ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LAMBERTO CESARI

Un teorema di esistenza in problemi di controlli ottimi

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 19, nº 1 (1965), p. 35-78

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1965_3_19_1_35_0>

UN TEOREMA DI ESISTENZA IN PROBLEMI DI CONTROLLI OTTIMI

LAMBERTO CESARI (*)

Scopo del presente lavoro è di dimostrare un nuovo teorema di esistenza per il problema di Pontryagin.

Un teorema di esistenza per tale problema è stato recentemente dimostrato da A. F. Filippov (1); e varianti sono state osservate da E. Roxin (2), e da L. Markus ed E. B. Lee (3). Sia $I[u]=\int_{t_1}^{t_2} f_0(t, x, u)\,dt$ l'integrale da minimizzare, dove $u=u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, è la funzione di controllo che deve essere determinata con valori $u(t)$ in un dato insieme compatto U (spazio dei controlli — fisso o variabile con t ed x), e $x=x(t)=(x_1, \dots, x_n)$ è una corrispondente traiettoria soddisfacente le n equazioni differenziali $x_i' = f_i(t, x, u)$, $i=1, \dots, n$, e certe condizioni iniziali e finali (si veda § 1 per dettagli). Denoteremo con $f(t, x, u)$ il vettore $f=(f_1, \dots, f_n)$ ad n componenti, e con $\tilde{f}(t, x, u)$ il vettore $\tilde{f}=(f_0, f_1, \dots, f_n)$ ad $n+1$ componenti. La condizione più significativa richiesta negli enunciati di Filippov, Roxin, e Markus, è che, per ogni (t, x), l'insieme $\tilde{Q}(t, x)=\tilde{f}(t, x, U(t, x))$ sia convesso, cioè, per ogni (t,x), $\tilde{f}$ trasforma $U(t, x)$ in un insieme convesso dello spazio $x_0, x_1, \dots, x_n$ ad $n+1$ dimensioni.

Pervenuto alla Redazione il 26 marzo 1964.

(*) Lavoro letto all'Istituto Matematico dell'Università di Pisa, ed eseguito con parziale assistenza finanziaria dell'Istituto di Alta Matematica di Roma e della US National Science Foundation (research grant G-57 all'Università di Michigan).

(1) A. F. FILIPPOV, *Su certe questioni nella teoria dei controlli ottimali* (in russo). Vestnik Moskov. Univ., Ser. Mat. Meh. 2, 1959, 25-32. Traduzione inglese: SIAM J. Control. Ser. A, 1, 1962, 76-84.

(2) E. ROXIN, *The existence of optimal controls.* Michigan J. Math., 9, 1962, 109-119.

(3) L. MARKUS ed E. B. LEE, *Optimal control for nonlinear processes,* Archive Rat. Mech. Anal., 8, 1961, 36-58.

Il calcolo delle variazioni per problemi liberi invita a domandarci se il minimo dell'integrale $I[u]$ possa assicurarsi sotto condizioni di convessità della funzione f_0 rispetto al vettore u, dato che, nei problemi liberi e sotto tali condizioni, l'integrale $I[u]$ è semicontinuo inferiormente. Nel presente lavoro si esplora anzitutto il comportamento di $I[u]$ assumendo che (1) per ogni (t, x) lo scalare f_0 è una funzione convessa del vettore u nell'insieme compatto $U(t, x)$; (2) per ogni (t, x), $Q(t, x) = f(t, x, U(t, x))$ è un insieme convesso dello spazio ad n dimensioni, (mentre $\widetilde{Q}(t, x)$ può non essere convesso nello spazio ad $n+1$ dimensioni). Finalmente, facendo uso delle ipotesi (1) e (2), si dimostra un nuovo teorema di esistenza per il problema di Pontryagin (§ 6).

Il teorema di esistenza che dimostriamo nella § 6 combina il metodo diretto del calcolo delle variazioni basato sul concetto di semicontinuità (Tonelli) con il tipico ragionamento di Filippov. Si introducono varie metriche e in esse si completa il relativo spazio di traiettorie. Nelle condizioni (1) e (2) del presente lavoro si presentano fenomeni nuovi che vengono studiati. In particolare si mostra con esempi (§ 4) che le condizioni (1) e (2) da sole non assicurano la semicontinuità inferiore di $I[u]$, nè l'esistenza del minimo.

Circa teoremi di esistenza per problemi di Bolza del calcolo delle variazioni, in vista del loro uso in problemi di controllo ottimo, ricordiamo qui i lavori di B. Manià, L. M. Graves, e di L. Tonelli ed E. Magenes ([4]). Un nuovo teorema di esistenza per problemi di questo tipo (U chiuso ma non necessariamente compatto) verrà dato altrove.

§ 1. Notazioni.

Siano t la variabile indipendente, variabile in un intervallo $E_0 = [t_1 \leq \leq t \leq T]$, sia $x = (x_1, \dots, x_n)$ un vettore rappresentante lo stato del sistema, variabile in E_n. Per ogni $(t, x) \in E_0 \times E_n$ diciamo $U(t, x)$ un insieme di vettori $u = (u_1, \dots, u_m)$ nello spazio E_m. L'insieme $U(t, x)$ può essere fisso o variabile con t ed x per $(t, x) \in E_0 \times E_n$. Il vettore (variabile) $u \in U(t, x)$ rappresenta la posizione istantanea del regolatore. Diremo $U = U(t, x)$ lo spazio dei controlli. Sia $x_{10} = (x_{11}, \dots, x_{n1})$ un punto fisso di E_n. Siano $f_i(t, x, u)$, $i = 0, 1, \dots, n$, funzioni di t, x, u definite per $t \in E_0$, $x \in E_n$, $u \in U(t, x)$, e indichiamo con f e $\widetilde{f}$ i vettori $f = (f_1, \dots, f_n)$, $\widetilde{f} = (f_0, \dots, f_n)$.

([4]) L. M. GRAVES, *The existence of an extremum in problems of Mayer,* Transactions Amer. Math. Soc., 39, 1936, 456-471; B. MANIÀ, *Sui problemi di Lagrange e di Mayer,* Rend. Circ. Mat. Palermo, 58, 1934, 285-310; L. TONELLI, *Su la semicontinuità nei problemi di Mayer e di Lagrange,* Rend. Acc. Lincei, (6) 24, 1936, 399-404, oppure L. TONELLI, *Opere Scelte,* Cremonese, Roma 1962, vol. 3, 342-348; E. MAGENES, *Sui teoremi di Tonelli per la semicontinuità nei problemi di Mayer e di Lagrange,* Annali Scuola Normale Sup. Pisa, (2) 15, 1948, 113-125.

Quando necessario useremo una variabile ausiliaria $x_0 \in E_1$ e pertanto indicheremo con $\tilde{x}$ il vettore $\tilde{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in E_{n+1} = E_1 \times E_n$.

Indichiamo con $K = \{u(t), t_1 \leq t \leq t_2\}$ la classe delle *strategie* o *funzioni di controllo ammissibili,* cioè la classe di tutte le funzioni $u(t) = (u_1, \dots, u_m)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, con $t_2 \leq T$, tali che (1) $u(t)$ è misurabile in $[t_1, t_2]$; (2) il sistema differenziale

$$(1) \qquad dx_i/dt = f_i(t, x, u(t)), \qquad i = 1, \dots, n, \qquad t_1 \leq t \leq t_2,$$

ovvero

$$x' = f(t, x, u), \qquad t_1 \leq t \leq t_2,$$

ammette una soluzione $x = x(t) = (x_1, \dots, x^n)$ i cui componenti $x_i(t)$ sono funzioni assolutamente continue in $[t_1, t_2]$, soddisfano le equazioni (1) quasi dappertutto, e hanno dati valori iniziali $x_i(t) = x_{i1}$, ovvero $x(t_1) = x_{10} = (x_{11}, \dots, x_{n1})$; (3) $u(t) \in U(t, x(t))$ per ogni $t_1 \leq t \leq t_2$.

Il vettore $x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, si dice una *traiettoria,* relativa alla funzione di controllo ammissibile $u(t)$, con punto iniziale x_{10} e tempo iniziale t_1 (che supporremo fissi), e punto finale $x(t_2) = x_{20} = (x_{12}, \dots, x_{n2})$ per ora indeterminato.

I punti x_{20} che sono punti finali per qualche traiettoria $x(t)$ corrisponspondente a qualche funzione di controllo ammissibile $u(t)$ si dicono punti *accessibili* da x_{10} (cioè, partendo da x_{10} al tempo t_1). Può convenire di chiamare accessibili i punti $(t_2, x_2) \in E_0 \times E_n$ per cui $t_2 = x(t_2)$. Infine, denoteremo con M l'insieme di tutti i punti (t, x, u) con $t \in E_0 = [t_1, T]$, $x \in E_n$, $u \in U(t, x)$.

Se $b = (b_1, \dots, b_m)$, $u = (u_1, \dots, u_m)$ sono due qualsiasi vettori (di ugual numero di componenti), diremo $b \cdot u$ il solito prodotto interno $b_1 u_1 + \dots + b_m u_m$. Pertanto, ogni funzione lineare in u potrà scriversi nella forma $z(u) = r + b \cdot u$, $u \in E_m$, r scalare, b vettore, r, b costanti, e si avrà anche, per ogni vettore $u_0 = (u_{01}, \dots, u_{0m})$, $z(u) = z(u_0) + b \cdot (u - u_0)$. Denoteremo con $|x| = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}}$ la norma euclidea di un vettore x, e perciò anche il valore assoluto di uno scalare x.

(C) *Ipotesi di continuità e compattezza.* Assumeremo che

(C_1) le funzioni f_i sono continue in M, $i = 0, 1, \dots, n$;

(C_2) per ogni $t \in E_0$, $x \in E_n$, l'insieme $U(t, x)$ è compatto;

(C_3) l'insieme $U(t, x)$, $(t, x) \in E_0 \times E_n$, è una funzione semicontinua superiormente di (t, x), cioè ammettiamo che, dato $\varepsilon > 0$, $t_0 \in E_0$, $x_0 \in E_n$, esiste un $\delta = \delta(\varepsilon, t_0, x_0) > 0$ tale che si abbia $U(t, x) \subset [U(t_0, x_0)]_\varepsilon$ per ogni $(t, x) \in E_0 \times E_n$ con $|t - t_0| < \delta$, $|x - x_0| < \delta$, e dove U_ε denota l'intorno chiuso di raggio ε di U in E_m.

(C_4) esiste una costante $C > 0$ tale che $x_1 f_1 + ... + x_n f_n \leq C[|x|^2 + 1]$ per ogni $t \in E_0$, $x \in E_n$, $u \in U(t, x)$.

La condizione (C_4) assicura che le traiettorie $x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, con $x(t_1) = x_{10}$, $t_2 \leq T$ (t_1, x_{10}, T fissi) giacciono in un insieme limitato e chiuso D dello spazio E_n (A. F. Filippov). Infatti, se $z(t) = |x(t)|^2 + 1 = x_1^2 + ... + x_n^2 + 1$, si ha, in forza delle (1) e di (C_4): $z' = 2(x \cdot f) \leq 2Cz$, e pertanto $z(t) \leq z(0)$ exp $[2C(t - t_1)] \leq z(0)$ exp $[2C(T - t_1)]$. Possiamo prendere per D una sfera solida e chiusa dello spazio E_n.

Diciamo M_T l'insieme di tutti i punti (t, x, u) con $t \in E_0 = [t_1, T]$, $x \in D$, $u \in U(t, x)$, e quindi $M_T \subset M$. Le ipotesi (C_2) e (C_3) assicurano che l'insieme M_T è compatto (A. F. Filippov). Prima dimostriamo che M_T è limitato. Infatti, in caso contrario, vi sarebbe una successione $(t_k, x_k, u_k) \in M_T$, $k = 1, 2, ...$, con $t_k \in E_0$, $x_k \in D$, $|u_k| \rightarrow \infty$, e pertanto vi sarebbe anche una sottosuccessione, diciamo ancora (t_k, x_k, u_k), con $t_k \rightarrow t_0 \in E_0$, $x_k \rightarrow x_0 \in D$, $u_k \in U(t_k, x_k)$. Dunque si avrebbe $u_k \in [U(t_0, x_0)]_\varepsilon$ per ogni k sufficientemente grande, ove il secondo membro è un insieme limitato, mentre $|u_k| \rightarrow \infty$. La contraddizione prova che M_T è limitato. Dimostriamo ora che M_T è chiuso. Infatti, se (t_0, x_0, u_0) è un punto di accumulazione di M_T, e $(t_k, x_k, u_k) \rightarrow (t_0, x_0, u_0)$, allora come sopra si ha $u_k \in [U(t_0, x_0)]_\varepsilon$ per ogni dato $\varepsilon > 0$ e ogni k sufficientemente grandi. Pertanto $u_0 \in [U(t_0, x_0)]_\varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, e infine $u_0 \in U(t_0, x_0)$ essendo quest'ultimo un insieme compatto. Dunque M_T è limitato e chiuso, e perciò compatto.

La condizione (C_1) assicura poi che, per ogni $(t, x) \in E_0 \times D$, l'insieme $Q(t, x) = f(t, x, U(t, x))$ é un insieme compatto di E_n, e che $Q(t, x)$ descrive un insieme $\mathcal{M}$ dello spazio E_n quando (t, x) descrive $E_0 \times D$, e si può scrivere $\mathcal{M} = f(M_T)$. Pertanto, le funzioni $f_i(t, x, u)$, $i = 1, 2, ..., n$, sono limitate in M_T, diciamo $|f_i(t, x, u)| \leq N$ per $(t, x, u) \in M_T$. Ne consegue che le componenti $x_i(t)$, $i = 1, ..., n$, delle traiettorie $x(t)$ sono uniformemente lipschitziane con costante N, e sono altresì uniformemente limitate perchè giacenti in D.

Prenderemo N in modo che anche per la funzione f_0 si abbia $|f_0(t, x, u)| \leq N$ per ogni $(t, x, u) \in M_T$.

Finalmente, le componenti $u_j(t)$, $j = 1, ... n$, delle strategie $u(t) \in K$, o funzioni di controllo, sono anche uniformemente limitate dato che $(t, x(t), u(t)) \in M_T$ ed M_T è un insieme limitato dello spazio txu ad $m + n + 1$ dimensioni. Prenderemo la costante N in modo tale che si abbia anche

$$(2) \qquad |f_i(t, x(t), u(t))| \leq N, \ i = 0, 1, ..., n; \quad |u_j(t)| \leq N, \ j = 1, ..., m,$$

per ogni $t_1 \leq t \leq t_2$, e $u(t) \in K$.

Per $(t, x) \in E_0 \times D$, l'insieme $U(t, x)$ è compatto, ma non necessariamente convesso. Diremo $U^*(t, x)$ l'inviluppo convesso e chiuso (e perciò compatto) di $U(t, x)$. Quando occorre, faremo l'ulteriore ipotesi:

(C′) Le funzioni $f_i(t,x,u)$, $i=1,\dots,n$, sono definite e continue nell'insieme compatto M_T^* di tutti i punti (t,x,u) con $t \in E_0=[t_1 \leq t \leq T]$, $x \in D$, $u \in U^*(t,x)$.

Se accade che per ogni $(t,x) \in E_0 \times D$ l'insieme $U(t,x)$ è convesso allora, la condizione (C′) è contenuta nella condizione (C). Le condizion (C) e (C') insieme assicurano che le proprietà (C_2) e (C_3) valgono anche relativamente all'insieme $U^*(t,x)$. Una analoga estensione della proprietà (C_4) non è necessaria.

§ 2. Le metriche δ e Δ.

Avendo fissato il punto iniziale x_{01} e il tempo iniziale t_1, denoteremo con Γ la totalità $\Gamma=\{x(t)\}$ di tutte le possibili traiettorie $x=x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, con punto iniziale x_{10} e tempo iniziale t_1, corrispondenti a tutte le funzioni di controllo ammissibili $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, cioè $u(t) \in K$. Tali traiettorie $x=x(t)$ sono considerate come curve non parametriche giacenti in D. Si noti che per ogni elemento $x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, di Γ, deve esistere almeno una funzione ammissibile di controllo generante $x(t)$, cioè tale che $x'(t)=f(t,x(t),u(t))$, per quasi tutti i t di $[t_1,t_2]$. D'altra parte è ben chiaro che vi possono essere infinite funzioni di controllo $u(t)$ generanti $x(t)$. Per esempio, se $n=1$, $f=u^2$, $-1 \leq u \leq 1$, la traiettoria $x=x(t)=t$, $0 \leq t \leq 1$, è generata da qualunque funzione misurabile $u(t)$ con valori ± 1.

Se $x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, $x_0(t)$, $t_1 \leq t \leq t_{20}$, sono due elementi di Γ, converremo spesso di estendere le funzioni continue $x(t)$, $x_0(t)$ nell'intero intervallo $[t_1,T]$ prendendole costanti e uguali al loro valore in t_2 e t_{20} rispettivamente. Introdurremo ora la metrica δ in Γ prendendo per distanza δ di $x(t)$ e $x_0(t)$ il numero

$$\delta=\delta(x,x_0)=|t_2-t_{20}|+\operatorname*{Max}_{0\leq t\leq T}|x(t)-x_0(t)|.$$

Si noti che Γ è un sottoinsieme dello spazio di tutte le funzioni continue $x(t)=(x_1,\dots,x_n)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, $t_2 \leq T$, con la stessa metrica. Si noti che nella metrica δ non si tiene alcun conto delle funzioni di controllo $u(t)$ e $u_0(t)$ generanti $x(t)$ e $x_0(t)$.

