Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Salvatore Ciampa

Strutture differenziali e varieta' di classe $\mathcal{C}^1$

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 18, nº 4 (1964), p. 543-565

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1964_3_18_4_543_0>

STRUTTURE DIFFERENZIALI E VARIETA' DI CLASSE $\mathcal{C}^1$

SALVATORE CIAMPA [1]

1. Introduzione.

I recenti sviluppi della teoria della integrazione k-dimensionale (cui hanno dato contributi fondamentali, tra gli altri, R. CACCIOPPOLI, E. DE GIORGI, H. WHITNEY, H. FEDERER, W. H. FLEMING) suggerisce il tentativo di estendere le usuali definizioni di derivata e differenziale ad ambienti più vasti di quelli solitamente considerati (localmente euclidei o di BANACH [2]) potendosi in tal modo unificare le teorie delle forme differenziali e delle correnti svolte nei vari ambienti particolari.

Questo lavoro vuol dare un primo avvio a questo tentativo, proponendosi lo studio da un punto di vista topologico-differenziale (in seguito precisato) degli oggetti costituiti da un insieme e da una successione di famiglie di applicazioni reali definite sull'insieme stesso.

L'aspetto sotto il quale si vogliono qui considerare gli oggetti summenzionati consiste nel definire mediante la n-ma famiglia di applicazioni una struttura (la cui natura topologica o differenziale dipende dall'indice n) sull'oggetto costituito dall'insieme dato e dalle $n-1$ famiglie che precedono quella in considerazione. La prima famiglia, ovviamente, definisce una struttura sul solo insieme di partenza.

Pervenuto alla Redazione il 5 Dicembre 1964.

(1) L'autore ringrazia il prof. E. DE GIORGI per le utili discussioni ed i suggerimenti avuti.

Questo lavoro è stato eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche (anno accademico 1964-65).

(2) Nei recenti trattati: J. DIEUDONNÉ - *Foundations of Modern Analysis* (New York, 1960) e S. LANG - *Introduction to Differentiable Manifolds* (New York, 1962), viene trattato il caso degli spazi di BANACH.

In questo lavoro vengono considerati soltanto oggetti costituiti da un insieme e da una o due famiglie di applicazioni.

Vengono ora richiamate alcune definizioni (più estesamente esposte nei nn. seguenti) per permettere una prima sommaria esposizione del tipo di strutture e dei risultati ottenuti.

Si considerino un insieme A e due famiglie $\mathcal{E}$ e $\mathcal{G}$ di applicazioni reali definite in A. Si consideri A munito della meno fine topologia tra quelle che rendono continue tutte le applicazioni della prima famiglia $\mathcal{E}$ e, in questa topologia, siano continue anche tutte le applicazioni della seconda famiglia $\mathcal{G}$.

Si indichi ora con $\mathcal{G}^*$ lo spazio vettoriale (sul corpo reale) costituito da tutte le applicazioni reali definite in $\mathcal{G}$ e lo si pensi munito della topologia debole (vedere n. **2.** (*d*)). Nello spazio prodotto $A \times A \times \mathcal{G}^*$, indicata con π_a (per ogni $a \in A$) l'applicazione dello spazio $\mathcal{G}$ nel corpo reale per cui

$$\pi_a(g) = g(a), \qquad \text{per ogni} \quad g \in A^* \ (^3),$$

si definisca l'insieme

$$\mathcal{I}(A, \mathcal{E}, \mathcal{G}) = \{(a, b, \pi_a - \pi_b) : a \in A, b \in A\}$$

e si indichi, poi, con $\mathcal{D}(A, \mathcal{E}, \mathcal{G})$ la più piccola (rispetto alla relazione d'inclusione) parte chiusa dello spazio $A \times A \times \mathcal{G}^*$ contenente l'insieme $\mathcal{I}(A, \mathcal{E}, \mathcal{G})$ e tale che per ogni $a \in A$ e $b \in A$ l'insieme

$$\{\lambda : (a, b, \lambda) \in \mathcal{D}(A, \mathcal{E}, \mathcal{G})\}$$

sia un sottospazio vettoriale di $\mathcal{G}^*$.

Per ogni applicazione $f \in A^*$ si indichi con σ_f l'applicazione reale definita sull'insieme $\mathcal{I}(A, \mathcal{E}, \mathcal{G})$ in modo che, per ogni $(a, b, \lambda) \in \mathcal{I}(A, \mathcal{E}, \mathcal{G})$, sia:

$$\sigma_f(a, b, \lambda) = \lambda(f) = f(a) - f(b);$$

infine, si indichi con $\mathcal{C}^1(A, \mathcal{E}, \mathcal{G})$ la famiglia di tutte le applicazioni $f \in A^*$ per cui l'applicazione σ_f ha un prolungamento continuo e lineare nel terzo argomento all'insieme $\mathcal{D}(A, \mathcal{E}, \mathcal{G})$. Queste applicazioni f sono chiamate *applicazioni differenziabili su* $(A, \mathcal{E}, \mathcal{G})$.

---

(3) Con A^* viene indicato l'insieme di tutte le applicazioni di A nell'insieme dei numeri reali.

Per ogni $a \in A$ si definisce come *spazio tangente* $T_a(A, \mathcal{E}, \mathcal{G})$ l'intersezione dell'insieme $\mathcal{D}(A, \mathcal{E}, \mathcal{G})$ con $\{a, a\} \times \mathcal{G}^*$; per ogni applicazione differenziabile g la restrizione allo spazio tangente del prolungamento a $\mathcal{D}(A, \mathcal{E}, \mathcal{G})$ dell'applicazione σ_g si chiama *differenziale* dell'applicazione g in a.

Tra i risultati più rilevanti sono i seguenti:

(i) *Se* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}^1(A, \mathcal{E}, \mathcal{G})$, *allora*

$$\mathcal{C}^1(A, \mathcal{E}, \mathcal{L}) = \mathcal{C}^1(A, \mathcal{E}, \mathcal{G}).$$

(ii) *Se le famiglie* $\mathcal{G}$ *ed* $\mathcal{L}$ *dànno luogo alle stesse applicazioni differenziabili, cioè se*

$$\mathcal{C}^1(A, \mathcal{E}, \mathcal{L}) = \mathcal{C}^1(A, \mathcal{E}, \mathcal{G}),$$

allora gli insiemi $\mathcal{D}(A, \mathcal{E}, \mathcal{G})$ *e* $\mathcal{D}(A, \mathcal{E}, \mathcal{L})$ *sono omeomorfi e, per ogni* $a \in A$, *gli spazi tangenti* $T_a(A, \mathcal{E}, \mathcal{G})$ *e* $T_a(A, \mathcal{E}, \mathcal{L})$ *sono isomorfi come spazi vettoriali e omeomorfi come spazi topologici* (le strutture di spazio vettoriale sono quelle rispettivamente indotte dalle strutture di $\mathcal{G}^*$ e di $\mathcal{L}^*$).

(iii) *Se come insieme* A *si prende quello delle n-ple ordinate di numeri reali e come famiglia* $\mathcal{E}$ *si prende quella costituita dalle* n *proiezioni dello spazio* $A = R^n$, *la famiglia*

$$\mathcal{C}^1(A, \mathcal{E}, \mathcal{E})$$

coincide con la classe di tutte le applicazioni reali definite su R^n *e continue assieme alle loro derivate prime.*

Da quanto si è accennato finora si può rilevare che la nozione di differenziabilità è definita globalmente su tutto lo spazio e dipende in maniera essenziale dalla topologia imposta all'insieme $\mathcal{G}^*$ (cioè la topologia debole). È chiaro quindi che si possono ottenere nozioni di differenziabilità «piu forti» mutando la topologia di $\mathcal{G}^*$.

