldots)\log\{x\}$. Se la condizione $d_{-1}{}^{\pi}R=0$, o rispettivamente l'altra condizione, non è soddisfatta, sarà però soddisfatta la $d_{-i}{}^{\pi}R=0$, o rispettivamente l'analoga; ed allora la 5.18 dà che $d*\log\{x\}$ è un bivettore speciale a componenti in ${}^{\pi}R$, o rispettivamente in $R_r\,\overline{\times}\,R_\pi$.

Se poi x appartiene non solo a ${}^{\pi}R$, ma addirittura a $C=k(A)$, e se la condizione $d_{-1}C=0$ è soddisfatta, dal modo di costruire $(d_0, d_1, \ldots)\log\{x\}$ in MC si vede che anche ogni componente di $d*\log\{x\}$ appartiene a C. La stessa definizione data al n^0 6 di MC mostra poi che $d*\log\{x\}$ è definibile direttamente, per ogni $x\in C$ non nullo, anche se esso non appartiene a ${}^{\pi}R$, purchè $d_{-1}C=0$; in tal caso non esiste però $\log\{x\}$; infine, se la condizione $d_{-1}C=0$ non è soddisfatta, la 5) del 6.6 di MC mostra che $d*\log\{x\}$ può ancora essere definito mediante la $d*\log\{x\}=t^{-r}(t^r d*\log\{x\})$ per r elevato; esso risulta un elemento di $p^{-s}\operatorname{vect}\pi^s C$, per s opportuno. La relazione $d*\log\{xy\}=d*\log\{x\}+d*\log\{y\}$ resta vera in tutti i casi descritti.

6.26 TEOREMA. *Sia A una varietà abeliana su k; sia $\mathbf{Y}$ un divisore su A, dato da $\mathbf{Y}X=x(X)U(X/A)$ per ogni divisore primo X su A; sia $d\in\mathcal{C}'{}^{\pi}\widetilde{R}A$. Per ogni divisore primo X su A, pongasi $\mathbf{b}X=d*\log\{x(X)\}+\operatorname{vect}Q(X/A)$; allora $\mathbf{b}=\mathbf{b}(d,\mathbf{Y})\in\mathcal{B}A$; se $\mathbf{m}$ è l'immagine di $\mathbf{b}$ in $\mathcal{M}A$, pongasi ${}^t\varphi_{\mathbf{Y}}\,d={}^t\chi\,\mathbf{m}\in\mathcal{C}'\,{}^tRA$. Allora l'applicazione $d\longrightarrow{}^t\varphi_{\mathbf{Y}}\,d$ è K-lineare; se essa viene estesa K'-linearmente ad un'applicazione ${}^t\varphi_{\mathbf{Y}}$ di $\mathcal{C}'({}^{\pi}\widetilde{\mathcal{R}}A)^0$ su $\mathcal{C}'({}^{t}\mathcal{R}A)^0$, la ${}^t\varphi_{\mathbf{Y}}$ soddisfa alle relazioni seguenti:*

1. *${}^t\varphi_{\mathbf{Y}}$ è un omomorfismo di K'-moduli canonici;*
2. *${}^t\varphi_{\mathbf{Y}+\mathbf{Z}}={}^t\varphi_{\mathbf{Y}}+{}^t\varphi_{\mathbf{Z}}$;*
3. *${}^t\varphi_{\mathbf{Y}}=0$ se $\mathbf{Y}\backsim 0$.*

DIM. Per semplicità scriveremo x in luogo di $x(X)$; anzitutto, $\mathbf{b}$ è un'iperclasse perchè $\varrho_r\,\mathbf{b}X\in\operatorname{vect}_r Q(X/A)$ quando $x\in U(X/A)$. Poi, $\mathbf{b}$ non dipende dalla scelta di x: se infatti $x' = xu$, con $u = u(X) \in U(X/A)$, si ha $d * \log\{x'\} = d * \log\{x\} + d * \log\{u\}$, e l'ultimo addendo appartiene a vect $Q(X/A)$. Se $P \in A$, esiste un $x \in C = k(A)$, non nullo, tale che $\mathfrak{Y}X = xU(X/A)$ ogniqualvolta $X \ni P$; quindi $d * \log\{x\}$ è un rappresentante di $\mathfrak{b}$ in P, e ciò mostra che $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}A$.

