MARIO MIRANDA

Sul minimo dell'integrale del gradiente di una funzione

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 19, nº 4 (1965), p. 627-665

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1965_3_19_4_627_0>

SUL MINIMO DELL'INTEGRALE DEL GRADIENTE DI UNA FUNZIONE (*)

MARIO MIRANDA

Nella prima parte di questo lavoro, §. 1 e 2, studio il problema del minimo del funzionale $\int\limits_{\Omega} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (D_i f)^2}\, dx$, mostrando alcune proprietà delle soluzioni di tale problema, soluzioni intese in un senso opportunamente generalizzato. Nella seconda parte, § 3, stabilisco il collegamento esistente fra il problema di minimo sopra considerato ed il problema di minimo per le frontiere orientate secondo De Giorgi e faccio vedere come dai risultati della prima parte discendano le disuguaglianze fondamentali usate in [4] per stabilire il teorema di regolarizzazione. Nella rimanente parte mostro come da tali disuguaglianze e da altri risultati stabiliti in [1] e [2] seguano i principali teoremi contenuti in [4] e per molti di essi ottengo miglioramenti degli enunciati e semplificazioni delle dimostrazioni.

Per comodità del lettore e data la non agevole reperibilità del lavoro [4] ho riportato anche la dimostrazione dei Lemmi 4.1 e 4.2 e del Teorema 6.2 che ho ripreso da [4] senza modifiche.

1. Indichiamo con R^n lo spazio euclideo a n dimensioni con A un aperto di R^n e con $BV_{\mathrm{loc}}(A)$ l'insieme delle funzioni localmente sommabili su A ed aventi derivate prime, nel senso delle distibuzioni, misure su A.

Per $f \in BV_{\mathrm{loc}}(A)$ indicheremo con $D_i f$, $| D_i f |$ e $| D f |$ le misure derivata i-ma di f, variazione totale della derivata i-ma di f e variazione totale del gradiente di f. Se g è una funzione di Baire e B un insieme di Borel contenuto in A indicheremo con $\int\limits_B g\, D_i f$, $\int\limits_B g\, |D_i f|$

Pervenuto alla Redazione il 24 Novembre 1965.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito della attività dei Gruppi di Ricerca del C. N. R. nell'anno 1965-66.

e $\int_B g\,|Df|$ gli integrali estesi all'insieme B della funzione g fatti rispetto alle misure $D_i f$, $|D_i f|$ e $|Df|$. Se poi g è una funzione vettoriale ad n componenti $g_1, \dots, g_n$ indicheremo con $\int_B \langle g, Df \rangle$ la somma di integrali $\sum_{i=1}^{n} \int_B g_i D_i f$.

Indicheremo con $\mathcal{K}(A)$ la famiglia degli insiemi aperti e limitati la cui chiusura sia contenuta in A.

Richiamiamo alcuni risultati per la dimostrazione dei quali rinviamo ad [1] e [2].

TEOREMA 1.1. *Sia $A \subset R^n$ aperto ed $f \in BV_{\rm loc}(A) \cdot \tau \in C_0^\infty(R^n)$ verifichi*

$$\tau \geq 0, \quad \int \tau(x)\,dx = 1, \quad \tau(x) = 0 \quad \text{per } |x| > 1. \tag{1.1}$$

Se f_h è definita su $\{x; x \in R^n, \operatorname{dist}(x, R^n - A) > h^{-1}\}$ da

$$f_h(x) = \int h^n \tau(h(x-y)) f(y)\,dy, \tag{1.2}$$

avremo, per ogni $K \in \mathcal{K}(A)$,

$$\lim_{h \to \infty} \int_K |f(x) - f_h(x)|\,dx = 0, \tag{1.3}$$

$$\min_{h \to \infty} \lim \int_K |Df_h| \geq \int_K |Df|, \tag{1.4}$$

$$\max_{h \to \infty} \lim \int_K |Df_h| \leq \int_{\bar K} |Df|. \tag{1.5}$$

TEOREMA 1.2. (v. Teor. 2.6 di [1]). *Sia $A = \{x; x \in R^n, |x| < a\}$, $n \geq 2$. Per ogni $f \in BV_{\rm loc}(A)$ esistono due funzioni f^+ ed f^- eguali quasi ovunque su A ad f e tali che per ogni $\varrho : 0 < \varrho < a$ si ha*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| = \varrho} |f^-(x) - f^-(x - \varepsilon x)|\,dH_{n-1} = 0, \tag{1.6}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| = \varrho} |f^+(x) - f^+(x + \varepsilon x)|\,dH_{n-1} = 0, \tag{1.7}$$

$$\int_{|x| = \varrho} |f^+(x) - f^-(x)|\,dH_{n-1} = \int_{|x| = \varrho} |Df|, \tag{1.8}$$

dove H_{n-1} è la misura di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale.

TEOREMA 1.3. (v. Teor. 1.10 di [2]). *Per $A \subset R^n$ aperto ed $f \in BV_{\mathrm{loc}}(A)$, posto*

$$E = \{(x, y)\, ; x \in A, \quad y \leq f(x)\}, \tag{1.9}$$

e, per $K \in \mathcal{K}(A)$,

$$\int\limits_{K \times R} | D_x \varphi(x, y\, ; E) | = \sup \left\{ \int\limits_E \sum_{i=1}^n D_i g_i(x, y)\, dx\, dy\, ; g_i \in \mathcal{D}(K \times R), |g| \leq 1 \right\}, \tag{1.10}$$

si ha

$$\int\limits_K | Df | = \int\limits_{K \times R} | D_x \varphi(x, y\, ; E) | . \tag{1.11}$$

TEOREMA 1.4. (v. Teor. 3.3 di [2]). *Nelle ipotesi del Teorema 1.3 si ha*

$$\int\limits_{K \times R} | D_x \varphi(x, y\, ; E) | = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_K | D_x \varphi(x, y\, ; E) | . \tag{1.12}$$

TEOREMA 1.5. (v. Teor. 2.4 di [1]). *Sia $A = \{x\, ; x \in R^n, | x | < a\}$, $n \geq 2 \cdot f \in BV_{\mathrm{loc}}(A)$ coincida con f^+ (v. Teor. 1.2). Allora per ogni coppia di numeri reali $\varrho, r : 0 < \varrho < r < a$ vale*

$$\int\limits_{|x|=1} | f(\varrho x) - f(rx) | \, dH_{n-1} \leq \int\limits_{\varrho < |x| \leq r} \left| \left(\frac{x}{|x|^n}, Df \right) \right| . \tag{1.13}$$

Vale in R^n la estensione del Teorema di Banach (v. Teor. 2 di [3]) collegante la variazione totale di una funzione con l'integrale del numero delle intersezioni del suo grafico con una retta variabile. Precisamente si ha

TEOREMA 1.6. *Sia $A \subset R^n$ aperto e sia $f \in BV_{\mathrm{loc}}(A)$.*

Posto $E_\lambda = \{x\, ; x \in A, f(x) \geq \lambda\}$ si ha che $\varphi(x, E_\lambda) \in BV_{\mathrm{loc}}(A)$ per quasi tutti i $\lambda \in R$ e per $K \in \mathcal{K}(A)$ vale

$$\int\limits_K | Df | = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_K | D\varphi(x, E_\lambda) | . \tag{1.14}$$

DIM. È conseguenza immediata dei Teoremi 1.3 e 1.4.

c. v. d.

2. Introdurremo ora due funzionali definiti per le funzioni aventi derivate misure e stabiliremo alcune proprietà di questi.

DEFINIZIONE 2.1. *Per $A \subset R^n$ aperto, $f \in BV_{\mathrm{loc}}(A)$ e $G \subset A$ chiuso e limitato poniamo*

$$\theta(f, G) = \inf\left\{ \int_G |Dg|\,;\, g \in BV_{\mathrm{loc}}(A),\, g = f \quad \text{in} \quad A - G \right\}, \tag{2.1}$$

$$\psi(f, G) = \int_G |Df| - \theta(fG). \tag{2.2}$$

Una proprietà generale dei nuovi funzionali è la seguente

PROPOSIZIONE 2.2. *Per $A \subset R^n$ aperto, $f \in BV_{\mathrm{loc}}(A)$ e $G_1 \subset G_2 \subset A$ chiusi e limitati, vale*

$$\psi(f, G_1) \leq \psi(f, G_2). \tag{2.3}$$

DIM. Sia $g \in BV_{\mathrm{loc}}(A)$ e $g = f$ in $A - G_1$. Avremo allora $g = f$ in $A - G_2$ e quindi

$$\theta(f, G_2) \leq \int_{G_2} |Dg|, \tag{2.4}$$

e quindi anche

$$\theta(f, G_2) \leq \int_{G_1} |Dg| + \int_{G_2 - G_1} |Dg| = \int_{G_1} |Dg| + \int_{G_2 - G_1} |Df|. \tag{2.5}$$

Sottraendo $\int_{G_2} |Df|$ dai due membri della (2.5) si ricava

$$-\psi(f, G_2) \leq \int_{G_1} |Dg| - \int_{G_1} |Df|, \tag{2.6}$$

e poichè è

$$\psi(f, G_1) = \sup\left\{ \int_{G_1} |Df| - \int_{G_1} |Dg|\,;\, g \in BV_{\mathrm{loc}}(A),\, g = f \quad \text{in} \quad A - G_1 \right\}. \tag{2.7}$$

dalle (2.7) e (2.6) si ha la (2.3).

c. v. d.

Se $A = \{x\,;\, x \in R^n, |x| < a\}$, ed $f \in BV_{\mathrm{loc}}(A)$, per $\varrho : 0 < \varrho < a$ potremo considerare $\theta(f, C_\varrho)$ e $\psi(f, C_\varrho)$ essendo $C_\varrho = \{x\,;\, x \in R^n, |x| \leq \varrho\}$. Scriveremo per brevità $\psi(f, \varrho)$ e $\psi(f, \varrho)$ in luogo di $\theta(f, C_\varrho)$ e $\psi(f, C_\varrho)$. Sottintenderemo inoltre che $f = f^+$ (v. Teor. 1.2).

Vale allora il seguente

TEOREMA 2.3. *Sia* $A = \{x\,;\, x \in R^n, |x| < a\}$, $n \geq 2$, *ed* $f, g \in BV_{\text{loc}}(A)$. *Si ha allora, per* $\varrho : 0 < \varrho < a$

$$|\theta(f, \varrho) - \theta(g, \varrho)| \leq \int\limits_{|x|=\varrho} |f(x) - g(x)|\, dH_{n-1}\,. \tag{2.8}$$

DIM. Basta provare, per la simmetria fra f e g, che

$$\theta(f, \varrho) - \theta(g, \varrho) \leq \int\limits_{|x|=\varrho} |f(x) - g(x)|\, dH_{n-1}\,, \tag{2.9}$$

ovvero

$$\theta(f, \varrho) \leq \theta(g, \varrho) + \int\limits_{|x|=\varrho} |f(x) - g(x)|\, dH_{n-1}\,, \tag{2.10}$$

ovvero, per ogni $\gamma \in BV_{\text{loc}}(A) : \gamma = g$ in $\{x\,;\, x \in R^n, \varrho < |x| < a\}$,

$$\theta(f, \varrho) \leq \int\limits_{|x| \leq \varrho} |D\gamma| + \int\limits_{|x|=\varrho} |f(x) - g(x)|\, dH_{n-1}\,. \tag{2.11}$$

Per provare la (2.11) si ponga

$$\tilde{\gamma}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{per } \varrho < |x| < a \\ \gamma(x), & \text{per } |x| < \varrho \end{cases}. \tag{2.12}$$

avremo allora, per la (1.8)

$$\theta(f, \varrho) \leq \int\limits_{|x| \leq \varrho} |D\tilde{\gamma}| = \int\limits_{|x| < \varrho} |D\gamma| + \int\limits_{|x|=\varrho} |f(x) - \gamma^-(x)|\, dH_{n-1}\,, \tag{2.13}$$

ed ovviamente

$$\int\limits_{|x|=\varrho} |\gamma^-(x) - f(x)|\, dH_{n-1} \leq \int\limits_{|x|=\varrho} |\gamma^-(x) - g(x)|\, dH_{n-1} + \tag{2.14}$$

$$+ \int\limits_{|x|=\varrho} |g(x) - f(x)|\, dH_{n-1}\,.$$

Dalle (2.13) e (2.14), tenendo ancora presente la (1.8), si ha la (2.11).

c. v. d.

OSSERVAZIONE 2.4. *Se oltre alla ipotesi della Prop.* 2.3 *vale* $\psi(f, \varrho) = 0$ *si ha allora ovviamente*

$$\int_{|x| \leq \varrho} |Df| - \int_{|x| \leq \varrho} |Dg| \leq \int_{|x| = \varrho} |f(x) - g(x)| \, dH_{n-1} . \tag{2.15}$$

Proveremo ora una disuguaglianza che useremo spesso nel seguito.