2. Notazioni ed osservazioni preliminari.

(*a*) Con R ed N sono indicati rispettivamente l'insieme dei numeri reali e quello dei numeri naturali: il primo considerato come un corpo topologico (con la topologia euclidea), il secondo considerato come un insieme ordinato (con l'ordinamento naturale).

(*b*) Se A è un insieme, con A^* viene indicata la famiglia di tutte le applicazioni di A in R (dette anche *applicazioni reali*) (4).

Per ogni $a \in A$ si chiama *a-proiezione* di A^* l'applicazione π_a di A^* in R tale che

$$\pi_a(g) = g(a), \qquad \text{per ogni} \quad g \in A^*;$$

si conviene che anche le restrizioni dell'applicazione π_a a sottoinsiemi di A^* siano dette a-proiezioni ed indicate con lo stesso segno π_a.

(*c*) Se A è un insieme e $\mathcal{G} \subseteq A^*$, si chiama *$\mathcal{G}$-topologia su A* la meno fine topologia tra quelle che rendono continue tutte le applicazioni della famiglia $\mathcal{G}$.

È immediato osservare che per ogni $\mathcal{H} \subseteq A^*$, $\mathcal{G} \subseteq A^*$, se $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, la $\mathcal{G}$-topologia è più fine della $\mathcal{H}$-topologia, cioè ogni applicazione continua nella $\mathcal{H}$-topologia lo è anche nell'altra.

(*d*) Se A è un insieme, la *topologia debole* (5) sull'insieme A^* è la $\mathcal{G}$-topologia, avendo indicato con $\mathcal{G}$ l'insieme delle a-proiezioni di A^*, per ogni $a \in A$.

(*e*) Nel seguito dicendo « *spazio vettoriale* » è sempre sottinteso « *sul corpo R* »; quindi « *applicazione lineare tra spazi vettoriali* » significa sempre « *applicazione R-lineare* ».

Per ogni insieme A, l'insieme A^* sarà sempre considerato come spazio vettoriale (con ovvie definizioni di somma e prodotto scalare). È utile tener presente che (come è facile provare) la topologia debole rende A^* uno spazio vettoriale topologico.

(*f*) Se A e B sono due insiemi e g è un'applicazione del primo nel secondo, si chiama *applicazione trasposta della g* l'applicazione

$$g^* : B^* \longrightarrow A^*$$

tale che

$$g^*(f) = f \circ g, \qquad \text{per ogni} \qquad f \in B^*.$$

Ricorrendo alle definizioni ed osservando che

$$h \in g^*(B^*) \Longleftrightarrow \text{per ogni } a, b \text{ in } A, \text{ da } g(a) = g(b) \text{ segue } h(a) = h(b);$$

(4) Qui e nel seguito è inteso che quando accanto ad un insieme A si considera anche l'insieme A^* (o parti di esso), l'insieme A non è vuoto.

(5) Una siffatta topologia viene chiamata anche « *topologia della convergenza puntuale* ».

è facile provare che:

I. *L'applicazione trasposta* g^* *dell'applicazione* $g : A \longrightarrow B$ *ha le seguenti proprietà:*

(i) *è un'applicazione lineare tra spazi vettoriali;*

(ii) *è iniettiva se e solo se* g *è surgettiva;*

(iii) *è surgettiva se e solo se* g *è iniettiva;*

(iv) *è continua quando agli spazi* A^* *e* B^* *si assegnino le rispettive topologie deboli, in tal caso l'insieme* $g^*(B^*)$ *risulta chiuso in* A^*.

(g) Siano A e B due insiemi e g un'applicazione del primo nel secondo. Sia g^* l'applicazione trasposta di g e siano $\mathcal{E}$ e $\mathcal{G}$ due insiemi tali che

$$\mathcal{E} \subseteq A^*; \quad \mathcal{G} \subseteq B^*; \quad g(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{E};$$

esiste allora l'applicazione

$$g^{**}: \quad \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathcal{G}^*$$

trasposta della restrizione dell'applicazione g^* all'insieme $\mathcal{G}$ ed è tale che

$$g^{**}(\lambda) = \lambda \circ g^*, \quad \text{per ogni} \quad \lambda \in \mathcal{E}^*.$$

Considerati allora gli insiemi $A \times A \times \mathcal{E}^*$ e $B \times B \times \mathcal{G}^*$, l'applicazione prodotto (g, g, g^{**}) del primo nel secondo, cioè l'applicazione φ per cui

$$\varphi(a, b, \lambda) = (g(a), g(b), g^{**}(\lambda)), \quad \text{per ogni} \quad (a, b, \lambda) \in A \times A \times \mathcal{E}^*,$$

si chiama *estensione canonica dell'applicazione* g *da* $A \times A \times \mathcal{E}^*$ *in* $B \times B \times \mathcal{G}^*$.

Dalla precedente proposizione I. segue che:

II. *L'estensione canonica*

$$\varphi: A \times A \times \mathcal{E}^* \longrightarrow B \times B \times \mathcal{G}^*$$

di un'applicazione continua g *dello spazio topologico* A *nello spazio topologico* B *è anch'essa continua se agli spazi* $\mathcal{E}^*$ *e* $\mathcal{G}^*$ *si assegna la topologia debole rispettiva e agli insiemi* $A \times A \times \mathcal{E}^*$, $B \times B \times \mathcal{G}^*$ *si assegna la topologia prodotto.*

L'applicazione φ *risulta inoltre lineare nel terzo argomento.*

3. Strutture e varietà di classe $\mathcal{C}^0$.

Sia A un insieme e per ogni coppia $\mathcal{E}$, $\mathcal{G}$ di famiglie contenute in A^* si definisca la relazione $\sim^0$ come segue:

$\mathcal{E} \sim^0 \mathcal{G}$ significa che sull'insieme A la $\mathcal{E}$-topologia coincide con la $\mathcal{G}$-topologia.

È subito visto che $\sim^0$ è una relazione d'equivalenza in $\mathcal{P}(A^*)$, insieme di tutte le famiglie di applicazioni reali definite nell'insieme A.

Le classi d'equivalenza secondo questa relazione, cioè gli elementi dell'insieme quoziente $\mathcal{P}(A^*)/\sim^0$, sono chiamate *strutture di classe* $\mathcal{C}^0$. Se $\mathcal{E} \subseteq A^*$, la struttura di classe $\mathcal{C}^0$ cui la famiglia $\mathcal{E}$ appartiene viene indicata con $|\mathcal{E}|^0$. In analogia a quanto sarà fatto nel caso delle strutture di classe $\mathcal{C}^1$ (vedere n. 4.), si dirà che la struttura di classe $\mathcal{C}^0$ $|\mathcal{E}|^0$ è *più fine* della struttura di classe $\mathcal{C}^0$ $|\mathcal{G}|^0$ se ogni applicazione della famiglia $\mathcal{G}$ risulta continua nella $\mathcal{E}$-topologia (cioè, se la $\mathcal{E}$-topologia risulta più fine della $\mathcal{G}$ topologia).