Indicheremo $\mathfrak{b}$ con $\mathfrak{b}(d, \mathfrak{Y})$; anzitutto, se $\mathfrak{Y} \backsim \mathfrak{Y}'$, è chiaro che $\mathfrak{b}(d, \mathfrak{Y}) \backsim \mathfrak{b}(d, \mathfrak{Y}')$; poi, $\mathfrak{b}(d, 0) = 0$, in quanto $d * \log\{1\} = 0$; e infine, per $P \in A$, $\mathfrak{b}(d, \sigma_P \mathfrak{Y}) = \sigma_P \mathfrak{b}(d, \mathfrak{Y})$. Ciò mostra che la classe $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}A$ cui appartiene $\mathfrak{b}(d, \mathfrak{Y})$ non cambia quando si sostituisce $\mathfrak{Y}$ con $\sigma_P \mathfrak{Y}$, o con un divisore linearmente equivalente a $\sigma_P \mathfrak{Y}$. Per definire ${}^t\chi\, \mathfrak{m}$ occorre scegliere un rappresentante di $\mathfrak{m}$ nessuno dei cui poli intersechi $\mathcal{G}A$ (cfr. 6.15); poichè i poli di $\mathfrak{b}(d, \mathfrak{Y})$ sono fra i poli e gli zeri di $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{b}(d, \mathfrak{Y})$ stesso soddisfa alla proprietà richiesta se nessun polo e nessun zero di $\mathfrak{Y}$ interseca $\mathcal{G}A$; dato che questa proprietà è soddisfatta da qualche $\sigma_P \mathfrak{Y}$ per $P \in A$, si può supporre d'ora in poi che l'$\mathfrak{Y}$ che compare in $\mathfrak{b}(d, \mathfrak{Y})$ sia già di questo tipo. Il 6.15 mostra allora che tutte le proprietà di ${}^t\varphi_{\mathfrak{Y}}$ saranno conseguenza delle seguenti proprietà di $\mathfrak{b}(d, \mathfrak{Y})$, che ora andiamo a dimostrare:

A. $\mathfrak{b}(d + d', \mathfrak{Y}) \backsim \mathfrak{b}(d, \mathfrak{Y}) + \mathfrak{b}(d', \mathfrak{Y})$;

B. $\mathfrak{b}(ad, \mathfrak{Y}) \backsim a\mathfrak{b}(d, \mathfrak{Y})$ se $a \in K$;

C. $\mathfrak{b}(d, \mathfrak{Y} + \mathfrak{Z}) = \mathfrak{b}(d, \mathfrak{Y}) + \mathfrak{b}(d, \mathfrak{Z})$;

D. $\mathfrak{b}(td, \mathfrak{Y}) = t\mathfrak{b}(d, \mathfrak{Y}) \backsim (\mathrm{cl}\, \pi_A)\, \mathfrak{b}(d, \mathfrak{Y})$;

E. $\mathfrak{b}(\pi d, \mathfrak{Y}) \backsim \pi \mathfrak{b}(d, \mathfrak{Y})$.

Procediamo alla dimostrazione di queste relazioni:

A. Per 5.25 $\mathfrak{b}(d + d', \mathfrak{Y})$ è dato dalla somma di $\mathfrak{b}(d, \mathfrak{Y})$, $\mathfrak{b}(d', \mathfrak{Y})$, e di altre iperclassi ciascuna delle quali si ottiene applicando, a $\mathfrak{b}(d, \mathfrak{Y})$ o $\mathfrak{b}(d', \mathfrak{Y})$, un numero finito non nullo di $t^i d\, *$ e $t^i d'\, *$, e poi moltiplicando per un elemento di vect C_p; ciascuna di queste iperclassi è $\backsim 0$ per 6.24.