TEOREMA 2.5. *Sia* $A = \{x ; x \in R^n, |x| < a\}$, $n \geq 2$, ed $f \in BV_{\mathrm{loc}}(A)$. *Allora, per* $\varrho, r : 0 < \varrho < r < a$, *si ha*

$$\left\{ \int_{|x|=1} |f(\varrho x) - f(rx)| \, dH_{n-1} \right\}^2 \leq 2 \int_{\varrho < |x| \leq r} |x|^{1-n} |Df| \cdot \tag{2.16}$$

$$\cdot \left\{ r^{1-n} \int_{|x| \leq r} |Df| - \varrho^{1-n} \int_{|x| \leq \varrho} |Df| + (n-1) \int_{\varrho}^{r} t^{-n} \psi(f, t) \, dt \right\} .$$

DIM. Cominciamo col cosiderare il caso $f \in C^1(A)$.

Per $t : 0 < t < a$ poniamo

$$f_t(x) = \begin{cases} f(x) \quad , & \text{per} \quad t < |x| < a, \\ f\left(\dfrac{x}{|x|} t\right), & \text{per} \quad |x| \leq t. \end{cases} \tag{2.17}$$

La f_t è continua sulla ipersuperficie $\{x ; x \in R^n, |x| = t\}$ e verifica la

$$\int_{|x| \leq t} |Df_t| = \frac{t}{n-1} \int_{|x|=t} |Df(x)| \left\{ 1 - \left[\frac{(x, Df(x))}{|x| \, |Df(x)|} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dH_{n-1} , \tag{2.18}$$

dove l'integrando al secondo membro deve intendersi eguale a zero se $Df(x) = 0$. Avremo quindi

$$\int_{|x| \leq t} |Df| - \psi(f, t) = \theta(f, t) \leq \tag{2.19}$$

$$\leq \frac{t}{n-1} \int_{|x|=t} |Df(x)| \left\{ 1 - \left[\frac{(x, Df(x))}{|x| \, |Df(x)|} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dH_{n-1} ,$$

e quindi anche

$$\int_{|x|\le t} |Df| - \psi(f,t) \le \frac{t}{n-1} \int_{|x|=t} |Df(x)|\, dH_{n-1} - \frac{t}{2(n-1)} \int_{|x|=t} \frac{(x, Df)^2}{|x|^2 |Df|}\, dH_{n-1}, \tag{2.20}$$

ovvero

$$\frac{1}{2} t^{1-n} \int_{|x|=t} \frac{(x, Df(x))^2}{|x|^2 |Df(x)|}\, dH_{n-1} \le t^{1-n} \int_{|x|=t} |Df(x)|\, dH_{n-1} - (n-1) t^{-n} \int_{|x|\le t} |Df| + (n-1) t^{-n} \psi(f,t), \tag{2.21}$$

ovvero

$$\frac{1}{2} t^{1-n} \int_{|x|=t} \frac{(x, Df)^2}{|x|^2 |Df|}\, dH_{n-1} \le \frac{d}{dt}\left[t^{1-n} \int_{|x|\le t} |Df| \right] + (n-1) t^{-n} \psi(f,t), \tag{2.22}$$

da cui, integrando sull'intervallo (ϱ, r),

$$\frac{1}{2} \int_{\varrho<|x|<r} \frac{(x, Df)^2}{|x|^{n+1} |Df|}\, dx \le r^{1-n} \int_{|x|<r} |Df| - \varrho^{1-n} \int_{|x|<\varrho} |Df| + (n-1) \int_{\varrho}^{r} t^{-n} \psi(f,t)\, dt. \tag{2.23}$$

Dalla disuguaglianza di Schwarz si ha d'altra parte

$$\left[\int_{\varrho<|x|<r} \left| \left(\frac{x}{|x|^n}, Df \right) \right| \right]^2 \le \int_{\varrho<|x|<r} |x|^{1-n} |Df| \cdot \int_{\varrho<|x|<r} \frac{(x, Df)^2}{|x|^{n+1} |Df|}\, dx. \tag{2.24}$$

Dalle (2.23), (2.24) e dal Teor. 1.5 si ricava allora la (2.16) per le $f \in C^1(A)$.

Sia ora $f \in BV_{\mathrm{loc}}(A)$ qualunque. Dal Teor. 1.1 si ricava che può costruirsi una successione $\{f_h\} \subset C^1(A)$ per cui esiste $N \subset (0, a)$, con mis $N = 0$, tale che

$$\lim_{h\to\infty} \int_{|x|=t} |f(x) - f_h(x)|\, dH_{n-1} = 0, \qquad \text{per} \quad t \in (0,a) - N, \tag{2.25}$$

$$\lim_{h\to\infty} \int_{|x|<t} |Df_h| = \int_{|x|\le t} |Df| = \int_{|x|<t} |Df|, \qquad \text{per} \quad t \in (0,a) - N. \tag{2.26}$$

Dalla (2.25), ricordando la (2.8), si ha

$$\lim_{h\to\infty} \theta(f_h, t) = \theta(f, t), \qquad \text{per} \quad t \in (0, a) - N, \tag{2.27}$$

e quindi dalle (2.26) e (2.27) si ha

$$\lim_{h\to\infty} \psi(f_h, t) = \psi(f, t), \qquad \text{per} \quad t \in (0, a) - N. \tag{2.28}$$

Dal fatto che la (2.16) vale per le f_h e dalle (2.25), (2.26) e (2.28) segue allora che la (2.16) vale per la f e per $\varrho, r \in (0, a) - N$. Ma allora, essendo mis $N = 0$ e ricordando che per la ipotesi $f = f^+$ già fatta valgono le

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{|x|=t} |f(x) - f(x + \varepsilon x)|\, dH_{n-1} = 0, \quad \text{per} \quad t \in (0, a), \tag{2.29}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{|x|<t+\varepsilon} |Df| = \int\limits_{|x|\le t} |Df|, \qquad \text{per} \quad t \in (0, a), \tag{2.30}$$

si ha che la (2.16) vale per qualunque $\varrho, r \in (0, a)$.

c. v. d.

COROLLARIO. 2.6. *Sia* $A = \{x; x \in R^n, |x| < a\}$, $n \ge 2, f \in BV_{\text{loc}}(A)$. *Se per* $r: 0 < r < a$ *vale*

$$\psi(f, r) = 0. \tag{2.31}$$

Allora, per $\varrho: 0 < \varrho < r$, *vale*

$$\varrho^{1-n} \int\limits_{|x|\le\varrho} |Df| \le r^{1-n} \int\limits_{|x|<r} |Df|. \tag{2.32}$$

Nella ipotesi $\psi(f, r) = 0$ dalla (2.16) si può ricavare un'altra disuguaglianza che utilizzeremo nel seguito. Per fare questo proviamo innanzitutto un lemma.

LEMMA 2.7. *Sia* $A = \{x; x \in R^n, |x| < a\}$, $n \ge 2$, *ed* $f \in BV_{\text{loc}}(A)$. *Allora per* $\varrho, r: 0 < \varrho < r < a$ *vale*

$$\int\limits_{\varrho<|x|\le r} |x|^{1-n} |Df| = r^{1-n} \int\limits_{|x|\le r} |Df| - \varrho^{1-n} \int\limits_{|x|\le\varrho} |Df| + (n-1) \int_{\varrho}^{r} \left[t^{-n} \int\limits_{|x|\le t} |Df| \right] dt. \tag{2.33}$$

Dim. Cominciamo col verificare la (2.33) nel caso $f \in C^1(A)$. In tale caso vale ovviamente

$$(2.34) \qquad \int\limits_{\varrho < |x| < r} |x|^{1-n} |Df| = \int\limits_{\varrho} \left\{ t^{1-n} \int\limits_{|x|=t} |Df(x)| \, dH_{n-1} \right\} dt,$$

e quindi, integrando per parti,

$$(2.35) \qquad \int\limits_{\varrho}^{r} \left[t^{1-n} \int\limits_{|x|=t} |Df(x)| \, dH_{n-1} \right] dt = \left[t^{1-n} \int\limits_{|x| \leq t} |Df| \right]_{\varrho}^{r} + \\ + (n-1) \int\limits_{\varrho}^{r} \left[t^{-n} \int\limits_{|x| \leq t} |Df| \right] dt,$$

ovvero la (2.33).

Per $f \in BV_{\text{loc}}(A)$ qualunque si procede come nella parte finale della dimostrazione del Teor. 2.5.

c. v. d.

Teorema 2.8. *Sia* $A = \{x \,;\, x \in R^n \,,\, |x| < a\}$, $n \geq 2$, $f \in BV_{\text{loc}}(A)$, $\varrho, r : 0 < \varrho < r < a$ *e* $\psi(f, r) = 0$, *allora vale*

$$(2.36) \qquad \left| r^{1-n} \int\limits_{|x| \leq r} Df - \varrho^{1-n} \int\limits_{|x| \leq \varrho} Df \right| \leq \sqrt{2 r^{1-n} \int\limits_{|x| \leq r} |Df|} \; \sqrt{1 + (n-1) \lg \frac{r}{\varrho}} \\ \left\{ r^{1-n} \int\limits_{|x| \leq r} |Df| - \varrho^{1-n} \int\limits_{|x| \leq \varrho} |Df| \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Dim. Osserviamo innanzitutto che per $t : 0 < t < a$ vale (v. la (2.21) di [1]),

$$(2.37) \qquad \int\limits_{|x| \leq t} Df = \int\limits_{|x| = t} f(x) \frac{x}{|x|} \, dH_{n-1} \,,$$

ovvero

$$(2.38) \qquad t^{1-n} \int\limits_{|x| \leq t} Df = \int\limits_{|x| = 1} f(tx) \frac{x}{|x|} \, dH_{n-1} \,,$$

e quindi

$$(2.39) \qquad \left| r^{1-n} \int\limits_{|x| \leq r} Df - \varrho^{1-n} \int\limits_{|x| \leq \varrho} Df \right| \leq \int\limits_{|x| = 1} |f(rx) - f(\varrho x)| \, dH_{n-1} \,.$$

Dal Cor. 2.6 e dal Lemma 2.7 si ha poi

$$\int_{\varrho<|x|\leq r} |x|^{1-n} |Df| \leq r^{1-n} \int_{|x|\leq r} |Df| \cdot \left\{1 + (n-1) \lg \frac{r}{\varrho}\right\}. \tag{2.40}$$

Dalle (2.16), (2.39) e (2.40) segue allora la (2.36).

c. v. d.

3. Confrontiamo i risultati del paragrafo precedente nel caso delle funzioni caratteristiche d'insieme con quelli trovati da De Giorgi in [4].

In [4] si era posto, per $E \subset R^n$, $\varphi(x, E) \in BV_{\mathrm{loc}}(A)$ e $G \subset A$ chiuso e limitato

$$\theta(E, G) = \inf\left\{\int_G |D\varphi(x, L)|\,;\ \varphi(x, L) \in BV_{\mathrm{loc}}(A),\ L - G = E - G\right\} \tag{3.1}$$

$$\psi(E, G) = \int_G |D\varphi(x, E)| - \theta(E, G). \tag{3.2}$$

Vale allora il seguente

TEOREMA 3.1. *Per* $E \subset R^n$, $\varphi(x, E) \in BV_{\mathrm{loc}}(A)$, $A \subset R^n$ *aperto,* $G \subset A$ *chiuso e limitato si hanno le eguaglianze*

$$\theta(E, G) = \theta(\varphi(x, E), G), \tag{3.3}$$

$$\psi(E, G) = \psi(\varphi(x, E), G). \tag{3.4}$$

DIM. Basta verificare la (3.3), e poichè vale ovviamente

$\theta(E, G) \geq \theta(\varphi(x, E), G)$, resta da vedere che

$$\theta(E, G) \leq \int_G |Df|, \text{ per } f \in BV_{\mathrm{loc}}(A),\ \ f = \varphi(x, E) \text{ in } A - G. \tag{3.5}$$

Fissato $f \in BV_{\mathrm{loc}}(A)$, con $f = \varphi(x, E)$ in $A - G$ poniamo $\tilde{f} = \min(\max(f, 0), 1)$. Avremo allora, v. Lemma 1.1 di [1],

$$\int_G |D\tilde{f}| \leq \int_G |Df|. \tag{3.6}$$

Dal Teor. 1.6 abbiamo poi

$$\int_G |D\tilde{f}| = \int_0^1 d\lambda \int_G |D\varphi(x, E_\lambda)|, \tag{3.7}$$

dove si è posto $E_\lambda = \{x\,;\, x \in A,\ \tilde{f}(x) \geq \lambda\}$, e quindi $E_\lambda - G = E - G$ per $\lambda : 0 < \lambda < 1$. Dalla (3.7) si ha che esiste $\lambda \in (0, 1)$ per cui

$$\int_G |D\varphi(x, E_\lambda)| \leq \int_G |D\tilde{f}|, \tag{3.8}$$

e quindi, poichè deve essere $\theta(E, G) \leq \int_G |D\varphi(x, E_\lambda)|$ si ha, tenuto conto delle (3.6) e (3.8), la (3.5).

c. v. d.

Scriveremo anche qui $\theta(E, \varrho)$ e $\psi(E, \varrho)$ in luogo di

$$\theta(E, C_\varrho) \quad \text{e} \quad \psi(E, C_\varrho) \quad \text{se} \quad C_\varrho = \{x\,;\, x \in R^n,\ |x| \leq \varrho\}.$$

Dal Teor. 2.5 si ricava allora il seguente risultato, che comprende il Teor. V, pag. 14, di [4], ovvero Teor. X di [5].

