ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

G. DA PRATO
U. MOSCO

Regolarizzazione dei semigruppi distribuzioni analitici

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 19, nº 4 (1965), p. 563-576
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1965_3_19_4_563_0>

REGOLARIZZAZIONE DEI SEMIGRUPPI DISTRIBUZIONI ANALITICI

G. DA PRATO - U. MOSCO (*)

In questa nota studiamo alcune proprietà di un semigruppo distribuzione $\mathfrak{G}$ esponenziale e prolungabile analiticamente su un settore (SGDEA) (cfr. [1] Def. 3 - 0 - 1); più precisamente se A è il generatore infinitesimale di $\mathfrak{G}$ e $G(t)$ è il semigruppo di operatori associato a $\mathfrak{G}$ tramite la relazione $G(t) = \overline{\mathfrak{G}(\delta_t)}$ (cfr. [1] Def. 1 - 1 - 2) proviamo che $G(t)$ è un operatore continuo per ogni $t \geq 0$ e che inoltre l'applicazione $t \longrightarrow G(t)$ è una rappresentazione uniformemente continua e analitica di $\mathbb{R}_+ = \{t : t > 0\}$ nell'algebra di Banach $\mathcal{L}(X, X)$ degli operatori continui sullo spazio di Banach X dove $\mathfrak{G}$ è definito.

Osserviamo che l'applicazione $t \longrightarrow G(t)$ non è in generale fortemente continua su $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{t : t \geq 0\}$ cioè che la classe dei semigruppi di operatori associati ai SGDEA nel modo suddetto è più ampia di quella dei semigruppi di classe c_0 (cfr. [2] p. 321); nel § 3 diamo un esempio di SGDEA $\mathfrak{G}$ tale che $G(t)$ non è un semigruppo di classe c_0.

Lions [3] ha considerato i semigruppi distribuzioni regolari per lo studio di un problema misto nel senso di Cauchy - Hadamard; più precisamente se A è un operatore lineare chiuso con dominio $\mathcal{D}(A)$ denso nello spazio di Banach X generatore infinitesimale di un semigruppo distribuzione regolare allora l'equazione:

$$- Au + \frac{\partial u}{\partial t} = T \qquad u \in \mathcal{D}'_+ (\mathcal{D}(A))$$

dove T è dato in $\mathcal{D}'_+(X)$, ammette una soluzione unica.

Con questa nota studiamo il problema di Cauchy omogeneo associato ad un operatore lineare chiuso A con dominio denso in X generatore infi-

---

Pervenuto alla Redazione il 21 Maggio 1965 ed in forma definitiva il 20 Luglio 1965.

(*) Questo lavoro è stato eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca n. 9 del C. N. R. nell'anno 1964-65.

nitesimale di un SGDEA, provando che se $\mathfrak{G}$ è il SGDEA generato da A risulta:

$$- A G(t) x + \frac{dG(t)}{dt} x = 0$$

per ogni x del «range» $\mathcal{R}(\mathfrak{G})$ di $\mathfrak{G}$ (cfr. [1], Def. 1 - 1 - 1).

Ringraziamo il Prof. J. L. Lions per le utili discussioni avute sull'argomento di questo lavoro.

§ 1. Notazioni.

Le notazioni usate sono le seguenti:

a) $\mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{R}_+$, risp. $\overline{\mathbb{R}}_+$) è l'insieme dei numeri reali (risp. dei numeri reali positivi, risp. non negativi), $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi.

$\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ è lo spazio delle funzioni su $\mathbb{R}_+$ a valori complessi indefinitamente derivabili e a supporto compatto, con la topologia usuale (L. Schwartz [4] p. 64).

$\mathcal{E}'_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ è lo spazio delle distribuzioni su $\mathbb{R}$ aventi supporto contenuto in $\overline{\mathbb{R}}_+$, con la topologia usuale (L. Schwartz [4] p. 88).

b) X è uno spazio di Banach, $\mathcal{L}(X, X)$ l'algebra di Banach degli operatori lineari limitati su X con la norma usuale.

c) $\mathfrak{G}$ è un semigruppo distribuzione su X prolungabile analiticamente sul settore $S(\theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$S(\theta) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq 0, \ |\arg \lambda| < \theta\}$$

di tipo ξ_0 (cfr. [1] Def. 3 - 0 - 1).

