Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Antonio Chiffi

La formula di Green per curve rettificabili

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 19, nº 2 (1965), p. 207-232
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1965_3_19_2_207_0>

LA FORMULA DI GREEN PER CURVE RETTIFICABILI (*)

di ANTONIO CHIFFI (Pisa)

Sia $\mathcal{C}$ una curva del piano R^2, le cui coordinate di punto indichiamo con (x, y), continua, chiusa e rettificabile ed A l'unione delle componenti connesse e limitate dell'insieme dei punti del piano che non appartengono alla curva $\mathcal{C}$. Siano φ e ψ due funzioni definite nella chiusura $\bar{A}$ di A. Detto $O(x, y\,;\ \mathcal{C})$ l'indice topologico di un punto $(x, y) \in R^2$ rispetto a $\mathcal{C}$, si dimostrerà (teorema 3.3) l'uguaglianza:

$$(1) \qquad \int_{\mathcal{C}} \varphi\, dx + \psi\, dy = \iint_A (\psi'_x - \varphi'_y)\, O(x, y\,;\ \mathcal{C})\, dx\, dy$$

sotto le ipotesi che φ [rispettivamente: ψ] sia continua nell'insieme chiuso $\bar{A}$ se si prescinde da un insieme aperto su $\bar{A}$ la cui proiezione sull'asse delle x [rispettivamente: y] abbia misura tanto piccola quanto si vuole; φ e ψ siano limitate in $\bar{A}$ e siano tali che valga per esse la formula di Green per ogni rettangolo R, con $\bar{R} \subset A$ (¹); infine la funzione $(\psi'_x - \varphi'_y)\, O(x, y\,;\ \mathcal{C})$ sia sommabile in A.

Il teorema 3.3 generalizza un precedente risultato (²) dove la (1) veniva dimostrata sotto l'ulteriore ipotesi che la curva $\mathcal{C}$ fosse semplice.

Pervenuto alla Redazione il 26 Ott. 1964 e, in forma definitiva, il 12 Gen. 1965.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(¹) Ipotesi molto generali atte ad assicurare la validità della (1) per ogni rettangolo R, con $\bar{R} \subset A$, sono stabilite in F. CAFIERO, [3].

(²) Cfr. [6], teor. 2.11 a pag. 17 e [7], teor. X a pag. 204.

§ 1. — Studio degli insiemi determinati dalla curva $\mathcal{C}$.

DEFINIZIONI 1.1. — Detto I un insieme di R^2, indichiamo con $\mathcal{F}I$ la sua frontiera, con $\overline{I}$ la sua chiusura, con $-I$ il complemento di I rispetto a R^2.

DEFINIZIONI 1.2. — Sia $\mathcal{C}$ una curva di R^2 continua, chiusa e rettificabile, di equazioni parametriche:

$$(2) \qquad x = f(s) \qquad y = g(s) \qquad (0 \leq s \leq L)$$

date in funzione dell'ascissa curvilinea s.

Indichiamo con $\langle 0, L \rangle$ l'intervallo $[0, L]$ orientato, nel quale siano stati identificati topologicamente gli estremi. Indichiamo con $\mathcal{T} : \langle 0, L \rangle \longrightarrow R^2$ la trasformazione definita mediante le equazioni (2). Pertanto la curva $\mathcal{C}$ orientata potrà essere indicata col simbolo $\mathcal{T}(\langle 0, L \rangle)$. Due punti s_1 e s_2 di $\langle 0, L \rangle$ determinano due componenti connesse di $\langle 0, L \rangle$, che chiamiamo intervalli e indichiamo rispettivamente con (s_1, s_2) e (s_2, s_1). Indichiamo con $\mathcal{T}(s_1, s_2)$ e $\mathcal{T}(s_2, s_1)$ gli archi di $\mathcal{C}$ associati per la trasformazione $\mathcal{T}$ ai due intervalli (s_1, s_2) e (s_2, s_1) rispettivamente. Indicheremo con $[\mathcal{C}]$ l'insieme dei punti di R^2 che stanno su $\mathcal{C}$. L'indice topologico di un punto $P = (x, y)$ di R^2 rispetto a $\mathcal{C}$ sarà indicato con $O(P; \mathcal{C})$ ovvero $O(x, y; \mathcal{C})$.

Conveniamo che le componenti connesse di un insieme aperto, vuoto o no, costituiscano in ogni caso una successione, intendendo che gli insiemi di questa successione possono essere vuoti a partire da un certo indice.

DEFINIZIONI 1.3. — Indichiamo con N l'insieme dei numeri naturali; con N_0 l'insieme dei numeri interi ≥ 0; con N^- l'insieme dei numeri interi < 0; con $N^\pm$ l'insieme $N \cup N^-$.

Sia $i \in N$, definiamo l'insieme A_i come l'insieme dei punti $P \in R^2$ per i quali è: $O(P; \mathcal{C}) \geq i$. Sia $i \in N^-$; definiamo A_i come l'insieme dei punti $P \in R^2$ per i quali è: $O(P; \mathcal{C}) \leq i$. Sia $i \in N^\pm$; indichiamo con A'_i l'interno della chiusura di A_i.

Sia $i \in N^\pm$; indichiamo con $\{B_{ih}\}$ $(h \in N)$ la famiglia delle componenti connesse di A'_i.

Sia $i \in N^\pm$, $h \in N$; indichiamo con $\{D_{ihr}\}$ $(r \in N)$ la famiglia delle componenti connesse e limitate di $-\overline{B}_{ih}$; indichiamo con D_{ih0} la componente connessa e non limitata di $-\overline{B}_{ih}$. Indichiamo con E_{ih} l'interno dell'insieme:

$$B_{ih} \cup \left(\bigcup_{r \in N} D_{ihr} \right).$$

DEFINIZIONE 1.4. — Diremo *bordo orientato* di un insieme aperto, limitato e semplicemente connesso I ogni eventuale curva Γ continua, chiusa e rettificabile, con $[\Gamma] = \mathcal{F} I$ e tale che, detto $\mathcal{O}(P; \Gamma)$ l'indice topologico di un un punto P rispetto a Γ si abbia: $\mathcal{O}(P; \Gamma) = 1$ per $P \in I$ e $\mathcal{O}(P; \Gamma) = 0$ per P non appartenente a I.

Se l'insieme $\mathcal{F} I$ è vuoto, diremo pure che I ha bordo orientato e, più precisamente, che ha *bordo nullo.* Per uniformità di linguaggio conveniamo che il bordo nullo sia una curva continua, chiusa, rettificabile, semplice (cfr. teor. 1.5), di lunghezza nulla (teor. 2.1) e tale che l'integrale curvilineo esteso ad essa di qualsivoglia forma differenziale lineare sia nullo (cfr. lemmi 3.10 e 3.11).

I risultati del presente § 1 si possono riassumere nel seguente:

TEOREMA 1.5. — *Gli insiemi della famiglia a due indici* $\{E_{ih}\}$ $(i \in N^{\pm}$, $h \in N)$ *possiedono bordo orientato e tra i bordi orientati di* E_{ih} *vi è una curva semplice* $\mathcal{C}_{ih0}$. *Parimenti gli insiemi della famiglia a tre indici* $\{D_{ihr}\}$ $(i \in N^{\pm}$, $h \in N$, $r \in N)$ *possiedono bordo orientato e tra i bordi orientati dell'insieme* D_{ihr} *vi è una curva semplice* $\mathcal{C}_{ihr}$.

LEMMA 1.6. — *Ogni insieme* D_{ihr} $(i \in N^{\pm}, h \in N, r \in N)$ *è semplicemente connesso.*

Ciò segue dal fatto che l'insieme B_{ih} è connesso.

DEFINIZIONE 1.7. — Sia $i \in N^{\pm}$; $h \in N$; indichiamo con F_{ih} la componente connessa di E_{ih} che contiene B_{ih}. Risulterà (lemma 1.16): $E_{ih} = F_{ih}$.

La dimostrazione dei due lemmi seguenti si ottiene con considerazioni di carattere elementare:

LEMMA 1.8. — *Ogni insieme* F_{ih} $(i \in N^{\pm}, h \in N)$ *è semplicemente connesso.*

LEMMA 1.9. — *Sia* $i \in N^{\pm}$; $h \in N$. *La frontiera di* F_{ih} *è uguale alla frontiera di* D_{ih0}.

DEFINIZIONE 1.10. — Sia I un insieme di R^2. Indicheremo con $N_x(t, I)$ e $N_y(t, I)$ le funzioni reali definite nell'insieme R dei numeri reali associando ad ogni $t \in R$ il numero (finito, infinito o nullo) dei punti di intersezione di I con le rette di equazione $x = t$ e $y = t$ rispettivamente. In modo analogo, detta f una funzione reale definita in un insieme di numeri reali, indicheremo con $N(t, f)$ la funzione reale definita in R associando ad ogni $t \in R$ lo zero, il numero dei punti dell'insieme $\{x : f(x) = t\}$ oppure $+\infty$ a seconda che l'insieme $\{x : f(x) = t\}$ sia vuoto, finito o non finito.