B. In vista di A, basta dimostrare la B quando $a = \{\alpha\}$, con $\alpha \in k$; ma allora essa discende da 5.15, o dalla 3) del 6.6 di MC.

C. Questa è ovvia.

D. Dalla prima del 5.19, e da $\pi\{x\} = \{x\}^p$, si deduce $\pi\mathfrak{b}(td, \mathfrak{Y}) = \mathfrak{b}(d, p\mathfrak{Y}) = p\mathfrak{b}(d, \mathfrak{Y}) = \pi t\mathfrak{b}(d, \mathfrak{Y})$, donde $\mathfrak{b}(td, \mathfrak{Y}) = t\mathfrak{b}(d, \mathfrak{Y}) \backsim (\mathrm{cl}\, \pi_A)\, \mathfrak{b}(d, \mathfrak{Y})$ per 6.12.

E. Da D ed A: $t\mathfrak{b}(\pi d, \mathfrak{Y}) = \mathfrak{b}(t\pi d, \mathfrak{Y}) = \mathfrak{b}(pd, \mathfrak{Y}) \backsim p\mathfrak{b}(d, \mathfrak{Y}) = t\pi\mathfrak{b}(d, \mathfrak{Y})$, donde $\mathfrak{b}(\pi d, \mathfrak{Y}) \backsim \pi\mathfrak{b}(d, \mathfrak{Y})$, C.V.D..

68. Vogliamo estendere la definizione di ${}^t\varphi_Y$ agli elementi di $\mathcal{C}'\,({}^t\widetilde{\mathcal{R}}_\pi A)^0$; sia dunque $d \in \widetilde{\mathcal{C}}'\,{}^tRA$ tale che $td = d$; pongasi $\exp d = \{\delta\}$ (cf. n⁰ 55, caso 2), e sia σ l'omomorfismo che lega ${}^t\mathcal{R}A$ al trasposto ${}^tD$ di ${}^tRA$; a δ corrisponde, come nel n⁰ 55, un elemento $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \ldots)$ di $\mathcal{P}_0\,{}^tD_\pi$, se ${}^tD_\pi$ è il trasposto di ${}^tR_t A$; la relazione fra δ e ζ è $\zeta_i = \sigma\,(p\iota)^{-i-1}\,\delta = \sigma\delta^{p^{-i-1}}$. Nelle notazioni del 3.29, ogni ζ_i è un f_h, con $h = (h_1, \ldots, h_r)$, $h_i \in \mathrm{cov}\, C_p$; quindi, come si è visto alla fine del n⁰ 59, la restrizione di ζ_i a C è un σ_{-h}: è come dire che il gruppo formato da tutti i δ coincide col gruppo formato dai σ_P, quando P percorre gli elementi di $\mathcal{G}A^\infty$ la cui immagine su A è O (cfr. n⁰ 60). Se X è divisore primo su A, $\zeta_i X$ significa perciò $\sigma_{-h} X$. Ciò premesso, si ha il risultato seguente:

6.27 TEOREMA. *Sia A varietà abeliana su k; sia $\mathbf{Y}$ un divisore su A, e sia $d \in \mathcal{C}'\,{}^t\widetilde{R}_\pi A$ tale che $td = d$. Pongasi $\exp d = \{\delta\}$, e $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(d, \mathbf{Y}) = (\delta^{p^{-1}}\mathbf{Y} - \mathbf{Y},\ \delta^{p^{-2}}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}, \ldots)$; allora $\mathbf{Z} \in \mathcal{B}' A$. Se $\mathbf{m}$ è l'immagine di $\mathbf{Z}$ in $\mathcal{M}' A$, e si pone ${}^\pi\varphi_Y\, d = {}^\pi\chi\mathbf{m} \in \mathcal{C}'\,{}^\pi R_\pi A$, l'applicazione $d \longrightarrow {}^\pi\varphi_Y\, d$ è $(\mathrm{vect}\ C_p)$-lineare; se essa viene estesa ad un'applicazione K'-lineare ${}^\pi\varphi_Y$ di $\mathcal{C}'\,({}^t\widetilde{\mathcal{R}}_\pi A)^0$ su $\mathcal{C}'\,({}^\pi\mathcal{R}_\pi A)^0$, la ${}^\pi\varphi_Y$ soddisfa alle condizioni seguenti:*