Allo scopo di tener conto in qualche modo delle funzioni di controllo $u(t)$ generanti le traiettorie $x(t)$ di Γ, introduciamo, per ogni $u(t) \in K$, $u(t)=(u_1,\dots,u_n)$, $t_1 \leq t \leq t_2 \leq T$, le funzioni ausiliarie.

$$y_j(t)=\int_0^t u_j(s)\,ds,\quad t_1 \leq t \leq t_2, \qquad j=1,\dots,m, \tag{3}$$

e il vettore $y(t) = (y_1, \dots, y_n)$. Si noti che queste funzioni sono, come le $x_i(t)$, tutte uniformente lipschitziane con costante N e anche uniformemente limitate essendo $|u_j(t)| \leq N$, $|y_j(t)| \leq NT$.

Per ogni $u(t) \in K$ e corrispondente traiettoria $x(t)$ considereremo ora il vettore $y(t)$ e il nuovo vettore

$$X(t) = (x(t),\ y(t)) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m),\quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

ad $n + m$ componenti. Denoteremo con Γ' la classe dei vettori funzioni $X(t)$ così generato. Si noti che Γ è la proiezione di Γ' nello spazio x. Anche qui converremo, quando occorra, di estendere le funzioni $x(t)$, $y(t)$ nell'intervallo $[t_1, T]$ prendendole costanti in $[t_2, T]$ e uguali al loro ultimo valore in t_2. Introdurremo una metrica Δ in Γ' prendendo per distanza Δ di due elementi $X = [x(t), y(t), t_1 \leq t \leq t_2]$ e $X_0 = [x_0(t), y_0(t), t_1 \leq t \leq t_{20}]$ di Γ' il numero

$$\Delta = \Delta(X, X_0) = |t_2 - t_{20}| + \operatorname*{Max}_{t_1 \leq t \leq T} |x(t) - x_0(t)| + \operatorname*{Max}_{t_1 \leq t \leq T} |y(t) - y_0(t)|.$$

Potremo pensare Δ ancora come una « distanza » tra le traiettorie x e x_0, nella quale si tiene conto delle strategie che hanno generato x e x_0. Si noti che Γ è un sottoinsieme dello spazio di tutte le funzioni continue $X(t) = (x(t), y(t)), t_1 \leq t \leq t_2, t_2 \leq T$, con la stessa metrica.

Come vedremo (§ 3), nelle condizioni del presente lavoro, Γ è compatto e completo nella metrica δ (cioè ogni successione di elementi di Γ ammette una sottosuccessione che è convergente nella metrica δ verso una funzione $x(t)$ che appartiene a Γ). Vedremo altresì che Γ' è (relativamente) compatto ma non completo nella metrica Δ (cioè ogni successione di elementi di Γ' ammette una sottosuccessione che è convergente della metrica Δ verso una funzione $X(t)$, ma $X(t)$ può non appartenere a Γ'). Dovremo perciò considerare il completamento $\overline{\Gamma'}$ di Γ' nella metrica Δ.

§ 3. Un teorema di A. F. Filippov.

(I) *Ipotesi di convessità.* Supponiamo che, per ogni $(t, x) \in E_0 \times D$, l'insieme $Q(t, x) = f(t, x, U(t, x))$ sia convesso. Si noti che $Q(t, x)$ sarà anche compatto per l'ipotesi (C_2), e funzione semicontinua superiormente per l'ipotesi (C_3).

TEOREMA 1. (A. F. Filippov). Nell'ipotesi (C) ed (I), l'insieme R_T dei punti $(t_2, x_2) \in E_{n+1}$ che sono accessibili (entro il tempo T a partire da x_{10} al tempo t_1) è compatto.

Più precisamente ci occorre il

TEOREMA 2. Nell'ipotesi (C) ed (I), l'insieme $\Gamma = \{x(t), t_1 \leq t \leq t_2\}$ di tutte le traiettorie relative alle funzioni di controllo ammissibili $u(t) \in K$, è compatto e completo nella metrica δ. L'insieme $\Gamma' = \{X(t), t_1 \leq t \leq t_2\}$ è compatto, ma non necessariamente completo nella metrica Δ.

DIMOSTRAZIONE (modificazione della dimostrazione di A. F. Filippov). Le curve C: $x = x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, di Γ sono contenute nell'insieme chiuso e limitato D di E_n e $t_1 \leq t_2 \leq T$, e le componenti $x_i(t)$ di $x(t)$ sono uniformemente lipschitziane con costante N e pertanto uniformemente continue. Dunque ogni successione $\{x_k(t)\}$, $x_k(t) = [x_{ki}(t),\ t_1 \leq t \leq t_{2k},\ i = 1, \dots, n]$, $k = 1, 2, \dots$, di elementi di Γ contiene almeno una sottosuccessione convergente nella metrica δ in forza del teorema di Ascoli. Se diciamo ancora $[x_k(t)]$ la sottosuccessione convergente e con $[x_0(t), t_1 \leq t \leq t_2]$ il suo limite, allora $t_{2k} \to t_2$, $t_2 \leq T$, e $x_0(t)$ è lipschitziana con la stessa costante N. Pertanto, per quasi ogni $t_0 \in [t_1, t_2)$, esiste la derivata $x_0'(t)$. Per ogni $0 < h < t_2 - t_0$, denoteremo con m_h e m_{kh} le medie integrali

$$m_h = h^{-1}[x_0(t_0 + h) - x_0(t_0)] = h^{-1}\int_{t_0}^{t_0+h} x_0'(s)\,ds,$$

(4)

$$m_{kh} = h^{-1}[x_k(t_0 + h) - x_k(t_0)] = h^{-1}\int_{t_0}^{t_0+h} x_k'(s)\,ds = h^{-1}\int_{t_0}^{t_0+h} f(s, x_k(s), u_k(s))\,ds.$$

Dato $\varepsilon > 0$ prendiamo un numero $\eta > 0$ tale che $Q(t, x) \subset [Q(t_0, x_0)]_\varepsilon$ per ogni $|t - t_0| < \eta$, $|x - x_0| < \eta$, ove $x_0 = x_0(t_0)$. Dopodichè fissiamo h, $0 < h < \eta$, in modo tale che $|x_0(s) - x_0| < \eta/2$, $|x_k(s) - x_k(t_0)| < \eta/2$ per ogni $t_0 \leq s \leq t_0 + h$, e $|m_h - x_0'(t_0)| < \varepsilon$. Avendo così fissato $h > 0$, prendiamo k abbastanza grande in modo che sia $|x_k(t) - x_0(t)| < \min[\eta/2, h\varepsilon/2]$ per ogni t, così che si avrà anche $|m_{kh} - m_h| < \varepsilon$.

Dunque, per $t_0 \leq s \leq t_0 + h$, si ha $|s - t_0| < \eta$, $|x_k(s) - x_0| \leq |x_k(s) - x_k(t_0)| + |x_k(t_0) - x_0(t_0)| \leq \eta/2 + \eta/2 = \eta$, e quindi

$$f(s, x_k(s), u_k(s)) \subset Q(s, x_k(s)) \subset [Q(t_0, x_0)]_\varepsilon .$$

Pertanto dalla seconda relazione (4) deduciamo che anche la media integrale m_{kh} deve appartenere all'insieme convesso $[Q(t_0, x_0)]_\varepsilon$. Finalmente la relazione $|x_0'(t_0) - m_{hk}| \leq |x_0'(t_0) - m_h| + |m_h - m_{kh}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ assicura che $x_0'(t_0) \in [Q(t_0, x_0)]_{3\varepsilon}$. Essendo Q un insieme compatto, al tendere a zero di ε si deduce $x_0'(t_0) \in Q(t_0, x_0)$. Dalla definizione di Q concludiamo che l'insieme dei punti u di $U(t_0, x_0)$ con $x_0'(t_0) = f(t_0, x_0(t_0), u)$ non è vuoto, ed esiste pertanto almeno un punto $u_0(t_0)$ con

$$u_0(t_0) \in U(t_0, x_0(t_0)), \quad x_0'(t_0) = f(t_0, x_0(t_0), u_0(t_0)).$$

Occorre ora dimostrare che è possibile scegliere $u_0(t_0) \in U(t_0, x_0(t_0))$ in modo tale che quando t_0 descrive quasi tutti i punti di $t_1 \leq t \leq t_2$, si ottiene una funzione $u_0(t)$ (definita quasi ovunque in $[t_1, t_2]$) che è misurabile, con $u_0(t) \in U(t, x_0(t))$, $x_0'(t) = f(t, x_0(t), u_0(t))$. Dunque $u_0(t) \in K$ e $x_0(t) \in \Gamma$. A questo scopo serve lo stesso artificio di A. F. Filippov, che ricorderemo più avanti con qualche modificazione (Lemma 2) e che perciò non ripetiamo qui. Questo dimostra la compattezza di Γ nella metrica δ, e perciò la prima parte del teorema 2.

Si noti che $R_T \subset E_0 \times D$, e dunque R_T è limitato. Che R_T sia chiuso è solo una conseguenza di quanto si è dimostrato avanti.

Consideriamo ora la classe Γ' i cui elementi sono vettori $X(t) = [x(t), y(t)]$. I componenti $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, $y_j(t)$, $j = 1, \dots, m$, di $X(t)$ sono funzioni lipschitziane con costante N, uniformemente limitate e uniformemente continue. La dimostrazione della compattezza procede come sopra. Sia ora $[x_k(t), y_k(t), t_1 \leq t \leq t_{2k}]$, $k = 1, 2, \dots$, una successione convergente nella metrica Δ verso un elemento $X_0(t) = [x_0(t), y_0(t), t_1 \leq t \leq t_2]$. Allora si ha

$$x_{ki}(t) = x_{i1} + \int_{t_1}^{t} f_i(s, x_k(s), u_k(s))\, ds, \quad y_{kj}(t) = \int_{t_1}^{t} u_{kj}(s)\, ds,$$

$$(5) \qquad t_1 \leq t \leq t_{2k}, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

e $[x_k(t)]$ converge nella metrica δ verso $x_0(t)$ come sopra. I componenti $x_{0i}(t)$, $y_{0j}(t)$ di $X_0(t)$ sono come sopra funzioni lipschitziane con costante N e pertanto, se $y_j'(t) = \bar{u}_j(t)$, si ha

$$x_{0i}(t) = x_{i1} + \int_{t_1}^{t} f_i(s, x_0(s), u_0(s))\, ds, \quad y_{0j}(t) = \int_{t_1}^{t} \bar{u}_j(s)\, ds,$$

$$(6) \qquad t_1 \leq t \leq t_2,$$

ove $u_0(t) \in U(t, x_0(t))$ come sopra. In generale $u_0(t)$ e $\bar{u}_0(t)$ non coincidono, come vedremo con esempi, cioè $X_0(t)$ non appartiene necessariamente a Γ'.

LEMMA 1. Per ogni $t \in [t_1, t_2]$ si ha $u_0(t) \in U(t, x_0(t))$, $\bar{u}_0(t) \in U^*(t, x_0(t))$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo un ausiliario problema di Pontryagin con un vettore di controllo a $2m$ componenti $[u, v]$, $u = (u_1, \dots, u_m)$, $v = (v_1, \dots, v_m)$, con $m + n$ equazioni differenziali

$$(7) \qquad x_i' = f(t, x, u), \quad i = 1, \dots, n, \qquad y_j' = v_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

condizioni iniziali $x_i(t_1) = x_{i1}$, $i = 1, \dots, m$, $y_j(t_1) = 0$, $j = 1, \dots, m$, e vincoli $u \in U(t, x)$, $v \in U^*(t, x)$. Dunque i secondi membri delle equazioni differenziali

(7) formano un vettore $F(t, x, y, u, v)$ ad $n + m$ componenti, e si ha

$$\bar{Q}(t, x, y) = F(t, x, y, U(t, x), U^*(t, x)) = Q(t, x) \times U^*(t, x).$$

Pertanto, per ogni $t \in E_0$, $x \in E$, $y \in E_m$, l'insieme $\bar{Q}(t, x, y)$ è convesso. Se Γ^* è la classe delle traiettorie $[x(t), y(t)]$ per questo problema ausiliario il teorema II semplicemente afferma che Γ^* è compatto e completo, e che ogni elemento $[x_0(t), y_0(t)]$ di Γ^* è generato da una strategia

$$[u_0(t), v_0(t)] \in U(t, x_0(t)) \times U^*(t, x_0(t)).$$

Ora $\bar{\Gamma}'$ è soltanto una parte di Γ^*, precisamente l'insieme di accumulazione di quegli elementi di Γ^* con $u(t) = v(t)$. Dunque $\bar{u}_0(t) = v_0(t) \in U^*(t, x_0(t))$, quasi dappertutto. Questo dimostra la seconda parte del lemma. La prima parte è stata dimostrata avanti.

L'affermazione che la collezione Γ' delle funzioni $\{X(t)\}$ non è completa nella metrica Δ può essere dimostrata mediante i due esempi seguenti.

ESEMPIO 1. (Γ' non completo della metrica Δ con U fisso non convesso). Sia $m = n = 1$ e si prenda $x' = |u|$, e $u = \pm 1$, ossia $U = \{(-1), (+1)\}$. Pertanto $f = |u|$, e $Q = f(U) = \{(+1)\}$ è un punto singolo e perciò un insieme convesso. Ora la funzione $u_k(t) = \pm 1$, $0 \leq t \leq 1$, secondochè $k^{-1}(i-1) \leq t < k^{-1}(i-1) + (2k)^{-1}$, oppure $k^{-1}(i-1) + (2k)^{-1} \leq t < k^{-1} i$, $i = 1, \dots, k$, $(k = 1, 2, \dots)$ genera la funzione $x_k(t) \equiv t$, $0 \leq t \leq 1$, $(k = 1, 2, \dots)$, mentre, se $y_k(t) = \int_{t_1}^{t} u_k(s)\, ds$, si ha $y_k = t - k^{-1}(i-1)$ oppure $y_k = k^{-1} i - t$, secondochè t appartiene all'uno o all'altro dei due tipi di intervalli. Pertanto $y_k(t) \to y_0(t) \equiv 0$ quando $k \to \infty$, uniformemente in $[0, 1]$. Dunque, nella metrica Δ, la successione $[x_k(t), y_k(t)]$, $k = 1, 2, \dots$, converge verso $[t, 0]$. D'altra parte $y_0(t) \equiv 0$ implica $u_0(t) \equiv 0$ e $u_0(t) \notin U$ per nessun valore di t.

ESEMPIO 2. (Γ' non completo nella metrica Δ con U fisso e convesso). Sia $m = n = 1$ e si prenda $x' = u(u+1)$ con $u \in U = [-1 \leq u \leq 1]$. Pertanto $f = u(u+1)$, $Q = f(U) = [-2^{-2} \leq X \leq 2]$ ed entrambi U e Q sono convessi. Se ora $u_k(t) = \pm 1$ negli stessi intervalli come nell'esempio precedente, si ha $x_k'(t) = 0$ oppure $x_k'(t) = 2$ rispettivamente, e quindi $x_k(t) = k^{-1}(i-1)$, oppure $x_k(t) = k^{-1}(i-1) + 2(t - i + 1)$, rispettivamente. Dunque $x_k(t) \to x_0(t) \equiv t$, $y_k(t) \to y_0(t) \equiv 0$ quando $k \to \infty$, uniformemente in $[0, 1]$, e $u_0(t) = y_0'(t) = 0$. D'altra parte $x_0'(t) = 1$ ed $u(u+1) = 1$ ha la sola radice $\bar{u} = 2^{-1}(\sqrt{5} - 1)$ in U, onde $u_0(t) = \bar{u}$. Dunque $[x_0(t) = t, y_0(t) = 0]$

è il limite della successione $[x_k(t), y_k(t)]$ nella metrica Δ ma non appartiene a Γ'.

Nella dimostrazione della prima parte del teorema 2 abbiamo visto che la funzione $u_0(t)$ deve essere scelta in modo da riuscire misurabile, con $u_0(t) \in U(t, x_0(t))$, e $x_0'(t) = f(t, x_0(t), u_0(t))$ quasi dappertutto. Più precisamente ci occorrerà il

LEMMA 2. Se $x_0'(t) \in f(t, x_0(t), U(t, x_0(t))$ quasi ovunque in $[t_1, t_2]$, e se $\bar{u}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, è una data funzione misurabile con $\bar{u}(t) \in E_m$, allora esiste una funzione misurabile $u_0(t)$ con $u_0(t) \in U(t, x_0(t)), x_0'(t) = f(t, x_0(t), u_0(t))$ quasi dappertutto, e tale che, per ogni t, la distanza $\delta(t) = | u_0(t) - \bar{u}(t) |$ abbia il minimo valore possibile.