LEMMA. 1.11. — *Esistono i bordi orientati* (cfr. def. 1.4) *degli insiemi delle famiglie* $\{F_{ih}\}$ $(i \in N^{\pm};\ h \in N)$ *e* $\{D_{ihr}\}$ $(i \in N^{\pm}\ h \in N,\ (r \in N_0)$.

Fissati gli indici i, h, dimostriamo dapprima che la funzione $N_x(t, \mathcal{F}F_{ih})$ è sommabile nell'insieme R dei numeri reali. Detta f la funzione che interviene nella definizione della curva $\mathcal{C}$ (def. 1.2), dalla relazione di inclusione:

$$\mathcal{F}F_{ih} \subset [\mathcal{C}]$$

segue per ogni $t \in R$ la disuguaglianza:

$$(3) \qquad N_x(t, \mathcal{F}F_{ih}) \leq N_x(t, [\mathcal{C}]) \leq N(t, f)\,.$$

La funzione $N(t, f)$ è sommabile [3]; pertanto per dimostrare che la funzione a primo membro della (3) è sommabile, basterà far vedere che essa è misurabile.

Ogni insieme $\mathcal{F}F_{ih}$ è limitato e si proietta pertanto sull'asse delle y in un insieme contenuto in un intervallo (a, b). Fissato l'intero $p > 0$, dividiamo l'intervallo (a, b) in 2^p intervalli uguali $\delta_{k,p}$ inferiormente semiaperti, eccetto il primo, che consideriamo chiuso. Intersechiamo l'insieme chiuso $\mathcal{F}F_{ih}$ con la striscia costituita dai punti (x, y) che si proiettano in $\delta_{k,p}$ e poi proiettiamo tale intersezione sull'asse delle x; otterremo un insieme misurabile del quale indichiamo con $\chi_{k,p}(x)$, la funzione caratteristica. Poniamo:

$$N_p(x) = \sum_{k=1}^{2^p} \chi_{k,p}(x)$$

La funzione $N_p(x)$ dà, per p e x fissati, il numero degli intervalli $\delta_{k,p}$ che godono della seguente proprietà: esiste almeno un $y \in \delta_{k,p}$ tale che il punto di coordinate (x, y) appartiene a $\mathcal{F}F_{ih}$. La successione di funzioni $\{N_p(x)\}$ è non decrescente e perciò esiste il

$$\lim_{p \to \infty} N_p(x) = N(x)\,,$$

che risulta funzione misurabile. Detto t un numero reale si ha subito:

$$N(t) \leq N_x(t, \mathcal{F}F_{ih})$$

Fissato t, sia m un intero non maggiore di $N_x(t, \mathcal{F}F_{ih})$. Esisteranno

(3) Cfr. S. BANACH, [2], a pag. 228.

almeno m numeri reali $y_1 < y_2 < \dots < y_m$, tali che il punto di coordinate (t, y_k) $(k = 1, \dots, m)$ appartenga a $\mathcal{F} F_{ih}$.

Sia d la più piccola delle differenze:

$$y_{k+1} - y_k \qquad\qquad (k = 1, 2, \dots m - 1);$$

per ogni numero naturale p per il quale è: $1/2^p < d$ si ha la disuguaglianza

$$N_p(t) \geq m, \text{ da cui segue: } N(t) \geq m$$

ed anche:

$$N(t) \geq N_x(t, \mathcal{F} F_{ih})$$

Segue l'uguaglianza: $N(t) = N_x(t, \mathcal{F} F_{ih})$ e quest'ultima risulta pertanto funzione misurabile. Analogamente si dimostra che la funzione $N_y(t, \mathcal{F} F_{ih})$ è sommabile.

Gli insiemi I aperti e semplicemente connessi, per i quali le funzioni $N_x(t, \mathcal{F} I)$ e $N_y(t, \mathcal{F} I)$ sono sommabili possiedono bordo orientato (4). Pertanto gli insiemi della famiglia $\{F_{ih}\}$ possiedono bordo orientato.

Analogamente si dimostra che ciascuno degli insiemi della famiglia $\{D_{ihr}\}$ possiede bordo orientato.

DEFINIZIONE 1.12. — Sia I un insieme limitato e γ un cerchio al quale la chiusura $\bar{I}$ di I sia interna. Si dice *frontiera esterna* (5) di I la frontiera dell'insieme E costituito da tutti i punti P tali che P può essere congiunto a qualche punto di γ da un arco di curva continua e semplice non contenente punti di $\bar{I}$.

Indichiamo con $\mathcal{F}_e I$ la frontiera esterna di I. Se I è limitato e non vuoto, anche $\mathcal{F}_e I$ è non vuoto.

LEMMA 1.13. — Sia $i \in N^{\pm}$, $h \in N$; *la frontiera di* F_{ih} *è frontiera esterna di* F_{ih}.

Per il lemma 1.9 si ha: $\mathcal{F} F_{ih} = \mathcal{F} D_{ih0}$ e l'insieme D_{ih0} è connesso e non limitato; pertanto ogni punto di $\mathcal{F} F_{ih}$, appartenendo pure a $\mathcal{F} D_{ih0}$, è, per la def. 1.12, un punto della frontiera esterna di F_{ih}.

LEMMA. 1.14. — *Se la frontiera di un insieme aperto, limitato e connesso I è costituita da tutti e soli i punti di una curva continua e rettificabile Γ, la frontiera esterna di I è costituita da tutti e soli i punti di una curva continua γ, chiusa, rettificabile e semplice.*

---

(4) Cfr. [6], 1.III a pag. 12.

(5) Cfr. R. L. MOORE [8], a pag. 256-257.

È noto (6) che se la frontiera di un insieme aperto, limitato e connesso I è costituita da tutti e soli i punti di una curva continua Γ, la frontiera esterna di I è costituita da tutti e soli i punti che stanno su una curva continua, chiusa e semplice γ.

Siano poi

$$x = f_1(s), \quad y = g_1(s), \quad 0 \leq s \leq L_1$$

le equazioni parametriche di Γ scritte in funzione dell'ascissa curvilinea e :

$$x = f_2(s), \quad y = g_2(s), \quad 0 \leq s \leq L_2$$

le equazioni parametriche di γ. Si hanno le ovvie disuguaglianze (cfr. def. 1.10):

$$N(t, f_2) = N(t, [\gamma]) \leq N_x(t, [\Gamma]) \leq N(t, f_1)$$

$$N(t, g_2) = N(t, [\gamma]) \leq N_y(t, [\Gamma]) \leq N(t, g_1).$$

Dalla sommabilità delle funzioni $N(t, f_1)$ e $N(t, g_1)$ e dal fatto che gli integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N(t, f_2)\, dt \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} N(t, g_2)\, dt$$

danno rispettivamente le variazioni totali delle funzioni f_2 e g_2 (7), segue che γ è rettificabile.

LEMMA 1.15. — *Tra i bordi orientati di ogni insieme della famiglia* $\{F_{ih}\}$ $(i \in N^{\pm},\ h \in N)$, *vi è una curva semplice* $\mathcal{C}_{ih0}$.

Per il lemma 1.11 la frontiera di F_{ih} è costituita da tutti e soli i punti di una curva continua e rettificabile. Dai lemmi 1.13 e 1.14 segue che la frontiera di F_{ih} è costituita da tutti e soli i punti di una curva continua, chiusa, rettificabile e semplice $\mathcal{C}_{ih0}$. Orientata la curva C_{ih0} in modo che nell'insieme F_{ih} dei punti ad essa interni l'indice topologico rispetto a $\mathcal{C}_{ih0}$ sia uguale a 1, la curva semplice $\mathcal{C}_{ih0}$ risulta bordo orientato di F_{ih}.

LEMMA. 1.16. *Ogni insieme della famiglia* $\{E_{ih}\}$ $(i \in N^{\pm},\ h \in N)$ *possiede bordo orientato e tra i bordi orientati di ciascuno di essi vi è una curva semplice* $\mathcal{C}_{ih0}$.

---

(6) Cfr. R. L. MOORE [8], teor. 4 a pag. 258.

(7) Loc. cit. (3).