1. *${}^\pi\varphi_Y$ è un omomorfismo di K'-moduli canonici;*
2. *${}^\pi\varphi_{Y+Z} = {}^\pi\varphi_Y + {}^\pi\varphi_Z$;*
3. *${}^\pi\varphi_Y = 0$ se $\mathbf{Y} \backsim 0$.*

DIM. Anzitutto $p\,(\delta^{p^{-i}}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}) \backsim \delta^{p^{-i+1}}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}$, e quindi $\mathbf{Z} \in \mathcal{B}' A$ (cfr. n⁰ 65). Se $\mathbf{Y} \backsim \mathbf{Y}'$ è chiaro che $\mathbf{Z}(d, \mathbf{Y}) \backsim \mathbf{Z}(d, \mathbf{Y}')$; poi, $\mathbf{Z}(d, 0) = 0$; e infine, per $P \in A$ si ha $\mathbf{Z}(d, \sigma_P \mathbf{Y}) \backsim \sigma_P \mathbf{Z}(d, \mathbf{Y})$. Ciò mostra che la classe $\mathbf{m} \in \mathcal{M}' A$ cui appartiene $\mathbf{Z}(d, \mathbf{Y})$ non cambia quando si sostituisce $\mathbf{Y}$ con $\sigma_P \mathbf{Y}$, o con un divisore linearmente equivalente a $\sigma_P \mathbf{Y}$. Per definire ${}^\pi\chi\mathbf{m}$ occorre scegliere un rappresentante di $\mathbf{m}$ nessuno dei cui poli o zeri intersechi $\mathcal{G}A$ (cfr. 6.19); dato che questa proprietà è soddisfatta da qualche $\mathbf{Z}(d, \sigma_P \mathbf{Y})$ per $P \in A$, si può supporre d'ora in poi che l'$\mathbf{Y}$ che compare in $\mathbf{Z}(d, \mathbf{Y})$ sia già di questo tipo. Il 6.19 mostra allora che tutte le proprietà di ${}^\pi\varphi_Y$ sono conseguenza delle seguenti proprietà di $\mathbf{Z}(d, \mathbf{Y})$, che andiamo a dimostrare:

A. $\mathbf{Z}(d + d', \mathbf{Y}) \backsim \mathbf{Z}(d, \mathbf{Y}) + \mathbf{Z}(d', \mathbf{Y})$;
B. $\mathbf{Z}(d, \mathbf{Y} + \mathbf{Y}') = \mathbf{Z}(d, \mathbf{Y}) + \mathbf{Z}(d, \mathbf{Y}')$;
C. $\mathbf{Z}(td, \mathbf{Y}) = t\mathbf{Z}(d, \mathbf{Y}) = \mathbf{Z}(d, \mathbf{Y})$;
D. $\mathbf{Z}(\pi d, \mathbf{Y}) \backsim \pi\mathbf{Z}(d, \mathbf{Y}) = p\mathbf{Z}(d, \mathbf{Y})$.

Procediamo alla dimostrazione di queste relazioni:

A. L'elemento di indice i di $\mathbf{Z}(d + d', \mathbf{Y})$ è $(\delta\delta')^{p^{-i}}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}$, che per fatti noti sulle varietà abeliane risulta linearmente equivalente a $(\delta^{p^{-i}}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}) + (\delta'^{p^{-i}}\mathbf{Y} - \mathbf{Y})$.

B. Questa è ovvia.

C. $\mathbf{Z}(td, \mathrm{Y}) = \mathbf{Z}(d, \mathrm{Y}) = t\mathbf{Z}(d, \mathrm{Y})$.

D. $\mathbf{Z}(\pi d, \mathrm{Y}) = \mathbf{Z}(pd, \mathrm{Y}) \backsim p\mathbf{Z}(d, \mathrm{Y}) = \pi\mathbf{Z}(d, \mathrm{Y})$, C.V.D..