Dall'osservare che $\mathcal{E} \sim^0 \mathcal{G}$ equivale ad affermare che ogni applicazione continua nella $\mathcal{E}$-topologia lo è anche nell'altra e viceversa ed avendo presente quanto si è detto al n. 2. (*c*) si può concludere che:

III. *Per ogni* $\mathcal{E} \subseteq A^*$ *e per ogni parte non vuota* $\mathcal{X}$ *della classe d'equivalenza* $|\mathcal{E}|^0$ *si ha:*

$$\bigcup_{\mathcal{L} \in \mathcal{X}} \mathcal{L} \in |\mathcal{E}|^0.$$

Quindi in ogni struttura $|\mathcal{E}|^0$ esiste una (unica) famiglia massima (rispetto alla relazione d'inclusione); essa verrà indicata con $\mathcal{C}^0(A, |\mathcal{E}|^0)$.

IV. *Per ogni* $\mathcal{E} \subseteq A^*$, $\mathcal{G} \subseteq A^*$, $\mathcal{K} \subseteq A^*$ *si ha*

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{K}, \quad \mathcal{E} \sim^0 \mathcal{K} \implies \mathcal{G} \sim^0 \mathcal{E}$$

e quindi

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}^0(A, |\mathcal{E}|^0) \implies \mathcal{C}^0(A, |\mathcal{G}|^0) = \mathcal{C}^0(A, |\mathcal{E}|^0).$$

DIM. Segue immediatamente dall'osservazione fatta nel n. 2. (*c*).

Si definisce ora come *varietà di classe* $\mathcal{C}^0$ ogni coppia $(A, |\mathcal{E}|^0)$ dove A è un insieme ed $\mathcal{E} \subseteq A^*$.

L'insieme A dicesi il *sostegno* della varietà. Le applicazioni appartenenti alla famiglia $\mathcal{C}^0(A, |\mathcal{E}|^0)$ sono dette *applicazioni continue* oppure *di classe* $\mathcal{C}^0$ *sulla varietà* $(A, |\mathcal{E}|^0)$.

Quest'ultima definizione può trovare giustificazione nella seguente proposizione:

V. *Sia* $(A, |\mathcal{E}|^0)$ *una varietà di classe* $\mathcal{C}^0$. *Allora, per ogni applicazione* $f: A \longrightarrow R$:

$$f \text{ è continua nella } \mathcal{E}\text{-topologia di } A \Longleftrightarrow f \in \mathcal{C}^0(A, |\mathcal{E}|^0).$$

DIM. Se l'applicazione f è continua nella $\mathcal{E}$-topologia di A,

$$\mathcal{E} \backsim^0 \mathcal{E} \cup \{f\},$$

quindi $f \in \mathcal{C}^0(A, |\mathcal{E}|^0)$.

Il viceversa è ovvio.

Si può quindi dire che le varietà di classe $\mathcal{C}^0$ corrispondono agli spazi topologici completamente regolari (non necessariamente di Hausdorff).

Da quanto si è finora detto risulta che ad ogni oggetto costituito da un insieme A e da una famiglia $\mathcal{E}$ di applicazioni reali definite su A stesso rimane univocamente associata una varietà di classe $\mathcal{C}^0$, $(A, |\mathcal{E}|^0)$, che, per comodità di scrittura, verrà indicata semplicemente con $(A, \mathcal{E})$, rimanendo inteso, naturalmente, che

$$(A, \mathcal{E}) = (A, \mathcal{G}) \quad \text{significa} \quad \mathcal{E} \backsim^0 \mathcal{G}.$$

Si conviene, infine, di indicare col segno $(A, \mathcal{E})$ tanto la varietà quanto lo spazio topologico ottenuto assegnando all'insieme A la $\mathcal{E}$-topologia.

4. Strutture di classe $\mathcal{C}^1$ (o differenziali).

Si consideri uno spazio topologico Y e se ne indichi con $\mathcal{C}(Y)$ la famiglia delle applicazioni reali continue.

Per ogni famiglia $\mathcal{E}$ di applicazioni reali definite in Y, si consideri l'insieme $Y \times Y \times \mathcal{E}^*$ munito della topologia prodotto, avendo assegnato allo spazio $\mathcal{E}^*$ la topologia debole.

Indicando con π_a, per ogni $a \in Y$, la a-proiezione dello spazio Y^*, per quanto si è convenuto nel n. **2.** (b), ha senso la seguente definizione:

$$\mathcal{T}(Y, \mathcal{E}) = \{(a, b, \pi_a - \pi_b) : a \in Y, \ b \in Y\}.$$

Sia ora $\mathcal{M}$ la famiglia di tutte le parti M dello spazio $Y \times Y \times \mathcal{E}^*$ aventi le seguenti proprietà:

(i) M è un insieme chiuso;

(ii) M contiene l'insieme $\mathcal{J}(Y, \mathcal{E})$;

(iii) per ogni $(a, b) \in Y \times Y$, l'insieme

$$\{\lambda : (a, b, \lambda) \in M\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{E}^*$;

e sia $\mathcal{D}(Y, \mathcal{E})$ l'intersezione di tutti gli insiemi della famiglia $\mathcal{M}$. Evidentemente anche l'insieme ora definito, $\mathcal{D}(Y, \mathcal{E})$, appartiene alla famiglia $\mathcal{M}$.

Nel seguito le notazioni $\mathcal{J}(Y, \mathcal{E})$ e $\mathcal{D}(Y, \mathcal{E})$ avranno sempre il significato ora definito.

A proposito dell'insieme $\mathcal{D}(Y, \mathcal{E})$ si osservi che:

VI. *Se X è uno spazio vettoriale topologico, se f e g sono due applicazioni continue e lineari nel terzo argomento definite sul sottospazio $\mathcal{D}(Y, \mathcal{E})$ ed a valori in X, allora le applicazioni f e g coincidono se coincidono le rispettive restrizioni all'insieme $\mathcal{J}(Y, \mathcal{E})$.*

DIM. Basta osservare che l'insieme

$$K = \{(a, b, \lambda) \in \mathcal{D}(Y, \mathcal{E}) : f(a, b, \lambda) = g(a, b, \lambda)\}$$

appartiene alla famiglia $\mathcal{M}$ (utilizzata nella definizione di $\mathcal{D}(Y, \mathcal{E})$) perchè l'insieme $\mathcal{D}(Y, \mathcal{E})$ è chiuso; quindi

$$K \supseteq \mathcal{D}(Y, \mathcal{E}).$$

VII. *Siano Y e W spazi topologici, f un'applicazione continua di Y in W; $\mathcal{E} \subseteq Y^*$ e $\mathcal{G} \subseteq W^*$ tali che esista l'estensione canonica dell'applicazione f*

$$\varphi : Y \times Y \times \mathcal{E}^* \to W \times W \times \mathcal{G}^*;$$

allora:

$$\varphi(\mathcal{J}(Y, \mathcal{E})) \subseteq \mathcal{J}(W, \mathcal{G}),$$

$$\varphi(\mathcal{D}(Y, \mathcal{E})) \subseteq \mathcal{D}(W, \mathcal{G}).$$

La prima inclusione vale anche se l'applicazione f non è continua e si riduce ad un'uguaglianza se l'applicazione f è surgettiva.