Per il lemma 1.15 basterà dimostrare che è:

$$F_{ih} = E_{ih} .$$

L'insieme F_{ih} è, sempre per il lemma 1.15, l'insieme dei punti interni ad una curva continua chiusa e semplice $\mathcal{C}_{ih0}$, mentre l'insieme dei punti esterni a $\mathcal{C}_{ih0}$ è, per il lemma 1.9, l'insieme D_{ih0}. Pertanto è $E_{ih} \subset F_{ih}$, mentre, per definizione, è $F_{ih} \subset E_{ih}$. Segue l'uguaglianza:

$$F_{ih} = E_{ih} .$$

LEMMA 1.17. — *Sia γ una curva continua, chiusa, semplice e rettificabile. Esiste sull'asse delle x un insieme M di misura lineare nulla, tale che per ogni punto $P \in [\gamma]$ che non si proietta sull'asse delle x nell'insieme M, si può costruire un segmento ST parallelo all'asse delle y, contenente nel suo interno P e tale che uno dei due segmenti SP e PT appartiene, escluso P, all'insieme dei punti interni a γ e l'altro, escluso sempre P, all'insieme dei punti esterni a γ. Analoga proposizione vale scambiando x con y.*

Siano:

$$x = f_1(s), \qquad y = g_1(s), \qquad 0 \leq s \leq L_1 \tag{4}$$

le equazioni parametriche di γ assegnate in funzione dell'ascissa curvilinea s. Per quasi ogni numero reale t, le rette i cui punti hanno ascissa uguale a t incontrano la curva γ in un numero finito di punti [8] in ognuno dei quali la derivata $f_1'(s)$ esiste ed è diversa da zero [9]. Sia $P = (t, u)$ uno di tali punti. Esiste un segmento ST, parallelo all'asse delle y, contenente nel suo interno P e non contenente, estremi inclusi, altri punti di γ. Osserviamo pure che, detto $\bar{s}$ il punto dell'intervallo $(0, L)$ associato a P per la (4), essendo la derivata $f_1'(\bar{s})$ diversa da zero, la funzione $f_1(s)$ è crescente in $\bar{s}$ e si troveranno pertanto, in ogni intorno di P, punti di γ aventi ascissa minore di t e punti di γ aventi ascissa maggiore di t. In ogni intorno di P si troveranno di conseguenza punti interni ed esterni a γ aventi ascissa maggiore e minore di t. Se i segmenti SP e PT appartenessero entrambi, P escluso, all'insieme dei punti esterni [interni] a γ, i due punti S e T potrebbero essere congiunti [10] con una poligonale $\mathcal{P}$ semplice, a lati paralleli agli assi tutta esterna [interna] a γ e non avente altri punti in comune col segmento ST. La poligonale $\mathcal{P}$, assieme al segmento ST, formerebbe una

---

(8) Loc. cit. (3).

(9) Cfr. [5], prop. 1.7 a pag. 416.

(10) Cfr., ad es., [9], cap. V, 5.1.

poligonale $\mathcal{P}'$ costituita da punti non interni [non esterni] a γ. Detta δ la distanza tra P e $\mathcal{P}$, siano Q e R due punti appartenenti al cerchio di centro P e raggio minore di δ, entrambi interni [esterni] a γ e aventi l'ascissa rispettivamente maggiore e minore di t. I due punti Q e R possono essere congiunti con una poligonale a lati paralleli agli assi che incontra $\mathcal{P}'$ in un sol punto, interno al segmento ST. Segue (11) che dei due punti Q e R uno si trova all'interno e l'altro all'esterno di $\mathcal{P}'$ è perciò qualunque poligonale che congiunge Q e R dovrebbe incontrare $\mathcal{P}'$ che è formata da punti non interni a γ. Ciò è assurdo in quanto Q e R sono entrambi interni [esterni] a γ e l'insieme dei punti interni [esterni] a γ è un insieme connesso. Si conclude che dei due segmenti SP e PT uno appartiene all'insieme dei punti interni a γ e l'altro all'insieme dei punti esterni, escluso in entrambi i casi il punto P. Ripetendo il ragionamento scambiando l'ufficio degli assi si dimostra completamente il presente lemma.

LEMMA 1.18. — *La frontiera di ogni insieme della famiglia* $\{D_{ihr}\}$ $(i \in N^{\pm}$, $h \in N$, $r \in N)$ *è frontiera esterna dello stesso insieme.*

Per i lemmi 1.11 e 1.14 esistono due curve continue e rettificabili Γ e γ, delle quali la seconda è semplice, tali che:

$$\mathcal{F} D_{ihr} = [\Gamma], \qquad \mathcal{F}_e D_{ihr} = [\gamma].$$

Ogni insieme D_{ihr} è aperto e pertanto, se non è vuoto, esso e la sua frontiera esterna si proiettano sugli assi in insiemi di misura maggiore di zero. Per il lemma 1.17 esistono due punti distinti P e Q di $[\gamma]$ e due segmenti SP e TQ, paralleli a uno degli assi e interni a γ, eccetto i due estremi P e Q. I punti P e Q si possono scegliere in modo tale che i segmenti SP e TQ siano interni, eccetto P e Q, all'insieme D_{ihr}, in quanto la frontiera di detto insieme, essendo uguale a $[\Gamma]$, è incontrata in un numero finito di punti dalle rette parallele a ciascuno degli assi, eccetto quelle che appartengono ad un insieme che si proietta sull'altro asse in un insieme di misura nulla (12). Congiungiamo S con T mediante una poligonale semplice contenuta in D_{ihr}. Questa, assieme ai segmenti SP e TQ, forma una poligonale semplice $\mathcal{P}$. Detto I l'insieme dei punti interni a γ, la frontiera di ciascuna delle componenti connesse di $I - [\mathcal{P}]$ non contiene tutto l'insieme $[\gamma]$ (13). D'altra parte l'insieme connesso B_{ih} è contenuto in una delle com-

---

(11) Cfr., ad es., [9], cap. V, 7.1.

(12) Loc. cit. (3).

(13) Cfr. ad es. [9], cap. V, 10.8 a pag. 108.

ponenti connesse di $-[\gamma] \cup [\mathcal{P}]$ ed è:

$$\mathcal{F}B_{ih} \supset \mathcal{F}D_{ihr} \supset [\gamma].$$

Pertanto l'insieme B_{ih} non può appartenere ad una delle componenti connesse di $I - [\mathcal{P}]$. Allora B_{ih} è contenuto nell'insieme dei punti esterni a γ. Ogni punto P interno a γ è pertanto un punto di una stessa componente connessa di $-\overline{B}_{ih}$ e perciò P appartiene a D_{ihr}. Si conclude che è

$$\mathcal{F}D_{ihr} = [\gamma].$$

LEMMA. 1.19. — *Ogni insieme della famiglia* $\{D_{ihr}\}$ $(i \in N^{\pm}, h \in N, r \in N)$ *possiede bordo orientato e tra i bordi orientati di ciascuno di essi vi é una curva semplice.*

Per il lemma 1.11 la frontiera di ogni insieme D_{ihr} è costituita da tutti e soli i punti di una curva continua, chiusa e rettificabile. Per i lemmi 1.18 e 1.14 la frontiera di D_{ihr} è costituita da tutti e soli i punti di una curva continua, chiusa, rettificabile e semplice $\mathcal{C}_{ihr}$. Orientata la curva $\mathcal{C}_{ihr}$ in modo che nell'insieme D_{ihr} dei punti ad essa interni l'indice topologico rispetto a $\mathcal{C}_{ihr}$ sia uguale a uno, la curva semplice $\mathcal{C}_{ihr}$ risulta bordo orientato di D_{ihr}.

Dai lemmi 1.16 e 1.19 discende il teorema 1.5.

§ 2. — Studio dei bordi orientati.

I risultati del presente § 2 si possono riassumere nel seguente:

TEOREMA 2.1. — *Detta* L_{ihr} *la lunghezza della curva* $\mathcal{C}_{ihr}$ *della famiglia di curve* $\{\mathcal{C}_{ihr}\}$ $(i \in N^{\pm}, h \in N, r \in N_0)$ *(definita nel teorema 1.5), la serie*

$$\sum_{i,h,r} L_{ihr}$$

fatta per $i \in N^{\pm}$, $h \in N$, $r \in N_0$, *è convergente.*

LEMMA 2.2. — *Fissati gli indici* $i \in N^{\pm}$, $h \in N$, *due diverse curve della famiglia ad un solo indice*

$$(1) \qquad \{\mathcal{C}_{ihr}\} \qquad (r \in N_0)$$

possono avere al più un punto in comune.

Consideriamo due curve $\mathcal{C}_{ihr}$ e $\mathcal{C}_{ihs}$ $(r \neq s)$ della famiglia (1). Supponiamo, per assurdo, che esistano due punti distinti P e Q della intersezione

$[\mathcal{C}_{ihr}] \cap [\mathcal{C}_{ihs}]$. È possibile (14) costruire due curve continue e semplici, di estremi P e Q, delle quali una sia interna, eccetto gli estremi, a D_{ihr} e l'altra a D_{ihs}. Esse formano una curva continua e semplice γ, tutta costituita da punti non interni a B_{ih}. Se l'insieme connesso B_{ih} fosse contenuto nell'insieme dei punti esterni a γ, gli insiemi D_{ihr} e D_{ihs} farebbero parte, contro l'ipotesi, della stessa componente connessa di $-\overline{B}_{ih}$, perchè un punto dell'uno potrebbe essere congiunto (15) a un punto dell'altro mediante una curva formata da punti interni a γ e perciò esterni a B_{ih}. Analogo ragionamento si può fare se si suppone che l'insieme connesso B_{ih} sia tutto contenuto nell'insieme dei punti interni a γ. Si conclude che le curve $\mathcal{C}_{ihr}$ e $\mathcal{C}_{ihs}$, con $r \neq s$, non possono avere più di un punto in comune.