TEOREMA 3.2. *Sia* $A = \{x;\, x \in R^n,\ |x| < a\}$, $n \geq 2$, *e* $\varphi(x, E) \in BV_{\mathrm{loc}}(A)$. *Allora si ha, per* $\varrho, r : 0 < \varrho < r < a$,

$$\left| r^{1-n} \int_{|x| \leq r} D\varphi(x, E) - \varrho^{1-n} \int_{|x| \leq \varrho} D\varphi(x, E) \right|^2 \leq \tag{3.9}$$

$$\leq 2 \int_{\varrho < |x| \leq r} |x|^{1-n} |D\varphi(x, E)| \left\{ r^{1-n} \cdot \int_{|x| \leq r} |D\varphi(x, E)| - \varrho^{1-n} \int_{|x| \leq \varrho} |D\varphi(x, E)| + \right.$$

$$\left. + (n-1) \int_\varrho^r t^{-n}\, \psi(E, t)\, dt \right\}.$$

DIM. Oltre alla validità del Teor. 2.5 basta ricordare la (2.39).

c. v. d.

Dal Teor. 2.8 si ricava poi il seguente risultato che comprende il Teor. VI, pag. 15, di [4] ovvero Teor. XI di [5].

TEOREMA 3.3. *Sia* $A = \{x\,;\, x \in R^n.\ |x| < a\}$, $n \geq 2$, *e* $\varphi(x, E) \in BV_{\mathrm{loc}}(A)$. *Se per* $r : 0 < r < a$ *é* $\psi(E, r) = 0$, *allora per* $\varrho : 0 < \varrho < r$ *si ha*

$$
\left| r^{1-n} \int\limits_{|x| \leq r} D\varphi(x, E) - \varrho^{1-n} \int\limits_{|x| \leq \varrho} D\varphi(x, E) \right| \leq \tag{3.10}
$$

$$
\leq \sqrt{n\omega_n} \cdot \sqrt{1 + (n-1)\, lg\, \frac{r}{\varrho}} \left\{ r^{1-n} \int\limits_{|x| \leq r} |D\varphi(x, E)| - \varrho^{1-n} \int\limits_{|x| \leq \varrho} |D\varphi(x, E)| \right\}^{\frac{1}{2}}.
$$

DIM. Essendo $\psi(E, r) = 0$ si ha

$$
r^{1-n} \int\limits_{|x| \leq r} |D\varphi(x, E)| \leq \frac{n\omega_n}{2}. \tag{3.11}
$$

Infatti per $L = E - C_r$ si deve avere

$$
\int\limits_{|x| \leq r} |D\varphi(x, E)| \leq \int\limits_{|x| \leq r} |D\varphi(x, L)|, \tag{3.12}
$$

e d'altra parte è, per la (1.8),

$$
\int\limits_{|x| \leq r} |D\varphi(x, L)| = \int\limits_{|x| = r} \varphi(x, E)\, dH_{n-1}. \tag{3.13}
$$

Analogamente per $M = E \cup C_r$ si deve avere

$$
\int\limits_{|x| \leq r} |D\varphi(x, E)| \leq \int\limits_{|x| \leq r} |D\varphi(x, M)| = \int\limits_{|x| = r} \varphi(x, R^n - E)\, dH_{n-1} = \tag{3.14}
$$

$$
= n\omega_n r^{n-1} - \int\limits_{|x| = r} \varphi(x, E)\, dH_{n-1}.
$$

Dalle (3.12), (3.13) e (3.14) si ricava la (3.11). Dalle (3.11) e (2.36) si ha la (3.10).

c. v. d.

Vogliamo ora ricavare delle valutazioni già stabilite in [4], di $\varphi(x, E)$ e $|D\varphi(x, E)|$ nella ipotesi $\psi(E, r) = 0$. Per fare ciò richiamiamo alcuni fatti noti.

OSSERVAZIONE 3.4. (v. [1], Prop. 3.4). *Se $E \subset R^n$ è un insieme misurabile ed $\mathcal{F}E$ indica la sua frontiera possiamo supporre che valga*

$$x \in \mathcal{F}E \Longleftrightarrow 0 < \operatorname{mis}\{y\,;\, y \in E, |y-x| < \varrho\} < \omega_n \varrho^n, \qquad \forall \varrho > 0. \tag{3.15}$$

Nel seguito sottointenderemo sempre che valga la (3.15).

DEFINIZIONE 3.5. (v. [5], § 4). *Sia $E \subset R^n$ misurabile. Diremo frontiera ridotta di E l'insieme, che indicheremo con $\mathcal{F}^* E$, dei punti $x \in \mathcal{F}E$ (per $\mathcal{F}E$ è sottinteso che vale la* (3.15)) *per i quali esiste un intorno aperto A, con $\varphi(x, E) \in BV_{\mathrm{loc}}(A)$ e*

i) *esiste il limite* $\displaystyle\lim_{\varrho\to 0} \frac{\displaystyle\int_{|x-y|\le\varrho} D\varphi(y, E)}{\displaystyle\int_{|x-y|\le\varrho} |D\varphi(y, E)|}$,

ii) *indicato con* $\dfrac{D\varphi(x, E)}{|D\varphi(x, E)|}$ *il limite* i) *vale* $\left|\dfrac{D\varphi(x, E)}{|D\varphi(x, E)|}\right| = 1$.

Ciò detto valgono le seguenti proprietà.

PROPOSIZIONE 3.6. (cfr. [6], Teor. III). *Se $E \subset R^n$ è misurabile e $x \in \mathcal{F}^* E$, allora vale*

$$\lim_{\varrho\to 0} \varrho^{1-n} \int_{|x-\xi|\le\varrho} |D\varphi(\xi, E)| = \omega_{n-1}. \tag{3.16}$$

PROPOSIZIONE 3.7. *Sia $E \subset R^n$ e $\varphi(x, E) \in BV_{\mathrm{loc}}(A)$, allora vale*

$$\mathcal{F}E \cap A = \overline{\mathcal{F}^* E} \cap A. \tag{3.17}$$

DIM. Basta ricordare la (3.15) e osservare che per il Teorema di Besicovitch [7] sulla derivazione delle misure vale, per ogni insieme di Borel $B \subset A$,

$$\int_B |D\varphi(x, E)| = \int_{B \cap \mathcal{F}^* E} |D\varphi(x, E)|. \tag{3.18}$$

c. v. d.

Possiamo allora provare il seguente risultato, per il quale si veda il Teor. VII, pag. 17, di [4] ovvero il Teor. XII di [5].

TEOREMA 3.8. *Sia* $E \subset R^n$ *misurabile e sia* $n \geq 2$. Per $x \in \mathcal{F} E$ *esista* $t > 0$ *tale che*(1) $\psi(E, \{y\,;\, y \in R^n, |y - x| \leq t\}) = 0$, *allora valgono le*

$$(3.19) \qquad t^{1-n} \int\limits_{|y-x|<t} |D\varphi(y, E)| \geq \omega_{n-1},$$

$$(3.20) \qquad \frac{1}{n}\,\omega_{n-1} \leq t^{-n} \int\limits_{|x-y|\leq t} \varphi(y, E)\, dy \leq \omega_n - \frac{1}{n}\,\omega_{n-1}.$$

DIM. Grazie al Cor. 2.6 e alla Prop. 3.6 la (3.19) vale se $x \in \mathcal{F}^* E$. Nel caso in cui $x \in \mathcal{F} E - \mathcal{F}^* E$ si può, grazie alla Prop. 3.7, per ogni $\varepsilon > 0$ trovare $\xi \in \mathcal{F}^* E$ con $|\xi - x| < \varepsilon$. Allora, essendo $\psi(E, C_{t-\varepsilon}(\xi)) = 0$ (cfr. Prop. 2.2) vale

$$(3.21) \qquad \omega_{n-1} \leq (t-\varepsilon)^{1-n} \int\limits_{|y-\xi|<t-\varepsilon} |D\varphi(y, E)| \leq (t-\varepsilon)^{1-n} \int\limits_{|y-x|<t} |D\varphi(y, E)|.$$

Dalla (3.21) per l'arbitrarietà di ε segue la (3.19).

Per quanto riguarda la (3.20) osserviamo che dalle (3.12) e (3.13) segue

$$(3.22) \qquad \int\limits_{|x-y|<\varrho} |D\varphi(y, E)| \leq \int\limits_{|y-x|=\varrho} \varphi(y, E)\, dH_{n-1}, \quad \text{per} \quad \varrho : 0 < \varrho < t.$$

E quindi, se $x \in \mathcal{F} E$, per la (3.19) si ha

$$(3.23) \qquad \omega_{n-1}\, \varrho^{n-1} \leq \int\limits_{|y-x|=\varrho} \varphi(y, E)\, dH_{n-1}, \quad \text{per} \quad \varrho : 0 < \varrho < t.$$

Integrando la (3.23) sull'intervallo $(0, t)$ si ha

$$(3.24) \qquad \frac{1}{n}\,\omega_{n-1} \leq t^{-n} \int\limits_{|x-y|\leq t} \varphi(y, E)\, dy.$$

Ripetendo queste considerazioni per $\varphi(y, R^n - E)$ e ricordando che

(1) È sottinteso che $\exists\, A \supset \{y : y \in R^n (y - x) \leq t\}$ aperto per cui $\varphi(x, E) \in BV_{\mathrm{loc}}(A)$.

$| D\varphi(y, E) | = | D\varphi(y, R^n - E) |$ si ha

$$\frac{1}{n}\,\omega_{n-1}\, t^n \leq \int_{|y-x|\leq t} \varphi(y, R^n - E)\, dy = \omega_n\, t^n - \int_{|x-y|\leq t} \varphi(y, E)\, dy. \tag{3.25}$$

Dalle (3.24) e (3.25) segue allora la (3.20).

c. v. d.

4. Da una proprietà delle funzioni armoniche, Lemma 4.1, ricaveremo alcune proprietà delle superfici approssimanti frontiere orientate di misura minima, Teor. 4.3 e Teor. 4.4.

LEMMA, 4.1. *Se* $G = \{y\,;\, y \in R^m, |y| \leq \varrho\}$ *e* $u \in C^1(G)$ *è armonica in* $G - \partial G$, *posto* $q = (\mathrm{mis}\, G)^{-1} \int_G Du\, dy$, *si ha, per* $\alpha : 0 < \alpha < 1$,

$$\int_{|y|\leq \alpha\varrho} \{| Du |^2 - | q |^2\}\, dy \leq \alpha^{m+2} \int_{|y|\leq \varrho} \{| Du |^2 - | q |^2\}\, dy. \tag{4.1}$$

DIM. Per una nota proprietà dei polinomi armonici, cfr. Favard [8] vol. III, 2° pag. 240, esiste una successione $\{ V_h \}$ con V_h polinomio armonico omogeneo di grado h, tale che

$$u = \sum_{h=0}^{\infty} V_h, \qquad Du = \sum_{h=1}^{\infty} DV_h, \tag{4.2}$$

e le due serie convergono uniformemente su G.

Per la omogeneità dei V_h si ha

$$\int_{|y|\leq\varrho} (DV_h, DV_k)\, dy = \int_{|y|\leq\alpha\varrho} (DV_h, DV_k)\, dy = 0, \quad \text{per} \quad h \neq k, \tag{4.3}$$

$$\int_{|y|\leq\varrho} DV_h\, dy = \int_{|y|\leq\alpha\varrho} DV_h\, dy = 0, \quad \text{per} \quad h \geq 2. \tag{4.4}$$

Avremo allora

$$q = DV_1, \qquad \int_{|y|\leq\varrho} [| Du |^2 - | q |^2]\, dy = \sum_{h=2}^{\infty} \int_{|y|\leq\varrho} | DV_h |^2\, dy, \tag{4.5}$$

$$\int_{|y|\leq\alpha\varrho} [| Du |^2 - | q |^2]\, dy = \sum_{h=2}^{\infty} \int_{|y|\leq\alpha\varrho} | DV_h |^2\, dy.$$

Dalle (4.5), per la omogeneità dei V_h, si ha la (4.1).

c. v. d.