DIM. Indicate con π tanto le proiezioni dell'insieme $\mathcal{E}$ quanto quelle dell'insieme $\mathcal{G}$, per ogni $(a, b) \in Y \times Y$ si ha

$$f^{**}(\pi_a) = \pi_a \circ f^* = \pi_{f(a)}$$

e quindi

$$\varphi(a, b, \pi_a - \pi_b) = (f(a), f(b), \pi_{f(a)} - \pi_{f(b)}).$$

Risulta quindi provata la prima inclusione.

Nei riguardi della seconda si osservi che per la continuità e per la linearità nel terzo argomento dell'applicazione φ, l'insieme

$$\varphi^{-1}(\mathcal{D}(W, \mathcal{G}))$$

risulta appartenere alla famiglia $\mathcal{M}$ che serve per definire l'insieme $\mathcal{D}(Y, \mathcal{E})$, perciò

$$\varphi^{-1}(\mathcal{D}(W, \mathcal{G})) \supseteq \mathcal{D}(Y, \mathcal{E}).$$

L'ultima asserzione dell'enunciato, dopo quanto si è detto, risulta ovvia.

Considerati uno spazio topologico Y ed una famiglia $\mathcal{E}$ di applicazioni reali definite su Y, per ogni $f \in Y^*$ si definisce come *applicazione associata ad f relativamente alla coppia* $(Y, \mathcal{E})$ l'applicazione

$$\sigma_f : \mathcal{T}(Y, \mathcal{E}) \to R$$

tale che

$$\sigma_f(a, b, \lambda) = \lambda(f), \quad \text{per ogni } (a, b, \lambda) \in \mathcal{T}(Y, \mathcal{E}).$$

È immediato constatare che:

VIII. *L'applicazione σ_f è prolungabile all'intero spazio $Y \times Y \times \mathcal{E}^*$ se, in particolare, $f \in \mathcal{E}$.*

L'applicazione σ_f è, per ogni $f \in Y^*$, lineare nel terzo argomento, essa è anche continua (su tutto lo spazio $Y \times Y \times \mathcal{E}^*$) se $f \in \mathcal{E}$.

(Si tenga presente che, indicando con π_3 la terza proiezione dello spazio $Y \times Y \times \mathcal{E}^*$ e con π_f la f-proiezione dello spazio $\mathcal{E}^*$, si ha

$$\sigma_f = \pi_f \circ \pi_3).$$

Si consideri ora l'insieme $\mathcal{P}(Y^*)$ di tutte le famiglie di applicazioni reali definite sullo spazio topologico Y e si definiscano in esso le relazioni $<$ e $<\!\cdot$ nel modo seguente:
se $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(Y^*)$ e $\mathcal{G} \in \mathcal{P}(Y^*)$,
$\mathcal{E} < \mathcal{G}$ significa che per ogni $f \in \mathcal{E}$ esiste un'applicazione

$$\tilde{\sigma}_f : \mathcal{D}(Y, \mathcal{G}) \to R$$

continua e lineare nel terzo argomento che coincide sull'insieme $\mathcal{I}(Y, \mathcal{G})$ con l'applicazione σ_f associata ad f relativamente alla coppia $(Y, \mathcal{G})$;

(si osservi che, per la proposizione VI., l'applicazione $\tilde{\sigma}_f$ è unica);

$\mathcal{E} <\cdot \mathcal{G}$ significa che l'estensione canonica

$$\varphi : Y \times Y \times (\mathcal{E} \cup \mathcal{G})^* \to Y \times Y \times \mathcal{G}^*$$

dell'applicazione identica dello spazio Y su se stesso è tale che la sua restrizione χ all'insieme $\mathcal{D}(Y, \mathcal{E} \cup \mathcal{G})$ è un omeomorfismo su tutto l'insieme $\mathcal{D}(Y, \mathcal{G})$.

Una notevole proprietà delle relazioni ora definite è espressa nella seguente proposizione:

IX. *In ogni spazio topologico Y, se $\mathcal{E}$ e $\mathcal{G}$ sono due famiglie di applicazioni di Y in R, si ha*:

$$\mathcal{E} < \mathcal{G} \Longleftrightarrow \mathcal{E} <\cdot \mathcal{G}.$$

DIM. Nella dimostrazione che segue sono adoperate le stesse notazioni usate nelle definizioni delle relazioni $<$ e $<\cdot$. Inoltre, per ogni applicazione $g \in Y^*$, viene indicata con ϱ_g l'applicazione associata a g relativamente alla coppia $(Y, \mathcal{E} \cup \mathcal{G})$.

Che da $\mathcal{E} <\cdot \mathcal{G}$ segue $\mathcal{E} < \mathcal{G}$ risulta subito ponendo

$$\tilde{\sigma}_f = \varrho_f \circ \chi^{-1}, \text{ per ogni } f \in \mathcal{E},$$

e ricordando la precedente proposizione VIII..

Per provare che, viceversa, da $\mathcal{E} < \mathcal{G}$ segue $\mathcal{E} <\cdot \mathcal{G}$, si cominci col ricordare (proposizioni II. e VII.) che l'applicazione χ è continua, lineare nel terzo argomento e tale che:

$$\chi(\mathcal{I}(Y, \mathcal{E} \cup \mathcal{G})) = \mathcal{I}(Y, \mathcal{G}),$$

$$\chi(\mathcal{D}(Y, \mathcal{E} \cup \mathcal{G})) \subseteq \mathcal{D}(Y, \mathcal{G}).$$

Allora (proposizione VI.):

$$\varrho_f = \tilde{\sigma}_f \circ \chi$$

giacchè le applicazioni ϱ_f e $\tilde{\sigma}_f \circ \chi$ hanno la stessa restrizione sull'insieme $\mathcal{I}(Y, \mathcal{E} \cup \mathcal{G})$.

Questo significa che per ogni $(a, b, \lambda) \in \mathcal{D}(Y, \mathcal{E} \cup \mathcal{G})$ e per ogni $f \in \mathcal{E} \cup \mathcal{G}$, si ha:

$$\lambda(f) = \tilde{\sigma}_f \circ \chi(a, b, \lambda);$$

perciò, per ogni $(a, b, \mu) \in \mathcal{D}(Y, \mathcal{G})$, posto $\mu^0 \in (\mathcal{E} \cup \mathcal{G})^*$ tale che

$$\mu^0 = \mu, \text{ sull'insieme } \mathcal{E},$$

$$\mu^0(f) = \tilde{\sigma}_f(a, b, \mu), \text{ per ogni } f \in \mathcal{G},$$

(osservare che la definizione di μ^0 è consistente perchè se $f \in \mathcal{E} \cap \mathcal{G}$, $\sigma_f = \tilde{\sigma}_f$), si ha:

$$\varphi^{-1}(a, b, \mu) \cap \mathcal{D}(Y, \mathcal{E} \cup \mathcal{G}) \subseteq \{(a, b, \mu^0)\},$$

quindi l'applicazione χ è iniettiva.

Si proverà ora che l'insieme $\chi(\mathcal{D}(Y, \mathcal{E} \cup \mathcal{G}))$ è chiuso in $\mathcal{D}(Y, \mathcal{G})$, perciò lo è anche in $Y \times Y \times \mathcal{G}^*$.