Per ogni λ di $S(\theta)$ $\mathfrak{G}_\lambda$ è il semigruppo distribuzione esponenziale ottenuto dal prolungamento analitico di $\mathfrak{G}$ (cfr. [1], § 2). $\mathcal{R}(\mathfrak{G})$ è l'insieme

$$\mathcal{R}(\mathfrak{G}) = \{x : x = \sum_i \mathfrak{G}(\varphi_i) x_i, \ x_i \in X, \ \varphi_i \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}\}.$$

Se T è una distribuzione di $\mathcal{E}'_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ $\mathfrak{G}(T)$ è l'operatore definito da

$$\mathfrak{G}(T) x = \sum_i \mathfrak{G}(T * \varphi_i) x_i, \qquad x \in \mathcal{R}(\mathfrak{G})$$

se risulta

$$x = \sum_i \mathfrak{G}(\varphi_i) x_i, \qquad x_i \in X, \ \varphi_i \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+};$$

$\mathfrak{G}(T)$ è un operatore prechiuso (cfr. [1] p. 372) la cui minima estensione chiusa indichiamo con $\overline{\mathfrak{G}(T)}$. In particolare se $T = \delta_t$ è la misura di Dirac nel punto $t, t \geq 0$, porremo

$$G(t) = \overline{\mathfrak{G}(\delta_t)}$$

Inoltre poniamo:

$$S^0(\theta) = \left\{ \mu : \frac{\pi}{2} + \theta \leq |\arg u| \leq \pi \right\}$$

$$\Sigma(\xi_0, \theta) = \Sigma^{\pm}(\xi_0, \theta)$$

secondo che sia sign $\xi_0 = \pm 1$ con

$$\Sigma^{-}(\xi_0, \theta) = \xi_1 + S^0(\theta), \quad \xi_1 = \frac{\xi_0}{\cos\theta}$$

$$\Sigma^{+}(\xi_0, \theta) = \Sigma^{-}(\xi_0, \theta) \cap \{ \mu : \operatorname{Re} \mu \leq \xi_0 \}$$

$$\Omega_\varepsilon(\xi_0, \theta) = \Omega_\varepsilon^{\pm}(\xi_0, \theta)$$

secondo che sia sign $\xi_0 = \pm 1$ con

$$\Omega_\varepsilon^{\pm}(\xi_0, \theta) = \mathbb{C} - \Sigma_\varepsilon^{\pm}(\xi_0, \theta)$$

dove

$$\Sigma_\varepsilon^{+}(\xi_0, \theta) = \Sigma_\varepsilon^{-}(\xi_0, \theta) \cap \{ \mu : \operatorname{Re} \mu \leq \xi_0 + \varepsilon \}$$

$$\Sigma_\varepsilon^{-}(\xi_0, \theta) = \xi_1 + \varepsilon + S^0(\theta - \varepsilon).$$

Infine conviene ricordare esplicitamente il Teorema 3 · 2 · 1 in [1], che nel seguito sarà citato come Teorema 1 · 1.

TEOREMA 1 · 1: *Un operatore lineare chiuso A con dominio denso in X è il generatore infinitesimale di un SGDEA sul settore $S(\theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, di tipo ξ_0, se e soltanto se esiste un ξ_0 reale tale che*

(i) *lo spettro $\sigma(A)$ di A è contenuto nell'insieme $\Sigma(\xi_0, \theta)$;*

(ii) *il risolvente $R(\mu, A)$ di A, per ogni ε con $0 < \varepsilon < \theta$, verifica una maggiorazione del tipo*

$$\| R(\mu, A) \| \leq p_\varepsilon(|\mu|)$$

sull'insieme $\Omega_\varepsilon(\xi_0, \theta)$, con p_ε opportuno polinomio a coefficienti non negativi.

§ 2. Regolarizzazione di un SGDEA.

In questo paragrafo proviamo che se $\mathfrak{G}$ è un SGDEA, posto

$$G(t) = \overline{\mathfrak{G}(\delta_t)} \text{ per } t > 0$$

risulta $G(t) \in \mathcal{L}(X, X)$ e che inoltre l'applicazione $t \longrightarrow G(t)$ di $\mathbb{R}_+$ in $\mathcal{L}(X, X)$ è analitica e si ha

$$G^{(k)}(t)\,x - A^k\, G(t)\, x = 0 \qquad \forall\, x \in \mathcal{R}(\mathfrak{G}).$$

LEMMA 2 - 1: *Sia A un operatore lineare chiuso con dominio denso in X verificante le condizioni* (i) *e* (ii) *del Teorema* 1 - 1 *e sia $\mathfrak{G}$ il SGDEA* (*di tipo ξ_0*) *generato da A.*