LEMMA 4.2. *Sia* $G = \{y\,; y \in R^m\,,\ |y| \leq \varrho\}$, $\{w_h\} \subset C^1(G)$, *e* $\{\beta_h\}$ *una successione di numeri reali positivi. Posto* $q_h = (\mathrm{mis}\ G)^{-1} \int_G Dw_h\, dy$ *e indicata con* u_h *la funzione armonica su* $G - \partial G$ *ed uguale alla* w_h *su* ∂G *sia*

$$\lim_{h\to\infty} \max_G |Dw_h| = 0, \qquad \int_{|y|\leq\varrho} [\sqrt{1+|Dw_h|^2} - \sqrt{1+|q_h|^2}]\, dy \leq \beta_h\,, \tag{4.6}$$

$$\max_{h\to\infty} \lim\ \beta_h^{-1} \int_{|y|\leq\varrho} [\sqrt{1+|Dw_h|^2} - \sqrt{1+|Du_h|^2}]\, dy \leq 0. \tag{4.7}$$

Allora, per $\alpha\colon 0 < \alpha < 1$, *vale*

$$\max_{h\to 0} \lim\ \beta_h^{-1} \int_{|y|\leq\alpha\varrho} [\sqrt{1+|Dw_h|^2} - \sqrt{1+|q_h^{(\alpha)}|^2}]\, dy \leq \alpha^{m+2}\,, \tag{4.8}$$

dove si è posto $q_h^{(\alpha)} = (\mathrm{mis}\ G)^{-1}\, \alpha^{-m} \int_{|y|\leq\alpha\varrho} Dw_h\, dy\,.$

DIM. Osserviamo innanzitutto che valgono

$$\sqrt{c+b} - \sqrt{c} \leq \frac{b}{2\sqrt{c}}\,, \quad \text{per} \quad c+b \geq 0, \quad c > 0\,, \tag{4.9}$$

$$\sqrt{c+b} - \sqrt{c} \geq \frac{b}{2\sqrt{c}}(1-b), \quad \text{per} \quad c+b \geq 1, \quad 1 \leq c \leq 2. \tag{4.10}$$

Dalla (4.9) si ha

$$\int_{|y|\leq\alpha\varrho} \{\sqrt{1+|Dw_h|^2} - \sqrt{1+|q_h^{(\alpha)}|^2}\}\, dy \leq \frac{1}{2\sqrt{1+|q_h^{(\alpha)}|^2}} \int_{|y|\leq\alpha\varrho} \{|Dw_h|^2 - |q_h^{(\alpha)}|^2\}\, dy, \tag{4.11}$$

e, per facile calcolo,

$$\int_{|y|\leq\alpha\varrho} \{|Dw_h|^2 - |q_h^{(\alpha)}|^2\}\, dy = \int_{|y|\leq\alpha\varrho} |Dw_h - q_h^{(\alpha)}|^2\, dy \leq \int_{|y|\leq\alpha\varrho} |Dw_h - q_h|^2\, dy\,, \tag{4.12}$$

quindi, dalle (4.11), (4.12), ricordando la (4.6) si ottiene

$$\max_{h\to\infty} \lim \beta_h^{-1} \int_{|y|\leq a\varrho} \{\sqrt{1+|Dw_h|^2} - \sqrt{1+|q_h^{(a)}|^2}\}\, dy \leq \tag{4.13}$$

$$\leq \frac{1}{2} \max_{h\to\infty} \lim \beta_h^{-1} \int_{|y|\leq a\varrho} |Dw_h - q_h|^2\, dy\,.$$

D'altra parte con facile calcolo si ha

$$\int_{|y|\leq a\varrho} |Dw_h - Du_h|^2\, dy \leq \int_{|y|\leq\varrho} |Dw_h - Du_h|^2\, dy = \int_{|y|\leq\varrho} \{|Dw_h|^2 - |Du_h|^2\}\, dy, \tag{4.14}$$

mentre grazie alla (4.9) vale

$$\int_{|y|\leq\varrho} \{|q_h|^2 - |Du_h|^2\}\, dy \leq 2\sqrt{1+|q_h|^2} \int_{|y|\leq\varrho} \{\sqrt{1+|q_h|^2} - \sqrt{1+|Du_h|^2}\}\, dy\,, \tag{4.15}$$

e, grazie alla (4.10) se h è sufficientemente grande, vale

$$\int_{|y|\leq\varrho} \left\{\sqrt{1+|Dw_h|^2} - \sqrt{1+|q_h|^2} - \frac{|Dw_h|^2 - |q_h|^2}{2\sqrt{1+|q_h|^2}}\right\} dy \geq \tag{4.16}$$

$$\geq - \int_{|y|\leq\varrho} \frac{|Dw_h|^2 - |q_h|^2}{2\sqrt{1+|q_h|^2}}\, dy \geq -\beta_h^2 \int_{|y|\leq\varrho} \frac{\big||Dw_h|^2 - |q_h|^2\big|}{2\sqrt{1+|q_h|^2}}\, dy\,,$$

e cioè

$$\int_{|y|\leq\varrho} \{|Dw_h|^2 - |q_h|^2\}\, dy \leq \frac{2\sqrt{1+|q_h|^2}}{1-\sigma_h\beta_h^2} \int_{|y|\leq\varrho} \{\sqrt{1+|Dw_h|^2} - \sqrt{1+|q_h|^2}\}\, dy, \tag{4.17}$$

dove $\sigma_h = \operatorname{sign}(|Dw_h| - |q_h|)$.

Dalle (4.15) e (4.17), ricordando le (4.6) e (4.7) si ha

$$\max_{h\to\infty} \lim \beta_h^{-1} \int_{|y|\leq\varrho} \{|Dw_h|^2 - |Du_h|^2\}\, dy \leq 0\,. \tag{4.18}$$

Dalle (4.13), (4.14) e (4.18) si ha allora

$$\text{(4.19)} \qquad \max_{h\to\infty}\lim \beta_h^{-1} \int_{|y|\le\alpha\varrho} \{\sqrt{1+|Dw_h|^2} - \sqrt{1+|q_h^{(\alpha)}|^2}\}\, dy \le$$

$$\le \frac{1}{2} \max_{h\to\infty}\lim \beta_h^{-1} \int_{|y|\le\alpha\varrho} \{|Du_h|^2 - |q_h|^2\}\, dy\,.$$

Ma grazie al Lemma 4.1 vale

$$\text{(4.20)} \qquad \int_{|y|\le\alpha\varrho} \{|Du_h|^2 - |q_h|^2\}\, dy \le \alpha^{m+2} \int_{|y|\le\varrho} \{|Du_h|^2 - |q_h|^2\}\, dy\,;$$

dalla (4.17) si ricava

$$\text{(4.21)} \qquad \max_{h\to\infty}\lim \beta_h^{-1} \int_{|y|\le\varrho} \{|Dw_h|^2 - |q_h|^2\}\, dy \le 2\,,$$

e tenuto conto della (4.18) si ha infine

$$\text{(4.22)} \qquad \max_{h\to\infty}\lim \beta_\alpha^{-1} \int_{|y|\le\varrho} \{|Du_h|^2 - |q_h|^2\}\, dy \le 2\,.$$

Dalle (4.19), (4.20) e (4.22) segue allora la (4.8).

Vale allora il seguente

c. v. d.

TEOREMA 4.3. *Sia* $G = \{y\,; y \in R^m, |y| \le \varrho\}$ *e* $\{w_h\} \subset C^1(G)$ *e* $\{\beta_h\}$ *una successione di numeri reali positivi. Posto* $q_h = (\text{mis}\ G)^{-1} \int_G Dw_h\, dy$ *supponiamo che valga*

$$\text{(4.23)} \qquad \int_G \sqrt{1+|Dw_h|^2}\, dy - \int_G \sqrt{1+|q_h|^2}\, dy \le \beta_h\,, \qquad \lim_{h\to\infty}\max_G |Dw_h| = 0.$$

Valga inoltre la

$$\text{(4.24)} \qquad \lim_{h\to\infty} \beta_h^{-1}\, \psi(\{(y,z)\,;\ y\in A,\, z < w_h(y)\},\ G\times[\min_G w_h\,, \max_G w_h]) = 0, \ (^2)$$

(2) A è un aperto di R^m contenente G e si può pensare $w_h \in C^1(A)$.

allora, per $\alpha : 0 < \alpha < 1$, *si ha, posto* $q_h^{(\alpha)} = \alpha^{-m} (\text{mis } G)^{-1} \int\limits_{|y| \leq \alpha\varrho} D w_h (y)\, dy$,

$$\max_{h \to \infty} \lim \beta_h^{-1} \left[\int\limits_{|y| \leq \alpha\varrho} \sqrt{1 + |D w_h|^2}\, dy - \int\limits_{|y| \leq \alpha\varrho} \sqrt{1 + |q_h^{(\alpha)}|^2}\, dy \right] \leq \alpha^{m+2} . \tag{4.25}$$

DIM. Indichiamo con u_h la funzione armonica su G eguale alla w_h sulla frontiera di G. Si avrà allora

$$\int\limits_G \{\sqrt{1 + |D w_h|^2} - \sqrt{1 + |D u_h|^2}\}\, dy \leq \tag{4.26}$$

$$\leq \psi\, (\{y, z\};\ y \in A,\ z < w_h (y)\},\ G \times [\min_G w_h, \max_G w_h]) ,$$

Si ha allora, grazie alla (4.24) che vale la ipotesi (4.7) del Lemma 4.2 e quindi $\{w_h\}$ verifica tutte le ipotesi del Lemma 4.2, varrà allora la tesi di questo e cioè esattamente la (4.25).

c. v. d.

TEOREMA 4.4 *Sia* $\{L_h\}$ *una successione di insiemi misurabili di* R^n, $n \geq 2$, *e* $\{\beta_h\}$ *una successione di numeri reali positivi. Per* $t > 0$ *valgano le relazioni*

i) $\displaystyle\int\limits_{|x| \leq t} | D\varphi\, (x, L_h) | - \left| \int\limits_{|x| \leq t} D\varphi\, (x, L_h) \right| \leq \beta_h$, $\forall\, h$, (³)

ii) $\displaystyle\lim_{h \to \infty} \beta_h^{-1}\, \psi\, (L_h , t) = 0$,

iii) *Per ogni* h $\dfrac{D\varphi\, (x, L_h)}{| D\varphi\, (x, L_h) |}$ *sia funzione continua su* $\mathcal{F} L_h \cap \{x; x \in R^n, |x| < t\}$

e valga $\displaystyle\lim_{h \to \infty} \inf \left\{ \frac{D_n\, \varphi\, (x, L_h)}{| D\varphi\, (x, L_h) |} ;\ |x| < t,\ x \in \mathcal{F} L_h \right\} = 1.$

Allora, per $\alpha : 0 < \alpha < 1$, *vale*

$$\max_{h \to \infty} \lim \beta_h^{-1} \left\{ \int\limits_{|x| \leq \alpha t} | D\varphi\, (x, L_h) | - \left| \int\limits_{|x| \leq \alpha t} D\varphi\, (x, L_h) \right| \right\} \leq \alpha^{n+1} . \tag{4.27}$$

DIM. Basta verificare che è assurdo che esista una successione di insiemi $\{L_h\}$ ed un numero reale $\alpha : 0 < \alpha < 1$, tali che valgano le i), ii), iii), e

$$\max_{h \to \infty} \lim \beta_h^{-1} \left\{ \int\limits_{|x| \leq \alpha t} | D\varphi\, (x, L_h) | - \left| \int\limits_{|x| \leq \alpha t} D\varphi\, (x, L_h) \right| \right\} > \alpha^{n+1} . \tag{4.28}$$

(³) È sottinteso che per ogni h $\exists$ A_h aperto: $A_h \supset \{x;\ x \in R^n,\ |x| \leq t\}$, $\varphi\, (x, L_h) \in BV_{\text{loc}}(A_h)$.

Supponiamo infatti che una tale $\{L_h\}$ ed un tale α esistano. Possiamo anche supporre, grazie alla iii), che valga

$$\inf \left\{ \frac{D_n \varphi (x, L_h)}{| D\varphi (x, L_h) |} ; | x | < t, x \in \mathcal{F} L_h \right\} > 0, \forall h. \tag{4.29}$$

Allora, cfr. Teor. 5.6 di [1], per ogni h esiste un aperto $\Omega_h \subset R^{n-1}$ ed una funzione $w_h \in C^1 (\Omega_h)$ tali che

$$\mathcal{F} L_h \cap \{x ; x \in R^n, | x | < t\} = \{x_n = w_h (x_1, \ldots, x_{n-1}) ; (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \Omega_h\} \tag{4.30}$$

e, grazie alla iii), vale

$$\lim_{h \to \infty} \sup_{\Omega_h} | Dw_h | = 0 . \tag{4.31}$$

Possiamo anche supporre, senza ledere la generalità, che esista

$$\lim_{h \to \infty} \inf_{\Omega_h} w_h = c , \tag{4.32}$$

e non può essere $c^2 = t^2$, perchè in tal caso, grazie alle (4.30) e (4.31), si avrebbe

$$\lim_{h \to \infty} \mathcal{F} L_h \cap \{x ; x \in R^n, | x | < t\} = \emptyset , \tag{4.33}$$

e la (4.33) contrasta con la (4.28).

Vale inoltre

$$\lim_{h \to \infty} \Omega_h = \{y ; y \in R^{n-1}, | y |^2 < t^2 - c^2\} , \tag{4.34}$$

infatti, dalla (4.30) si ha

$$| y |^2 + w_h^2 (y) = t^2 , \quad \text{per} \quad y \in \partial \Omega_h . \tag{4.35}$$

Quindi, dalle (4.31), (4.32) e (4.33) si ha

$$\lim_{h \to \infty} \inf_{\partial \Omega_h} | y |^2 = t^2 - c^2 . \tag{4.36}$$

Dalle (4.31), (4.35) e (4.36) segue allora la (4.34).