DIMOSTRAZIONE. (Modificazione della dimostrazione di Filippov, che ripetiamo solo per comodità del lettore. Trascurando la proprietà di minimo di $\delta(t)$ si ottiene il caso considerato da Filippov che basta per completare la dimostrazione del teorema 1). Sappiamo che $x_0'(t) \in f(t, x_0(t), U(t, x_0(t))$, quasi ovunque in $[t_1, t_2]$. Pertanto, per quasi ogni t, l'insieme $Z(t)$ dei punti $u \in U(t, x_0(t))$ con $x_0'(t) = f(t, x_0'(t), u)$, è non vuoto e compatto dato che $U(t, x_0(t))$ è compatto ed f è continua. Ne consegue che il punto $\bar{u} = \bar{u}(t)$ di E_m ha una minima distanza $\delta(t)$ da $Z(t)$. Diciamo $P(t)$ l'insieme dei punti u di $Z(t)$ ad una distanza uguale a $\delta(t)$ da $\bar{u} = \bar{u}(t)$. Dunque $P(t)$ è l'insieme compatto e non vuoto dei punti $u \in U(t, x_0(t))$ con $x_0'(t) = f(t, x_0(t), u)$, $| u - \bar{u}(t) | = \delta(t)$. Dimostriamo che la funzione $\delta(t)$ è misurabile in $[t_1, t_2]$. Sappiamo che per ogni intero h esiste un insieme chiuso $C_h \subset [t_1, t_2]$ tale che mis $C_h > t_2 - t_1 - 1/h$ e tale che $\bar{u}(t)$ è continua in C_h. Dunque per ogni $t_0 \in C_h$ ed $\varepsilon > 0$ esiste un $\eta > 0$ tale che per $t \in C_h, |t - t_0| < \eta$, si ha $|\bar{u}(t) - \bar{u}(t_0)| < \varepsilon, U(t, x_0(t)) \subset [U(t_0, x_0(t_0))]_\varepsilon$. Ne consegue che esistono punti $u \in U(t, x_0(t))$ ed $u_0, u' \in U(t_0, x_0(t_0))$ tali che

$$\delta(t_0) = | \bar{u}(t_0) - u_0 |, \quad \delta(t) = | \bar{u}(t) - u |, \quad | u - u' | \leq \varepsilon.$$

Ne consegue che

$$\begin{aligned} \delta(t_0) = | \bar{u}(t_0) - u_0 | &\leq | \bar{u}(t_0)' - u' | \\ &\leq | \bar{u}(t_0) - \bar{u}(t) | + | \bar{u}(t) - u | + | u - u' | \\ &\leq \delta(t) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Questo dimostra che $\delta(t)$ è semicontinua inferiormente su ogni insieme C_h, pertanto misurabile su ogni insieme C_h, e quindi misurabile in $[t_1, t_2]$. Se $P(t)$ è formato di un solo punto, sia questo $u_0(t)$. Altrimenti, diciamo P_1 il sottoinsieme dei punti P con u_1 minimo. Diciamo P_2 il sottoinsieme dei punti P_1 con u_2 minimo. Così procedendo termineremo con il sottoinsieme P_m di P_{m-1} con u_m minimo, e ora P_m è formato di un solo punto. Sia questo $u_0(t) = (u_{01}(t), \dots, u_{0m}(t))$. Dobbiamo dimostrare che ciascuna funzione $u_{0s}(t)$, $s = 1, \dots, m$, è misurabile. Dimostreremo ciò per induzione. Supporremo che $u_1, \dots, u_{s-1}$ sono misurabili, e dimostreremo che u_s è misurabile. Per $s = 0$ non c'è nulla da dimostrare. Per $s \geq 1$, sappiamo dal teorema di Lusin che esistono insiemi chiusi $C \subset [t_1, t_2]$ tali che $x_0'(t)$, $\delta(t)$, $u_{01}(t), \dots, u_{0,s-1}(t)$ sono tutte funzioni continue in C, e mis$(C) > t_2 - t_1 - \eta$, ove $\eta > 0$ è un numero arbitrario. Per dimostrare che $u_{0s}(t)$ è misurabile dobbiamo solo provare che, per ogni a reale, il sottoinsieme di C ove $u_s(t) \leq a$ è chiuso. Infatti, se ciò non fosse, esisterebbe una successione di punti $t_k \in C$, $t_k \to \bar{t}$, con $u_{0s}(t_k) \leq a < u_{0s}(\bar{t})$, e quindi $u_{0s}(t_k) \leq u_{0s}(\bar{t}) - \varepsilon$ per qualche $\varepsilon > 0$ e tutti i k. Ora $\bar{t} \in C$ perchè C è chiuso, e $x_0'(t_k) \to x_0'(\bar{t})$, $\delta(t_k) \to \delta(\bar{t})$, $u_{0\alpha}(t_k) \to u_{0\alpha}(\bar{t})$, $\alpha = 1, \dots, s-1$. Dato che le funzioni $u_{0\beta}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, $\beta = s, s+1, \dots, m$, sono uniformemente limitate, possiamo prendere una sottosuccessione, diciamo ancora $[t_k]$, con $u_{0\beta}(t_k) \to \tilde{u}_\beta$, $\beta = s, s+1, \dots, m$, quando $k \to \infty$. Allora, da una parte si ha

$$\bar{u} \equiv [u_{01}(\bar{t}), \dots, u_{0,s-1}(\bar{t}), \tilde{u}_s, \dots, \tilde{u}_m] \in U(\bar{t}, x(\bar{t})),$$

a causa della proprietà di semicontinuità di $U(t, x)$. D'altra parte, essendo

$$x_0'(t_k) = f(t_k, x_0(t_k), u_0(t_k)), \quad t_k \in C,$$

si ha anche

$$x_0'(\bar{t}) = f(\bar{t}, x_0(\bar{t}), u_{01}(\bar{t}), \dots, u_{0,s-1}(\bar{t}), \tilde{u}_s, \dots, \tilde{u}_m) = f(\bar{t}, x_0(\bar{t}), \bar{u}).$$

ove $\tilde{u}_s \leq u_{0s}(\bar{t}) - \varepsilon$ e $\bar{u} \in Z(\bar{t})$. D'altra parte $\bar{u}(t_k) \to \bar{u}(\bar{t})$, $u_0(t_k) \to \bar{u}$, $|\bar{u}(t_k) - u_0(t_k)| = \delta(t_k) \to \delta(\bar{t})$, e quindi $|\bar{u}(\bar{t}) - \bar{u}| = \delta(\bar{t})$, e $\bar{u} \in P(\bar{t})$. La relazione $\tilde{u}_s \leq u_{0s}(\bar{t}) - \varepsilon$ è ora una contraddizione a causa della particolare proprietà di minimo con cui abbiamo scelto $u_{0s}(\bar{t})$. Dunque $u_{0s}(t)$ è misurabile in C, e, per induzione, $u_0(t)$ è misurabile in C. Essendo C un insieme chiuso di misura vicina quanto si vuole a $t_2 - t_1$, la misurabilità di $u_0(t)$ è dimostrata.

§ 4. Il completamento $\bar{\Gamma}'$ di Γ' nella metrica Δ e teoremi di semicontinuità forte in $\bar{\Gamma}'$.

Denotiamo con $\bar{\Gamma}'$ il completamento di Γ' nella metrica Δ, e supporremo che valgano le ipotesi (C) e (C'). Pertanto, un elemento

$$X_0(t) = [x_0(t), y_0(t)] = (x_{01}, \dots, x_{0n}, y_{01}, \dots, y_{0m}), \ t_1 \leq t \leq t_2,$$

appartiene a $\bar{\Gamma}'$ se e soltanto se esiste una successione $X_k(t) = [x_k(t), y_k(t)]$, $t_1 \leq t \leq t_{2k}$, $k = 1, 2, \dots$, di elementi di Γ' con $\Delta(X_k, X_0) \to 0$ quando $k \to \infty$. In conseguenza, si ha $t_{2k} \to t_2 \leq T$, $x_0(t_1) = x_{01}$, $y_0(t_1) = 0$, e le funzioni $x_{0i}(t), y_{0j}(t)$ sono lipschitziane con costante N. Di più $\delta(x_k, x_0) \to 0$ quando $k \to \infty$ e perciò $x_0(t) \in \Gamma$. Finalmente valgono le relazioni (6) con funzioni misurabili $u_0(t), \bar{u}_0(t)$, in cui i componenti sono in valore assoluto $\leq N$, e $u_0(t) \in U(t, x_0(t)), \bar{u}_0(t) \in U^*(t, x_0(t))$ quasi ovunque, $u_0(t) \in K$, senza che $u_0(t)$ e $\bar{u}_0(t)$ necessariamente coincidano quasi dappertutto.

Si noti che le funzioni $f_0(t, x_0(t), u_0(t)), f_0(t, x_0(t), \bar{u}_0(t))$ sono entrambe limitate e misurabili e perciò integrabili, ma gli integrali

$$I[u_0] = \int_{t_1}^{t_2} f_0(t, x_0(t), u_0(t))\, dt, \qquad I[\bar{u}_0(t)] = \int_{t_1}^{t_2} f_0(t, x_0(t), \bar{u}_0(t))\, dt$$

possono avere valori diversi. Il primo è l'integrale da minimizzare, il secondo un integrale ausiliario che dobbiamo studiare. Denoteremo con $C_0 : x = x_0(t), t_1 \leq t \leq t_2$, considerata come una curva in $E_0 \times E_n$, e $[C_0]$ l'insieme dei suoi punti (t, x).

Come si vedrà $u_0(t)$ e $\bar{u}_0(t)$ possono non coincidere, essenzialmente a causa della non linearità del vettore funzione $f(t, x, u)$. Ci sarà utile studiare la differenza

$$S(t) = | f(t, x_0(t), u_0(t)) - f(t, x_0(t), \bar{u}_0(t)) |$$

che diremo lo *scarto* relativo all'elemento $X_0(t)$ di $\bar{\Gamma}'$.

Dato che per gli elementi $X(t)$ di Γ' si ha $u(t) = \bar{u}(t)$, si conclude che lo scarto è sempre zero per gli elementi X di Γ'.

TEOREMA 3. Nelle ipotesi (C), (C') ed (I), sia $X_0(t) = [x_0(t), y_0(t)]$, $t_1 \leq t \leq t_{20}$, un elemento di $\bar{\Gamma}'$, siano $u_0(t), \bar{u}_0(t)$ le relative funzioni per cui valgono le relazioni (6). Supponiamo esista un $\delta > 0$ tale che si abbia $f_0(t, x, u) \geq 0$ per ogni $u \in U^*(t, x)$ e per ogni $(t, x) \in E_0 \times D$ ad una distanza $\leq \delta$ da $[C_0]$. Supponiamo esista una funzione non negativa limitata e misurabile $c(t)$, $t_1 \leq t \leq t_{20}$, $0 \leq c(t) \leq N_0$, tale che quasi ogni punto t_0 di $[t_1, t_{20}]$ in cui $\bar{u}_0 = \bar{u}_0(t_0) = y_0'(t_0)$ abbia la seguente proprietà: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero $\delta = \delta(t_0) > 0$ e una funzione lineare $z(u) = r + b \cdot u$ (anche dipendente da t_0), tali che per ogni $(t, x) \in E_0 \times D$ ad una distanza $\leq \delta$ da $[t_0, x_0(t_0)]$ si abbia

$$f_0(t, x, u) \geq z(u) + c(t_0) \, | u - \bar{u}_0 |^2 \quad \text{per ogni } u \in U^*(t, x), \tag{7}$$

$$f_0(t, x, u) \leq z(u) + \varepsilon \quad \text{per ogni } u \in U^*(t, x) \text{ con } | u - \bar{u}_0 | \leq \delta. \tag{8}$$

Allora, dato $\varepsilon > 0$, esiste un $\lambda > 0$ tale che, per ogni elemento $X(t) = [x(t), y(t)] \in \bar{\Gamma}'$, $y'(t) = \bar{u}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, con $\Delta(X, X_0) < \lambda$, risulta

$$\int_{t_1}^{t_2} f_0(t, x(t), \bar{u}(t)) \, dt > \int_{t_1}^{t_{20}} f_0(t, x_0(t), \bar{u}_0(t)) \, dt - \varepsilon + \int_{t_1}^{\bar{t}_2} c(t) \, | \bar{u}(t) - \bar{u}_0(t) |^2 \, dt, \tag{9}$$

ossia

$$\bar{I}[\bar{u}] > \bar{I}[\bar{u}_0] - \varepsilon + \mu,$$

ove μ denota l'ultimo integrale nella (9). In particolare $\bar{I}[\bar{u}]$ è semicontinuo inferiormente in $\bar{\Gamma}'$.

Teorema 4. Nelle ipotesi (C), (C') ed (I), sia $X_0(t) = [x_0(t), y_0(t)]$, $t_1 \leq t \leq t_{20}$, un elemento di $\bar{\Gamma}'$, siano $u_0(t)$, $\bar{u}_0(t)$ le relative funzioni per cui valgono le relazioni (6) con $u_0(t) \in U(t, x_0(t))$, $\bar{u}_0(t) \in U^*(t, x_0(t))$. Supponiamo esista una funzione non negativa limitata e misurabile $c(t)$, $t_1 \leq t \leq t_{20}$, $0 \leq c(t) \leq N_0$, tale che quasi ogni punto t_0 di $[t_1, t_{20}]$ in cui $\bar{u}_0 = \bar{u}_0(t_0) = y_0'(t_0)$ abbia la seguente proprietà: per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un numero $\delta = \delta(t_0) > 0$ e una funzione lineare $z(u) = r + b \cdot u$, tali che, per ogni $(t, x) \in E_0 \times D$ ad una distanza $\leq \delta$ da $[t_0, x_0(t_0)]$ si abbia

$$f_0(t, x, u) \geq z(u) + c(t_0) \, | u - \bar{u}_0 |^2 \quad \text{per ogni } u \in U^*(t, x), \tag{10}$$

$$f_0(t, x, u) \leq z(u) + \varepsilon \quad \text{per ogni } u \in U^*(t, x) \text{ con } | u - \bar{u}_0 | \leq \delta. \tag{11}$$

Inoltre supponiamo che per ogni altro punto $t_0 \in [t_1, t_{20}]$ esistano un numero $\delta = \delta(t_0) > 0$ e una funzione lineare $z(u) = r + b \cdot u$ (anche dipendente da t_0), tali che per ogni $(t, x) \in E_0 \times D$ ad una distanza $\leq \delta$ da $[t_0, x_0(t_0)]$ si abbia

$$f_0(t, x, u) \geq z(u) \quad \text{per ogni } u \in U^*(t, x). \tag{12}$$

Allora, dato $\varepsilon > 0$ esiste un $\lambda > 0$ tale che, per ogni elemento $X(t) = [x(t), y(t)] \in \Gamma'$, $y'(t) = u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, con $\Delta(X_0, X) < \lambda$, vale la (9).

Nella (9) abbiamo indicato con $\bar{t_2}$ il numero $\bar{t_2} = \max[t_2, t_{2o}]$, e usiamo le solite convenzioni circa l'estensione delle funzioni ivi adoperate al di fuori del loro intervallo di definizione, Pertanto $x(t), y(t), x_0(t)\, y_0(t)$ sono continue ovunque e costanti al di fuori del loro intervallo di definizione, mentre $c(t), \bar{u}(t), \bar{u}_0(t)$ sono estese arbitrariamente al di fuori del loro intervallo di definizione, sono misurabiti, e inoltre $0 \leq c(t) \leq N_0$, $\bar{u}_j(t)\,|, |\,\bar{u}_{cj}(t)| \leq N$, $j = 1, \dots, m$.

DIMOSTRAZIONE. Si noti che $f_0(t, x, u)$ può scriversi nella forma

$$F(t, X, X') = f_0(t, x_1, \dots, x_n, y_1', \dots, y_m') = f_0(t, x, u).$$

dove F è dunque una delle solite funzioni integrande del calcolo delle variazioni, dipendenti da t, dal vettore X e dalla derivata X', ove però compaiono soltanto i primi n componenti del vettore X, e gli ultimi m componenti del vettore X'. Possiamo perciò applicare i teoremi I e II del nostro precedente lavoro [4] all'integrale $\bar{I}[\bar{u}]$, e l'osservazione dello stesso lavoro (§ 3) circa le funzioni integrande dipendenti solo da alcune componenti delle derivate. Si noti che per $X(t) \in \Gamma'$, allora $\bar{u}(t) = u(t)$ quasi ovunque e la (9) diventa $I[u] > \bar{I}[\bar{u}_0] - \varepsilon + \mu$.

Le condizioni del teorema 4 sono certamente verificate nell'ipotesi seguente :

IPOTESI (α): Esiste una funzione non negativa limitata e misurabile nel senso di Borel $C = C(t, x, u)$, $(t, x, u) \in M_T^*$, avente la seguente proprietà : per ogni $\varepsilon > 0$ e $(t_0, x_0, u_0) \in M_T^*$ esistono un numero $\delta = \delta(t_0, x_0, u_0, \varepsilon) > 0$ e una funzione lineare $z(u) = r + b \cdot u$ (anche dipendente da $(t_0, x_0, u_0, \varepsilon)$), tale che per ogni $(t, x) \in E_0 \times D$ ad una distanza $\leq \delta$ da (t_0, x_0) risulta

$$f_0(t, x, u) \geq z(u) + C\,|\,u - u_0\,|^2 \quad \text{per ogni } u \in U^*(t, x),$$

$$f_0(t, x, u) \leq z(u) + \varepsilon \quad \text{per ogni } u \in U^*(t, x) \text{ con } |\,u - u_0\,| \leq \delta.$$

---

[4] L. CESARI, *Semicontinuità e convessità nel calcolo delle variazioni.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, XVIII (1964), 389-423.

Anche le condizioni del teorema 3 sono verificate se in aggiunta sappiamo che $f_0(t, x, u) \geq 0$ per ogni $(t, x, u) \in M_T^*$.

In entrambi i casi si noti che la funzione non negativa e limitata $c(t) = C[t, x_0(t), \bar{u}_0(t)]$, $t_1 \leq t \leq t_{20}$, è certamente misurabile ([5]).

Finalmente la condizione (α) è certamente verificata se, per ogni (t, x), la funzione f_0 è di classe C^2 in $u = (u_1, \dots, u_m)$, se le derivate parziali seconde f_{0hk} sono continue in $E_0 \times D \times U^*$, e se la forma quadratica

$$\Sigma_{hk} f_{0hk}(t, x, u) \xi_h \xi_k, \quad f_{0hk} = \partial^2 f_0 / \partial u_k \partial u_h,$$

$(h, k = 1, \dots, m, \xi_1, \dots, \xi_m$ reali) è semidefinita positiva (definita positiva se vogliamo $C > 0$).

TEOREMA 5. Nelle ipotesi (C) ed (I), siano $A(t, x)$, $B(t, x) = (B_1, \dots, B_m)$ funzioni continue di (t, x) in $E_0 \times D$. Allora l'integrale lineare

$$I[u] = \int_{t_1}^{t_2} [A(t, x) + B(t, x) \cdot u] \, dt$$

è un funzionale continuo in $\bar{\Gamma}'$ nella metrica Δ.