Allora per ogni ε con $0 < \varepsilon < \theta$ risulta

$$\text{(2-1-1)} \qquad \| \mathfrak{G}(\varphi) \| \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{t}\, e^{\xi_\varepsilon t}\, q_\varepsilon\left(\frac{1}{t}\right) | \varphi(t) |\, dt$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$, con

$$\xi_\varepsilon = (\xi_1 + \varepsilon) + | \xi_1 + \varepsilon | \operatorname{sen}(\theta - \varepsilon)$$

$$q_\varepsilon(t) = \frac{n_\varepsilon\,!}{\pi \operatorname{sen}(\theta - \varepsilon)}\, p_\varepsilon\left(\frac{t}{\operatorname{sen}(\theta - \varepsilon)}\right)$$

dove n_ε è il grado di p_ε e $\xi_1 = \dfrac{\xi_0}{\cos\theta}$.

DIMOSTRAZIONE:

Si ha per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$:

$$\mathfrak{G}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} R(\mu, A) \int_0^{+\infty} e^{\mu t}\, \varphi(t)\, dt\, d\mu \quad \text{con } a \geq \xi_1' = \xi_1 + \varepsilon$$

l'integrale essendo inteso nella topologia uniforme di $\mathcal{L}(X, X)$.

Poniamo $\theta' = \dfrac{\pi}{2} - \theta + \varepsilon$ e consideriamo le semirette

$$r_\pm = \{ \mu : \mu \in \mathbb{C},\ \mu = -\tau\, e^{\mp i\theta'} + \xi_1',\ \tau \geq 0 \};$$

per ogni $b > 0$ le rette $\operatorname{Im} \mu = \pm b$ tagliano nella regione del piano μ compresa fra la retta $\operatorname{Re} \mu = a$ e le semirette $r_\pm$ un dominio D contenuto nel campo di olomorfia di $R(\mu, A)$.

Posto

$$f(\mu) = R(\mu, A) \int_0^{+\infty} e^{\mu t}\, \varphi(t)\, dt$$

si ha

$$0=\int_{FD} f(\mu)\,d\mu=\int_{a-ib}^{a+ib} f(\mu)\,d\mu+J_+(a,b)+J_-(a,b)+J'_+(a,b)+J'_-(a,b)$$

con

$$J_\pm(a,b)=\pm\, e^{\mp i\theta'}\int_0^{b/\operatorname{sen}\theta'} f(-\tau e^{\mp i\theta'}+\xi'_1)\,d\tau$$

$$J'_+(a,b)=\mp\int_{-b/\operatorname{tg}\theta'+\xi'_1}^{a} f(\tau\pm ib)\,d\tau.$$

Dimostriamo ora che risulta

$$\lim_{b\to+\infty} J'_\pm(a,b)=0 \text{ in } \mathcal{L}(X,X).$$

Si ha, ponendo per brevità $n=n_\varepsilon$,

$$J'_\pm(a,b)=\int_{-b/\operatorname{tg}\theta'+\xi'_1}^{a} R(\tau\pm ib,A)\int_0^{+\infty} e^{(\tau\pm ib)t}\,\varphi(t)\,dt\,d\tau=$$

$$=\mp(-1)^{n+2}\int_{-b/\operatorname{tg}\theta'+\xi'_1}^{a}\frac{R(\tau+ib,A)}{(\tau\pm ib)^{n+2}}\int_0^{+\infty} e^{(\tau\pm ib)t}\,\varphi^{(n+2)}(t)\,dt\,d\tau.$$

Ne segue

$$\| J'_\pm(a,b)\,\|\leq\int_{-b/\operatorname{tg}\theta'+\xi'_1}^{a}\frac{\| R(\tau\pm ib,A)\,\|}{|\,\tau\pm ib\,|^{n+2}}\int_0^{+\infty} e^{\tau t}\,|\,\varphi^{(n+2)}(t)\,|\,dt\,d\tau$$

e posto

$$M_\pm=\sup_{t\geq 0}\frac{p_\varepsilon(|\,\tau\pm ib\,|)}{|\,\tau\pm ib\,|^{n}}$$

risulta

$$\| J'_\pm(a,b)\,\|\leq M_\pm\int_{-b/\operatorname{tg}\theta'+\xi'_1}^{a}\int_0^{+\infty}\frac{e^{\tau t}\,|\,\varphi^{(n+2)}(t)\,|}{\tau^2+b^2}\,dt\,d\tau=$$

$$=M_\pm\int_0^{+\infty}|\,\varphi^{(n+2)}(t)\,|\int_{-b/\operatorname{tg}\theta'+\xi'_1}^{a}\frac{e^{\tau t}}{\tau^2+b^2}\,dt\,d\tau.$$