LEMMA 2.3. — *Fissati gli indici $i \in N^{\pm}$, $h \in N$, $r \in N_0$, esiste sull'asse delle x un insieme M_1 di misura lineare nulla, tale che per ogni punto P appartenente a $[\mathcal{C}_{ihr}]$ e che non si proietta sull'asse delle x nell'insieme M_1, si può costruire un segmento ST, parallelo all'asse delle y e avente P come punto interno, tale che uno dei due segmenti SP e TP appartenga, escluso l'estremo P, all'insieme B_{ih}. Analoga proposizione vale scambiando x con y.*

Per il lemma 2.2 ogni punto di $\bigcup_{r \in N_0} [\mathcal{C}_{ihr}]$, che non si proietta sull'asse delle x in un insieme di misura nulla, appartiene ad un solo degli insiemi della successione $\{[\mathcal{C}_{ihr}]\}$ $(r \in N_0)$. Fissato l'indice $r \in N_0$, per ogni punto $P \in [\mathcal{C}_{ihr}]$ che non si proietta sull'asse delle x in un insieme di misura lineare nulla è possibile trovare, per il lemma 1.17, un segmento ST parallelo all'asse y, contenente nel suo interno P e tale che uno dei due segmenti SP e PT appartenga, escluso l'estremo P, all'insieme dei punti interni a $\mathcal{C}_{ihr}$ e l'altro appartenga all'insieme dei punti esterni a $\mathcal{C}_{ihr}$. Per la rettificabilità della curva C e per la relazione di inclusione:

$$\bigcup_{r \in N_0} [\mathcal{C}_{ihr}] \subset [C] \tag{2}$$

le rette di equazione $x = t$, per quasi ogni $t \in R$, incontrano l'insieme a primo membro della (2) in un numero finito di punti (16). Pertanto è possibile, sempre per ogni punto $P \in [\mathcal{C}_{ihr}]$ che non si proietta sull'asse delle x in un insieme di misura nulla, costruire il segmento ST in modo che esso non intersechi nessuno degli insiemi $[\mathcal{C}_{ihs}]$, con $s \in N_0$, $s \neq r$.

---

(14) Cfr., ad es., [9], cap. VII, 3.2, corollario, a pag. 162: *un qualunque punto P di una curva continua, chiusa e semplice γ è estremo di un arco di una curva continua e semplice, interna, eccetto P, alla curva γ. Ogni punto P di γ è anche estremo di un arco di curva continua e semplice, esterna, eccetto P, alla curva γ.*

(15) Loc. cit. (14).

(16) Loc. cit. (3).

Se è $r \neq 0$, l'insieme D_{ihr} è l'insieme dei punti interni alla curva chiusa e semplice $\mathcal{C}_{ihr}$ (teorema 1.5), mentre D_{ih0} è l'insieme dei punti esterni a $\mathcal{C}_{ih0}$. Da ciò segue che, fissato $r \in N_0$, uno dei segmenti SP e TP è interno, P escluso, all'insieme D_{ihr} e l'altro è esterno, P escluso, ad ogni insieme D_{ihs}, con $s \in N_0$, $s \neq r$. D'altra parte, fissati gli indici i e h, gli insiemi $\overline{B}_{ih}$ e gli insiemi della famiglia D_{ihr} $(r \in N_0)$ esauriscono tutto il piano e si ha:

$$\mathcal{F}B_{ih} = \bigcup_{r \in N_0} \mathcal{F}D_{ihr}.$$

Pertanto uno dei segmenti SP e TP è interno, P escluso, all'insieme D_{ihr} e l'altro all'insieme B_{ih}.

LEMMA 2.4. — *Fissato l'indice $i \in N^{\pm}$ esiste sull'asse x un insieme M_2 di misura lineare nulla, tale che ogni punto $P \in R^2$ che non si proietta in M_2 appartiene ad al più due diverse curve della famiglia a due indici* $\{\mathcal{C}_{ihr}\}$ $(h \in N,\ r \in N_0)$. *Analoga proposizione vale scambiando x con y.*

Per il lemma 2.3 esiste sull'asse x un insieme M_2 di misura lineare nulla tale che ogni punto P appartenente ad una qualunque delle curve della famiglia a due indici $(\mathcal{C}_{ihr})$ $(h \in N,\ r \in N_0)$ e che non si proietta sull'asse delle x nell'insieme M_2 è estremo di un segmento SP parallelo all'asse delle y e interno, eccetto P, a B_{ih}. Supponiamo, per assurdo, che un tale punto P appartenga a tre curve della famiglia: $\mathcal{C}_{ihr}$, $\mathcal{C}_{ims}$, $\mathcal{C}_{ink}$. Per il lemma 2.2 possiamo supporre che gli indici, h, m, n non siano uguali. Il punto P dovrebbe essere allora estremo di tre segmenti paralleli all'asse y e interni, escluso P, agli insiemi B_{ih}, B_{im} e B_{in} rispettivamente. Ciò è assurdo perchè tali insiemi sono disgiunti.

LEMMA 2.5. — *Sia ST un segmento che incontra la curva continua, chiusa e rettificabile $\mathcal{C}$ in un sol punto P interno al segmento. Se il punto P è semplice per la curva $\mathcal{C}$, si ha:*

$$|O(S;\ \mathcal{C}) - O(T;\ \mathcal{C})| \leq 1.$$

Consideriamo per la curva $\mathcal{C}$ due riferimenti in coordinate polari, di polo S e T rispettivamente e semiasse polare orientato come il segmento ST. Indichiamo con $\theta(s)$ una determinazione della anomalia del punto della curva $\mathcal{C}$ associato al punto s (ascissa curvilinea) dell'intervallo $[0, L]$, relativa al polo S e indichiamo con $\omega(s)$ l'analoga funzione relativa al polo T.

La trasformazione $\mathcal{T}$ (Cfr. def. 1.2) è continua e pertanto, fissato un intorno circolare I di P si può determinare un intervallo (s_1, s_2) di $\langle 0, L \rangle$

contenente $\mathcal{T}^{-1}(P)$ e tale che, posto

$$\gamma = \mathcal{T}(s_1, s_2), \; \Gamma = \mathcal{T}(s_2, s_1),$$

si abbia:

$$[\gamma] \subset I.$$

Se il raggio r di I è sufficientemente piccolo, si ha, ricordando che $2\pi\mathcal{O}(A;\gamma)$ è la variazione dell'argomento del punto variabile su γ rispetto al polo S:

$$(3) \qquad |\mathcal{O}(S, \gamma)| \leq (2\pi)^{-1}\, 2 \text{ arc sen} \frac{r}{SP} < \frac{1}{8}$$

e analogamente:

$$(4) \qquad |\mathcal{O}(T;\, \gamma)| < \frac{1}{8}.$$

L'insieme ottenuto da R^2, privato della semiretta di origine S e orientata come il segmento ST, è connesso (17); pertanto il punto $\mathcal{T}(s_1)$ può essere congiunto a $\mathcal{T}(s_2)$ mediante una poligonale $\mathcal{P}$ che non incontra la semiretta in questione. La curva Γ e la poligonale $\mathcal{P}$, opportunamente orientata, formano una curva chiusa, che indichiamo con $\Gamma + \mathcal{P}$, che non incontra il segmento ST. Si ha allora (18):

$$(5) \qquad \mathcal{O}(S;\, \Gamma + \mathcal{P}) = \mathcal{O}(T;\, \Gamma + \mathcal{P}).$$

Indichiamo con $\bar{\theta}(t)$ e con $\bar{\omega}(t)$, $(0 \leq t \leq L_1)$ le analoghe delle funzioni $\theta(s)$ e $\omega(s)$ relative alla curva $\mathcal{P}$. L'incremento della funzione $\bar{\theta}(t)$ nell'intervallo $(0, L_1)$ è inferiore a 2π, in quanto la funzione continua $\bar{\theta}(t)$ non può assumere nessuno dei valori $2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Si ha allora:

$$(6) \qquad |\mathcal{O}(S, \mathcal{P})| = (2\pi)^{-1}\, |\bar{\theta}(L_1) - \bar{\theta}(0)| < 1.$$

Poichè gli estremi di $\mathcal{P}$ appartengono al cerchio I di centro P e raggio r, esisterà un intero m tale che si abbia:

$$(7) \qquad |\bar{\omega}(0) - (2m+1)\pi| < \text{arc sen} \frac{r}{SP} < 2\pi \cdot \frac{1}{16}.$$

La funzione continua $\bar{\omega}(t)$ non può assumere nessuno dei valori $2k\pi$

---

(17) Cfr., ad es., [9]; cap. V, 9.1 a pag. 104.