Dalla (4.34) si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste h_ε tale che

$$\Omega_h \supset \{y ; | y |^2 \leq t^2 - c^2 - \varepsilon\}, \quad \text{per } h > h_\varepsilon , \tag{4.37}$$

e quindi possiamo considerare la successione di funzioni $\{w_h\}_{h>h_\varepsilon}$ su $G = \{y\,;\,|y|^2 \leq t^2 - c^2 - \varepsilon\}$. Abbiamo allora, per le (4.30) e (4.37), cfr. anche Prop. 1.6 e Teor. 1.10 di [2],

$$\int_{(G\times R)\cap O_t} D_i\,\varphi\,(x,\,L_h) = \int_{G\times R} D_i\,\varphi\,(x,\,L_h) = \int_G D_i\,w_h\,dy, \quad i < n\,, \tag{4.38}$$

$$\int_{(G\times R)\cap O_t} D_n\,\varphi\,(x,\,L_h) = \int_{G\times R} D_n\,\varphi\,(x,\,L_h) = \text{mis}\ G, \tag{4.39}$$

$$\int_{(G\times R)\cap O_t} |\,D\varphi\,(x,\,L_h)\,| = \int_{G\times R} |\,D\varphi\,(x,\,L_h)\,| = \int_G \sqrt{1 + |\,Dw_h\,|^2}\,dy\,. \tag{4.40}$$

Posto allora $q_h = (\text{mis}\ G)^{-1} \int_G Dw_h\,dy$, si ha, per le (4.38) e (4.39),

$$\sqrt{1 + |\,q_h\,|^2}\ \text{mis}\ G = \left|\ \int_{(G\times R)\cap O_t} D\varphi\,(x,\,L_h)\right|. \tag{4.41}$$

Dalle (4.40) e (4.41) si ha allora

$$\int_G \left[\sqrt{1 + |\,Dw_h\,|^2} - \sqrt{1 + |\,q_h\,|^2}\right] dy \leq \int_{|x|\leq t} |\,D\varphi\,(x,\,L_h)\,| - \tag{4.42}$$

$$- \left|\int_{|x|\leq t} D\varphi\,(x,\,L_h)\right| \leq \beta_h\,.$$

Avremo allora che la successione $\{w_h\}_{h>h_\varepsilon}$ verifica le ipotesi del Teor. 4.3, si avrà quindi, posto $G_\alpha = \{y\,;\,|\,y\,|^2 \leq \alpha^2\,(t^2 - c^2 - \varepsilon)\}$,

$$\max_{h\to\infty}\lim\ \beta_h^{-1} \int_{G_\alpha} \left\{\sqrt{1 + |\,Dw_h\,|^2} - \sqrt{1 + |\,q_h^{(\alpha)}\,|^2}\right\} dy \leq \alpha^{n+1}, \tag{4.43}$$

dove $q_h^{(\alpha)} = (\text{mis}\ G_\alpha)^{-1} \int_{G_\alpha} Dw_h\,dy$.

Ma grazie alle (4.31), (4.32) e (4.34), per h grande e ε piccolo vale, ricordando che il valore di α è fissato,

$$\int_{|x|\leq \alpha t} |D\varphi(x, L_h)| - \left|\int_{|x|\leq \alpha t} D\varphi(x, L_h)\right| = \int_{C_t \cap (G_\alpha \times R)} |D\varphi(x, L_h)| - \left|\int_{C_t \cap (G_\alpha \times R)} D\varphi(x, L_h)\right|. \tag{4.44}$$

D'altra parte vale, per la Prop. 1.6 e il Teor. 1.10 di [2],

$$\int_{C_t \cap (G_\alpha \times R)} |D\varphi(x, L_h)| - \left|\int_{C_t \cap (G_\alpha \times R)} D\varphi(x, L_h)\right| = \int_{G_\alpha} \{\sqrt{1 + |Dw_h|^2} - \sqrt{1 + |q_h^{(\alpha)}|^2}\}\, dy. \tag{4.45}$$

Finalmente dalle (4.43), (4.44) e (4.45) si ha

$$\max \lim_{h\to\infty} \beta_h^{-1} \left\{\int_{|x|\leq \alpha t} |D\varphi(x, L_h)| - \left|\int_{|x|\leq \alpha t} D\varphi(x\,; L_h)\right|\right\} \leq \alpha^{n+1}, \tag{4.46}$$

ciò che contrasta colla (4.28).

c. v. d.

5. Scopo di questo paragrafo è di provare il Teor. 5.7. Per fare ciò proveremo alcuni lemmi.

LEMMA 5.1. *Sia* $A = \{x\,; x \in R^n, |x| < a\}$, $n \geq 2$, $a > 1$. *Sia* $g \in BV_{\mathrm{loc}}(A)$ *e valgano*

$$|g(x)| \leq h_1, \qquad \text{per} \qquad |x| \leq 1, \tag{5.1}$$

$$\int_{|x|\leq 1} |Dg| \leq h_2\,. \tag{5.2}$$

Avremo allora, posto

$$g_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n} \int_{|\xi|\leq 1} e^{-|x-\xi|\varepsilon^{-4}} g(\xi)\, d\xi\,, \tag{5.3}$$

le diseguaglianze

$$\int_{|x|\leq 1} |g(x) - g_\varepsilon(x)|\, dx \leq \varepsilon^3 (nh_2 + n^2 \omega_n h_1) + 2h_1 \frac{1}{n!} \int_{|\eta| > \varepsilon^{-1}} e^{-|\eta|}\, d\eta, \tag{5.4}$$

e, se $t + \varepsilon^3 < 1$,

$$\int_{|x|\leq t} |Dg_\varepsilon| - \int_{|x|\leq t} |Dg| \leq \int_{t<|x|\leq t+\varepsilon^3} |Dg| + (n\omega_n h_1 + h_2) \frac{1}{n!\,\omega_n} \int_{|\eta|>\varepsilon^{-1}} e^{-|\eta|}\, d\eta. \tag{5.5}$$

DIM. Poniamo

$$g_1 = \begin{cases} g, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}. \tag{5.6}$$

Avremo allora, per la (1.8),

$$\int_{R^n} |Dg_1| \leq h_2 + n\,\omega_n h_1, \tag{5.7}$$

e ovviamente

$$g_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n} \int e^{-|x-\xi|\varepsilon^{-4}} g_1(\xi)\, d\xi. \tag{5.8}$$

Quindi

$$\int_{|x|\leq 1} |g(x) - g_\varepsilon(x)|\, dx \leq \frac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n} \int e^{-|\eta|\varepsilon^{-4}} d\eta \int_{|x|\leq 1} |g_1(x-\eta) - g_1(x)|\, dx. \tag{5.9}$$

D'altra parte si ha

$$\varepsilon^{-4n} \int_{|\eta|>\varepsilon^3} e^{-|\eta|\varepsilon^{-4}} d\eta \int_{|x|\leq 1} g_1(x-\eta) - g_1(x)|\, dx \leq 2h_1\, \omega_n \int_{|\eta|>\varepsilon^{-1}} e^{-|\eta|} d\eta, \tag{5.10}$$

e, cfr. la (1.24) di [1],

$$\frac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n} \int_{|\eta|\leq\varepsilon^3} e^{-|\eta|\varepsilon^{-4}} d\eta \int_{|x|\leq 1} |g_1(x-\eta) - g_1(x)|\, dx \leq \tag{5.11}$$

$$\leq n\varepsilon^3 \int_{R^n} |Dg_1| \leq n\varepsilon^3 (h_2 + n\omega_n h_1).$$

Dalle (5.9), (5.10) e (5.11) si ricava allora la (5.4).

Per la (5.5) ricordiamo che vale

$$Dg_\varepsilon(x)| \leq \frac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n} \int e^{-|x-\xi|\varepsilon^{-4}} |Dg_1|, \tag{5.12}$$

e quindi

$$\int_{|x|\leq t} |Dg_\varepsilon| \leq \int |Dg_1(\xi)| \int_{|x|\leq t} \frac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n} e^{-|x-\xi|\varepsilon^{-4}} dx, \tag{5.13}$$

potendosi invertire gli integrali al secondo membro grazie alla continuità di $\int e^{-|x-\xi|\varepsilon^{-4}} |Dg_1(\xi)|$. D'altra parte è

$$(5.14) \qquad \int_{|\xi|<t+\varepsilon^3} |Dg_1(\xi)| \int_{|x|\leq t} \frac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n} e^{-|x-\xi|\varepsilon^{-4}} dx \leq \int_{|\xi|<t+\varepsilon^3} |Dg|, \quad \text{per} \quad t+\varepsilon^3<1,$$

$$(5.15) \qquad \int_{|\xi|\geq t+\varepsilon^3} |Dg_1(\xi)| \int_{|x|\leq t} \varepsilon^{-4n} e^{-|x-\xi|\varepsilon^{-4}} dx \leq (h_2 + n\omega_n h_1) \int_{|\eta|\geq\varepsilon^{-1}} e^{-|\eta|} d\eta.$$

Dalle (5.13), (5.14) e (5.15) segue allora la (5.5).

c. v. d.

LEMMA 5.2 *Per ogni numero intero n esiste $\varepsilon(n)>0$ tale che*

i) $E \subset R^n$, *misurabile* $x \in R^n$,

ii) $\varepsilon^2 < \dfrac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n} \displaystyle\int e^{-|x-\xi|\varepsilon^{-4}} \varphi(\xi, E)\, d\xi < 1-\varepsilon^2$,

iii) $0<\varepsilon<\varepsilon(n)$,

implicano

$$(5.16) \qquad \mathcal{F}E \cap \{y\,;|y-x|<\varepsilon^2\} \neq \emptyset.$$

DIM. Infatti da

$$(5.17) \qquad \mathcal{F}E \cap \{y\,;|y-x|<\varepsilon^2\} = \emptyset,$$

segue l'alternativa

$$(5.18) \qquad \operatorname{mis}[E \cap \{y\,;|y-x|<\varepsilon^2\}] = \begin{cases} 0 \\ \operatorname{mis}\{y\,;|y-x|<\varepsilon^2\} \end{cases},$$

e dalla (5.18) la

$$(5.19) \qquad \frac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n} \int e^{-|x-\xi|\varepsilon^{-4}} \varphi(\xi,E)\,d\xi \begin{cases} \leq \dfrac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n} \displaystyle\int_{|\xi-x|\geq\varepsilon^2} e^{-|x-\xi|\varepsilon^{-4}} d\xi = \dfrac{1}{(n-1)!} \displaystyle\int_{\varepsilon^{-2}}^{\infty} e^{-\varrho} \varrho^{n-1} d\varrho \\ \geq \dfrac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n} \displaystyle\int_{|\xi-x|\leq\varepsilon^2} e^{-|x-\xi|\varepsilon^{-4}} d\xi = 1 - \dfrac{1}{(n-1)!} \displaystyle\int_{\varepsilon^{-2}}^{\infty} e^{-\varrho} \varrho^{n-1} \end{cases}$$

Ma poichè vale

$$(5.20)\qquad \frac{1}{(n-1)!}\int_{\varepsilon^{-2}}^{\infty} e^{-\varrho}\,\varrho^{n-1}\,d\varrho = e^{-\varepsilon^{-2}}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\varepsilon^{-2i}}{i!},$$

si ha che esiste $\varepsilon(n) > 0$ per cui

$$(5.21)\qquad 0 < \varepsilon < \varepsilon(n) \Longrightarrow \frac{1}{(n-1)!}\int_{\varepsilon^{-2}}^{\infty} e^{-\varrho}\,\varrho^{n-1}\,d\varrho < \varepsilon^2.$$

Per tale $\varepsilon(n)$, grazie alla alternativa (5.18), si ha che vale l'asserto.

c. v. d.