DIMOSTRAZIONE. Sia $X_0(t) = [x_0(t), y_0(t)]$, $t_1 \leq t \leq t_{20}$, un elemento di $\bar{\Gamma}'$. Pertanto $y_0(t) = \int_{t_1}^{t} u_0(s) \, ds$, $t_1 \leq t \leq t_{20}$. Occorre dimostrare che, dato $\varepsilon > 0$, esiste un $\eta > 0$ tale che per ogni altro elemento $X(t) = [x(t), y(t)]$, $t_1 \leq t \leq t_2$, di Γ', con $y(t) = \int_{t_1}^{t} u(s) \, ds$, $t_1 \leq t \leq t_2$, con $\Delta(X_0, X) < \eta$, risulta

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} [A(t, x(t)) + B(t, x(t)) \cdot u(t)] \, dt - \right.$$
$$\left. - \int_{t_1}^{t_{20}} [A(t, x_0(t)) + B(t, x_0(t)) \cdot u_0(t)] \, dt \right| < \varepsilon.$$

Anzitutto $A(t, x)$, $B_j(t, x)$, $j = 1, \dots, m$, sono limitate e uniformemente continue in $E_0 \times D$ e quindi esistono un $M > 0$ e un $\delta > 0$ tali che $|A(t, x)|$, $|B_j(t, x)| \leq M$, $|A(t, x) - A(t', x')| < \varepsilon$, $|B_j(t, x) - B_j(t', x')| < \varepsilon$,

([5]) P. R. HALMOS, *Measure Theory*, D. van Nostrand, New York 1950, § 37, (2), p. 153.

$j = 1, \dots, m$, per ogni $t, t' \in E_0$, $x, x' \in D$ con $| t - t' | < \delta$, $| x - x' | < \delta$. Dunque, se $\eta \leq \delta$, si ha $| t_2 - t_{20} | \leq \eta$ e quindi

$$\int_{t_1}^{t_2} A(t, x(t))\, dt - \int_{t_1}^{t_{20}} A(t, x_0(t))\, dt \leq (T - t_1)\, \varepsilon + M\eta.$$

Dividiamo $[t_1, T]$ in un numero finito di parti di lunghezze comprese tra $\delta/2$ e δ, diciamo $t_1 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k = T$. Siano $\bar{t} = \min [t_2, t_{20}]$, $\bar{\bar{t}} = \max [t_2, t_{20}]$. Supponiamo $\eta \leq \delta/2$. Per qualche h si avrà

$$\tau_{h-1} < \bar{t} \leq \tau_h, \quad \bar{t} \leq \bar{\bar{t}} < \tau_{h+1}, \quad | \bar{t} - \bar{\bar{t}} | = | t_2 - t_{20} | < \eta \leq \delta/2.$$

Per semplicità denotiamo ora $\bar{t}$ con τ_h. Per ogni $j = 1, \dots, m$, si ha

$$\int_{t_1}^{t_2} B_j(t, x(t))\, u_j(t)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} B_j(t, x_0(t))\, u_{0j}(t)\, dt$$

$$= \Sigma_s \int_{\tau_{s-1}}^{\tau_s} [B_j(t, x(t)) - B_j(\tau_{s-1}, x(\tau_{s-1}))]\, u_j(t)\, dt$$

$$- \Sigma_s \int_{\tau_{s-1}}^{\tau_s} [B_j(t, x_0(t)) - B_j(\tau_{s-1}, x_0(\tau_{s-1}))]\, u_{0j}(t)\, dt$$

$$+ \Sigma_s \int_{\tau_{s-1}}^{\tau_s} [B_j(\tau_{s-1}, x(\tau_{s-1}))\, u_j(t) - B_j(\tau_{s-1}, x_0(\tau_{s-1}))\, u_{0j}(t)]\, dt$$

$$+ \int_{\bar{t}}^{\bar{\bar{t}}} B_j(t, x_0(t))\, u_{0j}(t)\, dt = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4,$$

dove la somma è fatta rispetto ad $s = 1, \dots, h$, ove in σ_4 dobbiamo scrivere $x(t)$ e $u_j(t)$, invece di $x_0(t)$ e $u_{0j}(t)$, se $t_{20} < t_2$. Abbiamo

$$| \sigma_1 | \leq \Sigma_s \int_{\tau_{s-1}}^{\tau_s} | B_j(t, x(t)) - B_j(\tau_{s-1}, x(\tau_{s-1})) |\, | u_j(t) |\, dt$$

$$\leq \Sigma_s (\tau_s - \tau_{s-1})\, N\varepsilon \leq N(T - t_1)\, \varepsilon,$$

e analogamente

$$| \sigma_2 | \leq N(T - t_1)\, \varepsilon.$$

Si ha

$$\sigma_3 = \Sigma_s \left\{ B_j(\tau_{s-1}, x(\tau_{s-1})) \int_{\tau_{s-1}}^{\tau_s} u_j(t)\, dt - B_j(\tau_{s-1}, x_0(\tau_{s-1})) \int_{\tau_{s-1}}^{\tau_s} u_{0j}(t)\, dt \right\}$$

$$= \Sigma_s \{ B_j(\tau_{s-1}, x(\tau_{s-1})) [y_j(\tau_s) - y_j(\tau_{s-1})] - B_j(\tau_{s-1}, x_0(\tau_{s-1})) [y_{0j}(\tau_s) - y_{0j}(\tau_{s-1})] \}$$

$$= \Sigma_s [B_j(\tau_{s-1}, x(\tau_{s-1})) - B_j(\tau_{s-1}, x_0(\tau_{s-1}))] [y_j(\tau_s) - y_j(\tau_{s-1})]$$

$$+ \Sigma_s B_j(\tau_{s-1}, x_0(\tau_{s-1})) [y_j(\tau_s) - y_{0j}(\tau_s)]$$

$$- \Sigma_s B_j(\tau_{s-1}, x_0(\tau_{s-1})) [y_j(\tau_{s-1}) - y_{0j}(\tau_{s-1})],$$

e quindi

$$|\sigma_3| \leq \varepsilon\, \Sigma_s\, |y_j(\tau_s) - y_j(\tau_{s-1})| + 2M\, \Sigma_s\, |y_j(\tau_s) - y_{0j}(\tau_s)|$$

$$\leq \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} |u_j(t)|\, dt + 2M\, k\eta$$

$$\leq \varepsilon\, N\, (T - t_1) + 2Mk\eta.$$

Abbiamo infine $|\sigma_4| \leq M\eta$, e quindi

$$|I[u] - I[u_0]| \leq (2N + 1)(T - t_1)\, m\varepsilon + (2k + 1)\, Mm\eta \leq 2(N + 1)\, (T - t_1) m\varepsilon$$

per ogni $X \in \bar{\Gamma}'$ con $\Delta(X, X_0) \leq \eta < \min\,[\delta/2, (2k + 1)^{-1} M^{-1} (N + 1)\, m\varepsilon]$. Il teorema 5 è così dimostrato.

Terminiamo il presente § 4 con due esempi. Il primo mostra che l'integrale $I[u]$, considerato come un funzionale in Γ, nelle ipotesi (C), (C'), ed (I), ed f_0 convessa nel vettore u, può non risultare semicontinuo inferiormente. Il secondo esempio mostra che, nelle stesse ipotesi, il minimo assoluto di $I[u]$ può mancare.

Esempio 3. (Concernente la semicontinuità di $I[u]$ in Γ nella metrica δ). Per semplicità usiamo le lettere x, y per x_1, x_2, e usiamo le lettere u, v per u_1, u_2. Supponiamo quì $m = n = 2$. Consideriamo il sistema differenziale

$$x' = u, \; y' = 2^{-1}(1 - v^2)\, u^2 + 2^{-1}(1 + v)^2,$$

con punto iniziale (0, 0), bersaglio fisso (0, 1), spazio dei controlli fisso $U = [-1 \leq u, v \leq 1]$, e l'integrale

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (u^2 + 6v^2)\, dt.$$

Qui abbiamo $f_1 = u$, $f_2 = 2^{-1}(1 - v^2)u^2 + 2^{-1}(1 + v)^2$, e se prendiamo $f = (f_1, f_2)$ vediamo che f è una funzione continua di (u, v) nel quadrato U. I lati $[v = \pm 1, -1 \leq u \leq 1]$ sono trasformati da f nei segmenti $[z_2 = 0, -1 \leq z_1 \leq 1]$, $[z_2 = 2, -1 \leq z_1 \leq 1]$ nel piano $z_1 z_2$. I lati $[u = \pm 1, -1 \leq v \leq 1]$ sono trasformati nei segmenti $[z_1 = \pm 1, 0 \leq z_2 \leq 2]$. Finalmente ogni segmento $[v = c, -1 \leq u \leq 1]$ con $-1 \leq c \leq 1$ è trasformato nell'arco di parabola $z_1 = u$, $z_2 = 2^{-1}(1 - c^2)u^2 + 2^{-1}(1 + c)^2$, $-1 \leq u \leq 1$, di punti estremi $(\pm 1, 1 + c)$ e vertice $[0, 2^{-1}(1 + c)^2]$ ove $2^{-1}(1 + c)^2$ descrive l'intervallo [0, 2] quando c descrive $[-1, 1]$. Dunque, il quadrato $U = [-1 \leq u \leq 1]$ è trasformato da f nel quadrato $Q = f(U) = [-1 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2]$. Prendiamo $v_k(t) \equiv 0$ per ogni $0 \leq t \leq 1$, $k = 1, 2, \ldots$, e prendiamo $u_k(t) = \pm 1$ secondochè $k^{-1}(i - 1) \leq t < k^{-1}(i - 1) + (2k)^{-1}$, oppure $k^{-1}(i - 1) + (2k)^{-1} \leq t < k^{-1} i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $k = 1, 2, \ldots, 0 \leq t \leq 1$. Allora si hanno per $x_k(t)$, $y_k(t)$ le equazioni differenziali

$$x_k' = f_{1k} = z_{1k} = \pm 1, \qquad y_k' = f_{2k} = z_{2k} = 1,$$

con punto iniziale (0, 0). Abbiamo allora

$$y_k(t) = t, \quad x_k(t) = t - k^{-1}(i - 1), \quad \text{oppure } = k^{-1} i - t,$$

secondochè t si trova nell'uno o nell'altro dei due tipi di intervalli considerati avanti. Dunque $x_k(t) \to x_0(t) \equiv 0$, $y_k(t) \equiv y_0(t) \equiv t$, $0 \leq t \leq 1$, uniformemente in [0, 1] quando $k \to \infty$. Se $C_k : x = x_k(t), y = y_k(t)$, $0 \leq t \leq 1, k = 1, 2, \ldots$, e $C_0 : x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$, $0 \leq t \leq 1$, possiamo dire che $C_k \to C_0$ nella metrica δ. La curva C_0 cioè la traiettoria $[x_0(t), y_0(t), 0 \leq t \leq 1$ certamente può essere realizzata dato che Q è convesso. Infatti le equazioni in u, v,

$$0 = u, \qquad 1 = 2^{-1}(1 - v^2) \cdot u^2 + 2^{-1}(1 + v)^2$$

danno $u = 0$, $v = \sqrt{2} - 1 = 0.43$. Pertanto $u_0(t) \equiv 0$, $v_0(t) \equiv \sqrt{2} - 1$, $0 <$

$t \leq 1$, generano C_0. D'altra parte abbiamo

$$I[C_k] = \int_0^1 (u_k^2 + 6v_k^2)\, dt = \int_0^1 (1 + 0)\; dt = 1,\ k = 1, 2, \dots,$$

$$I[C_0] = \int_0^1 (u_0^2 + 6v_0^2)\, dt = \int_0^1 (0 + 6(\sqrt{2} - 1)^2)\, dt = 6(\sqrt{2} - 1)^2 =$$

$$= 6(3 - 2\sqrt{2}) = 1.03.$$

Dunque $I[C]$, considerato come un funzionale in Γ con la metrica δ non è semicontinuo inferiormente.

ESEMPIO 4. Consideriamo il sistema differenziale

$$\begin{cases} x' = u(1 - v) + [2 - 2^{-1}(u - 1)^2]\, v \\ y' = [2 - 2^{-1}(u - 1)^2](1 - v) + uv \end{cases}$$

con $t_1 = 0$, punto iniziale $(0, 0)$, bersaglio fisso $(0, 1)$, e spazio dei controlli fisso $U = [-1 \leq u \leq 1,\ -1 \leq v \leq 1]$. Se

$z_1 = f_1 = u(1 - v) + [2 - 2^{-1}(u - 1)^2]\, v$, $z_2 = f_2 = [2 - 2^{-1}(u - 1)^2](1 - v) + uv$,

si vede che il segmento $[v = 1, -1 \leq u \leq 1]$ è trasformato da $f = (f_1, f_2)$ nell'arco di parabola $AB = [z_1 = 2 - 2^{-1}(u - 1)^2,\ z_2 = u,\ -1 \leq u \leq 1]$, i cui punti $A = (0, -1)$, $B = (2,1)$ corrispondono ai valori $u = -1$ e $u = 1$ rispettivamente. Il segmento $[v = -1,\ -1 \leq u \leq 1]$ è trasformato da f nell'arco $CD = [z_1 = 2^{-1}u^2 + u - 3/2,\ z_2 = -u^2 + u + 3,\ -1 \leq u \leq 1]$, cioè della parabola $(2z_1 + z_2)^2 - 6(z_1 - z_2) - 27 = 0$, i cui punti $C = (-2,1)$, $D = (0,3)$ corrispondono ai valori $u = -1$ e $u = 1$ rispettivamente. Ogni segmento $[u = c,\ -1 \leq v \leq 1]$ è trasformato da f nel segmento congiungente i punti corrispondenti a $(c, 1)$, $(c, -1)$ sulle due parabole. Pertanto, l'immagine $Q = f(U)$ di U è il corpo convesso $Q = (ABCD)$ del piano $z_1 z_2$.

Consideriamo ora l'integrale

$$I = \int_{t_1}^{t_2} [x^2 + (y - t)^2 + (au + bv + c)^2]\, dt.$$

ove $a = 2 + \sqrt{7} = 4{,}64575$, $b = -6(\sqrt{7} - \sqrt{3}) = -5{,}48220$, $c = -4 - \sqrt{3} + \sqrt{7} - \sqrt{21} = 1{,}49628$. Prima di tutto osserviamo che i punti $(\alpha_1, \beta_1) \in U$, $(\alpha_2, \beta_2) \in U$ con $\alpha_1 = 2 - \sqrt{3} = 0{,}26795$, $\beta_1 = 2^{-1}$, $\alpha_2 = 2 - \sqrt{7} = 0{,}64575$, $\beta_2 = 6^{-1}(1 - \sqrt{7}) = -0{,}27429$, sono trasformati da f nei punti $(1,1)$ e $(-1,1)$. Consideriamo ora le funzioni $x_k(t)$, $y_k(t)$, $0 \leq t \leq 1$, generate da $u_k(t) = \alpha_1$, $v_k(t) = \beta_1$, oppure $u_k(t) = \alpha_2$, $v_k(t) = \beta_2$, secondo che t appartiene all'intervallo $k^{-1}(i-1) \leq t \leq k^{-1}(i-1) + (2k)^{-1}$, oppure $k^{-1}(i-1) + (2k)^{-1} \leq t \leq k^{-1} i$, $i = 1, 2, \dots, k$, $k = 1, 2, \dots$. Allora le funzioni $x_k(t)$, $y_k(t)$ sono le stesse come nell'esempio 3, e si ha $x_k(t) \to x_0(t) \equiv 0$, $y_k(t) \to y_0(t) \equiv t$ uniformemente in $[0, 1]$ quando $k \to \infty$. Dunque, se $C_k\, C_0$ sono le curve corrispondenti, diremo che $C_k \to C_0$ nella metrica δ. Ora C_0 certamente può essere realizzata essendo Q convesso. Infatti il punto $(\alpha_0, \beta_0) \in U$ con $\alpha_0 = 2 - \sqrt{5} = -0{,}23607$, $\beta_0 = (11)^{-1}(4 - \sqrt{5}) = 0{,}16036$, è trasformato da f nel punto $(0,1)$, e pertanto $u_0(t) = \alpha_0$, $v_0(t) = \beta_0$, $0 \leq t \leq 1$, generano C_0. Daltra parte si vede immediatamente che $a\alpha_1 + b\beta_1 + c = 0$, $a\alpha_2 + b\beta_2 + c = 0$. Dalle relazioni $x_k(t) \to 0$, $y_k(t) \to t$ uniformemente, e $v_k \equiv 0$, si ottiene senza calcoli

$$\lim_{k \to \infty} \mathrm{I}[C_k] = 0.$$

D'altra parte

$$I[C_0] = (a\alpha_0 + b\beta_0 + c)^2 = (-0{,}47957)^2 > 0.$$

Dunque I non è semicontinuo inferiormente in Γ nella metrica δ. Finalmente I non ha minimo assoluto in Γ. Infatti dalle considerazioni fatte avanti risulta che l'estremo inferiore di I in Γ è zero, ma tale valore non può essere assunto da I in Γ. Infatti, se fosse $I \equiv 0$ si avrebbe $x \equiv 0$, $y \equiv t$, $au + bv + c \equiv 0$, e pertanto le prime due relazioni danno $u = \alpha_0$, $v = \beta_0$, mentre $a\alpha_0 + b\beta_0 + c \not\equiv 0$, una contraddizione.

§ 5. Valutazione dello scarto $S(t)$.