(18) Cfr., ad es., [4]; cap. III, 8.4 a pag. 87.

($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), pertanto, per la (7), l'incremento della funzione $\bar{\omega}(t)$ nell'intervallo $(0, L_1)$ è inferiore a $9\pi/8$.

Si ha:

$$|\mathcal{O}(T;\ \mathcal{P})| = (2\pi)^{-1}\,|\bar{\omega}(L_1) - \bar{\omega}(0)| < 9/16. \tag{8}$$

Dalle (5), (6) e (8) segue:

$$|\mathcal{O}(S;\ \Gamma) - \mathcal{O}(T;\ \Gamma)| = |\mathcal{O}(S;\ \mathcal{P}) - \mathcal{O}(T;\ \mathcal{P})| < 25/16. \tag{9}$$

Dalle (3), (4) e (9) si deduce:

$$\begin{aligned}|\mathcal{O}(S;\ \mathcal{C}) - \mathcal{O}(T;\ \mathcal{C})| \leq |\mathcal{O}(S, \gamma)| + |\mathcal{O}(T, \gamma)| &+ \\ + |\mathcal{O}(S;\ \Gamma) - \mathcal{O}(T;\ \Gamma)| &< 2.\end{aligned} \tag{10}$$

D'altra parte il primo membro della (10) è un intero e il presente lemma risulta così dimostrato.

LEMMA 2.6. — *Sia ST un segmento che incontra la curva $\mathcal{C}$ in un solo punto P interno al segmento. Se il punto P è multiplo per la curva $\mathcal{C}$ di molteplicità m, si ha:*

$$|\mathcal{O}(S;\ \mathcal{C}) - \mathcal{O}(T;\ \mathcal{C})| \leq m.$$

Sia $m < \infty$. L'insieme $\mathcal{T}^{-1}(P)$, immagine inversa del punto P secondo la trasformazione $\mathcal{T}$ (cfr. def. 1.2), è formato, per definizione di punto multiplo, da m punti che dividono l'intervallo $\langle 0, L \rangle$ in m intervalli. Identificando in questi gli estremi e restringendo a ciascuno di essi la definizione di $\mathcal{T}$, la curva $\mathcal{C}$ resta divisa in m curve chiuse γ_k, per ciascuna delle quali il punto P è semplice. Si ha, per il lemma 2.5:

$$|\mathcal{O}(S, \mathcal{C}) - \mathcal{O}(T, \mathcal{C})| = \left| \sum_{k=1}^{m} \mathcal{O}(S, \gamma_k) - \sum_{k=1}^{m} \mathcal{O}(T, \gamma_k) \right| \leq m.$$

LEMMA 2.7. *Fissiamo i due indici i e j, $i \in N^{\pm}$, $j \in N^{\pm}$. Ad eccezione di un insieme di punti P che si proietta sugli assi in due insiemi di misura nulla, se un punto P appartiene ai due insiemi:*

$$\bigcup_{h \in N} \bigcup_{r \in N_1} [\mathcal{C}_{ihr}] \quad e \quad \bigcup_{m \in N} \bigcup_{s \in N_0} [\mathcal{C}_{jms}]$$

esso è per la curva $\mathcal{C}$ un punto di molteplicità non minore di $|i - j| + 1$ se i e j hanno lo stesso segno e di molteplicità non minore di $|i - j|$ se i e j hanno segno opposto.

Supponiamo che P appartenga alle due curve $\mathcal{C}_{ihr}$ e $\mathcal{C}_{jms}$ e che sia $0 < i < j$. Per il lemma 2.3 esiste sull'asse delle x un insieme di misura nulla tale che se il punto $P \in [\mathcal{C}_{jhs}]$ non si proietta sull'asse delle x in tale insieme, esso è estremo di un segmento SP interno, ad eccezione di P, a B_{jh} e parallelo all'asse delle y.

A meno di un insieme che si proietta sull'asse delle x in un insieme di misura nulla, la retta del segmento SP incontra $[\mathcal{C}]$ in un numero finito di punti ([19]). Pertanto il segmento SP si può costruire, sempre a meno di un insieme di punti P che si proietta sull'asse delle x in un insieme di misura nulla, in modo che incontri $\mathcal{C}$ solo in P, cioè in modo che SP sia interno, ad eccezione di P, ad una componente connessa di $-[\mathcal{C}]$, nella quale $O(x, y; \mathcal{C})$ assume un valore costante non minore di j. Poichè P appartiene anche alla curva chiusa e semplice C_{ihr}, per il lemma 1.17 esiste sull'asse delle x un insieme di misura nulla tale che se $P \in [\mathcal{C}_{ihr}]$ non si proietta sull'asse delle x in tale insieme, si può costruire un segmento PT parallelo all'asse delle y, interno, ad eccezione di P, all'insieme D_{ihr}. Rammentiamo che l'insieme D_{ihr} $(h \in N,\ r \in N_0)$ è esterno alla chiusura dei punti Q in cui è $O(Q; \mathcal{C}) \geq i$. Anche questa volta il segmento PT si può costruire, sempre a meno di un insieme di punti P che si proietta sull'asse delle x in un insieme di misura nulla, in modo che sia interno, eccetto P, a una componente connessa di $-[\mathcal{C}]$, nella quale $O(x, y; \mathcal{C})$ assume un valore costante non maggiore di $i - 1$.

Pertanto, ad eccezione di un insieme di punti P che si proietta sull'asse delle x in un insieme di misura nulla, si può costruire un segmento ST, al quale P è interno, che incontra $\mathcal{C}$ solo nel punto P ed è $O(S; \mathcal{C}) \geq j$, $O(T; \mathcal{C}) \leq i - 1$. Per il lemma 2.6 si conclude che P è almeno $(j - i + 1)$-uplo per $\mathcal{C}$.

Se è: $j < i < 0$, si può ripetere lo stesso ragionamento cambiando il senso delle disuguaglianze.

Se i e j hanno segno opposto, se ad esempio è $i < 0 < j$ ripetendo la prima parte del ragionamento si potrà costruire, sempre a meno di un insieme di punti P che si proietta sull'asse delle x in un insieme di misura nulla, un segmento SP parallelo all'asse delle y in modo che esso incontri $[\mathcal{C}]$ solo in P e si abbia: $O(S; \mathcal{C}) \geq j$ e un segmento PT, parallelo all'asse delle y, in modo che esso incontri $[\mathcal{C}]$ solo in P e si abbia: $O(T; \mathcal{C}) \leq i$. Essendo $i < 0 < j$, il punto P risulta interno al segmento ST e, per lemma 2.6, si conclude che il punto è $(j - i)$-uplo per $\mathcal{C}$.

Scambiando infine x con y si dimostra completamente il presente lemma.

([19]) Loc. cit. ([3]).

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.1

Siano :

$$x = f_{ihr}(s) \qquad y = g_{ihr}(s), \qquad (0 \leq s \leq L_{ihr})$$

le equazioni parametriche della curva $\mathcal{C}_{ihr}$ della famiglia $\{\mathcal{C}_{ihr}\}$ ($i \in N^{\pm}$, $h \in N$, $r \in N_0$) scritte in funzione dell'ascissa curvilinea e siano

$$x = f(s) \qquad y = g(s), \qquad 0 \leq s \leq L$$

le equazioni parametriche di $\mathcal{C}$.

Fissato l'indice $i \in N^{\pm}$ un punto avente ascissa t può appartenere a più curve della famiglia a due indici $\{\mathcal{C}_{ihr}\}$ ($h \in N$, $r \in N_0$) però per la prop. 2.4 non può appartenere a più di due curve della famiglia per quasi ogni $t \in R$.

Ciascun punto delle curve $\mathcal{C}_{ihr}$ è anche un punto di $[\mathcal{C}]$ e si ha pertanto la disuguaglianza :

$$\sum_{h \in N} \sum_{r \in N_0} N_x(t, [\mathcal{C}_{ihr}]) \leq 2N_x(t, [\mathcal{C}]).$$

Poichè le curve $\mathcal{C}_{ihr}$ sono semplici si ha l'uguaglianza : $N_x(t, [\mathcal{C}_{ihr}]) = N(t, f_{ihr})$, mentre è : $N_x(t, [\mathcal{C}]) \leq N(t, f)$; la precedente disuguaglianza diventa :

$$\sum_{h \in N} \sum_{r \in N_0} N(t, f_{ihr}) \leq 2N(t, f). \tag{11}$$

Se un punto avente ascissa t appartiene a più curve $\mathcal{C}_{ihr}$ per un certo numero m di diversi valori dell'indice i, esso è, per il lemma 2.7, per quasi ogni t, multiplo per $\mathcal{C}$ di molteplicità almeno pari a m. Per tale ragione dalla (11) segue subito :

$$\sum_{i, h, r} N(t, f_{ihr}) \leq 2N(t, f) \tag{12}$$

dove la somma è fatta per $i \in N^{+}$, $h \in N$, $r \in N_0$.