Sia (a, b, λ) un elemento della chiusura dell'insieme $\chi(\mathcal{D}(Y, \mathcal{E} \cup \mathcal{G}))$. Esiste allora una direzione (insieme parzialmente ordinato filtrante) I ed un'applicazione (successione) $\omega: I \longrightarrow \chi(\mathcal{D}(Y, \mathcal{E} \cup \mathcal{G}))$ tale che $(a, b, \lambda) \in \lim \omega$ (insieme dei limiti della successione ω); per ogni $i \in I$ sia $\omega(i) = (a_i, b_i, \lambda_i)$. Si ponga

$$\xi = \chi^{-1} \circ \omega: I \longrightarrow Y \times Y \times (\mathcal{E} \cup \mathcal{G})^*$$

e si osservi che anche la successione ξ ora definita converge; infatti, dette π_1, π_2, π_3 le proiezioni dello spazio $Y \times Y \times (\mathcal{E} \cup \mathcal{G})^*$, si ha:

$$\pi_1 \circ \xi(i) = a_i, \text{ per ogni } i \in I,$$

$$\pi_2 \circ \xi(i) = b_i, \text{ per ogni } i \in I,$$

mentre, per ogni applicazione $g \in \mathcal{E} \cup \mathcal{G}$, detta π_g la g-proiezione dell'insieme $(\mathcal{E} \cup \mathcal{G})^*$, la successione

$$\pi_g \circ \pi_3 \circ \xi = \varrho_g \circ \xi = \tilde{\sigma}_g \circ \chi \circ \xi = \tilde{\sigma}_g \circ \omega$$

converge perchè, in $\mathcal{D}(Y, \mathcal{G})$, la successione ω converge e l'applicazione $\tilde{\sigma}_g$ è continua.

Sia quindi (p, q, μ) un limite della successione ξ, allora:

$$\chi(p, q, \mu) \in \lim \chi \circ \xi = \lim \omega$$

perciò

$$\lim \omega \subseteq \chi(\mathcal{D}(Y, \mathcal{E} \cup \mathcal{G})),$$

ed infine

$$(a, b, \lambda) \in \chi(\mathcal{D}(Y, \mathcal{E} \cup \mathcal{G})).$$

Si ricordi ora che l'applicazione χ è lineare nel terzo argomento, perciò l'insieme $\chi(\mathcal{D}(Y, \mathcal{E} \cup \mathcal{G}))$ appartiene alla famiglia $\mathcal{M}$ che serve per definire l'insieme $\mathcal{D}(Y, \mathcal{G})$ e quindi

$$\chi(\mathcal{D}(Y, \mathcal{E} \cup \mathcal{G})) \supseteq \mathcal{D}(Y, \mathcal{G});$$

si conclude pertanto che l'applicazione χ è una biiezione su tutto l'insieme $\mathcal{D}(Y, \mathcal{G})$.

Resta da provare che l'applicazione

$$\chi^{-1} : \mathcal{D}(Y, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{D}(Y, \mathcal{E} \cup \mathcal{G})$$

è continua. Per questo basta mostrare (6) che sono continue per ogni $f \in \mathcal{E} \cup \mathcal{G}$ le applicazioni $\varrho_f \circ \chi^{-1}$ e ciò è evidente, essendo $\varrho_f \circ \chi^{-1} = \tilde{\sigma}_f$.

È così provato che $\mathcal{E} <\cdot\, \mathcal{G}$.

D'ora in poi, pertanto, si potrà scrivere $<$ per indicare anche la relazione $<\cdot$.

Altre proprietà della relazione $<$ sono espresse nelle proposizioni che seguono.

X. *Per ogni* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(Y^*)$ *e* $\mathcal{G} \in \mathcal{P}(Y^*)$,

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{G} \Longrightarrow \mathcal{E} < \mathcal{G}.$$

DIM. Segue immediatamente dalla proposizione VIII..

XI. *La relazione* $<$ *in* $\mathcal{P}(Y^*)$ *è riflessiva e transitiva.*

DIM. La riflessività è una immediata conseguenza della proposizione precedente.

Siano ora $\mathcal{E}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ parti dell'insieme Y^* tali che

$$\mathcal{E} < \mathcal{G} \quad \text{e} \quad \mathcal{G} < \mathcal{H};$$

---

(6) Si tenga presente che la topologia dello spazio $Y \times Y \times (\mathcal{E} \cup \mathcal{G})^*$ è la meno fine tra quelle che rendono continue le proiezioni π_1, π_2, $\pi_f \circ \pi_3$, per ogni $f \in \mathcal{E} \cup \mathcal{G}$.

siano poi:

$$\varphi: \mathcal{D}(Y, \mathcal{G} \cup \mathcal{H}) \to \mathcal{D}(Y, \mathcal{G}),$$

$$\chi: \mathcal{D}(Y, \mathcal{G} \cup \mathcal{H}) \to \mathcal{D}(Y, \mathcal{H})$$

le rispettive restrizioni all'insieme $\mathcal{D}(Y, \mathcal{G} \cup \mathcal{H})$ delle estensioni canoniche dell'applicazione identica dello spazio Y su se stesso. Entrambe sono lineari nel terzo argomento, la prima è continua e la seconda è un omeomorfismo.

Se, per ogni applicazione $f \in \mathcal{E}$,

$$\tilde{\sigma}_f: \mathcal{D}(Y, \mathcal{G}) \to R$$

indica il prolungamento continuo e lineare nel terzo argomento dell'applicazione σ_f associata ad f relativamente alla coppia $(Y, \mathcal{G})$ l'applicazione

$$\tilde{\varrho}_f = \tilde{\sigma}_f \circ \varphi \circ \chi^{-1}: \mathcal{D}(Y, \mathcal{H}) \to R$$

è continua lineare nel terzo argomento e, sull'insieme $\mathcal{I}(Y, \mathcal{H})$, coincide con l'applicazione ϱ_f associata ad f relativamente alla coppia $(Y, \mathcal{H})$.

Resta così provato che $\mathcal{E} < \mathcal{H}$ e quindi che la relazione $<$ è transitiva.

XII. *Per ogni* $\mathcal{E}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ *in* $\mathcal{P}(Y^*)$ *si ha:*

$$\mathcal{E} < \mathcal{G} \Longrightarrow \mathcal{E} \cup \mathcal{H} < \mathcal{G} \cup \mathcal{H}.$$

Dim. Si osservi dapprima che

$$\mathcal{E} < \mathcal{H}, \quad \mathcal{G} < \mathcal{H} \Longrightarrow \mathcal{E} \cup \mathcal{G} < \mathcal{H}$$

(segue immediatamente dalla definizione della relazione $<$).

Ora, nelle ipotesi della proposizione che si sta dimostrando,

$$\mathcal{E} < \mathcal{G} < \mathcal{G} \cup \mathcal{H}$$

e, per la proposizione X.,

$$\mathcal{H} < \mathcal{G} \cup \mathcal{H};$$

quindi, per l'osservazione fatta,

$$\mathcal{E} \cup \mathcal{H} < \mathcal{G} \cup \mathcal{H}.$$

XIII. *Sia* ξ *un'applicazione continua dello spazio topologico* Y *nello spazio topologico* W *e siano* $\mathcal{E}$ *e* $\mathcal{G}$ *parti di* W^*. *Si ha allora, indicando con* ξ^*

l'applicazione trasposta di ξ,

$$\mathcal{E} < \mathcal{G} \Longrightarrow \xi^*(\mathcal{E}) < \xi^*(\mathcal{G}).$$

DIM. Sia

$$\varphi : Y \times Y \times (\xi^*(\mathcal{G}))^* \longrightarrow W \times W \times \mathcal{G}^*$$

l'estensione canonica dell'applicazione ξ; per ogni $g \in \mathcal{E}$ si indichi con $\tilde{\sigma}_g$ il prolungamento continuo e lineare nel terzo argomento dell'applicazione σ_g, associata a g relativamente alla coppia $(W, \mathcal{G})$, all'insieme $\mathcal{D}(W, \mathcal{G})$.