Studiamo prima il caso lineare

TEOREMA 6. Nelle condizioni (C), (C'), (I), se $f(t, x, u)$ è lineare, cioè

$$f(t, x, u) = A(t, x) + \Sigma_j B_j(t, x) u_j,$$

ossia

$$f_i(t, x, u) = A_i(t, x) + \Sigma_j B_{ij}(t, x) u_j, \qquad i = 1, \dots, n,$$

con $A = (A_1, \dots, A_n)$, $B_j = (B_{1j}, \dots, B_{nj})$, $j = 1, \dots, m$, allora per ogni elemento $X_0(t) = [x_0(t), y_0(t)] \in \overline{\Gamma'}$, $t_1 \leq t_2 \leq t_{20}$, con

$$x_0(t) = x_{01} + \int_{t_1}^{t} f[s, x_0(s), u_0(s)]\, ds, \quad y_0(t) = \int_{t_1}^{t} \bar{u}_0(s)\, ds, \; t_1 \leq t \leq t_{20},$$

$(u_0(t) \in U(t, x_0(t)), \bar{u}_0(t) \in U^*(t, x_0(t))$, si ha

$$S(t) \equiv |f[t, x_0(t), u_0(t)] - f[t, x_0(t), \bar{u}_0(t)]| \equiv 0 \tag{13}$$

quasi dappertutto. Se $U(t, x)$ è sempre convesso allora si può anche assumere $u_0(t) \equiv \bar{u}_0(t)$.

DIMOSTRAZIONE. Se $X_k \longrightarrow X_0$ nella metrica Δ, con $X_k = [x_k(t), \; y_k(t)]$, $y_k'(t) = u_k(t)$, $u_k(t) \in K$, allora per ogni t, $t_1 \leq t < t_{20}$, si ha

$$x_{0i}(t) - x_{0i}(t_1) = \lim_{k \to \infty} [x_{ki}(t) - x_{0i}(t_1)] =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \int_{t_1}^{t} f_i(s, x_0(s), u_k(s))\, ds = \int_{t_1}^{t} f_i(s, x_0(s), \bar{u}_0(s))\, ds, \qquad i = 1, \dots, n,$$

in forza della convergenza uniforme $x_k(t) \longrightarrow x_0(t)$, $y_k(t) \longrightarrow y_0(t)$ e del teorema 5, essendo $u_k(t) = y_k'(t)$ quasi dappertutto. Dunque

$$x_0'(t) = f(t, x_0(t), \bar{u}_0(t))$$

quasi dappertutto in $[t_1, t_{20}]$, e sappiamo già che si ha

$$x_0'(t) = f(t, x_0(t), u_0(t))$$

quasi dappertutto. La relazione (13) è così dimostrata. Si noti che $u_0(t) \in U(t, x_0(t))$ per ogni t, mentre $\bar{u}_0(t) \in U^*(t, x_0(t))$. Se $U(t, x)$ è sempre convesso, allora $U = U^*$, $\bar{u}_0(t) \in K$, e $\bar{u}_0(t)$ non è altro che una delle funzioni generanti $x(t)$.

Torniamo ora al caso generale.

Se $X_0(t) = [x_0(t), y_0(t)]$, $t_1 \leq t \leq t_{20}$, è un qualsiasi elemento di $\bar{\Gamma}'$ e $X_k(t) = [x_k(t), y_k(t)]$ una particolare successione di elementi di Γ' convergente verso X_0 nella metrica Δ, sia al solito

$$x_k(t) = x_{01} + \int_{t_1}^{t} f(s, x_k(s), u_k(s))\, ds, \quad y_k(t) = \int_{t_1}^{t} u_k(s)\, ds, \; t_1 \leq t \leq t_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{14}$$

$$x_0(t) = x_{01} + \int_{t_1}^{t} f(s, x_0(s), u_0(s))\, ds, \quad y_0(t) = \int_{t_1}^{t} \bar{u}_0(s)\, ds, \; t_1 \leq t \leq t_{20}. \tag{15}$$

Sia $d(t), t_1 \leq t \leq t_{20}$, una funzione non negativa, limitata e misurabile. Converremo di estendere le funzioni $d(t), \bar{u}_0(t), u_k(t)$ in tutto l'intervallo $[t_1, T]$ prendendo $u(t) = u(t_{20})$, $\bar{u}_0(t) = \bar{u}_0(t_{20})$ in $(t_{20}, T]$, e $u_k(t) = u_k(t_{2k})$ in $(t_{2k}, T]$. Denotiamo con ν il numero

$$\nu = \varliminf_{k \to \infty} \int_{t_1}^{t_{2k}} d(s) \,|\, u_k(s) - \bar{u}_0(s) \,|^2 \, ds, \tag{16}$$

e con $\varphi(t, h), \psi(t)$ le funzioni

$$\varphi(t, h) = \varliminf_{k \to \infty} h^{-1} \int_t^{t+h} d(s) \,|\, u_k(s) - \bar{u}_0(s) \,|^2 \, ds, \tag{17}$$

per ogni $t_1 \leq t < t_{20}$, $0 < h \leq t_{20} - t$, e

$$\psi'(t) = \varliminf_{h \to 0+} \varphi(t, h), \quad \psi''(t) = \varlimsup_{h \to 0+} \varphi(t, h), \quad t_1 \leq t \leq t_{20}. \tag{18}$$

LEMMA 3. Per ogni funzione $A(t), t_1 \leq t \leq T$, non negativa ed integrabile si ha

$$\int_{t_1}^{t_{20}} A(t)\, \psi'(t)\, dt \leq \int_{t_1}^{t_{20}} A(t)\, \psi''(t)\, dt \leq \varliminf_{k \to \infty} \int_{t_1}^{t_{2k}} A(s)\, d(s) \,|\, u_k(s) - \bar{u}_0(s) \,|^2 \, ds$$

In particolare si ha

$$\int_{t_1}^{t_{20}} \psi'(t)\, dt \leq \int_{t_1}^{t_{20}} \psi''(t)\, dt \leq \nu.$$

DIMOSTRAZIONE. Diciamo L_1, L_2, L_3 i tre membri della relazione precedente. Per semplicità di scrittura poniamo $f_k(t) = d(t) \,|\, u_k(t) - \bar{u}_0(t) \,|^2$, $t_1 \leq t \leq T$, con le convenzioni fatte sopra circa $d(t)$, $u_0(t)$, $u_k(t)$. La funzione $d(t)$ è limitata, onde $0 \leq d(t) \leq M_0$ per qualche costante M_0, e quindi $0 \leq f_k(t) \leq 4M_0 N^2$, $t_1 \leq t \leq T$, $k = 1, 2, \dots$. Pertanto, abbiamo anche $0 \leq \varphi(t, h) \leq 4M_0 N^2$, $0 \leq \psi'(t) \leq \psi''(t) \leq 4M_0 N^2$, e queste stesse funzioni sono certo misurabili e perciò integrabili in $[t_1, t_{20}]$.

Sia $\varepsilon > 0$ un numero arbitrario. La funzione $A(t)$ è integrabile in $[t_1, T]$, e quindi esiste un numero $\eta > 0$ tale che $(H) \int A(t)\, dt < \varepsilon$ per ogni insieme misurabile $H \subset [t_1, T]$ con mis $H < \eta$. Essendo $0 \leq \psi''(t) \leq \leq 4M_0 N^2$, si avrà anche $(H) \int A(t)\psi''(t)\,dt < 4M_0 N^2 \varepsilon$ per gli stessi insiemi H. Prenderemo $\eta \leq \min[\varepsilon, 1/2]$.

Le funzioni $A(t)$, $\psi''(t)$ sono L-integrabili in $[t_1, t_{20}]$, e quindi esiste un insieme chiuso $B \subset [t_1, t_{20}]$ tale che mis $B > t_{20} - t_1 - \eta$, e tale che $A(t)$, $\psi''(t)$ sono entrambe continue su B. Per quasi ogni punto $\bar{t} \in B$ si ha ora

$$t_1 \leq \bar{t} < t_{20}, \quad \overline{\lim_{h \to 0+}} \varphi(\bar{t}, h) = \psi''(\bar{t}), \quad \lim_{h \to 0+} h^{-1} \operatorname{mis}[(\bar{t}, \bar{t}+h) \cap B] = 1.$$

Pertanto, esistono infiniti intervalli $[\bar{t}, \bar{t}+h) \subset [t_1, t_{20})$ con h comunque piccolo tali che

$$\psi''(\bar{t}) < \varphi(\bar{t}, h) + \eta, \qquad 1 - \eta < h^{-1} \operatorname{mis}[(\bar{t}, \bar{t}+h) \cap B] \leq 1.$$

Possiamo prendere questi intervalli così piccoli in modo che

$$|\psi''(s) - \psi''(\bar{t})|, \quad |A(s) - A(\bar{t})|, \quad |A(s)\psi''(s) - A(\bar{t})\psi''(\bar{t})| < \eta$$

per ogni $s \in B$, $\bar{t} \leq s \leq \bar{t} + h$.

Tutto ciò vale per quasi ogni $\bar{t} \in B$. In forza del teorema di copertura di Vitali (6) esiste un gruppo finito $[\tau_i, \tau_i + h_i)$, $i = 1, \dots, p$, di intervalli come sopra senza punti interni in comune tali che

$$\psi''(\tau_i) < \varphi(\tau_i, h_i) + \eta, \qquad 1 \geq h_i^{-1} \operatorname{mis}[(\tau_i, \tau_i + h_i) \cap B] > 1 - \eta,$$

$$|\psi''(t) - \psi''(\tau_i)|, \quad |A(t) - A(\tau_i)|, \quad |A(t)\psi''(t) - A(\tau_i)\psi''(\tau_i)| < \eta,$$

per ogni $t \in B$ con $\tau_i \leq t \leq \tau_i + h_i$, $i = 1, \dots, p$, e inoltre

$$h_1 + \dots + h_p > \operatorname{mis} B - \eta > t_{20} - t_1 - 2\eta.$$

Possiamo supporre $t_1 \leq \tau_1 < \tau_1 + h_1 \leq \tau_2 < \dots \leq \tau_p < \tau_p + h_p < t_{20}$. Ricordando che $t_{2k} \to t_{20}$ quando $k \to \infty$, esisterà un $\bar{k}$ tale che $|t_{2k} - t_{20}| < < \min[\eta, t_{20} - \tau_p - h_p]$ per ogni $k \geq \bar{k}$. Poniamo $\bar{t}_{2k} = \max[t_{20}, t_{2k}]$. Poniamo

(6) Si veda ad esempio C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, seconda ediz., Teubner 1927, ristampa Chelsea Publ. Co., New York 1948, vi + 718 pp., particolarmente pp. 299-307.

inoltre

$$B_i = [\tau_i\,,\ \tau_i + h_i) \cap B, \quad E_i = [\tau_i\,,\ \tau_i + h_i) - B_i\,, \qquad i = 1, \dots, p,$$

$$E = [t_1\,,\ t_{20}] - \bigcup B_i\,, \quad E_k = [t_1\,,\ t_{2k}] - \bigcup B_i\,.$$

Si ha

$$\text{mis}\, E_i < \eta\, h_i\,, \quad 2^{-1}\, h_i < (1-\eta)\, h_i < \text{mis}\, B_i \leq h_i\,,$$

$$\text{mis}\, E < 2\eta + \eta = 3\eta, \quad \text{mis}\, E_k < \eta + 3\eta = 4\eta,$$

e inoltre

$$\begin{aligned} \Sigma_i\, A(\tau_i)\, h_i &< 2\, \Sigma_i\, A(\tau_i)\, \text{mis}\, B_i \\ &= 2\, \Sigma_i \left\{ (B_i) \int A(t)\, dt - (B_i) \int [A(t) - A(\tau_i)]\, dt \right\} \\ &< 2 \int_{t_1}^{t_{20}} A(t)\, dt + 2\eta\, \Sigma_i\, \text{mis}\, B_i \\ &< 2C + 2\eta\, (t_{20} - t_1). \end{aligned} \tag{19}$$

Si ha ora

$$L_2 = \int_{t_1}^{t_{20}} A(t)\, \psi''(t)\, dt = \Sigma_i (B_i) \int A(t)\, \psi''(t)\, dt + (E) \int A(t)\, \psi''(t)\, dt$$

$$= \Sigma_i\, A(\tau_i)\, \psi''(\tau_i)\, \text{mis}\, B_i + \Sigma_i (B_i) \int [A(t)\, \psi''(t) - A(\tau_i)\, \psi''(\tau_i)]\, dt$$

$$+ 12\, M_0\, N^2\, \varepsilon$$

$$\leq \Sigma_i\, A(\tau_i)\, \psi''(\tau_i)\, h_i + \eta\, (t_{20} - t_1) + 12\, M_0\, N^2\, \varepsilon$$

$$\leq \Sigma_i\, A(\tau_i)\, [\varphi(\tau_i\,,\ h_i) + \eta]\, h_i + \eta\, (t_{20} - t_1) + 12\, M_0\, N^2\, \varepsilon.$$

Per ogni $i = 1, \dots, p$, si ha

$$\varphi(\tau_i\,,\ h_i) = \lim_{\overline{k \to \infty}} h_i^{-1} \int_{t_i}^{t_i + h_i} f_k(t)\, dt,$$

e quindi esistono numeri k_i tali che

$$\varphi(\tau_i, h_i) \leq h_i^{-1} \int_{\tau_i}^{\tau_i+h_i} f_k(t)\, dt + \eta$$

per ogni $k \geq k_i$. Sia $k_0 = \max[\bar{k}, k_1, \dots, k_p]$. Le relazioni precedenti valgono ora per ogni $k \geq k_0$ ed $i = 1, \dots, p$. Si ha, successivamente,

$$L_2 \leq \Sigma_i A(\tau_i) \int_{\tau_i}^{\tau_i+h_i} f_k(t)\, dt + 2\eta\, \Sigma_i A(\tau_i) h_i + \eta(t_{20} - t_1) + 12\, M_0 N^2 \varepsilon$$

$$= \Sigma_i A(\tau_i)(B_i + E_i) \int f_k(t)\, dt + 2\eta\, \Sigma_i A(\tau_i) h_i + \eta(t_{20} - t_1) + 12\, M_0 N^2 \varepsilon$$

$$\leq \Sigma_i (B_i) \int A(t) f_k(t)\, dt + \eta\, \Sigma_i (B_i) \int f_k(t)\, dt + 4\, M_0 N^2\, \Sigma_i A(\tau_i) \operatorname{mis} E_i$$

$$+ 2\eta\, \Sigma_i A(\tau_i) h_i + \eta(t_{20} - t_1) + 12\, M_0 N^2 \varepsilon$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_{2k}} A(t) f_k(t)\, dt + 4\eta\, M_0 N^2 (t_{20} - t_1) + \eta(4\, M_0 N^2 + 2)\, \Sigma_i A(\tau_i) h_i$$

$$+ \eta(t_{20} - t_1) + 12\, M_0 N^2 \varepsilon.$$

Essendo $\eta \leq \varepsilon$, $\eta \leq 1/2$, e in forza della (19), si ha

$$L_2 < \int_{t_1}^{t_{2k}} A(t) f_k(t)\, dt + 4\eta\, M_0 N^2 (t_{20} - t_1)$$

$$+ \eta(4\, M_0 N^2 + 2)(2C + 2\eta(t_{20} - t_1)) + \eta(t_{20} - t_1) + 12\, M_0 N^2 \varepsilon$$

$$< \int_{t_1}^{t_{2k}} A(t) f_k(t)\, dt + 8\varepsilon(4\, M_0 N^2 + 1)(t_{20} - t_1 + 1 + C),$$

e quest'ultima relazione vale per ogni $k \geq k_0$. Pertanto, quando $k \to \infty$, si ottiene

$$L_1 \leq L_2 \leq L_3 + 8\varepsilon(4\, M_0 N^2 + 1)(t_{20} - t_1 + 1 + C),$$

ove ε è un numero arbitrario. Il lemma 3 è così dimostrato.

Nel seguito denoteremo con $Z(u) = (Z_1, \dots, Z_m)$ un vettore funzione lineare a coefficienti costanti in $u = (u_1, \dots, u_m)$. Pertanto, $Z(u)$ è della forma

$$Z(u) = R + Bu,$$

ove R è un vettore costante ad n componenti e B è una matrice ad elementi costanti del tipo $n \times m$. In altre parole, se

$$R = (r_1, \dots, r_n), \quad B = (b_{ij}, \ i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, m),$$

si ha

$$Z_i = r_i + \Sigma_j \, b_{ij} \, u_j, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Per $m = 1$, $Z(u)$ è una funzione scalare $z(u)$ di u come nella § 1.

TEOREMA 7. Nelle condizioni (C') ed (I), sia $X_0(t) = [x_0(t), y_0(t)]$, $t_1 \le t \le t_2$, un elemento di $\bar{\Gamma}'$, e sia $X_k(t) = [x_k(t), y_k(t)]$, $t_1 \le t \le t_{2k}$, $k = 1, 2, \dots$, una successione di elementi di Γ' convergente verso $X_0(t)$ nella metrica Δ. Siano $u_0(t)$, $\bar{u}_0(t)$ le relative funzioni per cui valgono le (14) e (15). Supponiamo esista una funzione non negativa, limitata, e misurabile $d(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, tale che quasi ogni punto $t_0 \in [t_1, t_2]$ ha la seguente proprietà: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero $\delta = \delta(t_0) > 0$ e un vettore funzione $Z(u) = R + Bu$ (anche dipende da t_0) tali che per ogni $(t, x) \in D$ ad una distanza $\le \delta$ da $[t_0, x_0(t_0)]$ risulta

$$|f(t, x, u) - Z(u)| < \varepsilon + d(t_0) \, |u - \bar{u}_0|^2 \quad \text{per ogni} \quad u \in U^*(t, x_0(t_0)),$$

ove $\bar{u}_0 = \bar{u}(t_0)$. Allora, se ν e $\psi'(t)$ sono il numero e la funzione reale definiti dalle (16), (17), (18) relativamente alla funzione $d(t)$, risulta

$$S(t) \equiv |f(t, x_0(t), u_0(t)) - f(t, x_0(t), \bar{u}_0(t)| \le \psi'(t)$$

per quasi ogni $t \in [t_1, t_2]$ e si ha $\displaystyle\int_{t_1}^{t_{20}} \psi'(t) \, dt \le \nu$.