Scambiando poi l'ufficio degli assi si ha la disuguaglianza :

$$\sum_{i, h, r} N(t, g_{ihr}) \leq 2N(t, g) \tag{13}$$

dove la somma è fatta per $i \in N^{\pm}$, $h \in N$, $r \in N_0$.

Dalle (12) e (13) si deduce :

$$\sum_{i, h, r} \int_{-\infty}^{+\infty} \{N(t, f_{ihr}) + N(t, g_{ihr})\}\, dt \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \{N(t, f) + N(t, g)\}\, dt. \tag{14}$$

Infine, per le disuguaglianze [20]

$$L_{ihr} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \{N(t, f_{ihr}) + N(t, g_{ihr})\}\, dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{N(t, f) + N(t, g)\} \leq 2L$$

e per la (14) si ottiene:

$$\sum_{i, h, r} L_{ihr} \leq 4L$$

e il teorema 2.1 risulta dimostrato.

§ 3. — La formula di Green.

DEFINIZIONE 3.1. — Indichiamo con μ^1 [rispettivamente: μ^2] la funzione reale definita nella famiglia degli insiemi limitati di R^2 associando ad ogni insieme limitato I il numero $\mu^1(I)$ [rispettivamente: $\mu^2(I)$] uguale alla misura esterna della proiezione di I sull'asse delle x [rispettivamente: sull'asse delle y]. Una funzione φ reale, definita in un insieme chiuso e limitato H si dirà μ^1-quasi continua [rispettivamente: μ^2 quasi continua] in H quando ad ogni numero $\varepsilon > 0$ si può associare un insieme I, aperto su H, tale che sia $\mu^1(I) < \varepsilon$ [rispettivamente: $\mu^2(I) < \varepsilon$] e la restrizione di φ a $H - I$ sia continua.

DEFINIZIONE 3.2. — Sia Γ una curva continua e rettificabile, di equazioni parametriche:

$$x = f_1(s) \qquad y = g_1(s) \qquad\qquad 0 \leq s \leq L_1$$

assegnate in funzione dell'ascissa curvilinea. Sia φ una funzione μ^1-quasi continua e ψ una funzione μ^2-quasi continua in un insieme chiuso e limitato H ed entrambe limitate. La funzione $\Phi(s)$ così definita per $s \in [0, L_1]$:

$$\Phi(s) = \varphi[f_1(s), g_1(s)]\, f_1'(s) + \psi[f_1(s), g_1(s)]\, g_1'(s)$$

(20) Loc. cit. (3).

è quasi continua e limitata in $(0, L_1)$ (21) e pertanto ha senso l'integrale:

$$\int_{\Gamma} \varphi\, dx + \psi\, dy = \int_0^{L_1} \Phi(s)\, ds.$$

I risultati del presente § 3 si possono riassumere nel seguente:

TEOREMA 3.3. — *Sia $\mathcal{C}$ una curva continua, chiusa e rettificabile e sia A l'unione delle componenti connesse e limitate dell'insieme dei punti del piano che non appartengono a $[\mathcal{C}]$. Sia φ una funzione μ^1-quasi continua e ψ una funzione μ^2-quasi continua nella chiusura $\bar{A}$ di A, ed entrambe limitate; esse soddisfino inoltre ad ipotesi atte ad assicurare la validità della formula di Green:*

$$\int_{\mathcal{F}R} \varphi\, dx + \psi\, dy = \iint_R (\psi'_x - \varphi'_y)\, dx\, dy \tag{1}$$

per ogni rettangolo R, con $\bar{R} \subset A$. La funzione: $(\psi'_x - \varphi'_y)\, O(x, y\,; \mathcal{C})$ sia sommabile in A. In tali ipotesi ha luogo l'uguaglianza:

$$\int_{\mathcal{C}} \varphi\, dx + \psi\, dy = \iint_A (\psi'_x - \varphi'_y)\, O(x, y\,; \mathcal{C})\, dx\, dy. \tag{2}$$

Ci sarà utile il seguente teorema, del quale il teorema 3.3 è una generalizzazione (22):

TEOREMA 3.4. — *Sia I un insieme aperto del piano (x, y) non vuoto, limitato, semplicemente connesso e avente bordo orientato; sia φ una funzione μ^1-quasi continua e ψ una funzione μ^2-quasi continua nella chiusura di I ed entrambe limitate; esse soddisfino inoltre ad ipotesi atte ad assicurare la validità della formula di Green* (1) *per ogni rettangolo R con $\bar{R} \subset I$; la funzione $(\psi'_x - \varphi'_y)$ sia sommabile in I. In tali ipotesi per ogni curva Γ che sia bordo orientato di I ha luogo l'uguaglianza:*

$$\int_{\Gamma} \varphi\, dx + \psi\, dy = \iint_I (\psi'_x - \varphi'_y)\, dx\, dy.$$

(21) Cfr. [1], a pag. 211 e [7], prop. III a pag. 199.

(22) Cfr. [6], teoremi 2.I, 1.III e 2.II alle pag. 14, 12 e 17; [7], teoremi VIII, IX e X alle pag. 203 e 204.

In particolare se I è l'insieme dei punti interni ad una curva continua, chiusa, rettificabile e semplice γ, si ha, se γ è orientata in modo tale che sia $\mathcal{O}(x, y\,;\,\mathcal{C}) = 1$ per $(x, y) \in I$:

$$\int_\gamma \varphi\, dx + \psi\, dy = \iint_I (\psi'_x - \varphi'_y)\, dx\, dy.$$

DEFINIZIONE 3.5. — Si dice che la successione di funzioni $\{\varphi_n\}$ *converge μ^k-quasi uniformemente* ($k = 1, 2$) in un insieme piano chiuso e limitato H alla funzione φ, se, fissato un numero $\varepsilon > 0$, si può trovare un insieme I aperto su H, tale che sia: $\mu^k(I) < \varepsilon$ (cfr. def. 3.1) e tale che la successione $\{\varphi_n\}$ converga uniformemente a φ in $H - I$.

LEMMA 3.6. — *Sia $\{\varphi_n\}$ $(n \in N)$ una successione di funzioni μ^k-quasi continue ($k = 1, 2$) ed equilimitate in un insieme piano chiuso e limitato H, convergente μ^k-quasi uniformemente alla funzione μ^k quasi continua φ e sia Γ una curva continua, rettificabile e contenuta in H. Ha luogo, per $k = 1$, l'uguaglianza:*

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Gamma \varphi_n\, dx = \int_\Gamma \varphi\, dx \tag{3}$$

e, per $k = 2$, l'altra:

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Gamma \varphi_n\, dy = \int_\Gamma \varphi\, dy. \tag{4}$$

Sarà sufficiente dimostrare il lemma per $k = 1$.

Sia M un numero tale che, per ogni n, si abbia: $|\varphi_n| \leq M$ e siano

$$x = f(s) \quad y = g(s) \qquad\qquad 0 \leq s \leq L$$

le equazioni parametriche della curva Γ. Per la sommabilità della funzione $N(t, f)$ (cfr. def. 1.10), fissato $\sigma > 0$ ad arbitrio, si potrà determinare il numero positivo ε in guisa tale che risulti:

$$\int_{I_1} N(t, f)\, dt < \frac{\sigma}{4M} \tag{5}$$

per ogni insieme lineare aperto I_1 di misura minore di ε.

Dalla (5) segue [23] l'altra disuguaglianza:

$$V_f[f^{-1}(I_1)] < \frac{\sigma}{4M} \tag{6}$$

dove con $f^{-1}(I_1)$ si è indicata l'immagine reciproca di I_1 secondo f e con $V_f[f^{-1}(I_1)]$ la variazione totale di f sull'insieme $f^{-1}(I_1)$. Determinato così ε, si potrà trovare, per la convergenza μ^1-quasi uniforme della successione $\{\varphi_n\}$, un insieme I, aperto su H, tale che sia: $\mu^1(I) < \varepsilon$ e un numero $\bar{n}$, tale che, per ogni $n > \bar{n}$ si abbia:

$$|\varphi_n - \varphi| < \frac{\sigma}{2L} \tag{7}$$

per tutti i punti di H non appartenenti a I.