Dunque

$$\lim_{b \to +\infty} \| J'_{\pm}(a, b) \| = 0.$$

Si ha allora

$$\mathfrak{G}(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} [J_{+}(a, +\infty) + J_{-}(a, +\infty)]$$

dove

$$J_{\pm}(a, +\infty) = \pm e^{\mp i\theta'} \int_0^{+\infty} f(-\tau e^{\mp i\theta'} + \xi'_1)\, d\tau .$$

Si ha

$$\| J_{\pm}(a, +\infty) \| \leq \int_0^{+\infty} \| R(-\tau e^{\mp i\theta'} + \xi'_1, A) \| \int_0^{+\infty} e^{(\xi'_1 - \tau\cos\theta')t} \, | \varphi(t) | \, dt\, d\tau \leq$$

$$\leq \int_0^{+\infty} e^{\xi'_1 t} \, | \varphi(t) | \, F(t)\, dt$$

avendo posto

$$F(t) = \int_0^{+\infty} p_\varepsilon(\tau + | \xi'_1 |)\, e^{-\tau t\cos\theta'}\, d\tau .$$

Risulta ora

$$F(t) = \int_{|\xi'_1|}^{+\infty} p_\varepsilon(\tau)\, e^{-\tau t\cos\theta'}\, e^{|\xi'_1| t\cos\theta'}\, d\tau \leq n!\, \frac{e^{|\xi'_1| t\cos\theta'}}{t\cos\theta'}\, p_\varepsilon\left(\frac{1}{t\cos\theta'}\right).$$

Si ha dunque

$$\| \mathfrak{G}(\varphi) \| \leq \frac{n!}{\pi \operatorname{sen}(\theta - \varepsilon)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{(\xi'_1 + |\xi'_1| \operatorname{sen}(\theta - \varepsilon))t}}{t}\, p_\varepsilon\left(\frac{1}{t \operatorname{sen}(\theta - \varepsilon)}\right) | \varphi(t) |\, dt$$

cosicchè la tesi del Lemma è provata.

Possiamo ora dimostrare il seguente Teorema.

Teorema 2-1: *Sia $\mathfrak{G}$ un $\underline{SGDEA}$ sul settore $S(\theta)$. Posto per ogni $t \geq 0$ e per ogni ε con $0 < \varepsilon < \theta$ $G(t) = \mathfrak{G}(\delta_t)$ sussiste la maggiorazione:*

$$\| G(t) \| \leq \frac{e^{\xi_\varepsilon t}}{t}\, q_\varepsilon\left(\frac{1}{t}\right)$$

con

$$\xi_\varepsilon = \xi_1 + \varepsilon + |\xi_1 + \varepsilon| \operatorname{sen}(\theta - \varepsilon)$$

$$q_\varepsilon(\mu) = \frac{n_\varepsilon!}{\pi \operatorname{sen}(\theta - \varepsilon)} p_\varepsilon \left(\frac{\mu}{\operatorname{sen}(\theta - \varepsilon)} \right),$$

dove p_ε *è un polinomio di grado* n_ε *verificante la condizione* (ii), A *essendo il generatore infinitesimale di* $\mathfrak{G}$.

Inoltre l'applicazione $t \longrightarrow G(t)$ *di* $\mathbb{R}_+$ *in* $\mathcal{L}(X, X)$ *è prolungabile a un'applicazione analitica* $\lambda \longrightarrow G(\lambda)$ *di* $S(\theta)$ *in* $\mathcal{L}(X, X)$ *e risulta*

$$\frac{d^k G(\lambda)}{d\lambda^k} x - A^k G(\lambda) x = 0, \quad x \in \mathcal{R}(\mathfrak{G}).$$

DIMOSTRAZIONE:

In virtù del Lemma 2-1, fissato ε con $0 < \varepsilon < \theta$ risulta

$$\| \mathfrak{G}(\varphi) \| \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{\xi_\varepsilon t}}{t} q_\varepsilon \left(\frac{1}{t} \right) | \varphi(t) | \, dt$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$.