DIMOSTRAZIONE. Sia t_0 un punto di $[t_1, t_2]$ ove $x'(t_0) = f(t_0, x_0(t_0), u_0(t))$, $\bar{u}_0 = \bar{u}_0(t_0) = y_0'(t_0)$, ove $|d(t) - d(t_0)|$, $|\bar{u}_0(t) - \bar{u}_0(t_0)|^2$ sono le derivate dei loro integrali indefiniti, e ove vale la proprietà dell'enunciato col relativo numero $\delta = \delta(t_0) > 0$ e relativa funzione lineare $Z(u) = R + Bu$ (R vettore costante, B matrice costante di tipo $n \times m$). Pertanto

$$\bar{u}_0 = \bar{u}_0(t_0) = \lim_{h \to 0} h^{-1} \int_{t_0}^{t_0+h} \bar{u}_0(t) \, dt, \qquad \lim_{h \to 0+} h^{-1} \int_{t_0}^{t_0+h} |d(t) - d(t_0)| \, dt = 0,$$

$$\lim_{h \to 0+} h^{-1} \int_{t_0}^{t_0+h} |\bar{u}_0(t) - \bar{u}_0(t_0)|^2 \, dt = 0,$$

$$f(t_0, x_0(t), u_0(t_0)) = \lim_{h \to 0+} h^{-1} \int_{t_0}^{t_0+h} f(t, x_0(t), u_0(t)) \, dt.$$

È ben noto che queste relazioni valgono per quasi tutti i punti $t_0 \in [t_1, t_2]$. In particolare la seconda e terza relazione costituiscono un noto lemma di Lebesgue (7). Essendo Z una funzione lineare a coefficienti tutti costanti, anche $Z[\bar{u}_0(t)]$ è uguale alla derivata dal proprio integrale indefinito, ossia

$$Z[\bar{u}_0(t_0)] = \lim_{h \to 0} h^{-1} \int_{t_0}^{t_0+h} Z[\bar{u}_0(t)] \, dt.$$

Considerando poi la definizione (18) di $\psi'(t)$, vediamo che esisterà una successione $[h_s]$ di numeri positivi tali che

$$\lim_{s \to \infty} h_s = 0\,, \qquad \lim_{s \to \infty} \varphi(t_0, h_s) = \psi'(t_0).$$

Sia $\varepsilon > 0$ un numero arbitrario. Allora possiamo prendere un numero $h = h_s$ con s sufficientemente grande così che

$$|\psi'(t_0) - \varphi(t_0, h)| < \varepsilon, \quad h < 2^{-1} \delta(t_0), \tag{20}$$

$$\left| f(t_0, x_0(t_0), u_0(t_0)) - h^{-1} \int_{t_0}^{t_0+h} f(t, x_0(t), u_0(t)) \, dt \right| < \varepsilon\,, \tag{21}$$

$$h^{-1} \int_{t_0}^{t_0+h} |d(t) - d(t_0)| \, dt < \varepsilon / N^2, \tag{22}$$

$$h^{-1} \int_{t_0}^{t_0+h} |\bar{u}_0(t) - \bar{u}_0(t_0)|^2 \, dt < \varepsilon / m N M_0\,, \tag{23}$$

$$\left| Z(\bar{u}_0(t_0)) - h^{-1} \int_{t_0}^{t_0+h} Z(\bar{u}_0(t)) \, dt \right| < \varepsilon\,. \tag{24}$$

---

(7) Vedi, ad esempio, L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, Zanichelli 1928, p. 174.

Si noti che per ogni $(t, x) \in D$ ad una distanza $\leq \delta$ da $[t_0, x_0(t_0)]$ vale la relazione

$$| f(t, x, u) - Z(u) | < \varepsilon + d(t_0) \, | u - \bar{u}_0 |^2 \text{ per ogni } u \in U(t, x)$$

Dunque, in particolare, si ha

$$(25) \qquad | f(t, x_0(t_0), \bar{u}_0(t_0)) - Z(\bar{u}_0(t_0)) | < \varepsilon .$$

Avendo fissato $h = h_\varepsilon$ nel modo indicato avanti, della definizione (17) di $\varphi(t, h)$ vediamo che esisterà una successione $[k_m]_{(h)}$ di interi (dipendente da h) tale che

$$\lim_{m \to \infty} k_m = \infty , \quad \varphi(t_0, h) = \lim_{m \to \infty} h^{-1} \int_{t_0}^{t_0+h} d(t) | u_{k_m}(t) - \bar{u}_0(t_0) |^2 \, dt .$$

Dunque, avendo fissato $h = h_\varepsilon$, esistono interi $k = k_m$ grandi quanto si vuole tali che

$$(26) \qquad \left| \varphi(t_0, h) - h^{-1} \int_{t_0}^{t_0+h} d(t) \, | u_k(t) - \bar{u}_0(t) |^2 \, dt \right| < \varepsilon .$$

Per il fissato valore di $h = h_\varepsilon$ e per $k = k_m$ sufficientemente grande si ha pertanto

$$(27) \qquad h^{-1} \int_{t_0}^{t_0+h} d(t) \, | u_k(t) - \bar{u}_0(t) |^2 \, dt < \varphi(t_0, h) + \varepsilon < \psi'(t_0) + 2\varepsilon .$$

Si ha $x_k(t) \to x_0(t)$, $y_k(t) \to y_0(t)$ quando $k \to \infty$ uniformemente e quindi si avrà anche $Z(y_k(t)) \to Z(y_0(t))$ uniformemente, e pertanto possiamo prendere $k = k_m$ in modo tale che insieme con la (27) valgono le relazioni

$$(28) \qquad | x_k(t) - x_0(t) | < h \, \varepsilon, \quad | Z(y_k(t)) - Z(y_0(t)) | < h \, \varepsilon \text{ per ogni } t .$$

Si ha ora

$$f(t_0, x_0(t_0), u_0(t_0)) - f(t_0, x_0(t_0), \bar{u}_0(t_0)) =$$

$$= \left[f(t_0, x_0(t_0), u_0(t_0)) - h^{-1} \int_{t_0}^{t_0+h} f(t, x_0(t), u_0(t)) \, dt \right]$$

$$- [f(t_0, x_0(t_0), \bar{u}_0(t_0)) - Z(\bar{u}_0(t_0))] +$$

$$+ h^{-1}\int_{t_0}^{t_0+h} [Z(\bar{u}_0(t)) - Z(\bar{u}_0(t_0))]\,dt$$

$$+ h^{-1}\int_{t_0}^{t_0+h} [f(t, x_0(t), u_0(t)) - f(t, x_k(t), u_k(t))]\,dt$$

$$+ h^{-1}\int_{t_0}^{t_0+h} [Z(u_k(t)) - Z(\bar{u}_0(t))]\,dt$$

$$+ h^{-1}\int_{t_0}^{t_0+h} [f(t, x_k(t), u_k(t)) - Z(u_k(t))]\,dt$$

$$= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6\,. \tag{29}$$

Si ha $|\sigma_1| < \varepsilon$, $|\sigma_2| < \varepsilon$, $|\sigma_3| < \varepsilon$ in forza delle (21), (25), (24) rispettivamente. In forza della (28) si ha poi

$$|\sigma_4| = |h^{-1}[x_0(t_0+h) - x_0(t_0) - x_k(t_0+h) + x_k(t_0)]| \leq$$
$$\leq h^{-1}[\,|x_k(t_0+h) - x_0(t_0+h)| + |x_k(t_0) - x_0(t_0)|\leq h^{-1}(2\varepsilon h) = 2\varepsilon\,,$$

e analogamente

$$|\sigma_5| = |h^{-1}[Z[y_k(t_0+h) - y_k(t_0) - y_0(t_0+h) + y_0(t_0)]| \leq$$
$$\leq h^{-1}[\,|Z(y_k(t_0+h) - y_0(t_0+h))| + |Z(y_k(t_0) - y_0(t_0))|\,]$$
$$\leq h^{-1}(2\varepsilon h) = 2\varepsilon\,.$$

Si ha

$$|\sigma_6| \leq \varepsilon + h^{-1}\int_{t_0}^{t_0+h} d(t_0)\,|u_k(t) - \bar{u}_0(t_0)|^2\,dt \leq$$

$$\leq \varepsilon + h^{-1}\int_{t_0}^{t_0+h} d(t)\,|u_k(t) - \bar{u}_0(t)|^2\,dt +$$

$$+ h^{-1}\int_{t_0}^{t_0+h} d(t_0)\,|\,|u_k(t) - \bar{u}_0(t_0)|^2 - |u_k(t) - \bar{u}_0(t)|^2\,|\,dt$$

$$+ h^{-1}\int_{t_0}^{t_0+h} |d(t) - d(t_0)|\,|u_k(t) - \bar{u}_0(t)|^2\,dt = \varepsilon + \sigma_{61} + \sigma_{62} + \sigma_{63}.$$

In forza delle (27) e (22) si ha

$$| \sigma_{61} | \leq \psi'(t_0) + 2\varepsilon ,$$

$$| \sigma_{63} | \leq (2N)^2 \cdot h^{-1} \int_{t_0}^{t_0+h} | d(t) - d(t_0) | \, dt \leq (2N)^2 (\varepsilon/N)^2 = 4\varepsilon.$$

Osserviamo che per a, b, c scalari si ha

$$(a - b)^2 - (a - c)^2 = (b - c)(b + c - 2a),$$

e per $| a |$, $| b |$, $| c | \leq N$, si ha anche

$$| a - b |^2 - | a - c)^2 | \leq 4N \, | b - c | .$$

Se ora $a = (a_1, \dots, a_m)$, $b = (b_1, \dots, b_m)$, $c = (c_1, \dots, c_m)$ sono vettori reali con $| a |$, $| b |$, $| c | \leq N$, allora

$$| \, | a - b |^2 - | a - c |^2 \, | = | \, \Sigma_j [(a_j - b_j)^2 - (a_j - c_j)^2 | \, | \leq$$

$$\leq 4N \, \Sigma_j \, | b_j - c_j | = 4Nm \, | b - c | .$$

Pertanto, essendo $0 \leq d(t) \leq M_0$, si ha

$$| \sigma_{62} | \leq M_0 \cdot h^{-1} \int_{t_0}^{t_0+h} | \, | u_k(t) - \bar{u}_0(t_0) |^2 - | u_k(t) - \bar{u}_0(t) |^2 \, | \, dt$$

$$\leq 4mN \, M_0 \cdot h^{-1} \int_{t_0}^{t_0+h} | \bar{u}_0(t) - \bar{u}_0(t_0) |^2 \, dt .$$

In forza della (23) si ha $| \sigma_{62} | \leq 4\varepsilon$, e infine

$$| \sigma_6 | \leq \varepsilon + | \sigma_{61} | + | \sigma_{62} | + | \sigma_{63} | \leq \psi'(t_0) + \varepsilon + 2\varepsilon + 2\varepsilon + 4\varepsilon = \psi'(t_0) + 9\varepsilon ,$$

Dalla (29) si ha infine

$$S(t_0) \equiv | f(t_0, x_0(t_0), u_0(t)) - f(t_0, x_0(t_0), \bar{u}_0(t_0)) | \leq$$

$$\leq | \sigma_1 | + | \sigma_2 | + | \sigma_3 | + | \sigma_4 | + | \sigma_5 | + | \sigma_6 |$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon + 2\varepsilon + \psi'(t_0) + 9\varepsilon = \psi(t_0) + 16\varepsilon .$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario otteniamo $S(t_0) \leq \psi'(t_0)$, e questa relazione vale per quasi ogni t_0 di $[t_1, t_{20}]$. Il teorema 7 è con ciò completamente dimostrato. L'ultima affermazione è una conseguenza del lemma 3.

COROLLARIO. Nelle stesse ipotesi del teorema 7, se esistono due funzioni $\lambda(t)$, $L(t)$, $t_1 \leq t \leq t_{20}$, $0 \leq \lambda(t)$, $L(t) \leq +\infty$, finite quasi ovunque, non negative e misurabili con prodotto $\lambda(t)\, L(t)$ integrabile in $[t_1, t_{20}]$ e tali che per quasi ogni t si abbia

$$| u(t) - \bar{u}_0(t) | \leq \lambda(t) \,| f(t, x_0(t), u_0(t)) - f(t, x_0(t), \bar{u}_0(t)) | ,$$

$$| f_0(t, x_0(t), u_0(t)) - f_0(t, x_0(t), \bar{u}_0(t)) | \leq L(t) \,| u(t) - \bar{u}_0(t) | ,$$

allora si ha anche quasi ovunque in $[t_1, t_2]$

$$| f_0(t, x_0(t), u_0(t)) - f_0(t, x_0(t), \bar{u}_0(t)) | \leq \lambda(t)\, L(t)\, \psi'(t),$$

con

$$\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t)\, L(t)\, \psi'(t)\, dt \leq \nu' \equiv \lim_{k \to \infty} \int_{t_1}^{t_{2k}} \lambda(t)\, L(t)\, d(t)\, | u_k(t) - \bar{u}_0(t) |^2\, dt.$$

DIMOSTRAZIONE. La prima parte è ovvia conseguenza del teorema 7; la seconda parte è una conseguenza del lemma 3.

Le condizioni del teorema 7 sono certamente verificate nell'ipotesi seguente

IPOTESI (β): Esiste una funzione non negativa limitata e misurabile nel senso di Borel $D = D(t, x, u)$, $(t, x, u) \in M_T^*$, con la seguente proprietà: Per ogni $\varepsilon > 0$, $(t_0, x_0) \in E_0 \times D$, $u_0 \in U^*(t_0, x_0)$, esistono un $\delta = \delta(t_0, x_0, u_0, \varepsilon) > 0$ e una funzione lineare $Z(u) = R + Bu$ (R vettore, B matrice di tipo $n \times m$, δ, R, B dipendenti da t_0, x_0, u_0, ε), tali che per ogni $(t, x) \in E_0 \times D$ ad una distanza $\leq \delta$ da (t_0, x_0) risulta

$$(30) \qquad | f(t, x, u) - Z(u) | \leq \varepsilon + D\, | u - u_0 |^2 \quad \text{per ogni } u \in U^*(t, x).$$

Infatti la funzione

$$d(t) = D(t, x_0(t), \bar{u}_0(t)), \ t_1 \leq t \leq t_{20},$$

è misurabile ([8]).

([8]) loc. cit. in ([5]).

Finalmente la condizione (β) è certamente soddisfatta se per ogni $(t, x) \in E_0 \times D$, $f(t, x, u)$ è di classe C^2 in $u = (u_1, \dots, u_m)$, con derivate parziali seconde continue in M_T^*, e

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{hk} f_{ihk}(t, x, u)\, \xi_h \xi_k \right| \leq 2D(t,x,u)\, (\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2)$$

ove $f_{ihk} = \partial^2 f_i / \partial u_h \partial u_k$ e la somma Σ_{hk} è presa per tutti gli $h, k = 1, \dots, m$.

Le ulteriori ipotesi del corollario sono certamente verificate nell'ipotesi seguente:

IPOTESI (γ). (γ_1) Esistono due funzioni $A(t, x, u)$, $L(t, x, u)$, $(t, x, u) \in M_T^*$, entrambe non negative e misurabili nel senso di Borel, con eventuali punti di infinito le cui coordinate t coprono al più un insieme di misura zero, con le seguenti proprietà:

$$(\gamma_1) \qquad |f_0(t, x, u) - f_0(t, x, u_0)| \leq L(t, x, u_0)\, |u - u_0|$$

per ogni $(t, x) \in E_0 \times D$ e per ogni due punti $u, u_0 \in U^*(t, x)$; (γ_2) se, per ogni $(t, x) \in E_0 \times D$, per ogni n-vettore $z_0 = f(t, x, u_0)$, $u_0 \in U^*(t, x)$, e per ogni altro n-vettore $z \in f(t, x, U^*(t, x))$ si prende $z = f(t, x, u)$, $u \in U^*(t, x)$, con $|u - u_0| =$ minimo, allora risulta

$$|u - u_0| \leq A(t, x, u_0)\, |z - z_0|.$$

La condizione (γ_2) ovviamente non richiede la condizione di monotoneità di f nel vettore u, condizione che sarebbe impossibile da verificare se, ad esempio, è $n < m$. Tuttavia, per $n \geq m$, la condizione (γ_2) è certamente verificata se f è monotona in u e di più se

$$|u - u_0| \leq A(t, x, u_0)\, |f(t, x, u) - f(t, x, u_0)|$$

per ogni $(t, x) \in E_0 \times D$ e per ogni due punti $u, u_0 \in U^*(t, x)$.

In ogni caso si noti che se $x'(t) = f(t, x(t), u_0(t))$ quasi ovunque in $[t_1, t_{20}]$ per qualche funzione di controllo $u_0(t)$ con valori in $U(t, x(t))$, e se $\bar{u}_0(t)$ è una data funzione misurabile con valori in $U^*(t, x(t))$ e del resto arbitraria, allora esiste sempre un'altra funzione $v_0(t)$ con valori in $U^*(t, x(t))$, misurabile in $[t_1, t_{20}]$, tale che quasi ovunque in $[t_1, t_{20}]$ si abbia ancora $x'(t) = f(t, x(t), v_0(t))$, e tale che per ogni t si abbia $|v_0(t) - \bar{u}_0(t)| =$ minimo. Si deve solo applicare il lemma 2.