A questo punto è possibile unificare talune notazioni; dato $\mathbf{m} \in \mathcal{M}A$, il 6.15 permette di costruire ${}^t\chi\mathbf{m} \in \mathcal{C}'\,{}^tRA \subseteq \mathcal{C}'\,({}^t\mathcal{R}A)^0$; per il 6.3 vi è un ben determinato isomorfismo σ_1 di $\mathcal{C}'\,({}^t\mathcal{R}A)^0$ su tutto $\mathcal{C}'\,(\mathcal{R}_t A \mathbin{\overline{\times}} \mathcal{R}_r A)^0$; porremo $\chi\mathbf{m} = \sigma_1\,{}^t\chi\mathbf{m}$, cosicchè χ è un isomorfismo canonico di $\mathcal{M}A$ su tutto $\mathcal{C}'\,(R_t A \mathbin{\overline{\times}} R_r A) \subseteq \mathcal{C}'\,(\mathcal{R}_t A \mathbin{\overline{\times}} \mathcal{R}_r A)^0$.

Dato invece $\mathbf{m} \in \mathcal{M}'A$, il 6.19 permette di costruire ${}^\pi\chi\mathbf{m} \in \mathcal{C}'\,{}^\pi R_\pi A \subseteq \mathcal{C}'\,({}^\pi\mathcal{R}_\pi A)^0$; per il 6.3 vi è un ben determinato isomorfismo σ_2 di $\mathcal{C}'\,({}^\pi\mathcal{R}_\pi A)^0$ su tutto $\mathcal{C}'\,(\mathcal{R}_\pi A)^0$; porremo $\chi\mathbf{m} = \sigma_2\,{}^\pi\chi\mathbf{m}$. Sempre a norma del 6.3, sia τ_1 l'omomorfismo di proiezione di $\mathcal{C}'\,(\widetilde{\mathcal{R}}A)^0$ su tutto $\mathcal{C}'\,({}^\pi\widetilde{\mathcal{R}}A)^0 \cong \mathcal{C}'\,(\widetilde{\mathcal{R}}_t A \mathbin{\overline{\times}} \widetilde{\mathcal{R}}_r A)^0$, e sia τ_2 quello di $\mathcal{C}'\,(\widetilde{\mathcal{R}}A)^0$ su tutto $\mathcal{C}'\,({}^t\widetilde{\mathcal{R}}_\pi A)^0 \cong \mathcal{C}'\,(\widetilde{\mathcal{R}}_\pi A)^0$; se $d \in \mathcal{C}'\,(\widetilde{\mathcal{R}}A)^0 = \widetilde{\mathcal{C}}'\,(\mathcal{R}A)^0$, e se Y è un divisore su A, porremo $\varphi_{\mathrm{Y}}\, d = \sigma_1\,{}^t\varphi_{\mathrm{Y}}\,\tau_1 d + \sigma_2\,{}^\pi\varphi_{\mathrm{Y}}\,\tau_2 d$, cosicchè φ_{Y} gode, per 6.26 e 6.27, delle proprietà seguenti:

6.28 Teorema. *Sia A varietà abeliana su k; allora l'applicazione φ_{Y} descritta è un omomorfismo del K'-modulo canonico $\widetilde{\mathcal{C}}'\,(\mathcal{R}A)^0$ sul K'-modulo canonico $\mathcal{C}'\,(\mathcal{R}A)^0$, e gode delle proprietà seguenti:*

1. $\varphi_{\mathrm{Y}}\, d \in \mathcal{C}'\,RA$ *quando* $d \in \widetilde{\mathcal{C}}'RA$;
2. $\varphi_{\mathrm{Y}+\mathrm{Z}} = \varphi_{\mathrm{Y}} + \varphi_{\mathrm{Z}}$;
3. $\varphi_{\mathrm{Y}} = 0$ *se* $\mathrm{Y} \backsim 0$.