Sia $\{\varrho_\nu\}$ una successione regolarizzante, cioè tale che $\varrho_\nu \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ e $\varrho_\nu * \varphi \longrightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$, e sia $\eta > 0$; possiamo supporre che i supporti delle ϱ_ν siano contenuti nell'intervallo $]0, \eta]$. Si ha, per ogni $s > 0$

$$\| \mathfrak{G}(\delta_s * \varrho_\nu) \| \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{\xi_\varepsilon (s+t)}}{s+t} q_\varepsilon \left(\frac{1}{s+t} \right) | \varrho_\nu(t) | \, dt$$

e dunque

$$\| \mathfrak{G}(\delta_s * \varrho_\nu) \| \leq e^{\xi_\varepsilon (s+\eta)} \frac{1}{s} q_\varepsilon \left(\frac{1}{s} \right). \tag{2-1-2}$$

Se ora $x \in \mathcal{R}(\mathfrak{G})$ risulta

$$G(s) x = \lim_{\nu \to \infty} \mathfrak{G}(\delta_s * \varrho_\nu) x.$$

Ne segue, in virtù della (2-1-2)

$$\| G(s) x \| \leq e^{\xi_\varepsilon (s+\eta)} \frac{1}{s} q_\varepsilon \left(\frac{1}{s} \right) \| x \|$$

e quindi, per l'arbitrarietà di η e dato che $\mathcal{R}(\mathfrak{G})$ è denso in X, ne segue la continuità dell'operatore $G(s)$ e la maggiorazione

$$\| G(s) \| \leq \frac{e^{\xi_\varepsilon s}}{s} q_\varepsilon \left(\frac{1}{s} \right).$$

Per provare che $G(t)$ è prolungabile analiticamente su $S(\theta)$ introduciamo le seguenti funzioni

$$g_\nu(\lambda) = \mathfrak{G}_\lambda (\varrho_\nu * \delta_1);$$

$g_\nu(\lambda)$ è analitica su $S(\theta)$ per il Teorema 1 · 1.

Inoltre se $\lambda = s \in \mathbb{R}_+$ e $x \in \mathcal{R}(\mathfrak{G})$ si ha

$$\lim_{\nu \to \infty} g_\nu(s)\, x = \lim_{\nu \to \infty} \mathfrak{G}_s (\varrho_\nu * \delta_1) = G(s)\, x \tag{2-1-3}$$

e, procedendo come per la deduzione della (2-1-2), si trova

$$\| \mathfrak{G}_s (\varrho_\nu * \delta_1) \| \leq \frac{e^{\xi_\varepsilon s(1+\eta)}}{s} q_\varepsilon \left(\frac{1}{s} \right)$$

dato che i supporti delle ϱ_ν sono contenuti in $]0, s\eta]$; quindi la (2-1-3) sussiste per ogni $x \in X$.

Dimostriamo ora che quando λ varia in un compatto Q contenuto in $S(\theta)$ allora l'insieme $\{ \| g_\nu(\lambda) \| \}$ è equilimitato al variare di ν e di λ.

Da ciò seguirà per il Teorema di Vitali che, posto

$$G(\lambda) = \lim_{\nu \to \infty} g_\nu(x)$$

$G(\lambda)$ è un'applicazione analitica di $S(\theta)$ in $\mathcal{L}(X, X)$, la quale è evidentemente il prolungamento analitico di $G(t)$.

Sia $\lambda \in Q$. L'operatore lineare chiuso λA verifica le ipotesi del Teorema 1-1 con $\theta_\lambda = \theta - |\arg \lambda|$ al posto di θ, $\xi_{0,\lambda} = |\lambda| \xi_0$ al posto di ξ_0 e $p_{\varepsilon,\lambda}$ al posto di p_ε essendo

$$p_{\varepsilon,\lambda}(|\mu|) = \frac{1}{|\lambda|} p_\varepsilon \left(\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| \right).$$

Ricordando che λA è il generatore infinitesimale di $\mathfrak{G}_\lambda$ (cfr. [1] Prop. 2-3-2) e applicando a λA il Lemma 2-1 si ottiene per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$

$$\| \mathfrak{G}_\lambda(\varphi) \| \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda} e^{\xi_{\varepsilon,\lambda} t} q_{\varepsilon,\lambda} \left(\frac{1}{t} \right) |\varphi(t)|\, dt$$

con

$$\xi_{\varepsilon,\lambda} = (\xi_{1\,\lambda} + \varepsilon) + |\,\xi_{1,\lambda} + \varepsilon\,|\,\mathrm{sen}\,(\theta_\lambda - \varepsilon)$$

$$\xi_{1,\lambda} = \frac{\xi_{0,\lambda}}{\cos\theta_\lambda}$$

$$q_{\varepsilon\,\lambda}\,(t) = \frac{n_\varepsilon\,!}{\pi\,\mathrm{sen}\,(\theta_\lambda - \varepsilon)}\,p_{\varepsilon,\lambda}\left(\frac{t}{\mathrm{sen}\,(\theta_\lambda - \varepsilon)}\right),$$

dove n_ε è il grado di p_ε.