Allora, detta χ la restrizione dell'applicazione φ all'insieme $\mathcal{D}(Y, \xi^*(\mathcal{G}))$, esiste (propos. VII.) l'applicazione $\tilde{\sigma}_g \circ \chi$ che risulta continua e lineare nel terzo argomento e coincide, sull'insieme $\mathcal{J}(Y, \xi^*(\mathcal{G}))$, con l'applicazione $\varrho_{\xi^*(g)}$ associata a $\xi^*(g)$ relativamente alla coppia $(Y, \xi^*(\mathcal{G}))$, giacchè per ogni a, b in Y,

$$\chi(a, b, \pi_a - \pi_b) = (\xi(a), \xi(b), \pi_{\xi(a)} - \pi_{\xi(b)})$$

(con π sono indicate le proiezioni degli insiemi $\mathcal{G}$ e $\xi^*(\mathcal{G})$).

Questo prova, come volevasi, che

$$\xi^*(\mathcal{E}) < \xi^*(\mathcal{G}).$$

XIV. *Sia Y uno spazio topologico, $\mathcal{C}(Y)$ sia la famiglia delle sue applicazioni reali continue. Per ogni $\mathcal{E} \subseteq Y^*$ e $\mathcal{G} \subseteq Y^*$ si ha:*

$$\mathcal{E} < \mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}(Y) \Longrightarrow \mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}(Y).$$

DIM. Siano $a \in Y$, I una direzione (insieme parzialmente ordinato filtrante), $\omega : I \longrightarrow Y$ una successione convergente verso il punto a. Allora la successione

$$\vartheta : I \longrightarrow Y \times Y \times \mathcal{G}^*$$

tale che per ogni $i \in I$,

$$\vartheta(i) = (a, \omega(i), \pi_a - \pi_{\omega(i)})$$

(con π vengono indicate le proiezioni degli insiemi $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}^*$) converge verso l'elemento $(a, a, 0) \in Y \times Y \times \mathcal{G}^*$, giacchè, per ogni $g \in \mathcal{G}$, g è continua e

$$\pi_g(\pi_a - \pi_{\omega(i)}) = g(a) - g(\omega(i)).$$

Sia ora $f \in \mathcal{E}$ e sia σ_f l'applicazione ad essa associata relativamente alla coppia $(Y, \mathcal{G})$; σ_f per l'ipotesi fatta è continua e perciò la successione $\sigma_f \circ \vartheta$ converge verso $\sigma_f(a, a, 0)$, questo prova la continuità dell'applicazione f nello spazio Y.

Si definisca ora, per ogni coppia di famiglie $\mathcal{E}$ e $\mathcal{G}$ contenute in Y^*, la relazione $\backsim^1$ in modo che:

$$\mathcal{E} \backsim^1 \mathcal{G} \quad \text{significa} \quad \mathcal{E} < \mathcal{G} \quad \text{e} \quad \mathcal{G} < \mathcal{E}.$$

A causa della proposizione XI. la relazione ora definita è una equivalenza nell'insieme $\mathcal{P}(Y^*)$.

Per ogni $\mathcal{E} \subseteq Y^*$, la classe di equivalenza secondo la relazione $\backsim^1$ (cioè l'elemento dell'insieme quoziente $\mathcal{P}(Y^*)/\backsim^1$) cui appartiene la famiglia $\mathcal{E}$ verrà indicata con $|\mathcal{E}|^1$.

Le classi di equivalenza $|\mathcal{E}|^1$ i cui elementi sono famiglie di applicazioni continue [7] sono dette *strutture di classe* $\mathcal{C}^1$ (o *differenziali*) *sullo spazio topologico* Y [8].

Si dice che la struttura $|\mathcal{E}|^1$ è *più fine* della struttura $|\mathcal{G}|^1$ quando $\mathcal{G} < \mathcal{E}$.

XV. *Siano* $\mathcal{E}$ *una famiglia di applicazioni reali definite sullo spazio topologico* Y *ed* $\mathfrak{X}$ *un insieme non vuoto di famiglie appartenenti alla classe d'equivalenza* $|\mathcal{E}|^1$. *Allora:*

$$\mathcal{L} = \bigcup_{\mathcal{K} \in \mathfrak{X}} \mathcal{K} \in |\mathcal{E}|^1.$$

Dim. Sia $\mathcal{G}$ un fissato elemento dell'insieme $\mathfrak{X}$. Per la proposizione X. è $\mathcal{G} < \mathcal{L}$ giacchè $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{L}$.

Si consideri, poi, un'applicazione $g \in \mathcal{L}$; in $\mathfrak{X}$ esiste allora una famiglia $\mathcal{K}$ cui g appartiene e quindi l'applicazione σ_g associata a g relativamente alla coppia $(Y, \mathcal{G})$ ha un prolungamento continuo e lineare nel terzo argomento all'insieme $\mathcal{D}(Y, \mathcal{G})$ perchè $\mathcal{G} \backsim^1 \mathcal{K}$. Da questo segue, per definizione, che $\mathcal{L} < \mathcal{G}$. Si è così provato che $\mathcal{L} \backsim^1 \mathcal{G}$ e quindi che $\mathcal{L} \in |\mathcal{E}|^1$.

La proposizione ora dimostrata permette di asserire l'esistenza di un (unico) elemento massimo (rispetto alla relazione di inclusione) in ogni classe d'equivalenza $|\mathcal{E}|^1$ su uno spazio topologico Y. Questa famiglia massima (che è poi l'unione di tutte le famiglie costituenti la classe $|\mathcal{E}|^1$) viene indicata con

$$\mathcal{C}^1(Y, |\mathcal{E}|^1).$$

---

(7) Per questo occorre e basta (a causa della proposizione XIV.) che esista nella classe $|\mathcal{E}|^1$ una famiglia $\mathcal{L}$ costituita da applicazioni continue.

(8) La condizione della continuità delle applicazioni viene imposta per stabilire il carattere funtoriale delle nozioni di spazio tangente e di differenziale di un'applicazione (tutto questo sarà mostrato in un successivo lavoro).

XVI. *Se $\mathcal{E}$ e $\mathcal{G}$ sono famiglie contenute in Y^*, le proposizioni seguenti sono equivalenti :*

(i) $\mathcal{E} < \mathcal{G}$;

(ii) $f \in \mathcal{C}^1(Y, |\mathcal{E}|^1) \Longrightarrow \mathcal{G} \backsim^1 \{f\} \cup \mathcal{G}$;

(iii) $\mathcal{C}^1(Y, |\mathcal{E}|^1) \subseteq \mathcal{C}^1(Y, |\mathcal{G}|^1)$.