Detto I_1 un insieme lineare aperto di misura minore di ε e contenente la proiezione di I sull'asse delle x, si ha che la (7) vale per ogni $n > \bar{n}$ e per tutti i punti di H non aventi l'ascissa in I_1. Tenuto conto della (7) si hanno le relazioni:

$$\left| \int_\Gamma \varphi\, dx - \int_\Gamma \varphi_n\, dx \right| \leq \int_\Gamma |\varphi - \varphi_n|\, dx =$$

$$= \int_{(0,L)-f^{-1}(I_1)} |\varphi - \varphi_n|\, |f'(s)|\, ds + \int_{f^{-1}(I_1)} |\varphi - \varphi_n|\, |f'(s)|\, ds$$

$$\leq \frac{\sigma}{2L} \int_0^L |f'(s)|\, ds + 2M \int_{f^{-1}(I_1)} |f'(s)|\, ds \leq \frac{\sigma}{2} + 2M\, V_f[f^{-1}(I_1)].$$

Infine, per la (6) si ha:

$$\left| \int_\Gamma \varphi\, dx - \int_\Gamma \varphi_n\, dx \right| < \sigma$$

e la (3) risulta dimostrata.

LEMMA 3.7. — *Sia $\{\Gamma_n\}$ $(n \in N)$ una successione di curve continue, rettificabili e contenute in un insieme piano chiuso e limitato H e sia $\mathcal{G}_k$ $(k = 1, 2)$*

---

[23] Cfr. [5], proposizione 1,6 a pag. 415.

una famiglia di funzioni μ^k-quasi continue ed equilimitate in H. Detta inoltre L_n la lunghezza della curva Γ_n, la serie ΣL_n sia convergente. In tali ipotesi la convergenza della serie :

$$\sum_n \left| \int_{\Gamma_n} \varphi\, dx + \psi\, dy \right|$$

è uniforme rispetto alle funzioni $\varphi \in \mathcal{G}_1$, $\psi \in \mathcal{G}_2$.

Detto M un numero che limita superiormente i moduli delle funzioni di $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$, l'asserto segue subito dalla disuguaglianza :

$$\left| \int_{\Gamma_n} \varphi\, dx + \psi\, dy \right| \leq 2ML_n.$$

LEMMA 3.8. — *Sia $\{\Gamma_n\}$ ($n \in N$) una successione di curve continue, rettificabili e contenute in un insieme piano, chiuso e limitato H e, detta L_n la lunghezza della curva Γ_n, la serie ΣL_n sia convergente. Se vale la relazione :*

$$\sum_n \int_{\Gamma_n} \varphi\, dx + \psi\, dy = \int_{\Gamma} \varphi\, dx + \psi\, dy \tag{8}$$

per ogni coppia di polinomi φ e ψ, allora vale la stessa relazione (8) *per ogni coppia di funzioni φ e ψ, con φ μ^1-quasi continua e ψ μ^2-quasi continua in H.*

Siano dapprima φ e ψ continue in H. In tal caso esse si possono approssimare uniformemente con due successioni di polinomi $\{\varphi_m\}$ e $\{\psi_m\}$ e per ipotesi si ha, per ogni $m \in N$:

$$\sum_n \int_{\Gamma_n} \varphi_m\, dx + \psi_m\, dy = \int_{\Gamma} \varphi_m\, dx + \psi_m\, dy. \tag{9}$$

Per il lemma 3.7 la convergenza della serie che compare a primo membro della (9) è uniforme rispetto a $m \in N$. Passando al limite nella (9) per $m \rightarrow \infty$ si ottiene la (8), con φ e ψ continue in H.

Se infine φ è μ^1-quasi continua in H e ψ μ^2-quasi continua in H ed entrambe limitate, consideriamo una successione $\{\varepsilon_m\}$ di numeri positivi convergente a zero. Costruiamo due successioni non crescenti di insiemi $\{I_m^1\}$ e $\{I_m^2\}$ aperti su H, con $\mu^1(I_m^1) < \varepsilon_m$ e $\mu^2(I_m^2) < \varepsilon_m$ e tali che le restrizioni di φ a $H - I_m^1$ e di ψ a $H - I_m^2$ siano continue. Siano $\{\varphi_m\}$ e $\{\psi_m\}$ due successioni di funzioni continue su tutto il piano (x, y), tali che φ_m

coincida con φ su $H - I_m^1$ e ψ_m coincida con ψ su $H - I_m^2$ e tali che, se i moduli di φ e ψ sono maggiorati dalla costante M, anche i moduli di φ_m e ψ_m siano maggiorati dalla stessa costante. La successione $\{\varphi_m\}$ converge μ^1-quasi uniformente in H a φ e la successione $\{\psi_m\}$ converge μ^2 quasi uniformemente in H a ψ. Per quanto già dimostrato, per le funzioni continue φ_m e ψ_m si ha per ogni $m \in N$ l'uguaglianza:

$$\sum_n \int_{\Gamma_n} \varphi_m\,dx + \psi_m\,dy = \int_{\Gamma} \varphi_m\,dx + \psi_m\,dy. \tag{10}$$

Passando nella (10) al limite per $m \to \infty$, per i lemmi 3.6 e 3.7 si ottiene la (8), con φ μ^1-quasi continua e ψ μ^2 quasi continua.

LEMMA 3.9. — *Sia I un insieme aperto, limitato e semplicemente connesso, avente bordo orientato Γ (def. 1.4) e siano φ una funzione μ^1 quasi continua e ψ μ^2 quasi continua nella chiusura di I. Detta γ una curva continua, chiusa, rettificabile e semplice tale che sia $|\gamma| = \mathcal{F}_e I$ (cfr. def. 1.12 e lemma 1.14), si ha:*

$$\int_{\Gamma} \varphi\,dx + \psi\,dy = \int_{\gamma} \varphi\,dx + \psi\,dy. \tag{11}$$

Se φ e ψ sono polinomi vale la relazione

$$\int_{\Gamma} \varphi\,dx + \psi\,dy = \iint_I (\psi'_x - \varphi'_y)\,dx\,dy. \tag{12}$$

L'insieme I differisce per un insieme di misura piana nulla dall'insieme dei punti interni a γ e pertanto accanto alla (12) sussiste, sempre nel caso che φ e ψ siano polinomi, l'altra uguaglianza:

$$\int_{\gamma} \varphi\,dx + \psi\,dy = \iint_I (\psi'_x - \varphi'_y)\,dx\,dy. \tag{13}$$

Dalla (12) e (13) segue la (11) nel caso che φ e ψ siano polinomi. Per il lemma 3.8 l'asserto risulta dimostrato.

LEMMA 3.10. — *Consideriamo la famiglia di curve $\{\mathcal{C}_{ihr}\}$ ($i \in N^{\pm}, h \in N, r \in N_0$) costruita nel teorema 1.5. Nella ipotesi del teorema 3.3 hanno luogo, per* *ogni scelta degli indici* $i \in N^{\pm}$, $h \in N$, *le uguaglianze :*

$$\int_{\mathcal{C}_{ih0}} \varphi\, dx + \psi\, dy = \int\int_{E_{ih}} (\psi'_x - \varphi'_y)\, dx\, dy \tag{14}$$

$$\int_{\mathcal{C}_{ihr}} \varphi\, dx + \psi\, dy = \int\int_{D_{ihr}} (\psi'_x - \varphi'_y)\, dx\, dy \qquad (r \in N). \tag{15}$$

Per semplicità di scrittura indichiamo con γ la generica curva $\mathcal{C}_{ihr}$ e con I il generico degli insiemi E_{ih}, D_{ihr}. Invece delle (14) e (15) dovremo pertanto dimostrare la uguaglianza :

$$\int_{\gamma} \varphi\, dx + \psi\, dy = \int\int_{I} (\psi'_x - \varphi'_y)\, dx\, dy\,. \tag{16}$$

L'insieme aperto $A \cap I = I - [\mathcal{C}]$ è formato da una famiglia numerabile $\{I_n\}$ di componenti connesse, le quali, essendo $[\mathcal{C}]$ connesso, sono insiemi semplicemente connessi. Come nel lemma 1.11 si dimostra che esiste il bordo orientato Γ_n dell'insieme I_n e potremo associare all'insieme I_n una curva rettificabile e semplice γ_n tale che $[\gamma_n] = \mathcal{F}_e I$ (lemma 1.14). Detta L_n la lunghezza della curva γ_n, la serie ΣL_n risulta convergente. Infatti per il lemma 1.17 per quasi ogni numero reale t le rette di equazione $x = t$ e $y = t$ incontrano l'insieme $\bigcup_n [\gamma_n]$ in punti di $[\mathcal{C}]$ che appartengono ad al più due delle curve della famiglia $\{\gamma_n\}$.