Ne segue

$$\|\,g_\nu\,(\lambda)\,\| = \|\,\mathfrak{G}_\lambda\,(\varrho_\nu * \delta_1)\,\| \leq$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{\xi_{\varepsilon,\lambda} t}}{t}\,q_{\varepsilon,\lambda}\left(\frac{1}{t}\right)|\,\varrho_\nu\,(t-1)\,|\,dt \leq e^{\xi_{\varepsilon,\lambda}(1+\eta)}\,q_{\varepsilon,\lambda}\,(1)$$

e dunque è provata la equilimitatezza di $\{\|\,g_\nu\,(\lambda)\,\|\}$ al variare di ν e di λ in Q.

Infine passando al limite per $\nu \longrightarrow \infty$ nella relazione

$$\frac{d^k\,\mathfrak{G}_\lambda\,(\delta_1 * \varrho_\nu)}{d\lambda^k}\,x = A^k\,\mathfrak{G}_\lambda\,(\delta_1 * \varrho_\nu)\,x$$

(cfr. [1] (2-2-1) e Prop. 2-3-2), si trova

$$\frac{d^k\,G\,(\lambda)\,x}{d\lambda^k} = A^k\,G\,(\lambda)\,x.$$

§ 3. **Un esempio di SGDEA.**

Indichiamo con E_2 lo spazio di Hilbert complesso di dimensione 2; fissata una base ortonormale in E_2, allora dato un operatore lineare T lo identificheremo con la sua espressione matriciale rispetto a tale base; posto

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

porremo anche $|\,T\,|^2 = |\,t_{11}\,|^2 + |\,t_{12}\,|^2 + |\,t_{21}\,|^2 + |\,t_{22}\,|^2$. Si mostra facilmente che risulta:

$$\frac{1}{2}\,|\,T\,|^2 \leq \|\,T\,\|^2 \leq |\,T\,|^2.$$

Con $E_2^{(k)}$ indicheremo una copia di E_2, $k = 0, 1, \ldots$ e con X la somma diretta degli $E_2^{(k)}$:

$$X = \bigoplus_{k=0}^{\infty} E_2^{(k)}.$$

Indicheremo inoltre con Y il sottospazio vettoriale di X costituito dalla totalità delle combinazioni lineari finite di elementi di $E_2^{(k)}$; evidentemente Y è denso in X.

Definiamo in $E_2^{(k)}$ l'operatore $\mathfrak{G}_k(\varphi)$:

$$\mathfrak{G}_k(\varphi) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\, e^{-kt} \begin{pmatrix} 1 & k^2 t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dt \qquad k = 0, 1, \ldots \quad \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+};$$

è evidente che $\mathfrak{G}_k(\varphi)$ è un SGDE su $E_2^{(k)}$ di tipo $-k$.

Vogliamo ora provare che posto:

$$\mathfrak{G}(\varphi) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{G}_k(\varphi) \qquad \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$$

$\mathfrak{G}(\varphi)$ è un SGDE di tipo 0 su X.

Se $\varphi \in \mathcal{S}^\varepsilon$(*), $\varepsilon > 0$, $\varphi(t) = e^{-\varepsilon t}\psi(t)$, $\psi \in \mathcal{S}$ risulta

$$|\mathfrak{G}_k(\varphi)|^2 = \left\{ 2 \left| \int_0^{+\infty} \psi(t)\, e^{-(k+\varepsilon)t}\, dt \right|^2 + \left| \int_0^{+\infty} \psi(t)\, e^{-(k+\varepsilon)t} k^2 t\, dt \right|^2 \right\}$$

$$\leq \left(\frac{2}{(k+\varepsilon)^2} + \frac{k^4}{(k+\varepsilon)^4} \right) \left(\sup_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+} |\psi(t)| \right)^2 \leq \left(\frac{2}{\varepsilon^2} + 1 \right) \left(\sup_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+} |e^{\varepsilon t} \varphi(t)| \right)^2;$$

ne segue:

$$\| \mathfrak{G}(\varphi) \| \leq (2/\varepsilon^2 + 1)^{1/2} \sup_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+} |e^{\varepsilon t} \varphi(t)|$$

cosicchè $\mathfrak{G}(\varphi)$ è continuo in X e l'applicazione $\varphi \to \mathfrak{G}(\varphi)$ di $\mathcal{S}^\varepsilon$ in $\mathcal{L}(X, X)$ è continua.