DIM. (i) $\Longrightarrow$ (ii): se $f \in \mathcal{C}^1(Y, |\mathcal{E}|^1)$, nella classe $|\mathcal{E}|^1$ esiste una famiglia $\mathcal{L}$ cui f appartiene. D'altra parte, risultando $\mathcal{L} < \mathcal{G}$, per le proposizioni X. e XII., si ha

$$\mathcal{G} < \{f\} \cup \mathcal{G} < \mathcal{L} \cup \mathcal{G} < \mathcal{G}.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): immediato, per ogni $f \in \mathcal{C}^1(Y, |\mathcal{E}|^1)$ si ha

$$\mathcal{G} \cup \{f\} \in |\mathcal{G}|^1.$$

(iii) $\Longrightarrow$ (i): basta osservare che

$$\mathcal{E} \backsim^1 \mathcal{C}^1(Y, |\mathcal{E}|^1) \subseteq \mathcal{C}^1(Y, |\mathcal{G}|^1) \backsim^1 \mathcal{G}$$

e ricordare la proposizione X..

Dalla proposizione ora dimostrata segue una notevole caratterizzazione della famiglia massima di una classe d'equivalenza secondo la relazione $\backsim^1$.

XVII. *Per ogni $\mathcal{E} \subseteq Y^*$, si ha :*

$$\mathcal{C}^1(Y, |\mathcal{E}|^1) = \{f \in Y^* : \mathcal{E} \backsim^1 \{f\} \cup \mathcal{E}\}.$$

DIM. Basta tener presente che la relazione $<$ è riflessiva e servirsi della proposizione precedente.

Si osservi infine che:

XVIII. *Per ogni spazio topologico Y e per ogni famiglia $\mathcal{E}$ contenuta in Y^*, l'insieme $\mathcal{C}^1(Y, |\mathcal{E}|^1)$ è un sottospazio vettoriale dello spazio Y^* e contiene, quindi, il sottospazio generato dalla famiglia $\mathcal{E}$. All'insieme $\mathcal{C}^1(Y, |\mathcal{E}|^1)$, inoltre, appartengono tutte le applicazioni costanti di Y in R.*

DIM. Siano $f, g \in \mathcal{C}^1(Y, |\mathcal{E}|^1)$, $x \in R$; $\tilde{\sigma}_f$ e $\tilde{\sigma}_g$ siano i prolungamenti continui e lineari nel terzo argomento delle applicazioni σ_f e σ_g, associate rispettivamente ad f e g relativamente alla coppia $(Y, \mathcal{E})$, all'insieme $\mathcal{D}(Y, \mathcal{E})$. È subito visto che, allora, l'applicazione $x\tilde{\sigma}_f + \tilde{\sigma}_g$ è il prolungamento continuo e lineare nel terzo argomento dell'applicazione σ_{xf+g}, associata ad $xf+g$ relativamente alla coppia $(Y, \mathcal{E})$, all'insieme $\mathcal{D}(Y, \mathcal{E})$; si prova così che

$$\mathcal{E} \cup \{xf+g\} < \mathcal{E}.$$

Il viceversa è ovvio (per la proposizione X.). La proposizione precedente assicura allora che $xf+g \in \mathcal{C}^1(Y, |\mathcal{E}|^1)$.

L'asserzione relativa alle applicazioni costanti si prova subito osservando che l'applicazione associata ad una applicazione costante (relativamente a qualsiasi coppia) è identicamente nulla.

5. Varietà di classe $\mathcal{C}^1$.

Sia $(A, \mathcal{E})$ una varietà di classe $\mathcal{C}^0$: ogni struttura differenziale sullo spazio topologico $(A, \mathcal{E})$ si dirà anche *struttura differenziale sulla varietà* $(A, \mathcal{E})$.

Si definisce allora come *varietà di classe* $\mathcal{C}^1$ ogni coppia $((A, \mathcal{E}), |\mathcal{G}|^1)$ costituita da una varietà di classe $\mathcal{C}^0$ e da una struttura differenziale sulla varietà stessa.

L'insieme A, sostegno della varietà $(A, \mathcal{E})$, vien detto anche *sostegno della varietà* $((A, \mathcal{E}), |\mathcal{G}|^1)$; i suoi elementi sono chiamati *punti della varietà.*

Le applicazioni reali definite sul sostegno della varietà ed appartenenti alla famiglia $\mathcal{C}^1((A, \mathcal{E}), |\mathcal{G}|^1)$ sono chiamate *applicazioni differenziabili* (oppure *di classe* $\mathcal{C}^1$) sulla varietà data; quelle appartenenti alla famiglia $\mathcal{C}^0(A, \mathcal{E})$ sono dette invece *continue.*

Si consideri ora una varietà di classe $\mathcal{C}^0$, $(A, \mathcal{E})$, ed una famiglia $\mathcal{L}$ di applicazioni reali definite sul sostegno A. Si consideri poi l'insieme

$$\mathcal{D}((A, \mathcal{E}), \mathcal{L}) \subseteq (A, \mathcal{E}) \times (A, \mathcal{E}) \times \mathcal{L}^*.$$

Per ogni elemento a dell'insieme A si ponga:

$$T_a((A, \mathcal{E}), \mathcal{L}) = \mathcal{D}((A, \mathcal{E}), \mathcal{L}) \cap \{a, a\} \times \mathcal{L}^*$$

e si indichi con df, per ogni applicazione f appartenente alla famiglia $\mathcal{C}^1((A, \mathcal{E}), |\mathcal{L}|^1)$, la restrizione all'insieme $T_a((A, \mathcal{E}), \mathcal{L})$ dell'applicazione $\tilde{\sigma}_f$ unico prolungamento continuo e lineare nel terzo argomento dell'applicazione σ_f, associata ad f relativamente alla coppia $((A, \mathcal{E}), \mathcal{L})$, all'insieme $\mathcal{D}((A, \mathcal{E}), \mathcal{L})$.

Si osservi ora che per la proprietà (iii) degli elementi della famiglia $\mathcal{M}$ che serve a definire l'insieme $\mathcal{D}((A, \mathcal{E}), \mathcal{L})$ (vedere n. **4.**), l'insieme

$$V_a = \{\lambda : (a, a, \lambda) \in T_a((A, \mathcal{E}), \mathcal{L})\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{L}^*$: la sua struttura quindi può essere naturalmente trasportata sull'insieme $T_a((A, \mathcal{E}), \mathcal{L})$ stesso che, con la topologia indotta da quella dello spazio

$$(A, \mathcal{E}) \times (A, \mathcal{E}) \times \mathcal{L}^*,$$

diviene, evidentemente, uno spazio vettoriale topologico.