LEMMA 5.3. *Per ogni intero* $n \geq 2$ *esiste* $\delta(n) > 0$ *e una funzione* $\lambda : (0, \delta(n)) \rightarrow R$, *infinitesima nello zero, per cui, se valgono*

i) $E \subset R^n$, *misurabile,* $0 < \varepsilon < \delta(n)$,

ii) $\psi(E, 1) = 0$,

iii) $\displaystyle\int_{|x|\leq 1} |D\varphi(x, E)| - \int_{|x|\leq 1} D_n\varphi(x, E) \leq \varepsilon$,

posto

$$(5.22)\qquad f(x) = \frac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n}\int_{|\xi|\leq 1} e^{-|x-\xi|\varepsilon^{-4}}\,\varphi(\xi, E)\,d\xi,$$

ne segue

$$(5.23)\qquad \inf\left\{\frac{D_n f(x)}{|Df(x)|};\ |x| < 1 - 2\varepsilon^{\frac{1}{2(n-1)}},\ \varepsilon^2 < f(x) < 1 - \varepsilon^2\right\} \geq 1 - \lambda(\varepsilon).$$

DIM. Posto $E_1 = E \cap \{x ; x \in R^n, |x| \leq 1\}$ si hanno

$$(5.24)\qquad D_n f(x) = \frac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n}\int e^{-|x-\xi|\varepsilon^{-4}}\,D_n\varphi(\xi, E_1),$$

$$(5.25)\qquad |Df(x)| \leq \frac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n}\int e^{-|x-\xi|\varepsilon^{-4}}\,|D\varphi(\xi, E_1)|.$$

D'altra parte fissati $\varepsilon, \sigma : 0 < \varepsilon < 1$ e $\varepsilon^4 < \sigma < 1$, possiamo determinare un numero finito di punti $y_i \in \mathcal{F}E \cap \{x\,;\, x \in R^n,\ |x| \leq 1 - \sigma\}$ e tali che

$$\mathcal{F}E \cap \{x\,;\, x \in R^n,\ |x| \leq 1 - \sigma\} \subset \bigcup_i \{x\,;\, x \in R^n,\ |x - y_i| < \varepsilon^4\}, \tag{5.26}$$

$$\left\{x\,;\, x \in R^n,\ |x - y_i| < \frac{\varepsilon^4}{3}\right\} \cap \left\{x\,;\, x \in R^n,\ |x - y_j| < \frac{\varepsilon^4}{3}\right\} = \emptyset, \quad \text{per } i \neq j. \tag{5.27}$$

Dalle (5.27) si ha

$$\int e^{-|x-\xi|\varepsilon^{-4}} |D\varphi(\xi, E_1)| \geq \sum_i \int\limits_{|\xi - y_i| < \frac{\varepsilon^4}{3}} e^{-|x-\xi|\varepsilon^{-4}} |D\varphi(\xi, E)|, \tag{5.28}$$

mentre è, per la (3.19),

$$\int\limits_{|\xi - y_i| < \frac{\varepsilon^4}{3}} e^{-|x-\xi|\varepsilon^{-4}} |D\varphi(\xi, E)| \geq \tag{5.29}$$

$$\geq e^{-|x-y_i|\varepsilon^{-4} - \frac{1}{3}} \cdot \int\limits_{|\xi - y_i| < \frac{\varepsilon^4}{3}} |D\varphi(\xi, E)| \geq \omega_{n-1}\, e^{-|x-y_i|\varepsilon^{-4} - \frac{1}{3}} \cdot 3^{1-n} \cdot \varepsilon^{4(n-1)}.$$

Dalla (5.26) si ha poi ovviamente

$$\int\limits_{|\xi| \leq 1-\sigma} e^{-|x-\xi|\varepsilon^{-4}} [|D\varphi(\xi, E)| - D_n\varphi(\xi, E)] \leq \tag{5.30}$$

$$\leq \sum_i \int\limits_{|\xi - y_i| < \varepsilon^4} e^{-|x-\xi|\varepsilon^{-4}} [|D\varphi(\xi, E)| - D_n\varphi(\xi, E)] \leq$$

$$\leq \sum_i e^{-|x-y_i|\varepsilon^{-4}+1} \int\limits_{|\xi - y_i| < \varepsilon^4} [|D\varphi(\xi, E)| - D_n\varphi(\xi, E)].$$

Essendo $\varepsilon^4 < \sigma$ dal Cor. 2.6 segue poi

$$\int\limits_{|y_i - \xi| < \varepsilon^4} [|D\varphi(\xi, E)| - D_n\varphi(\xi, E)] \leq \tag{5.31}$$

$$\leq \varepsilon^{4(n-1)} \left\{ \sigma^{1-n} \int\limits_{|\xi - y_i| < \sigma} [|D\varphi(\xi, E)| - D_n\varphi(\xi, E)] + \right.$$

$$\left. + \sigma^{1-n} \int\limits_{|\xi - y_i| < \sigma} D_n\varphi(\xi, E) - \varepsilon^{4(1-n)} \int\limits_{|y_i - \xi| < \varepsilon^4} D_n\varphi(\xi, E) \right\}.$$

Per iii) si ha

$$\sigma^{1-n} \int_{|y_i - \xi| < \sigma} [\,|D\varphi(\xi, E)| - D_n \varphi(\xi, E)] \leq \varepsilon \sigma^{1-n}, \tag{5.32}$$

mentre dalla (3.10) si ha

$$\sigma^{1-n} \int_{|y_i - \xi| < \sigma} D_n \varphi(\xi, E) - \varepsilon^{4(1-n)} \int_{|y_i - \xi| < \varepsilon^4} D_n \varphi(\xi, E) \leq \sqrt{n\omega_n} \sqrt{1 + (n-1) \lg \frac{\sigma}{\varepsilon^4}} \cdot \tag{5.33}$$

$$\cdot \left\{ \sigma^{1-n} \int_{|y_i - \xi| \leq \sigma} |D\varphi(\xi, E)| - \varepsilon^{4(1-n)} \int_{|y_i - \xi| \leq \varepsilon^4} |D\varphi(\xi, E)| \right\}^{\frac{1}{2}},$$

e quindi, per le (5.32), (5.33), (3.19) e la seguente conseguenza della (2.38)

$$\sigma^{1-n} \int_{|y_i - \xi| \leq \sigma} D_n \varphi(\xi, E) \leq \omega_{n-1}, \tag{5.34}$$

vale la

$$\sigma^{1-n} \int_{|\xi - y_i| < \sigma} D_n \varphi(\xi, E) - \varepsilon^{4(1-n)} \int_{|y_i - \xi| < \varepsilon^4} D_n \varphi(\xi, E) \leq \sqrt{n\omega_n} \sqrt{1 + (n-1) \lg \frac{\sigma}{\varepsilon^4}} \cdot \sqrt{\varepsilon \sigma^{1-n}}. \tag{5.35}$$

Dalle (5.31), (5.32) e (5.35) si ricava allora

$$\int_{|y_i - \xi| < \varepsilon^4} [\,|D\varphi(\xi, E)| - D_n \varphi(\xi, E)] \leq \tag{5.36}$$

$$\leq \varepsilon^{4(n-1)} \cdot \sqrt{\varepsilon \sigma^{1-n}} \left\{ \sqrt{\varepsilon \sigma^{1-n}} + \sqrt{n \omega_n} \sqrt{1 + (n-1) \lg \frac{\sigma}{\varepsilon^4}} \right\}.$$

Dalla (5.36) ricordando le (5.28), (5.29) e (5.30) si ha

$$\int_{|\xi| \leq 1 - \sigma} e^{-|x - \xi| \varepsilon^{-4}} [\,|D\varphi(\xi, E)| - D_n \varphi(\xi, E)] \leq \tag{5.37}$$

$$\leq \frac{3^{n-1} e^{4/3}}{\omega_{n-1}} \sqrt{\varepsilon \sigma^{1-n}} \left\{ \sqrt{\varepsilon \sigma^{1-n}} + \sqrt{n \omega_n} \sqrt{1 + (n-1) \lg \frac{\sigma}{\varepsilon^4}} \right\} \cdot$$

$$\cdot \int e^{-|x - \xi| \varepsilon^{-4}} |D\varphi(\xi, E_1)|.$$

D'altro canto dalle (3.12), (3.13) e (1.8) si ricava

$$\int_{|\xi|>1-\sigma} |D\varphi(\xi, E_1)| \leq n\,\omega_n, \tag{5.38}$$

e quindi, se $|x| \leq 1 - 2\sigma$, vale

$$\int_{|\xi|>1-\sigma} e^{-|x-\xi|\varepsilon^{-4}} |D\varphi(\xi, E_1)| \leq e^{-\sigma\varepsilon^{-4}} \cdot n\,\omega_n. \tag{5.39}$$

Per il Lemma 5.2 si ha che se $\varepsilon < \varepsilon(n)$, $\varepsilon^2 < f(x) < 1 - \varepsilon^2$ esiste $y \in \mathcal{F} E_1$ con $|y - x| < \varepsilon^2$, e quindi se in più vale $|x| \leq 1 - 2\sigma$, abbiamo, tenuto conto della (3.19),

$$\int e^{-|x-\xi|\varepsilon^{-4}} |D\varphi(\xi, E_1)| \geq \int_{|\xi-y|\leq\varepsilon^2} e^{-|x-\xi|\varepsilon^{-4}} |D\varphi(\xi, E)| \geq e^{-2\varepsilon} \cdot \omega_{n-1} \cdot \varepsilon^{2(n-1)}. \tag{5.40}$$

Dalla (5.24) si ha

$$\Big| D_n f(x) + \frac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n} \int_{|\xi|\leq 1-\sigma} e^{-|x-\xi|\varepsilon^{-4}} [\,|D\varphi(\xi, E)| - D_n\varphi(\xi, E)] - \tag{5.41}$$

$$- \frac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n} \int e^{-|x-\xi|\varepsilon^{-4}} |D\varphi(\xi, E_1)| \Big| \leq \frac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n} \cdot \int_{|\xi|>1-\sigma} e^{-|x-\xi|\varepsilon^{-4}} |D\varphi(\xi, E_1)|.$$

Dalla (5.41) si ricava allora, ponendo nelle (5.37) e (5.39) $\sigma = \varepsilon^{\frac{1}{2(n-1)}}$ e ricordando la (5.40), che esiste $\delta(n)$ e positivo tale che per $0 < \varepsilon < \delta(n)$, $|x| < 1 - 2\varepsilon^{\frac{1}{2(n-1)}}$, $\varepsilon^2 < f(x) < 1 - \varepsilon^2$ vale

$$D_n f(x) > 0. \tag{5.42}$$

Posto allora, per $0 < \varepsilon < \delta(n)$,

$$\lambda(\varepsilon) = \frac{n\,\omega_n}{\omega_{n-1}}\, e^{-\varepsilon^{-4}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{2(n-1)}} + 2\varepsilon^{-2}} \cdot \varepsilon^{-2(n-1)} + \tag{5.43}$$

$$+ \frac{3^{n-1}\, e^{4/3}}{\omega_{n-1}} \cdot \varepsilon^{1/4}\left(\varepsilon^{1/4} + \sqrt{1 + (n-1)\lg \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2(n-1)}}}{\varepsilon^4}}\right)$$

dalle (5.25), (5.37), (5.39), (5.40), (5.41) e (5.42) si ricava la (5.23).

c. v. d.

LEMMA 5.4. *Sia $A \subset R^n$ aperto, $f \in C^1(A)$ e valga*

$$Df(x) \neq 0 \quad per \quad x \in A. \tag{5.44}$$

Se si pone, per $\lambda \in R$, $E = \{x\,; f(x) \geq \lambda\}$, si ha

$$\mathcal{F}E \cap A = \{x\,; x \in A, f(x) = \lambda\}, \tag{5.45}$$

$$\mathcal{F}E \cap A = \mathcal{F}^* E \cap A, \tag{5.46}$$

$$\frac{D\varphi(x, E)}{|D\varphi(x, E)|} = \frac{Df(x)}{|Df(x)|}, \quad per \quad x \in \mathcal{F}E \cap A. \tag{5.47}$$

DIM. Ovviamente per $x \in \mathcal{F}E \cap A$ si ha $f(x) = \lambda$ e il viceversa è anche vero ed è conseguenza della (5.44).

Per la (5.46) si ha, se $\bar{x} \in \mathcal{F}E \cap A$, possiamo supporre, grazie alla (5.44) che $D_n f(\bar{x}) > 0$ e quindi, per il Teorema del Dini sulle funzioni implicite, esiste un aperto $\Omega \rightarrow \bar{x}$ e una funzione $g \in C^1$ (proiez. Ω) tali che

$$E \cap \Omega = \{x\,; x_n \geq g(x_1, \dots, x_{n-1}), (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \text{proiez. } \Omega\}. \tag{5.48}$$

Per quanto visto nella Oss. 5.7 di [1] si ha allora che $\bar{x} \in \mathcal{F}^* E \cap A$ e vale

$$\frac{D_i \varphi(\bar{x}, E)}{|D\varphi(\bar{x}, E)|} = \frac{D_i g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})}{\{1 + |Dg|^2\}^{1/2}}, \; i < n, \tag{5.49}$$

$$\frac{D_n \varphi(\bar{x}, E)}{|D\varphi(\bar{x}, E)|} = \frac{1}{\{1 + |Dg|^2\}^{1/2}}. \tag{5.50}$$

Dalle (5.49) e (5.50) e dalla espressione delle $D_i g$ mediante le $D_i f$ data dal Teorema del Dini si ha infine la (5.47).

c. v. d.