Il diagramma commutativo che sintetizza la costruzione di φ_{Y} è il seguente:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \mathcal{C}'\widetilde{R} \arrow[dlll, "\mathrm{pr}"'] \arrow[dl, "\tau_1"] \arrow[dr, "\tau_2"'] \arrow[drrr, "\mathrm{pr}"] \arrow[dddd, "\varphi_{\mathrm{Y}}"] & & & \\
\mathcal{C}'(\widetilde{R}_t \mathbin{\overline{\times}} \widetilde{R}_r) \arrow[rr, "\tau_1"'] & & \mathcal{C}'\,{}^\pi\widetilde{R} \arrow[dl, "{}^t\varphi_{\mathrm{Y}}"] \arrow[d] & & \mathcal{C}'\,{}^t\widetilde{R}_\pi \arrow[d] \arrow[drr, "{}^\pi\varphi_{\mathrm{Y}}"] & & \mathcal{C}'\,\widetilde{R}_\pi \arrow[ll, "\tau_2"] \\
 & \mathcal{C}'\,{}^tR \arrow[dr, "\sigma_1"'] & \mathcal{M} \arrow[l, "{}^t\chi"] \arrow[d, "\chi"] & & \mathcal{M}' \arrow[rr, "{}^\pi\chi"'] \arrow[d, "\chi"'] & & \mathcal{C}'\,{}^\pi R_\pi \arrow[dll, "\sigma_2"] \\
 & & \mathcal{C}'(R_t \mathbin{\overline{\times}} R_r) \arrow[dr, "\oplus"'] & & \mathcal{C}'R_\pi \arrow[dl, "\oplus"] & & \\
 & & & \mathcal{C}'R & & &
\end{tikzcd}
$$

La dimostrazione del risultato seguente è un puro esercizio, e verrà omessa :

6.29 TEOREMA. *Sia α un omomorfismo della varietà abeliana A (su k) sulla varietà abeliana B; se $\mathbf{Y}$ è un divisore su B, si ha*

$$\varphi_{(\mathrm{div}\,\alpha)\mathbf{Y}} = (\mathcal{C}'\,\mathcal{R}\alpha)\,\varphi_{\mathbf{Y}}\,(\tilde{\mathcal{C}}'\,\mathcal{R}\alpha).$$

Vale poi il seguente risultato parziale, il cui reciproco verrà dimostrato nel prossimo capitolo :

6.30 COROLLARIO. *Sia $\mathbf{Y}$ un divisore su A, tale che $\mathbf{Y} \equiv 0$ (ossia $\sigma_P\,\mathbf{Y} \backsim \mathbf{Y}$ per ogni $P \in A$). Allora $\varphi_{\mathbf{Y}} = 0$.*

DIM. La $\mathbf{Y} \equiv 0$ significa anche che $\mathbf{Z} = (\mathrm{div}\,\mu_A)\,\mathbf{Y} \backsim \mathbf{Y} \times A + A \times \mathbf{Y}$, cosicchè $\varphi_{\mathbf{Z}} = \varphi_{\mathbf{Y}\times A} + \varphi_{A\times\mathbf{Y}}$, ossia $\varphi_{\mathbf{Z}}\,(d \,\overline{\times}\, 1 + 1 \,\overline{\times}\, d') = (\varphi_{\mathbf{Y}}\,d) \,\overline{\times}\, 1 + 1 \,\overline{\times}\, \varphi_{\mathbf{Y}}\,d'$. D'altra parte, per 6.29, $\varphi_{\mathbf{Z}}\,(d \,\overline{\times}\, 1 + 1 \,\overline{\times}\, d') = \mathbf{P}_{\mathcal{R}}\,\varphi_{\mathbf{Y}}\,(d + d') = (\varphi_{\mathbf{Y}}\,(d + d')) \,\overline{\times}\, 1 + 1 \,\overline{\times}\, \varphi_{\mathbf{Y}}\,(d + d')$. Confrontando si ottiene appunto $\varphi_{\mathbf{Y}}\,d' = \varphi_{\mathbf{Y}}\,d = 0$, C.V.D..