Inoltre la relazione

$$\mathfrak{G}(\varphi)\, \mathfrak{G}(\psi)\, x = \mathfrak{G}(\varphi * \psi)\, x \qquad \psi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}, \quad \varphi \in \mathcal{S}^\varepsilon, \quad x \in X$$

vale per ogni x di Y e quindi per ogni x di X.

(*) Per la definizione dello spazio $\mathcal{S}^\varepsilon$ vedi [1], pp. 370.

In modo analogo si prova la condizione di regolarità per $\mathfrak{G}$.

Dimostriamo infine che $\mathfrak{G}$ verifica le condizioni ausiliarie (cfr. [1], 1-1). Innanzi tutto, poichè $Y \subset \mathcal{R}(\mathfrak{G})$, ne segue che $\mathcal{R}(\mathfrak{G})$ è denso in X; inoltre se $x \in X$ è tale che $\mathfrak{G}(\varphi) x = 0 \ \forall \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$, detta allora x_k la proiezione di x su $E_2^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$ si ha

$$\mathfrak{G}_k(\varphi) x_k = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$$

e quindi $x_k = 0$, $k = 0, 1, \dots$ cosicchè risulta $x = 0$.

Abbiamo così provato che $\mathfrak{G}$ è un SGDE di tipo ≤ 0, ed è facile la verifica che $\mathfrak{G}$ è esattamente di tipo 0.

Detto A il generatore infinitesimale di $\mathfrak{G}$ e A_k quello di G_k, $k = 0, 1, \dots$ si ha

$$R(\mu, A) = \mathfrak{G}(e^{-\mu t}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{G}_k(e^{-\mu t}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} R(\mu, A_k) \qquad Re\,\mu > 0\,,$$

con

$$R(\mu, A_k) = \int_0^{+\infty} e^{-(\mu+k)t} \begin{pmatrix} 1 & k^2 t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dt = \frac{1}{(\mu + k)^2} \begin{pmatrix} \mu + k & k^2 \\ 0 & \mu + k \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Si ha:

$$|R(\mu, A_k)|^2 = \frac{2|\mu + k|^2 + k^4}{|\mu + k|^4}.$$

Se $\mu = s \in \mathbb{R}_+$ si ha

$$\| R(s, A_k) \|^2 \geq \frac{1}{2} |R(s, A_k)|^2 \geq \frac{1}{2} \frac{k^4}{(s + k)^4}$$

da cui $\| R(s, A) \|^2 \geq \frac{1}{2}$, cosicchè A non è il generatore infinitesimale di un semigruppo di classe c_0.

Sia ora ε un numero positivo minore di $\frac{\pi}{2}$; dimostriamo che A verifica le ipotesi del Teorema 1-1 con p_ε polinomio costante e con $\xi_0 = 0$. Si ha:

$$|R(\mu, A_k)|^2 \leq 2 \frac{(k^2 + k + |\mu|)^2}{|k + \mu|^4}$$

e quindi

$$\| R(\mu, A_k) \| \leq \sqrt{2} \frac{k^2 + k + |\mu|}{|k + \mu|^2} \leq \sqrt{2} \left(\sup_k \frac{k^2}{|k + \mu|^2} + \sup_k \frac{k}{|k + \mu|^2} + |\mu| \sup_k \frac{1}{|k + \mu|^2} \right).$$

Poniamo $\mu = \varrho e^{i\theta}$ e osserviamo che sul settore $\Omega_\varepsilon\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ si ha

$$0 \leq |\theta| \leq \pi - \varepsilon \qquad \text{e} \qquad \varrho \geq \varepsilon \operatorname{sen} \varepsilon .$$

Si trova

$$\sup_k \frac{k^2}{|k+\mu|^2} = \sup_k \frac{k^2}{k^2 + 2k\varrho\cos\theta + \varrho^2} \begin{cases} = 1 & \text{se } \cos\theta \geq 0 \\ = \dfrac{1}{1-\cos^2\theta} & \text{se } \cos\theta < 0, \end{cases}$$

cosicchè

$$\sup_k \frac{k^2}{|k+\mu|^2} \leq \frac{1}{1-\cos^2\varepsilon} \qquad \forall\, \mu \in \Omega_\varepsilon\left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Inoltre

$$\sup_k \frac{k}{|k+\mu|^2} = \frac{1}{2\varrho(1+\cos\theta)} \leq \frac{1}{2\varepsilon \operatorname{sen}\varepsilon\,(1-\cos\varepsilon)} \qquad \forall\, \mu \in \Omega_\varepsilon\left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Infine