LEMMA 5.5. *Per ogni successione $\{E_h\}$ di insiemi di R^n, $n \geq 2$, verificante*

$$\varphi(E_h, 1) = 0\ (^4), \tag{5.51}$$

$$\int_{|x| \leq 1} |D\varphi(x, E_h)| - \left| \int_{|x| \leq 1} D\varphi(x, E_h) \right| \leq \varepsilon_h, \; \varepsilon_h > 0, \; \sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon_h < \infty, \tag{5.52}$$

---

(4) È sottinteso che per ogni h $\exists$ $A_h \supset \{x\,; x \in R^n, |x| \leq 1\}$ aperto per cui $\varphi(x, E_h) \in BV_{loc}(A_h)$.

esiste $N \subset (0, 1)$ *con* $mis\, N = 0$ *e per ogni* $t \in (0, 1) - N$ *una successione* $\{L_h\}$ *di insiemi di* R^n *per cui*

$$\lim_{h \to \infty} \varepsilon_h^{-1}\, \psi(L_h, t) = 0, \tag{5.53}$$

$$\lim_{h \to \infty} \varepsilon_h^{-1} \left\{ \int_{|x| \le t} |D\varphi(x, L_h)| - \int_{|x| \le t} |D\varphi(x, E_h)| \right\} = 0. \tag{5.54}$$

$$\lim_{h \to \infty} \varepsilon_h^{-1} \left| \int_{|x| \le t} D\varphi(x, L_h) - \int_{|x| \le t} D\varphi(x, E_h) \right| = 0, \tag{5.55}$$

e inoltre, per ogni h $\dfrac{D\varphi(x, L_h)}{|D\varphi(x, L_h)|}$ *è funzione continua su* $\mathcal{F}L_h \cap \{x ; x \in R^n, |x| < t\}$ *e*

$$\liminf_{h \to \infty} \left\{ \frac{D_n \varphi(x, L_h)}{|D\varphi(x, L_h)|} ; |x| < t,\ x \in \mathcal{F}L_h \right\} = 1. \tag{5.56}$$

DIM. Poniamo

$$f_h(x) = \frac{\varepsilon_h^{-4n}}{n!\, \omega_n} \int_{|\xi| \le 1} e^{-|x - \xi| \varepsilon_h^{-4}}\, \varphi(\xi, E_h)\, d\xi. \tag{5.57}$$

Avremo allora, per il Lemma 5.1,

$$\max \lim_{h \to \infty} \varepsilon_h^{-3} \int_{|x| \le 1} |\varphi(x, E_h) - f_h(x)|\, dx \le \frac{3}{2} n^2 \omega_n. \tag{5.58}$$

Quindi, essendo $\sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon_h < \infty$, si ha, per il Teorema di B. Levi sulla integrazione delle serie a termini positivi, che esiste $N_1 \subset (0, 1)$ con $mis\, N_1 = 0$ e tale che

$$\lim_{h \to \infty} \varepsilon_h^{-2} \int_{|x| = t} |\varphi(x, E_h) - f_h(x)|\, dH_{n-1} = 0, \quad \text{per } t \in (0, 1) - N_1. \tag{5.59}$$

Indichiamo ora con μ la misura $\sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon_h |D\varphi(x, E_h)|$. Avremo allora per la derivabilità delle funzioni monotone, che esiste $N_2 \subset (0, 1)$ con $mis\, N_2 = 0$ e tale che

$$\lim_{h \to \infty} \varepsilon_h^{-3} \int_{t < |x| < t + \varepsilon_h^3} d\mu < \infty, \quad \text{per } t \in (0, 1) - N_2, \tag{5.60}$$

e quindi anche

$$\max_{h \to \infty} \lim \varepsilon_h^{-2} \int_{t < |x| < t + \varepsilon_h^3} | D\varphi (x, E_h) | < \infty , \qquad \text{per} \quad t \in (0, 1) - N_2 . \tag{5.61}$$

Dalla (5.61) e dal Lemma 5.1 si ricava allora

$$\max_{h \to \infty} \lim \varepsilon_h^{-1} \left\{ \int_{|x| \leq t} | Df_h | - \int_{|x| \leq t} | D\varphi (x, E_h) | \right\} \leq 0, \quad \text{per } t \in (0, 1) - N_2 . \tag{5.62}$$

Sia $N = N_1 \cup N_2$. Fissato $t \in (0, 1) - N$, con $t < 1$, posto $S_h (\lambda) = \{x ; x \in R^n, f_h (x) \geq \lambda\}$, dalla (5.59) si ricava

$$\lim_{k \to \infty} \varepsilon_h^{-2} \int_0^1 d\lambda \int_{|x| = t} | \varphi (x, E_h) - \varphi (x, S_h (\lambda)) | \, dH_{n-1} = 0. \tag{5.63}$$

Dalla (5.63) e per il ricordato teorema di B. Levi si ha che esiste $M \subset (0, 1)$ con mis $M = 0$ e tale che

$$\lim_{h \to \infty} \varepsilon_h^{-1} \int_{|x| = t} | \varphi (x, E_h) - \varphi (x, S_h (\lambda)) | \, dH_{n-1} = 0, \qquad \text{per } \lambda \in (0, 1) - M. \tag{5.64}$$

D'altra parte per il Teor. 1.6 si ha

$$\int_0^1 d\lambda \int_{|x| \leq t} | D\varphi (x, S_h (\lambda)) | = \int_{|x| \leq t} | Df_h | , \tag{5.65}$$

e quindi esiste $\lambda_h \in (\varepsilon_h^2 , 1 - \varepsilon_h^2) - M$ per cui

$$(1 - 2 \varepsilon_h^2) \int_{|x| \leq t} | D\varphi (x, S_h (\lambda_h)) | \leq \int_{|x| \leq t} | Df_h) | . \tag{5.66}$$

Denotiamo con L_h l'insieme $S_h (\lambda_h)$, avremo allora dalle (5.62), (5.64) e (5.66) le

$$\lim_{h \to \infty} \varepsilon_h^{-1} \int_{|x| = t} | \varphi (x, E_h) - \varphi (x, L_h) | \, dH_{n-1} = 0, \tag{5.67}$$

$$\max_{h \to \infty} \lim \varepsilon_h^{-1} \left\{ \int_{|x| \leq t} | D\varphi (x, L_h) | - \int_{|x| \leq t} | D\varphi (x, E_h) | \right\} \leq 0. \tag{5.68}$$

Dalle (5.67) e (2.15) segue

$$\max_{h\to\infty} \lim \varepsilon_h^{-1} \left\{ \int_{|x|\leq t} |D\varphi(x, E_h)| - \int_{|x|\leq t} |D\varphi(x, L_h)| \right\} \leq 0, \tag{5.69}$$

e perciò tenuto conto della (5.66), si ha la (5.54).

Dalle (2.37) e (5.67) si ha la (5.55). Dalle (2.8), (5.67) e (5.54) si ha la (5.53). Finalmente la (5.56) è conseguenza di lemmi 5.3 e 5.4.

c. v. d.

LEMMA 5.6. *Sia* $\{E_h\}$ *una successione di insiemi verificanti le ipotesi del Lemma* 5.5, *allora per* $\alpha : 0 < \alpha < 1$ *vale*

$$\max_{h\to\infty} \lim \varepsilon_h^{-1} \left\{ \int_{|x|\leq \alpha} |D\varphi(x, E_h)| - \left| \int_{|x|\leq \alpha} D\varphi(x, E_h) \right| \right\} \leq \alpha^{n+1}. \tag{5.70}$$

DIM. Considerata la successione di insiemi $\{L_h\}$ costruita nella dimostrazione del Lemma 5.5, si ha che essa verifica le ipotesi del Teor. 4.4 con $\{\beta_h\}$ tale che

$$\lim_{h\to\infty} \beta_h \varepsilon_h^{-1} = 1. \tag{5.71}$$

Avremo allora, per $\alpha : 0 < \alpha < 1$, grazie al Teor. 4.4

$$\max_{h\to\infty} \lim \varepsilon_h^{-1} \left\{ \int_{|x|\leq \alpha t} |D\varphi(x, E_h)| - \left| \int_{|x|\leq \alpha t} D\varphi(x, E_h) \right| \right\} \leq \alpha^{n+1}. \tag{5.72}$$

Dalla (5.72) e dal fatto che t può scegliersi vicino a 1 quanto si vuole si ha l'asserto.

c. v. d.

TEOREMA 5.7, (De Giorgi). *Per ogni intero* $n \geq 2$ *e per ogni* α: $0 < \alpha < 1$, *esiste un numero reale* $\sigma(n, \alpha) > 0$ *tale che: se* $E \subset R^n$, $y \in R^n$, *e* $\varrho > 0$ *verificano*

$$\psi(E, \{x ; x \in R^n, |x - y| \leq \varrho\}) = 0 \;(^5), \tag{5.73}$$

$$\int_{|y-x|\leq\varrho} |D\varphi(x, E)| - \left| \int_{|x-y|\leq\varrho} D\varphi(x, E) \right| < \sigma(n, \alpha)\, \varrho^{n-1}, \tag{5.74}$$

(5) È sottointeso che $\exists\, A \supset \{x ; x \in R^n, |x - y| \leq \varrho\}$ aperto tale che $\varphi(x, E) \in BV_{loc}(A)$.

allora vale

$$\int\limits_{|x-y|\le\alpha\varrho}|D\varphi(x,E)|-\left|\int\limits_{|x-y|\le\alpha\varrho}D\varphi(x,E)\right|\le\alpha^n\left\{\int\limits_{|x-y|\le\varrho}|D\varphi(x,E)|-\left|\int\limits_{|x-y|\le\varrho}D\varphi(x,E)\right|\right\}. \tag{5.75}$$

DIM. Se per assurdo il Teor. 5.7 non valesse esisterebbe un intero $n\ge 2$, un reale $\alpha: 0<\alpha<1$, una successione di insiemi $\{E_h\}$ contenuti in R^n, una successione di punti $\{y_h)$ appartenenti a R^n ed una successione di numeri reali positivi $\{\varrho_h\}$, tali che

$$\psi(E_h, \{x; x\in R^n, |x-y_h|\le\varrho_h\})=0, \tag{5.76}$$

$$\int\limits_{|x-y_h|\le\varrho_h}|D\varphi(x,E_h)|-\left|\int\limits_{|x-y_h|\le\varrho_h}D\varphi(x,E_h)\right|=\varepsilon_h\,\varrho_h^{n-1},\quad \sum_{h=1}^{\infty}\varepsilon_h<\infty; \tag{5.77}$$

$$\int\limits_{|x-y_h|\le\alpha\varrho_h}|D\varphi(x,E_h)|-\left|\int\limits_{|x-y_h|\le\alpha\varrho_h}D\varphi(x,E_h)\right|>\alpha^n\,\varepsilon_h\,\varrho_h^{n-1}. \tag{5.78}$$

Se sull'insieme E_h si opera una traslazione di vettore $-y_h$, una rotazione che porti il vettore $\int\limits_{|x-y_h|\le\varrho_h}D\varphi(x,E_h)$ sull' asse x_n ed una omotetia di rapporto ϱ_h, si ottiene un insieme L_h per il quale valgono

$$\psi(L_h, 1)=0; \tag{5.79}$$

$$\int\limits_{|x|\le1}|D\varphi(x,L_h)|-\int\limits_{|x|\le1}D_n\varphi(x,L_h)=\varepsilon_h, \tag{5.80}$$

$$\int\limits_{|x|\le\alpha}|D\varphi(x,L_h)|-\left|\int\limits_{|x|\le\alpha}D\varphi(x,L_h)\right|>\alpha^n\,\varepsilon_h. \tag{5.81}$$

Avremo quindi l'assurdo: la successione $\{L_h\}$ verifica le ipotesi del Lemma 5.6 e non la tesi.

c. v. d.

6. Stabiliremo ora, come conseguenza del Teor. 5.7, alcuni risultati riguardanti la regolarità delle frontiere di misura localmente minima.

TEOREMA 6.1. *Se per* $E\subset R^n$, $n\ge2$, $y\in R^n$ *esistono* $a, \varrho, \alpha\in R$ *con* $0<\varrho<a$, $0<\alpha<1$ *e tali che*

$$\varphi(x,E)\in BV_{\mathrm{loc}}(\{x; |x-y|<a\}), \tag{6.1}$$

$$\psi(E, \{x ; | x - y | \leq \varrho\}) = 0, \tag{6.2}$$

$$\int_{|x-y|\leq\varrho} | D\varphi(x, E) | - \left| \int_{|x-y|\leq\varrho} D\varphi(x, E) \right| < \tag{6.3}$$

$$< \sigma(n, \alpha)\, \varrho^{n-1}, \quad \text{(per } \sigma(n, \alpha) \text{ v. Teor. 57).}$$

Allora per ogni $z : | z - y | \leq \varrho\,(\alpha - \alpha^{\frac{n}{n-1}})$ *vale*

$$\int_{|x-z|\leq \varrho\alpha^{\frac{n}{n-1}}} | D\varphi(x, E) | - \left| \int_{|x-z|\leq \varrho\alpha^{\frac{n}{n-1}}} D\varphi(x, E) \right| < \sigma(n, \alpha)\, \varrho^{n-1} \alpha^{n}. \tag{6.4}$$

DIM. Poichè è

$$\{x ; | x - z | \leq \varrho\alpha^{\frac{n}{n-1}}\} \subset \{x ; | x - y | \leq \alpha\varrho\}, \tag{6.5}$$

si avrà anche

$$\int_{|x-z|\leq \varrho\alpha^{\frac{n}{n-1}}} | D\varphi(x, E) | - \left| \int_{|x-z|\leq \varrho\alpha^{\frac{n}{n-1}}} D\varphi(x, E) \right| \leq \int_{|x-y|\leq\alpha\varrho} | D\varphi(x, E) | - \left| \int_{|x-y|\leq\alpha\varrho} D\varphi(x, E) \right| \tag{6.6}$$

Dalla (6.6), per la (6.3) e per la proprietà di $\sigma(n, \alpha)$ (v. Teor. 5.7), si ha la (6.4).

c. v. d.

TEOREMA 6.2. *Se alle ipotesi del Teor.* 6.1 *si aggiunge* $y \in \mathcal{F}E$ *si ha, per* $s, t : 0 < s < t \leq \varrho$,

$$\left| \frac{\int_{|x-y|\leq t} D\varphi(x, t)}{\int_{|x-y|\leq t} | D\varphi(x, E) |} - \frac{\int_{|x-y|\leq s} D\varphi(x, E)}{\int_{|x-y|\leq s} | D\varphi(x, E) |} \right| < \eta(n, \alpha) \sqrt{\frac{t}{\varrho}}, \tag{6.7}$$

dove $\eta(n, \alpha) = 2\, \dfrac{2 - \sqrt{\alpha}}{1 - \sqrt{\alpha}} \sqrt{\dfrac{\sigma(n, \alpha)}{\alpha^{n}\, \omega_{n-1}}}$.