6. Teorema di esistenza.

Possiamo ora dimostrare il

TEOREMA 8 (di esistenza del minimo). Nelle condizioni (C), (C′), (I), (α), (β), (γ), si assuma che

$$\Lambda(t, x, u)\ L(t, x, u)\ D(t, x, u) \leq C(t, x, u), \qquad (t, x, u) \in M_T^*,$$

dove il segno $=$ vale al più per punti $(t, x, u) \in M_T^*$ i cui valori t coprono al più un insieme di misura nulla di E_0. Supponiamo che x_{20} sia accessibile entro il tempo T partendo dal punto x_{10} al tempo t_1. Allora esiste una soluzione ottima $u_0(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2 \leq T$, $u_0(t) \in K$, per il problema di Pontryagin

$$I[u] = \int_{t_1}^{t_2} f_0(t, x(t), u(t))\, dt = \text{minimo}, \quad u(t) = (u_1, \dots, u_m) \in K, \tag{31}$$

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \ t_1 \leq t \leq t_2, \ f = (f_1, \dots, f_n), \ x = (x_1, \dots, x_n), \tag{32}$$

$$x(t_1) = x_{10}, \ x(t_2) = x_{20}, \ t_1 \leq t_2 \leq T, \ t_1, x_{10}, x_{20}, T \text{ fissi}. \tag{33}$$

Di più, se $u_k(t)$, $t_1 \leq t \leq t_{2k} \leq T$, $u_k(t) \in K$, $k = 1, 2, \dots$, è una successione minimizzante, poniamo al solito

$$x_0(t) = x_{10} + \int_{t_1}^{t} f(s, x_0(s), u_0(s))\, ds, \quad y_0(t) = \int_{t_1}^{t} \bar{u}_0(s)\, ds, \quad t_1 \leq t \leq t_2, \tag{34}$$

$$x_k(t) = x_{10} + \int_{t_1}^{t} f(s, x_k(s), u_k(s))\, ds, \quad y_k(t) = \int_{t_1}^{t} u_k(s)\, ds, \quad t_1 \leq t \leq t_{2k}, \tag{35}$$

$$k = 1, 2, \dots,$$

$$c(t) = C(t, x_0(t), u_0(t)), \qquad d(t) = D(t, x_0(t), u_0(t)), \tag{36}$$

$$\lambda(t) = \Lambda(t, x_0(t), u_0(t)), \qquad L(t) = L(t, x_0(t), u_0(t)), \tag{37}$$

ove $u_k(t)$, $u_0(t) \in U(t, x_0(t))$, $\bar{u}_0(t) \in U^*(t, x_0(t))$ per ogni t, ove $x_k(t_{2k}) = x_{20}$, $x_0(t_2) = x_{20}$, e supponiamo che $[x_k(t), y_k(t)] \to [x_0(t), y_0(t)]$ nella metrica Δ. Allora si ha

$$\lim_{k \to \infty} \int_{t_1}^{\bar{t}_{2k}} [c(t) - \lambda(t)\, L(t)\, d(t)]\, |u_k(t) - \bar{u}_0(t)|^2\, dt = 0. \tag{38}$$

Se $U(t, x)$ è sempre convesso, onde $U = U^*$, allora la condizione (C) può sostituire la condizione (C′). In tale situazione e se $c(t) - \lambda(t)\, L(t)\, d(t) \geq \sigma > 0$ per qualche costante $\sigma > 0$, allora si può sempre assumere $u_0(t) = \bar{u}_0(t)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $i = \operatorname{Inf} I[u]$ nella classe $K_0 \subset K$ di tutte le funzioni di controllo ammissibili $u(t)$ con traiettoria $x(t)$ soddisfacente le condizioni ai limiti (33). Essendo K_0 non vuota, ed essendo $f_0(t, x, u)$ continua e limitata in M_T, certamente i è finito. Sia $u_k(t)$, $t_1 \leq t \leq t_{2k}$, $u_k(t) \in K_0$ $k = 1, 2, \dots$, una successione minimizzante. Possiamo assumere

$$i \leq I[u_k] < i + k^{-1}, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Considerate le corrispondenti funzioni $x_k(t)$, $y_k(t)$ soddisfacenti le (35) e (33) sappiamo che $x_k(t) \in \Gamma$, $X_k = [x_k(t), y_k(t)] \in \Gamma'$, con $t_1 \leq t \leq t_{2k} \leq T$. In forza del teorema 2 sappiamo che esiste almeno un elemento di accumulazione $X_0 = [x_0(t), y_0(t)] \in \overline{\Gamma'}$ nella metrica Δ, con $x_0(t) \in \Gamma$, e $t_1 \leq t \leq t_2 \leq T$, e pertanto esiste una sottosuccessione $[X_{k_s}]$ convergente nella metrica Δ con limite X_0. Per semplicità di notazioni supporremo che $[X_{k_s}]$ coincida con $[X_k]$. Come si è fatto notare nel teorema 2, l'elemento limite X_0 soddisfa le relazioni (6), ossia le relazioni (34) del presente teorema con funzioni $u_0(t), \bar{u}_0(t)$ che possono essere distinte, con valori $u_0(t) \in U(t, x_0(t))$, $\bar{u}_0(t) \in U^*(t, x_0(t))$, $t_1 \leq t \leq t_2$. Poniamo

$$\Omega'' = \overline{\lim_{k \to \infty}} \int_{t_1}^{\bar{t}_{2k}} [c(t) - \lambda(t)\, L(t)\, d(t)]\, |\, u_k(t) - \bar{u}_0(t)\, |^2\, dt, \tag{39}$$

ove $\bar{t}_{2k} = \max[t_2, t_{2k}]$ e ove usiamo le convenzioni usuali circa l'estensione delle funzioni sotto il segno di integrale al di fuori del loro intervallo di definizione. L'espressione in parentesi quadra è una funzione non negativa, limitata e misurabile. Pertanto se Ω' è il $\underline{\lim}$ della stessa espressione come nella (39), abbiamo $0 \leq \Omega' \leq \Omega'' < +\infty$.

Come si è notato in principio, $u_0(t)$ è definito solo dalle relazioni (34), ossia $x_0'(t) = f(t, x_0(t), u_0(t))$, $t_1 \leq t \leq t_2$, quasi dappertutto. Assumeremo per $u_0(t)$ quella funzione misurabile in $[t_1, t_2]$ con valori $u_0(t) \in U(t, x_0(t))$, $t_1 \leq t \leq t_2$, e con $|\, \bar{u}_0(t) - u_0(t)\, | =$ minimo per ogni t, la cui esistenza è garantita dal lemma 2.

Dato $\varepsilon > 0$ sappiamo dal teorema 4 che per tutti i k sufficientemente grandi si ha

$$i + k^{-1} > I[u_k] > \int_{t_1}^{t_2} f_0(t, x_0(t), \bar{u}_0(t))\, dt - \varepsilon + \int_{t_1}^{\bar{t}_{2k}} c(t)\, |\, u_k(t) - \bar{u}_0(t)\, |^2\, dt . \tag{40}$$

In forza del corollario del teorema 7 si ha ora

$$(41)\qquad \begin{aligned} &|f_0(t, x_0(t), u_0(t)) - f_0(t, x_0(t), \bar{u}_0(t))| \leq \lambda(t) L(t) \psi'(t), \\ &\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) L(t) \psi'(t)\, dt \leq \varliminf_{k \to \infty} \int_{t_1}^{\bar{t}_{2k}} \lambda(t) L(t) d(t) |u_k(t) - \bar{u}_0(t)|^2\, dt, \end{aligned}$$

la prima relazione essendo verificata per quasi ogni t. Dunque si ha

$$(42)\qquad \begin{aligned} &\left| \int_{t_1}^{t_2} f_0(t, x_0(t), u_0(t))\, dt - \int_{t_1}^{t_2} f_0(t, x_0(t), \bar{u}_0(t))\, dt \right| \leq \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) L(t) \psi'(t)\, dt \leq \varliminf_{k \to \infty} \int_{t_1}^{\bar{t}_{2k}} \lambda(t) L(t) d(t) |u_k(t) - \bar{u}_0(t)|^2\, dt. \end{aligned}$$

Per ogni k sufficientemente grande si ha pertanto

$$(43)\qquad \begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} f_0(t, x_0(t), u_0(t))\, dt \\ &< \int_{t_1}^{t_2} f_0(t, x_0(t), \bar{u}_0(t))\, dt + \varepsilon + \int_{t_1}^{\bar{t}_{2k}} \lambda(t) L(t) d(t) |u_k(t) - \bar{u}_0(t)|^2\, dt. \end{aligned}$$

Si noti che $u_0(t) \in K_0$ e quindi

$$(44)\qquad i \leq \int_{t_1}^{t_2} f_0(t, x_0(t), u_0(t))\, dt.$$

Combinando le relazioni (44), (43), (40), otteniamo successivamente

$$(45)\qquad \begin{aligned} &i \leq \int_{t_1}^{t_2} f_0(t, x_0(t), u_0(t))\, dt < \\ &< \left[\varepsilon + \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) L(t) d(t) |u_k(t) - \bar{u}_0(t)|^2\, dt\right] + \end{aligned}$$

$$+\left[i + k^{-1} + \varepsilon - \int_{t_1}^{t_2} c\,(t) \mid u_k(t) - \bar{u}_0(t) \mid^2 dt\right]$$

$$= i + k^{-1} + 2\varepsilon - \int_{t_1}^{\bar{t}_2} [c\,(t) - \lambda\,(t)\, L\,(t)\, d\,(t)] \mid u_k(t) - \bar{u}_0(t) \mid^2 dt.$$

Dunque

$$\int_{t_1}^{\bar{t}_{2k}} [c\,(t) - \lambda\,(t)\, L\,(t)\, d\,(t)] \mid u_k(t) - \bar{u}_0(t) \mid^2 dt < k^{-1} + 2\varepsilon$$

per tutti i k sufficientemente grandi. Se prendiamo il $\overline{\lim}$ del primo membro, abbiamo perciò

$$\Omega'' \leq k^{-1} + 2\varepsilon \tag{46}$$

per ogni k sufficientemente grande. Dunque $\Omega'' < 2\varepsilon$ e finalmente $\Omega'' = 0$.

Dalla relazione (45) deduciamo ora

$$i \leq \int_{t_1}^{t_2} f_0\,(t, x_0(t), u_0(t))\, dt \leq i + k^{-1} + 2\varepsilon$$

per ogni k sufficientemente grande. Facendo prima tendere k ad ∞, e poi ε a zero, otteniamo

$$I\,[u_0] = \int_{t_1}^{t_2} f_0\,(t, x_0(t), u_0(t))\, dt = i.$$

Dunque, $u_0(t)$ è ottimale. D'altra parte, $\Omega'' = 0$ e quindi $0 = \Omega' = \Omega''$, ciò che prova la (38).

Nella situazione considerata alla fine dell'enunciato del teorema si ha $c\,(t) - \lambda\,(t)\, L\,(t)\, d\,(t) \geq \sigma > 0$ per qualche costante $\sigma > 0$. Allora la (38) impliça

$$\lim_{k \to \infty} \int_{t_1}^{\bar{t}_{2k}} \mid u_k(t) - \bar{u}_0(t) \mid^2 dt = 0,$$

e quindi anche

$$\lim_{k \to \infty} \int_{t_1}^{\bar{t}_{2k}} \lambda\,(t)\, L\,(t)\, d\,(t) \mid u_k(t) - \bar{u}_0(t) \mid^2 dt = 0,$$

essendo $\lambda(t) L(t) d(t) \leq c(t)$ una funzione limitata. Pertanto, dalle relazioni (41) e da $U = U^*$ otteniamo

$$f_0(t, x_0(t), u_0(t)) = f_0(t, x_0(t), \bar{u}_0(t)), \qquad \bar{u}_0(t) \in U(t, x_0(t)),$$

quasi dappertutto. Questo significa che $\bar{u}_0(t)$ è una delle funzioni di controllo generanti $x_0(t)$, e perciò possiamo sempre prendere $u_0(t) = \bar{u}_0(t)$. Il teorema di esistenza è completamente dimostrato.

Osservazione. Nel teorema 8 di esistenza l'ipotesi che x_{20} sia accessibile può essere sostituita dall'ipotesi che x_{20} sia punto di accumulazione di punti $x'_{20} \in E_n$, che sono accessibili (tutti in tempi $t'_2 \leq T$ e a partire da x_{10} al tempo t_1). La dimostrazione è la stessa purchè $i = \operatorname{Inf} I[u]$ venga sostituito dal numero i' definito come segue. Si prenda $\varrho > 0$ e si consideri la sottoclasse K_ϱ di tutte le funzioni di controllo $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2 \leq T$, la cui traiettoria $x(t)$ ha elemento finale $x_2 = x(t_2)$ ad una distanza $< \varrho$ da x_{20}. Le sottoclassi K_ϱ sono non vuote per ipotesi. Si prenda ora

$$i' = \lim_{\varrho \to 0+} \operatorname*{Inf}_{u \in K_\varrho} I[u].$$

La dimostrazione del teorema 8 è ora la stessa con ovvie modificazioni, e se ne conclude che $u_0(t) \in K_0$, onde K_0 è non vuota, e che $i = i'$, ossia $I[u_0] = i = i'$.

Se introduciamo con Pontryagin la variabile ausiliaria x_0 e prendiamo

$$x_0(t) = \int_{t_1}^{t} f_0(s, x_0(s), u_0(s))\, ds, \qquad t_1 \leq t \leq t_2,$$

allora lo stesso ragionamento dimostra che l'insieme J^* dei punti $(t_2, x_{02}, x_{12}, \dots, x_{n2})$ con $t_1 \leq t_2 \leq T$, che sono «accessibili» partendo dal punto $(t_1, 0, x_{11}, \dots, x_{n1})$ (nello spazio E_{n+2}) è anche chiuso e quindi compatto. In questa forma il teorema 8 diventa l'analogo del teorema di E. Roxin (9). L'esistenza del minimo assoluto (teorema 8 attuale) è allora una conseguenza della compattezza di J^*. Infatti J^* conterrà almeno un punto $(t_2, x_{02}, x_{12}, \dots, x_{n2})$ con $t_1 \leq t_2 \leq T$ e x_{02} minimo, come E. Roxin ha fatto notare.

Finalmente possiamo sostituire al bersaglio puntiforme e fisso x_{20} nel teorema 8, un « bersaglio esteso e mobile » $B(t)$ come troviamo nel risultato di L. Markus ed E. B. Lee (10) in corrispondenza del lora teorema esisten-

(9) loc. cit. in (2).

(10) loc. cit. in (3).

ziale. Precisamente, supporremo con questi autori che $B(t)$, $t_1 \leq t \leq T$, è un sottoinsieme variabile di E_n tale che (a) per ogni t l'insieme $B(t)$ è chiuso, $t_1 \leq t \leq T$; (b) $B(t)$ varia con continuità, cioè supponiamo che, dato $\varepsilon > 0$, esista un $\delta > 0$ tale che per ogni $\bar{t}, t \in [t_1, T]$ con $|t - \bar{t}| < \delta$ risulti $B(t) \subset [B(\bar{t})]_\varepsilon$, $B(\bar{t}) \subset [B(t)]_\varepsilon$ ove adoperiamo le stesse notazioni come nell'ipotesi (C). La dimostrazione del teorema è la stessa con modificazioni analoghe alle precedenti.

Di più il teorema 8 e tutte le considerazioni di questa osservazione valgono ovviamente anche se t_2 è fisso insieme con t_1, x_{10}, x_{20}. Ancora ci si può limitare alle traiettorie $x(t)$ e corrispondenti funzioni di controllo $u(t)$ tali che $(t, x)) \in A$, $t_1 \leq t \leq t_2$, ove A è un dato insieme chiuso dello spazio $E_1 \times E_n$ dei punti (t, x). Si deve soltanto supporre che x_{20} sia accessibile da x_{10} mediante tale tipo di traiettorie.

OSSERVAZIONE. Ricordiamo che, se $f_0 \geq \nu > 0$ per qualche costante $\nu > 0$, allora la limitazione $t_2 \leq T$ può essere abbandonata. Infatti, se un punto x_{20} è accessibile, e $u(t)$ è una funzione di controllo $u(t) \in K$ con corrispondente traiettoria $x(t)$ tale che $x(t_2) = x_{20}$ e j è il corrispondente valore dell'integrale $I[u]$, allora, preso $T = t_1 + j\nu^{-1}$, tutte le strategie $u(t)$ che conducono ad x_{20} in un tempo $> T$ danno per l'integrale $I[u]$ un valore $> \nu(T - t_1) = j$, e pertanto possono essere trascurate.

OSSERVAZIONE. Nelle condizioni del teorema di esistenza 8 il sistema di equazioni differenziali $x' = f(t, x, u(t))$ non soddisfa necessariamente alcuna condizione di unicità locale.

Nelle righe seguenti diamo esempi di problemi di Pontryagin a cui si può applicare il teorema 8, ma non si può applicare quello di Filippov. Tuttavia, si potrebbero dare esempi in cui il teorema di Filippov si applica e non il teorema 8. Il teorema di Filippov e il teorema 8 sono indipendenti.

ESEMPIO 5. Sia $m = n = 1$. Consideriamo il problema di Pontryagin

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (x^2 + u^2 + 1)\, dt = \text{minimo},$$

$$x' = Au + u^2,\quad x,\ u \text{ scalari},\quad u \in U,\quad U = [-1 \leq u \leq 1],$$

$$t_1 = 0,\quad x(0) = 1,\quad x(t_2) = 1,$$

ove A è una costante $A > 4$. Si ha

$$f_0 = x^2 + u^2 + 1,\quad f_{0u} = 2u,\quad f_{0uu} = 2,$$

$$f = f_1 = Au + u^2,\quad f_u = A + 2u,\quad f_{uu} = 2,$$

onde si può prendere

$$C = 1, \quad D = 1, \quad \Lambda = (A - 2)^{-1}, \quad L = 2,$$

essendo f sempre crescente e $f_u = A + 2u \geq A - 2 > 0$. Di più U è un segmento e $Q = f(U)$ è anche un segmento (essendo $n = 1$), precisamente il segmento $[-A + 1 \leq z \leq A + 1]$ dell'asse z. Dunque entrambi U e Q sono fissi, compatti e convessi. La disuguaglianza $\Lambda LD < C$ si riduce alla relazione $A > 4$ che è soddisfatta. Si ha poi $f_0 \geq 1$, e il punto $x = 1$ è certo accessibile da $x = 0$, dato che per $u = 1$ si ha $x' = A + 1 > 5$, e $x = 1$ è raggiunto con un $t_2 < 1/5$. In forza del teorema 8, il problema di cui sopra ammette una soluzione ottimale.