Facendo, in 6.29, $\alpha = r\iota_A$ si ottiene :

6.31 COROLLARIO. *Se r è un intero non negativo, e se $\beta = \mathrm{div}\,(r\iota_A)$, si ha $\varphi_{\beta\mathbf{Y}} = r^2\,\varphi_{\mathbf{Y}} = \varphi_{r^2\mathbf{Y}}$.*

Chiudiamo questo capitolo con un risultato che ci permette di costruire direttamente $\chi\mathbf{m} = \sigma_2\,{}^{\pi}\chi\mathbf{m}$, ed anche $\chi\mathbf{m} = \sigma_1\,{}^{t}\chi\mathbf{m}$ in un caso particolare; esso permetterà quindi di costruire direttamente anche $\varphi_{\mathbf{Y}}d$ in casi particolari; il risultato è il seguente :

6.32 TEOREMA. *Sia A varietà abeliana su k; pongasi $C = k(A)$, $\mathcal{R} = \mathcal{R}A$, e si consideri S^∞ immerso in $\mathcal{R}$; allora :*

1. *Sia $\mathbf{m} \in \mathcal{M}'\,A$, e sia $\mathbf{Y} \in \mathcal{B}'\,A$ un rappresentante di $\mathbf{m}$ nessuno dei cui poli o zeri intersechi $\mathcal{G}A$; sia $y \in \mathcal{Y}C$ tale che, per $r = 1, 2, \ldots$, si abbia*

$$\mathrm{div}\,(p\iota)^r\,y_r = (\mathrm{div}\,(p\iota)^r)\,\mathbf{Y}_r\,, \tag{6.33}$$

e tale inoltre che $\varepsilon_{\mathcal{R}}\,y = 1$; allora

$$\chi\mathbf{m} = \log\,\{\lim_{r\to\infty}\,(p\iota)^r\,y_r\}\,; \tag{6.34}$$

inoltre

$$[(p\iota)^{r+1}\,y_{r+1}]\,[(p\iota)^r\,y_r]^{-1} \in (p\iota)^r\,C. \tag{6.35}$$

2. *Sia* $\mathbf{m} \in \mathcal{M}A$ *tale che* $\pi\mathbf{m} = \mathbf{m}$, *e sia* $\mathbf{b}$ *un rappresentante di* $\mathbf{m}$ *nessuno dei cui poli intersechi* $\mathcal{G}A$ *; sia* $x \in \mathcal{X}A$ *tale che, per* $r = 1, 2, \dots$, *si abbia*

6.36 $$\varrho_r \operatorname{cl} (p\iota)^r x = \varrho_r \operatorname{cl} (p\iota)_r \mathbf{b},$$

e tale inoltre che $\varepsilon_{\mathcal{R}} x = 0$ *; allora*

6.37 $$\chi\mathbf{m} = \lim_{r \to \infty} t^{-r} (p\iota)^r x \,;$$

inoltre

6.38 $$t^{-r} (p\iota)^r x - t^{-r+1} (p\iota)^{r-1} x \in t^{-r} \operatorname{vect} (p\iota)^{r-1} C.$$

Dim. Diamo la dimostrazione di 1; intanto il 6.33 è equivalente alla $\operatorname{div} \pi^r y_r = (\operatorname{div} t^r_A) \mathbf{Y}_r$, che è la relazione richiesta in 6.17 fra y ed $\mathbf{Y}$; la 6.35 si dimostra osservando che

$$\operatorname{div} [(p\iota)^{r+1} y_{r+1}] [(p\iota)^r y_r]^{-1} = (\operatorname{div} (p\iota)^r) [\operatorname{div} (p\iota) \mathbf{Y}_{r+1} - \mathbf{Y}_r],$$