DIM. Supponiamo per comodità $\varrho = 1$, $y = 0$. Cominciamo col valutare il primo membro della (6.7) nel caso in cui $t = \alpha^{h}$ con h intero non negativo, $s = \beta\alpha^h$ con $\beta : \alpha \leq \beta < 1$. In tale caso poniamo

$$(6.8)\qquad u_h = \frac{\int\limits_{|x| \leq \alpha^h} D\varphi(x, E)}{\int\limits_{|x| \leq \alpha^h} |D\varphi(x, E)|}, \qquad v_h = \frac{\int\limits_{|x| \leq \beta\alpha^h} D\varphi(x, E)}{\int\limits_{|x| \leq \beta\alpha^h} |D\varphi(x, E)|}.$$

Si ha allora

$$(6.9)\qquad |u_h - v_h| \leq \sqrt{2}\,\sqrt{1 - (u_h, v_h)},$$

$$(6.10)\qquad \Big[1 - (u_h, v_h)\Big] \int\limits_{|x| \leq \beta\alpha^h} |D\varphi(x, E)| =$$

$$= \int\limits_{|x| \leq \alpha^h \beta} |D\varphi(x, E)| - \int\limits_{|x| \leq \beta\alpha^h} \langle u_h, D\varphi(x, E)\rangle \leq \int\limits_{|x| \leq \alpha^h} |D\varphi(x, E)| - \int\limits_{|x| \leq \alpha^h} \langle u_h, D\varphi(x, E_y)\rangle$$

$$(6.11)\qquad \int\limits_{|x| \leq \alpha^h} |D\varphi(x, E)| - \int\limits_{|x| \leq \alpha^h} \langle u_h, D\varphi(x, E)\rangle =$$

$$\int\limits_{|x| \leq \alpha^h} |D\varphi(x, E)| - |u| \left| \int\limits_{|x| \leq \alpha^h} D\varphi(x, E) \right|.$$

Dalla applicazione ripetuta h volte del Teor. 5.7 si ha

$$(6.12)\qquad \int\limits_{|x| \leq \alpha^h} |D\varphi(x, E)| - \left| \int\limits_{|x| \leq \alpha^h} D\varphi(x, E) \right| < \alpha^{hn}\, \sigma(n, \alpha).$$

Dalla (6.12), (2.38) e (3.19) si ha allora

$$(6.13)\qquad \int\limits_{|x| \leq \alpha^h} |D\varphi(x, E)| - |u| \left| \int\limits_{|x| \leq \alpha^h} D\varphi(x, E) \right| < 2\alpha^{hn} \cdot \sigma(n, \alpha).$$

Dalle (6.10), (6.11) e (6.13) si ha

$$(6.14)\qquad \Big[1 - (u_h, v_h)\Big] \int\limits_{|x| \leq \beta\alpha^h} |D\varphi(x, E)| < 2\alpha^{hn} \cdot \sigma(n, \alpha),$$

da cui, tenuto ancora conto della (3.19) e del fatto che $\beta \geq \alpha$ si ha

$$1 - (u_h , v_h) < \frac{2\sigma(n, \alpha)}{\alpha^n \omega_{n-1}} \alpha^{h-1}. \tag{6.15}$$

Dalle (6.15) e (6.9) si ha allora

$$| u_h - v_h | < 2 \sqrt{\frac{\sigma(n, \alpha)}{\alpha^n \omega_{n+1}}} \cdot \sqrt{\alpha^{h+1}} . \tag{6.16}$$

Per t, s qualunque indichiamo con h, k gli interi per cui vale

$$\alpha^{h+1} < t \leq \alpha^h , \quad \alpha^{h+k} \leq s < \alpha^{h+k-1} . \tag{6.17}$$

Si avrà allora ovviamente

$$\left| \frac{\int\limits_{|x| \leq t} D\varphi(x, E)}{\int\limits_{|x| \leq t} |D\varphi(x, E)|} - \frac{\int\limits_{|x| \leq s} D\varphi(x, E)}{\int\limits_{|x| \leq s} |D\varphi(x, E)|} \right| \leq \left| \frac{\int\limits_{|x| \leq t} D\varphi(x, E)}{\int\limits_{|x| \leq t} |D\varphi(x, E)|} - u_h \right| \tag{6.18}$$

$$+ \sum_{j=h}^{h+t-2} | u_j - u_{j+1} | + \left| u_{h+k-1} - \frac{\int\limits_{|x| \leq s} D\varphi(x, E)}{\int\limits_{|x| \leq s} |D\varphi(x, E)|} \right| ,$$

e per la (6.16),

$$\left| \frac{\int\limits_{|x| \leq t} D\varphi(x, E)}{\int\limits_{|x| \leq t} |D\varphi(x, E)|} - \frac{\int\limits_{|x| \leq s} D\varphi(x, E)}{\int\limits_{|x| \leq s} |D\varphi(x, E)|} \right| < \tag{6.19}$$

$$< 2 \sqrt{\frac{\sigma(n, \alpha)}{\alpha^n \omega_{n-1}}} \left\{ \sqrt{\alpha^{h+1}} + \sum_{j=h}^{\infty} \sqrt{\alpha^{j+1}} \right\} = 2 \frac{2 - \sqrt{\alpha}}{1 - \sqrt{\alpha}} \sqrt{\frac{\sigma(n, \alpha)}{\alpha^n \omega_{n-1}}} \cdot \sqrt{\alpha^{h+1}} .$$

Dalla (6.19) e dalla prima parte delle (6.17) si ha l'asserto nel caso $\varrho = 1$, $y = 0$. Il caso ϱ, y qualunque potendosi ricondurre facilmente a questo il teorema può considerarsi completamente dimostrato.

c. v. d.

COROLLARIO 6.3. *Nelle ipotesi del Teor.* 6.2 *si ha che* $y \in \mathcal{F}^* E$ *e vale*

$$\left| \frac{D\varphi(y, E)}{|D\varphi(y, E)|} - \frac{\int\limits_{|y-x| \le t} D\varphi(x, E)}{\int\limits_{|y-x| \le t} |D\varphi(x, E)|} \right| < \eta(n, \alpha) \sqrt{\frac{t}{\varrho}} . \tag{6.20}$$

TEOREMA 6.4. *Nelle ipotesi del Teor.* 6.1 *si ha che* $\mathcal{F} E \cap \{z ; |z - y| < \varrho(\alpha - \alpha^{\frac{n}{n-1}})\}$ *è ipersuperficie* (6) *analitica.*

DIM. Per il Teorema 6.1 e il Corollario 6.3 si ha innanzitutto che $\mathcal{F} E \cap \{z ; |z - y| < \varrho(\alpha - \alpha^{\frac{n}{n-1}})\} = \mathcal{F}^* E \cap \{z ; |z - y| < \varrho(\alpha - \alpha^{\frac{n}{n-1}})\}$. Dal Cor. 6.4 si ha poi ancora, per $z : |z - y| < \varrho(\alpha - \alpha^{\frac{n}{n-1}})$ e $t \le \varrho\alpha^{\frac{n}{n-1}}$

$$\left| \frac{D\varphi(z, E)}{|D\varphi(z, E)|} - \frac{\int\limits_{|x-z| \le t} D\varphi(x, E)}{\int\limits_{|x-z| \le t} |D\varphi(x, E)|} \right| < \eta(n, \alpha) \sqrt{\frac{t}{\varrho\alpha^{n/n-1}}} . \tag{6.21}$$

Si avrà quindi anche

$$\left| \frac{D\varphi(z, E)}{|D\varphi(z, E)|} - \frac{\int_0^t ds \int\limits_{|x-z| \le s} D\varphi(x, E)}{\int_0^t ds \int\limits_{|x-z| \le s} |D\varphi(x, E)|} \right| < \eta(n, \alpha) \sqrt{\frac{t}{\varrho\alpha^{n/n-1}}} . \tag{6.22}$$

Essendo $\dfrac{\int_0^t ds \int\limits_{|x-z| \le s} D\varphi(x, E)}{\int_0^t ds \int\limits_{|x-z| \le s} |D\varphi(x, E)|}$ funzione continua di z, avremo, grazie alla (6.22) che $\dfrac{D\varphi(z, E)}{|D\varphi(z, E)|}$ è funzione continua su $\{z ; |z - y| < \varrho(\alpha - \alpha^{\frac{n}{n-1}})\}$.

---

(6) Per la definizione di ipersuperficie cfr. [1] p. 51.

Da ciò segue, v. Teor. 5.8 di [1], che $\mathcal{F}E \cap \{z\,;\,|z-y| < \varrho\,(\alpha - \overline{\alpha^{n-1}})\}$ è ipersuperficie di classe C^1. L'analiticità è poi conseguenza della regolarizzazione per l'equazione differenziale delle superfici di area minima e del collegamento fra le superfici cartesiane di area minima e le frontiere orientate di misura minima (cfr. [9]).

c. v. d.

Abbiamo allora il seguente risultato, riguardante la regolarizzazione delle frontiere orientate di misura minima e che comprende il Teor. VI, p. 56, di [4].

TEOREMA 6.5. *Per $A \subset R^n$ aperto, $n \geq 2$, $E \subset A$ sia : $\varphi(x, E) \in BV_{\text{loc}}(A)$, $\psi(E, G) = 0$ per ogni insieme chiuso e limitato $G \subset A$. Allora $\mathcal{F}^* E \cap A$ è ipersuperficie analitica e vale*

$$H_{n-1}\,[(\mathcal{F}E - \mathcal{F}^* E) \cap A] = 0. \tag{6.23}$$

DIM. Per la prima parte basta osservare che se $y \in \mathcal{F}^* E \cap A$, ricordando la (3.19), si ha

$$\lim_{\varrho \to 0} \left[\int\limits_{|x-y| \leq \varrho} |D\varphi(x, E)| - \left| \int\limits_{|x-y| \leq \varrho} D\varphi(x, E) \right| \right] \varrho^{1-n} = 0\,, \tag{6.24}$$

e quindi rimandare al Teor. 6.4.

Per quanto riguarda la (6.23) cominciamo coll'osservare che dalla (3.18) si ha

$$\int\limits_{(\mathcal{F}E - \mathcal{F}^* E) \cap A} |D\varphi(x, E)| = 0. \tag{6.25}$$

Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ si può trovare un aperto $\Omega_\varepsilon : (\mathcal{F}E - \mathcal{F}^* E) \cap A \subset \Omega_\varepsilon$ per cui

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} |D\varphi(x, E)| < \varepsilon\,. \tag{6.26}$$

Possiamo poi trovare una famiglia di sfere $\{x\,;\,|x - y_i| < \varrho_i\}$ tali che

$$y_i \in \mathcal{F}E, \quad [(\mathcal{F}E - \mathcal{F}^* E) \cap A] \subset \bigcup_i \{x\,;\,|x - y_i| < \varrho_i\} \subset \Omega_\varepsilon\,, \tag{6.27}$$

e tali che l'intersezione di $k(n) + 1$ sfere distinte risulti sempre vuota ($k(n)$ è una costante che dipende solo dalla dimensione dello spazio, v. Besicovitch [10]). Avremo allora

$$\sum_i \int\limits_{|x-y_i|<\varrho_i} |D\varphi(x, E)| \leq k(n) \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |D\varphi(x, E)| < k(n)\,\varepsilon, \tag{6.28}$$

e quindi anche, per la (3.19),

$$\sum_i \varrho_i^{n-1} < \frac{k(n)}{\omega_{n-1}}\,\varepsilon. \tag{6.29}$$

Dalle (6.27) e (6.29), per l'arbitrarietà di ε, segue la (6.23).

c. v. d.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. MIRANDA: *Distribuzioni aventi derivate misure ed insiemi di perimetro localmente finito.* Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa, 1964.

[2] M. MIRANDA: *Superfici cartesiane generalizzate ed insiemi di perimetro localmente finito sui prodotti cartesiani.* Ann. Sc. Norm. Sup., Pisa, 1964.

[3] S. BANACH: *Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie.* Fund. Math., 1925.

[4] E. DE GIORGI: *Frontiere orientate di misura minima.* Sem. Mat. Sc. Norm. Sup. Pisa, A. A. 1960-61.

[5] D. TRISCARI: *Sulle singolarità delle frontiere orientate di misura minima.* Ann. Sc. Norm. Sup., Pisa. 1963.

[6] E. DE GIORGI: *Nuovi teoremi relativi alle misure $(r-1)$-dimensionali in uno spazio ad r dimensioni.* Ric. di Mat., Napoli, 1955.

[7] A. S. BESICOVITCH: *A general form of the covering principle.* II. Proc. Cambridge Ph. Soc., 1946.

[8] J. FAVARD: *Cours d'analyse de l'Ecole Politechnique.*

[9] M. MIRANDA: *Analiticità delle superfici di area minima in R^4.* Rend. Acc. Naz. Lincei, 1965.

[10] A. S. BESICOVITCH: *On the definition and value of the area of a surface.* Quart. J. Math., 1945.