Si noti che si ha qui $\tilde{f} = (f_0, f_1)$ e, per ogni x, l'insieme $\tilde{Q} = \tilde{f}(U)$ è l'arco di curva del piano $z_0 z_1$:

$$z_0 = x^2 + u^2 + 1, \quad z_1 = Au + u^2, \quad -1 \leq u \leq 1,$$

e $\tilde{Q}$ non è un insieme convesso. Pertanto il teorema di Filippov non si applica.

Esempio 6. Sia $m = 2$, $n = 1$. Consideriamo il problema di Pontryagin

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (u^2 + v^2 + x^2 + 1)\, dt = \text{minimo},$$

$$x' = u^2 + 2v^2 + Au + x, \quad u, v, x \text{ scalari}, \quad (u, v) \in U = [\,|u| + |v| \leq 1],$$

$$t_1 = 0, \quad x(0) = 1, \quad x(t_2) = 1,$$

ove A è una costante, $A > 10$. Si noti che U è completamente contenuto nel cerchio $u^2 + v^2 \leq 1$. Si ha

$$f_0 = u^2 + v^2 + x^2 + 1,\ f_{0u} = 2u,\ f_{0v} = 2v, \ |\operatorname{grad} f_0| = 2\,(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \leq 2,$$

$$f_{0uu} = 2, \quad f_{0vv} = 2, \quad f_{0uv} = 0,$$

$$f_1 = u^2 + 2v^2 + Au + x, \quad f_{1u} = 2u + A, \quad f_{1v} = 4v, \quad |\operatorname{grad} f_1| \geq A - 2,$$

$$f_{1uu} = 2, \quad f_{1vv} = 4, \quad f_{1uv} = 0.$$

Ovviamente possiamo prendere $C = 1$, $D = 2$, $L = 2$. Dobbiamo ora trovare un possibile valore di Λ. Prima di tutto notiamo che $f_1(u, v, x)$ ha valori minimo e massimo su U che sono $-A + 1 + x$ e $A + 1 + x$, e che sono assunti rispettivamente nei vertici $(-1, 0)$, $(1, 0)$ di U. Sia $z_0 = f_1(u_0, v_0, x)$ un valore assunto da f_1 in qualche punto diciamo $w_0 = (u_0, v_0)$ di U (per qualche x fisso). Sia z_1 un'altro valore pure assunto da f_1 su U (per lo stesso x), e diciamo $w_1 = (u_1, v_1)$ il punto di U più vicino a w_0 ove $z_1 = f_1(u_1, v_1, x)$. Diciamo S il segmento di U congiungente $w_0 = (u_0, v_0)$ con $(-1, 0)$ se $z_1 < z_0$, e con $(1, 0)$ se $z_1 > z_0$. Dunque f_1 assume certamente il valore z_1 in un punto $\bar{w} = (\bar{u}, \bar{v})$ di S, e quindi $|w_1 - w_0| \leq |\bar{w} - w_0|$. D'altra parte i coseni direttori di S sono $\alpha_1 \geq 2^{-\frac{1}{2}}$, $\alpha_2 \leq 2^{-\frac{1}{2}}$, e quindi la derivata direzionale di f_1 lungo S presa nel senso delle u crescenti è

$$df_1/ds = f_{1u}\,\alpha_1 + f_{1v}\,\alpha_2 = (A + 2u)\,\alpha_1 + 4v\,\alpha_2 \geq 2^{-\frac{1}{2}}(A + 2u - 4\,|\,v\,|).$$

La funzione $3 = 2u - 4\,|\,v\,|$ ha il suo minimo valore -4 su U, e tale minimo valore è assunto nei due punti $(0, \pm 1)$. Dunque $df_1/ds \geq 2^{-\frac{1}{2}}(A - 4)$ lungo S e quindi

$$|\,w_1 - w_0\,| \leq |\,\bar{w} - w_0\,| \leq 2^{\frac{1}{2}}(A - 4)^{-1}\,|\,z_1 - z_0\,|.$$

Possiamo prendere $\Lambda = 2^{\frac{1}{2}}(A - 4)^{-1}$. La disuguaglianza $\Lambda LD < C$ si riduce ora a $A > 4 + 4\sqrt{2}$ che è certamente soddisfatta. Si noti che $Q = f(U)$ è un segmento (essendo $n = 1$), e quindi Q ed U sono entrambi convessi e compatti. Si ha poi $f_0 \geq 1$, e il punto $x = 1$ è certo accessibile da $x = 0$ dato che, per $u = 1$, $v = 1$ si ha $x' = A + 1 + x$, e la corrispondente soluzione $x(t)$ con $x(0) = 0$ certamente supera il valore $x = 1$ in un tempo finito. In forza del teorema 8 il problema di cui sopra ammette una soluzione ottimale.

Si noti che si ha qui $\tilde{f} = (f_0, f_1)$ e, per ogni x, l'insieme $\tilde{Q} = \tilde{f}(U)$ è l'insieme piano di tutti i punti (z_0, z_1) con $z_0 = f_0$, $z_1 = f_1$, $|\,u\,| + |\,v\,| \leq 1$. Qui z_0 può avere il suo valore massimo $x^2 + 2$ soltanto nei quattro vertici $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ di U, e a questi punti corrispondono punti (z_0, z_1) con $z_0 = x^2 + 2$, $z_1 = A + 1 + x$, oppure $z_1 = -A + 1 + x$, oppure $z_1 = 2 + x$. Dato che questi sono i soli punti di $\tilde{Q}$ con ascissa z_0 massima $z_0 = x^2 + 2$, è chiaro che $\tilde{Q}$ non è convesso. Pertanto il teorema di Filippov non si applica.

ESEMPIO 7. Sia $m = 1$, $n = 2$. Consideriamo il problema di Pontryagin

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (x^2 + y^2 + u^2 + 1)\,dt = \text{minimo},$$

$$x' = 2\,(u + 1)\,(u + 1 + A),$$

$$y' = -1 + (u+1)(u+1+A),$$

$$u \in U, \quad U \equiv [-1 \leq u \leq 1], \quad x, y, u \quad \text{scalari},$$

$$t_1 = 0, \ x(0) = 0, \ y(0) = 0, \ x(t_2) = x_{12}, \ y(t_2) = y_{12},$$

ove A è una costante $A > 2$. Si ha

$$f_0 = x^2 + y^2 + u^2 + 1, \quad f_{0u} = 2u, \quad f_{0uu} = 2,$$

$$f_1 = 2(u+1)(u+1+A) = 2(u+1)^2 + 2A(u+1),$$

$$f_2 = -1 + (u+1)(u+1+A) = (u+1)^2 + A(u+1) - 1,$$

e pertanto, se $f = (f_1, f_2)$, l'insieme $Q = f(U)$ è un segmento 1 della retta $z_1 - 2z_2 = 2$. Dunque U e Q sono entrambi convessi e compatti. Se $z(u) = (u+1)^2 + A(u+1)$, vediamo che $z_u = 2(u+1) + A \geq A$, e $z_{uu} = 2$, e pertanto $\operatorname{grad} f \geq \sqrt{5}\, A$. Possiamo prendere

$$C = 1, \quad L = 2, \quad A = (\sqrt{5}\, A)^{-1}, \quad D = \sqrt{5}.$$

Pertanto la disuguaglianza $ALD < C$ si riduce ad $A > 2$. Si ha poi $f_0 \geq 1$. In forza del teorema 8 il problema di cui sopra ammette una soluzione ottimale per ciascun punto (x_2, y_2) che è accessibile.

Si noti che $\tilde{f} = (f_0, f_1, f_2)$ e che, per ogni x, l'insieme $\tilde{Q} = \tilde{f}(U)$ è la curva dello spazio $z_0 z_1 z_2$ con $z_0 = f_0$, $z_1 = f_1$, $z_2 = f_2$, $-1 \leq u \leq 1$. Qui la coordinata z_0 raggiunge il suo valore massimo $x^2 + y^2 + 2$ soltanto nei punti estremi di $\tilde{Q}$, cioè nei punti $(x^2 + y^2 + 2, 0, -1)$, $(x^2 + y^2 + 2, 4(A+2), 4(A+2) - 1)$, e quindi $\tilde{Q}$ non è un insieme convesso. Il teorema di Filippov non si applica.

ESEMPIO 8. Sia $m = n = 2$. Si consideri il problema di Pontryagin

$$I = \int_0^{t_2} (x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + 1)\, dt = \text{minimo},$$

$$x' = Au, \quad y' = (1-v)u^2 + Bv, \quad (u, v) \in U = [-1 \leq u \leq 1, \ 0 \leq v \leq 1],$$

$$x(0) = y(0) = 0, \quad x(t_2) = 0, \quad y(t_2) = 1,$$

ove A, B sono costanti, $A \geq 6$, $B \geq 11$.

Si ha

$$f_0 = x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + 1, \quad f = (f_1, f_2),$$

e prendiamo

$$X = f_1 = Au, \quad Y = f_2 = (1 - v)\, u^2 + Bv.$$

Anzitutto il rettangolo U è trasformato da f nella regione $Q = f(U) \equiv \equiv [-A \leq X \leq A,\ A^{-2} X^2 \leq Y \leq B]$, certamente convessa. Si ha poi

$$|f_0(u_1, v_1) - f_0(u_2, v_2)| = |(u_1 - u_2)(u_1 + u_2) + (v_1 - v_2)(v_1 + v_2)|$$

$$\leq [(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2]^{\frac{1}{2}} [(u_1 + u_2)^2 + (v_1 + v_2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq 2^{\frac{3}{2}} [(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

e pertanto $L = 2^{\frac{3}{2}}$. Si ha poi

$$f_{0uu} = 2, \quad f_{0uv} = 0, \quad f_{0vv} = 2,$$

e quindi si può prendere $C = 1$. Si ha ora

$$X_1 - X_2 = A(u_1 - u_2),$$

$$\begin{aligned} Y_1 - Y_2 &= [(1 - v_1)\, u_1^2 + Bv_1] - [(1 - v_2)\, u_2^2 + Bv_2] = \\ &= B(v_1 - v_2) + (1 - v_1)(u_1^2 - u_2^2) + u_2^2 [(1 - v_1) - (1 - v_2)] \\ &= (B - u_2^2)(v_1 - v_2) + (1 - v_1)(u_1 - u_2)(u_1 + u_2). \end{aligned}$$

Essendo $B - u_2^2 \geq B - 1$, otteniamo

$$v_1 - v_2 = \frac{1}{B - u_2^2} [(Y_1 - Y_2) - (1 - v_1)(u_1 - u_2)(u_1 + u_2)],$$

$$|v_1 - v_2| \leq \frac{1}{B - 1} \left[|Y_1 - Y_2| + \frac{2}{A} |X_1 - X_2| \right],$$

e quindi

$$(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 \leq \frac{1}{A^2}(X_1 - X_2)^2 +$$

$$+ \frac{1}{(B-1)^2}[(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2]\left(1 + \frac{4}{A^2}\right)$$

$$= \left[\frac{1}{A^2} + \frac{1}{(B-1)^2}\left(1 + \frac{4}{A^2}\right)\right](X_1 - X_2)^2 + \frac{1}{(B-1)^2}\left(1 + \frac{4}{A^2}\right)(Y_1 - Y_2)^2.$$

Essendo $A \geq 6$, $B \geq 11$, otteniamo

$$\frac{1}{(B-1)^2}\left(1+\frac{4}{A^2}\right) \leq \frac{1}{100}\left(1+\frac{4}{36}\right) = \frac{1}{100}\,\frac{10}{9} = \frac{1}{90} < \frac{4}{81},$$

$$\frac{1}{A^2} + \frac{1}{(B-1)^2}\left(1+\frac{4}{A^2}\right) \leq \frac{1}{36} + \frac{1}{100}\left(1+\frac{4}{36}\right) = \frac{1}{36} + \frac{1}{90} < \frac{4}{81},$$

e infine

$$(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 \leq \frac{4}{81}\,[(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2].$$

Possiamo prendere perciò $A = \dfrac{2}{9}$. Finalmente

$$X_{uu} = X_{uv} = X_{vv} = X_{vv} = 0,\quad Y_{uu} = 2(1-v),\quad Y_{uv} = -2u,\quad Y_{vv} = 0,$$

$|Y_{uu}| \leq 2$, $|Y_{uv}| \leq 2$, e

$$|\xi^2 + 2\,\xi\,\eta| \leq \xi^2 + \xi^2 + \eta^2 \leq 2(\xi^2 + \eta^2).$$

Possiamo prendere $D = 1$. Si ha infine

$$A\,L\,D = \frac{2}{9}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 1 = \frac{4\sqrt{2}}{9} < 1 = C.$$

Le condizioni del teorema 8 sono soddisfatte, ed esiste perciò una soluzione ottimale per ogni punto (x, y) che è accessibile. Per esempio $x = 0$, $y = 1$, è accessibile, dato che, se prendiamo $u = 0$, $v = 1$, otteniamo $x' = 0$, $y' = B$ e pertanto $x \equiv 0$, $y \equiv Bt$, e il punto $x = 0$, $y = 1$, è certo raggiunto. Si noti che in questo esempio f_2 non è funzione monotona di u.

Si noti che $\tilde{f} = (f_0, f_1, f_2)$ e $\tilde{Q} = \tilde{f}(U)$ è un insieme di punti (Z, X, Y) con $Z = f_0$. L'insieme $\tilde{Q}$ contiene i punti $(3 + x^2 + y^2, 1, B)$, $(3 + x^2 + y^2, -1, B)$ di coordinata Z massima, ma nessun punto del segmento che li congiunge appartiene a $\tilde{Q}$. Pertanto $\tilde{Q}$ non è convesso e il teorema di Filippov non si applica.

Esempio 9. Sia $m = 2$, $n = 1$. Consideriamo il problema di Pontryagin

$$\mathrm{I}[u] = \int_{t_1}^{t_2} (x^2 + u^2 + v^2 + 1)\,dt = \text{minimo},$$

$$x' = (1 - v^2)u^2 + Bv,\quad (u, v) \in U = [-1 \leq u \leq 1,\ -1 \leq v \leq 1],$$

$$t_1 = 0,\ x(0) = y(0) = 0,\quad x(t_2) = 0,\ y(t_2) = 1,$$

ove $B \geq 8$ è una costante.

Si ha $f_0 = x^2 + u^2 + v^2 + 1$ e si può prendere, come nell'esempio 8, $C = 1$, $L = 2\sqrt{2}$. Prendiamo $X = f = f_1 = (1 - v^2)u^2 + uv$. Allora $X_v = B - 2vu^2 \geq$ $\geq B - 2 > 0$ e quindi $X_v > 0$, e X è crescente con v. Per $v = -1$ si ha $X = -B$, per $v = +1$ si ha $x = B$, indipendentemente da u. Dunque $Q = f(U)$ è l'intervallo $Q \equiv [-B \leq X \leq B]$.

Dati $X_0 = (1 - v_0^2)\,u_0^2 + Bv_0$ e ogni $X \neq X_0$, $-B \leq X \leq B$, esiste un v tale che $X = (1 - v^2)\,u_0^2 + Bv$ e si ha

$$X - X_0 = (v_0^2 - v^2)u_0^2 + B\,(v - v_0),$$

$$|\,X - X_0\,| = |\,(v - v_0)\,[B - (v + v_0)\,u_0^2]\,| \geq |\,v - v_0\,|\,(B - 2)$$

e $|\,v - v_0\,| \leq (B - 2)^{-1}\,|\,X - X_0\,|$. Dunque, se $(\bar{u}, \bar{v})$ è il punto di U con $X = (1 - \bar{v}^2)\,\bar{u}^2 + B\,\bar{v}$ ad una distanza minima da (u_0, v_0), si ha

$$[(\bar{u} - u_0)^2 + (\bar{v} - v_0)^2]^{\frac{1}{2}} \leq |\,v - v_0\,| \leq (B - 2)^{-1}\,|\,X - X_0\,|.$$

Ciò dimostra che si può prendere $A = (B - 2)^{-1}$. Si ha ora

$$f_{uu} = 2\,(1 - v^2), \quad f_{uv} = -\,4uv, \quad f_{vv} = -\,2u^2,$$

$$|f_{uu}| \leq 2 \qquad |f_{uv}| \leq 4 \qquad |f_{vv}| \leq 2$$

e si può prendere $D = 2$. Dunque

$$A\,L\,D = (B - 2)^{-1} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2 \leq 4\sqrt{2}/6 < 1 = C$$

Concludiamo che il problema di cui sopra ha una soluzione ottimale per ogni punto che è accessibile. In particolare, vediamo che $(0, 1)$ è accessibile. Basta prendere $v \equiv 0$, $u \equiv 1$, e allora $x' = 1$, $x = t$, e $(0, 1)$ è raggiunto al tempo $t_2 = 1$. Qui f non è funzione monotona di u. Se poniamo $\tilde{f} = (f_0, f_1)$ e $\tilde{Q} = \tilde{f}(U)$, si vede, come nell'esempio 8, che $\tilde{Q}$ non è convesso, e il teorema di Filippov non si applica.

Ann Arbor, Gennaio 1964