e che $\operatorname{div} (p\iota)\mathbf{Y}_{r+1} \backsim p\mathbf{Y}_{r+1} \backsim 0$ perchè $\mathbf{Y}_{r+1} \equiv 0$. La 6.35 stessa, unita alla $\varepsilon_{\mathcal{R}} y = 1$, mostra che l'espressione 6.34 esiste, ossia che il limite esiste. Detto η il limite, con la stessa dimostrazione usata nel 6.18 si prova che $\mathbf{P}\eta = \eta \,\overline{\times}\, \eta$; quindi, nelle notazioni del diagramma che precede il 6.29 si ha, per 6.19, ${}^\pi\chi\mathbf{m} = \tilde{\sigma}_2 \log \{\eta\}$, onde $\chi\mathbf{m} - \log \{\eta\} \in \mathcal{C}' \mathcal{R}^0_t$ (cfr. 6.3); ma $t \log \{\eta\} = \log \{\eta\}$ per 2.10, e $t\chi\mathbf{m} = \chi\mathbf{m}$ perchè $t\mathbf{m} = \mathbf{m}$; quindi $\chi\mathbf{m} = \log \{\eta\}$, come richiesto.

Diamo ora la dimostrazione di 2. Il 6.36 è equivalente alla $\varrho_r \operatorname{cl} t^r_{O^\infty} x = \varrho_r (\operatorname{cl} \pi^r_A) \mathbf{b}$, che è la relazione descritta in 6.17 fra x e $\mathbf{b}$; la 6.38 si dimostra così: da $\pi\mathbf{b} \backsim \mathbf{b}$ segue, per 6.12, che $\pi x - x \in \operatorname{vect} C$; siccome $t_{O^\infty} x - tx \in \operatorname{vect} C$ (cfr. l'inizio della dimostrazione del 6.14), sarà anche $(p\iota) x - tx \in \operatorname{vect} C$, e $t^{-1} (p\iota) x - x \in t^{-1} \operatorname{vect} C$. Applicando a questa l'operatore $t^{-r+1} (p\iota)^{r-1}$ si ottiene la 6.38. La 6.38 stessa dimostra, insieme alla $\varepsilon_{\mathcal{R}} x = 0$, che l'espressione 6.37 esiste, ossia che il limite ξ che compare in quella espressione esiste in $\operatorname{Biv} \mathcal{R}$; che esso sia addirittura in $\operatorname{biv} \mathcal{R}$, e con ogni componente in $\mathcal{R}^0$, lo si dimostra come nel 6.14; e come nel 6.14 si dimostra che $\mathbf{P}\xi = \xi \,\overline{\times}\, 1 + 1 \,\overline{\times}\, \xi$. Pertanto ${}^t\chi\mathbf{m} = \tilde{\sigma}_1 \xi$, onde $\chi\mathbf{m} - \xi \in \mathcal{C}' \mathcal{R}^0$ (cfr. 6.3); ma $\pi\xi = \xi$ perchè $\pi\mathbf{b} \backsim \mathbf{b}$, e $\pi \chi\mathbf{m} = \chi\mathbf{m}$ per lo stesso motivo; quindi $\chi\mathbf{m} = \xi$, C.V.D..

BIBLIOGRAFIA

MC. I. BARSOTTI, *Moduli canonici e gruppi analitici commutativi,* Ann. Scuola Norm. Sup., 13, 1959, p. 303.

1. I. BARSOTTI, *Abelian varieties over fields of positive characteristic,* Rend. Circ. Matem. Palermo, 5, 1956, p. 145.
2. I. BARSOTTI, *Gli endomorfismi delle varietà abeliane su corpi di caratteristica positiva,* Ann. Scuola Norm. Sup., 10, 1956, p. 1.
3. I. BARSOTTI, *Repartitions on abelian varieties,* Illinois Journ. of Math., 2, 1958, p. 43.
4. I. BARSOTTI, *Local properties of algebraic correspondences,* Trans. Amer. Math. Soc., 71, 1951, p. 349.
5. A. WEIL, *Varietes abeliennes et courbes algebriques,* Parigi, 1948.
6. J.-P. SERRE, *Quelques proprietes des varietes abeliennes en caracteristique p,* Amer. Journ. of Math. 80, 1958, p. 715.

INDICE ALFABETICO DELLE DEFINIZIONI E DEI SIMBOLI