Pertanto, dette $x = f_n(s)$, $y = g_n(s)$, $0 \leq s \leq L_n$ le equazioni parametriche della curva γ_n, si ha (cfr. dimostrazione del teorema 2.1):

$$\Sigma L_n \leq \Sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \{N(t, f_n) + N(t, g_n)\}\, dt \leq 2\int_{-\infty}^{+\infty} \{N(t, f) + N(t, g)\}\, dt \leq 4L\,.$$

Per il teorema 3.4 si ha per ogni $n \in N$:

$$\int_{\Gamma_n} \varphi\, dx + \psi\, dy = \int\int_{I_n} (\psi'_x - \varphi'_y)\, dx\, dy\,. \tag{17}$$

Per il lemma 3.9 la (17) diventa :

$$\int_{\gamma_n} \varphi\, dx + \psi\, dy = \int\int_{I_n} (\psi'_x - \varphi'_y)\, dx\, dy$$

e, sommando rispetto all'indice n, si ha:

$$\sum_n \int_{\gamma_n} \varphi\, dx + \psi\, dy = \int\int_I (\psi'_x - \varphi'_y)\, dx\, dy\,. \tag{18}$$

Se φ e ψ sono polinomi valgono le formule (18) e (16) e pertanto vale l'uguaglianza:

$$\sum_n \int_{\gamma_n} \varphi\, dx + \psi\, dy = \int_{\gamma} \varphi\, dx + \psi\, dy\,. \tag{19}$$

Per il lemma 3.8 dalle (18) e (19) segue, nelle ipotesi in cui ci siamo posti, la (16).

LEMMA 3.11. — *Consideriamo la famiglia di curve* $\{\mathcal{C}_{ihr}\}$ $(i \in N^{\pm},\ h \in N,\ r \in N_0)$ *costruita nel teorema* 1.5. *Nelle ipotesi del teorema* 3.3 *ha luogo l'uguaglianza:*

$$\sum_{i \in N^{\pm}} \sum_{h \in N} \frac{i}{|i|} \left\{ \int_{\mathcal{C}_{ih0}} \varphi\, dx + \psi\, dy - \sum_{r \in N} \int_{\mathcal{C}_{ihr}} \varphi\, dx + \psi\, dy \right\} = \tag{20}$$

$$= \int\int_A (\psi'_x - \varphi'_y)\, O(x, y\,; \mathcal{C})\, dx\, dy.$$

Le frontiere degli insiemi E_{ih}, B_{ih} e D_{ihr} hanno misura nulla perchè contenute in $[\mathcal{C}]$ e pertanto, fissato i, l'insieme $A'_i = \bigcup_{h \in N} B_{ih}$ e l'insieme $\bigcup_{h \in N} (E_{ih} - \bigcup_{r \in N} D_{ihr})$ differiscono per un insieme di misura nulla. Segue, per la sommabilità della funzione: $(\psi'_x - \varphi'_y)$ e per le (14) e (15) del lemma 3.10:

$$\int\int_{A'_i} (\psi'_x - \varphi'_y)\, dx\, dy = \tag{21}$$

$$= \sum_{h \in N} \int\int_{E_{ih}} (\psi'_x - \varphi'_y)\, dx\, dy - \sum_{r,\, h \in N} \int\int_{D_{ihr}} (\psi'_x - \varphi'_y)\, dx\, dy =$$

$$= \sum_{h \in N} \int_{\mathcal{C}_{ih0}} \varphi\, dx + \psi\, dy - \sum_{h,\, r \in N} \int_{\mathcal{C}_{ihr}} \varphi\, dx + \psi\, dy.$$

Posto:

$$G_j = \{(x, y) : O(x, y\,; \mathcal{C}) = j\}$$

si ha che, per $i > 0$ gli insiemi A_i' e $\bigcup_{j \geq i} G_j$ differiscono per un insieme di misura nulla e, per $i < 0$, gli insiemi A_i' e $\bigcup_{j \leq i} G_i$ differiscono per un insieme di misura nulla. Segue per la sommabilità in A della funzione $(\psi_x' - \varphi_y')\, \bar{O}(x, y\,;\mathcal{C})$:

$$(22) \qquad \sum_{i \in N} \iint_{A_i'} (\psi_x' - \varphi_y')\, dx\, dy - \sum_{i \in N^-} \iint_{A_i'} (\psi_x' - \varphi_y')\, dx\, dy =$$

$$= \sum_{i \in N^{\pm}} i \iint_{G_i} (\varphi_x' - \varphi_y')\, dx\, dy = \iint_A (\psi_x' - \varphi_y')\, \bar{O}(x, y\,;\mathcal{C})\, dx\, dy.$$

Dalle uguaglianze (21) e (22) segue immediatamente la (20).

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.3.

Per il lemma 3.11 è sufficiente dimostrare che:

$$(21) \qquad \sum_{i \in N^{\pm};\, h \in N} \frac{i}{|i|} \left\{ \int_{\mathcal{C}_{ih0}} \varphi\, dx + \psi\, dy - \sum_{r \in N} \int_{\mathcal{C}_{ihr}} \varphi\, dx + \psi\, dy \right\} = \int_{\mathcal{C}} \varphi\, dx + \psi\, dy\,.$$

Supponiamo dapprima che φ e ψ siano polinomi. In tal caso ha luogo la (20) del lemma 3.11 e l'uguaglianza [24]:

$$(22) \qquad \int_{\mathcal{C}} \varphi\, dx + \psi\, dy = \iint_A (\psi_x' - \psi_y')\, \bar{O}(x, y\,;\mathcal{C})\, dx\, dy\,.$$

Confrontando le (20) e (22) segue che la (21) ha luogo se φ e ψ sono polinomi. La (21) ha luogo anche se φ e ψ verificano le ipotesi del teorema 3.3 per il lemma 3.8 e il teorema 2.1.

OSSERVAZIONE. Il teorema 3.3 continua a sussistere se, ferme restando tutte le altre ipotesi, si suppone che, detto I un insieme di punti appartenenti ad una curva continua, rettificabile e contenuta in $\bar{A}$, la (1) abbia luogo per ogni rettangolo R contenuto con la sua frontiera nell'interno di $A - I$. In queste ipotesi infatti si può facilmente costruire una curva Γ continua, chiusa e rettificabile tale che si abbia: $I \subset [\Gamma]$, $[\mathcal{C}] \subset [\Gamma] \subset \bar{A}$ e per ogni

---

([24]) Cfr., ad es., [6], formula (2.6) a pag. 16.

punto $(x, y) \in A - [\Gamma]$ valga l'uguaglianza:

$$O(x, y; \Gamma) = O(x, y; \mathcal{C}). \tag{23}$$

Nelle attuali ipotesi ha luogo il teorema 3.3 relativamente alla curva Γ; pertanto per la (23) e tenendo presente che A differisce da $A - [\Gamma]$ per un insieme di misura nulla, si ha:

$$\int_{\Gamma} \varphi\, dx + \psi\, dy = \int\int_{A} (\psi'_x - \varphi'_y)\, O(x, y; \mathcal{C})\, dx\, dy. \tag{24}$$

D'altra parte se φ e ψ sono polinomi si ha pure:

$$\int_{\mathcal{C}} \varphi\, dx + \psi\, dy = \int\int_{A} (\psi'_x - \varphi'_y)\, O(x, y; \mathcal{C})\, dx\, dy \tag{25}$$

e, sempre nel caso che φ e ψ sono polinomi, vale l'uguaglianza:

$$\int_{\mathcal{C}} \varphi\, dx + \psi\, dy = \int_{\Gamma} \varphi\, dx + \psi\, dy. \tag{26}$$

Tenendo infine presente il lemma 3.8, la (26) e la (24), l'asserto è dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. BAIADA : *Sulle funzioni continue rispetto alle variabili separatamente e gli integrali curvilinei.* Rend. Sem. Mat. Padova, vol. 17 (1948), p. 201-218.

[2] S. BANACH : *Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie.* Fund. Math. vol. 7 (1925), pp, 225-236.

[3] F. CAFIERO : *Una estensione della formula di Green e sue conseguenze.* Ricerche di Matematica, Napoli, vol. 2 (1953) pp, 91-102.

[4] L. CESARI : *Surface area.* Annals of Math. Studies n. 35. Princeton 1956.

[5] A. CHIFFI : *Sulla continuità degli integrali curvilinei.* Rend. Sem. Mat. Padova, vol. 29 (1959) pp. 411-430.

[6] A. CHIFFI : *Sulla formula di Green nel piano.* Ricerche di Mat., Napoli, vol. 9 (1960), pp. 3-19.

[7] A. CHIFFI : *Sulla esistenza degli integrali curvilinei. Applicazioni.* Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. 14 (1960), pp. 195-204.

[8] R. L. MOORE : *Concerning continuous curves in the plane.* Math. Zeitsch. vol. 15 (1922), pp. 254-260.

[9] M. L. A. NEWMANN : *Elements of the topology of plane sets of points.* Cambridge, 1939.