$$\sup_k \frac{|\mu|}{|k+\mu|^2} \begin{cases} = \dfrac{1}{\varrho} & \text{se} \quad \cos\theta \geq 0 \\ = \dfrac{1}{\varrho(1-\cos^2\theta)} & \text{se} \quad \cos\theta < 0 , \end{cases}$$

cosicchè

$$\sup_k \frac{|\mu|}{|k+\mu|^2} \leq \frac{1}{\varepsilon \operatorname{sen}\varepsilon\,(1-\cos^2\varepsilon)} \qquad \forall\, \mu \in \Omega_\varepsilon\left(0, \frac{\pi}{2}\right);$$

ne segue

$$\| R(\mu, A) \| \leq C_\varepsilon \qquad \forall\, \mu \in \Omega_\varepsilon\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

essendo

$$C_\varepsilon = \sqrt{2}\left(\frac{1}{1-\cos^2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon\cos\varepsilon\,(1-\cos\varepsilon)} + \frac{1}{\varepsilon\operatorname{sen}\varepsilon\,(1-\cos^2\varepsilon)}\right).$$

Dunque $\mathfrak{G}$ è un SGDEA.

Vogliamo ora determinare $G(t) = \overline{\mathfrak{G}(\delta_t)}$; poniamo

$$G(t) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} G_k(t)$$

$$G_k(t) = e^{-kt}\begin{pmatrix} 1 & k^2 t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k = 0, 1, \dots ;$$

evidentemente $G(t)$ coincide con $\overline{\mathfrak{G}(\delta_t)}$ su Y; per provare che $G(t) = \overline{\mathfrak{G}(\delta_t)}$ basta mostrare allora che $G(t)$ è continuo per ogni $t \in \mathbb{R}_+$. Si ha infatti:

$$| G_k(t) |^2 = e^{-2kt}(2 + k^4 t^2) \leq \sup_k (2e^{-2kt} + k^4 t^2 e^{-2kt}) = \left(2 + \left(\frac{2}{e}\right)^4 \frac{1}{t^2}\right)$$

da cui

$$\| G(t) \| \leq \left[2 + \left(\frac{2}{e}\right)^4 \frac{1}{t^2}\right]^{1/2};$$

in modo analogo si prova

$$\| G(t) \| \geq \left(\frac{2}{e}\right)^2 \frac{1}{t}$$

cosicchè $G(t)$ non è di classe c_0.

Osserviamo infine che se la 3·1 si modifica al modo seguente

$$\mathfrak{G}_k(\varphi) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\, e^{-(k \operatorname{sen} \alpha + ik \cos \alpha)t} \begin{pmatrix} 1 & k^\beta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dt, \quad 0 \leq \alpha < \pi \quad \beta \geq 0 \quad k = 0, 1, \ldots$$

e se si pone

$$\mathfrak{G}(\varphi) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{G}_k(\varphi)$$

si trovano, ragionando in modo analogo, i seguenti risultati: qualunque sia α, se $\beta > 2$, $\mathfrak{G}$ è SGD, ma non è esponenziale nè regolare; se $1 < \beta \leq 2$, $\mathfrak{G}$ è un SGDE e $\| R(\mu, A) \| = o\left(\frac{1}{(\operatorname{Re} \mu)^{2-\beta}}\right)$; se $\beta \leq 1$, $\mathfrak{G}(t)$ è di classe c_0.

Inoltre se $0 < \alpha < \pi$ e $\beta \leq 2$ $\mathfrak{G}$ è un SGDEA su $S\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, mentre se $\alpha = 0$ lo spettro di A non è contenuto in alcun settore essendo costituito dai numeri $0, -i, \ldots -ki, \ldots$, quindi $\mathfrak{G}$ non è prolungabile analiticamente; da notare che in questo caso $\overline{\mathfrak{G}(\delta_t)}$ non è continuo se $\beta > 1$.

Pisa, Università

BIBLIOGRAFIA

[1] G. DA PRATO - U. MOSCO, « *Semigruppi distribuzioni analitici* », Annali Scuola Normale Superiore di Pisa, XIX (1965), 367-396.

[2] E. HILLE - R. S. PHILLIPS, « *Functional Analysis and semi-groups* », Colloq. Publ. Amer. Math. Soc., **31** (1957).

[3] J. L. LIONS, « *Les semi-groupes distributions* », Portugaliae Math. **19** (1960), 141-164.

[4] L. SCHWARTZ, « *Théorie des distributions* », Tome I, Hermann Paris (1957).