XIX. *Sia* $(A, \mathcal{E})$ *una varietà di classe* $\mathcal{C}^0$ *e siano* $\mathcal{G}$ *ed* $\mathcal{L}$ *due famiglie di applicazioni reali definite sul sostegno* A. *Se* $\mathcal{G} \backsim^1 \mathcal{L}$, *per ogni* $a \in A$ *esiste un'applicazione*

$$\xi : \quad T_a((A, \mathcal{E}), \mathcal{G}) \longrightarrow T_a((A, \mathcal{E}), \mathcal{L})$$

tale che

(i) ξ *è un isomorfismo tra spazi vettoriali ed è un omeomorfismo tra spazi topologici;*

(ii) *per ogni applicazione*

$$g \in \mathcal{C}^1((A, \mathcal{E}), |\mathcal{G}|^1) = \mathcal{C}^1((A, \mathcal{E}), |\mathcal{L}|^1),$$

le applicazioni

$$dg_{\mathcal{G}} : \quad T_a((A, \mathcal{E}), \mathcal{G}) \longrightarrow R$$

$$dg_{\mathcal{L}} : \quad T_a((A, \mathcal{E}), \mathcal{L}) \longrightarrow R$$

sono tali che

$$dg_{\mathcal{G}} = dg_{\mathcal{L}} \circ \xi.$$

DIM. (i) Siano

$$\varphi : \quad \mathcal{D}((A, \mathcal{E}), \mathcal{G} \cup \mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{D}((A, \mathcal{E}), \mathcal{G})$$

$$\chi : \quad \mathcal{D}((A, \mathcal{E}), \mathcal{G} \cup \mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{D}((A, \mathcal{E}), \mathcal{L})$$

gli omeomorfismi di cui si parla nella definizione della relazione $<\cdot$ (vedere n. **4.**); è chiaro allora che definendo

$$\xi(a, a, \lambda) = \chi \circ \varphi^{-1}(a, a, \lambda), \quad \text{per ogni} \quad (a, a, \lambda) \in T_a((A, \mathcal{E}), \mathcal{G})$$

si ottiene l'applicazione cercata, giacchè φ e χ sono anche lineari nel terzo argomento (proposizione II.).

(ii) Nella dimostrazione della proposizione IX. si è visto che le applicazioni $\tilde{\sigma}_g$ e $\tilde{\varrho}_g$, rispettivi prolungamenti agli insiemi $\mathcal{D}((A, \mathcal{E}), \mathcal{G})$ e $\mathcal{D}((A, \mathcal{E}), \mathcal{L})$ delle applicazioni σ_g e ϱ_g associate a g relativamente alle coppie $((A, \mathcal{E}), \mathcal{G})$ e $((A, \mathcal{E}), \mathcal{L})$, sono tali che

$$\tilde{\sigma}_g \circ \varphi = \tilde{\varrho}_g \circ \chi,$$

giacchè entrambi i membri di questa uguaglianza coincidono con l'applicazione associata a g relativamente alla coppia $((A, \mathcal{E}), \mathcal{G} \cup \mathcal{L})$ che, per la proposizione VIII., è definita anche sull'insieme $\mathcal{D}((A, \mathcal{E}), \mathcal{G} \cup \mathcal{L})$. Ricordando che le applicazioni $dg_{\mathcal{G}}$ e $dg_{\mathcal{L}}$ sono restrizioni delle applicazioni $\tilde{\sigma}_g$ e $\tilde{\varrho}_g$ rispettivamente, la dimostrazione è completa.

Considerata quindi una varietà di classe $\mathcal{C}^1$, $((A, \mathcal{E}), |\mathcal{G}|^1)$, si può dire che a meno di isomorfismi (algebrici e topologici), per ogni punto a della varietà stessa e per ogni applicazione $g \in \mathcal{C}^1((A, \mathcal{E}), |\mathcal{G}|^1)$, sono definiti uno spazio vettoriale topologico $T_a((A, \mathcal{E}), |\mathcal{G}|^1)$ ed una applicazione dg di quest'ultimo spazio in R.

Gli elementi di $T_a((A, \mathcal{E}), |\mathcal{G}|^1)$, che si chiama *spazio tangente nel punto a alla varietà* $((A, \mathcal{E}), |\mathcal{G}|^1)$, sono chiamati *vettori applicati nel punto a.* L'insieme ottenuto come unione di tutti gli spazi tangenti nei punti della varietà vien detto *fibrato tangente della varietà* e viene indicato con $T((A,\mathcal{E}), |\mathcal{G}|^1)$. L'applicazione dg, definita sullo spazio tangente $T_a((A, \mathcal{E}), |\mathcal{G}|^1)$, si chiama *differenziale dell'applicazione g nel punto a.*

Si chiama invece *differenziale dell'applicazione g sulla varietà* e si indica con lo stesso segno dg, l'applicazione del fibrato tangente in R la cui restrizione allo spazio tangente $T_a((A, \mathcal{E}), |\mathcal{G}|^1)$ coincide con il differenziale dell'applicazione g nel punto a.

Infine, si chiama *morfismo differenziale della varietà* $((A, \mathcal{E}), |\mathcal{G}|^1)$ l'applicazione

$$d : \mathcal{C}^1((A, \mathcal{E}), |\mathcal{G}|^1) \to (T((A, \mathcal{E}), |\mathcal{G}|^1))^*$$

che ad ogni applicazione differenziabile f associa il differenziale df.

A proposito delle definizioni ora date si può osservare che per ogni varietà $((A, \mathcal{E}), |\mathcal{G}|^1)$ esiste un modo « canonico » di definire gli spazi tangenti (e, conseguentemente, i differenziali) che evita la scelta di una famiglia di applicazioni nella classe $|\mathcal{G}|^1$: basta convenire che la definizione di spazio tangente sia fatta a partire dalla famiglia di tutte le applicazioni differenziabili $\mathcal{C}^1((A, \mathcal{E}), |\mathcal{G}|^1)$. In pratica, però, è spesso comodo riferirsi ad una famiglia $\mathcal{L} \in |\mathcal{G}|^1$ più ristretta; le definizioni, così, possono risultare più semplici (talvolta in modo essenziale, si veda per esempio la dimostrazione della proposizione XX.).

Dalle definizioni date e dalle proposizioni dimostrate segue che: *le applicazioni differenziabili su una varietà* $((A, \mathcal{C}), |\mathcal{G}|^1)$ *sono continue* (vedere la nota (7)) *e costituiscono uno spazio vettoriale che contiene il sottospazio generato dalle applicazioni della famiglia* $\mathcal{G}$ *e dalle applicazioni reali costanti* (propos. XVIII.); *il differenziale di un'applicazione (differenziabile) in un punto della varietà è un'applicazione lineare e continua del corrispondente spazio tangente in* R*; il differenziale di un'applicazione costante ha valore nullo su ogni vettore applicato.*

Altre proprietà delle applicazioni differenziabili saranno esposte in un successivo lavoro.

In conclusione, ad ogni terna ordinata $(A, \mathcal{C}, \mathcal{G})$ costituita da un insieme A e da due famiglie di applicazioni reali definite in A e tali che la seconda, $\mathcal{G}$, sia costituita da applicazioni continue nella topologia determinata dalla prima (cioè applicazioni continue sulla varietà di classe $\mathcal{C}^0(A, \mathcal{C})$), rimane univocamente associata una varietà di classe $\mathcal{C}^1$, cioè $((A, \mathcal{C}), |\mathcal{G}|^1)$. Nel seguito la varietà ora individuata verrà indicata semplicemente con la scrittura $(A, \mathcal{C}, \mathcal{G})$ giacchè la sua struttura differenziale e le conseguenti definizioni di spazio tangente e di differenziale sono essenzialmente determinate dalle sole famiglie $\mathcal{C}$ e $\mathcal{G}$. Scrivendo $(A, \mathcal{C}, \mathcal{G})$ s'intenderà anche che gli spazi tangenti e i differenziali sono costruiti a partire dalla famiglia $\mathcal{G}$.

Naturalmente bisognerà intendere che $(A, \mathcal{C}, \mathcal{G}) = (A, \mathcal{H}, \mathcal{L})$ quando $\mathcal{C} \backsim^0 \mathcal{H}$ e $\mathcal{G} \backsim^1 \mathcal{L}$.

In particolare

$$(A, \mathcal{C}, \mathcal{L}) = (A, \mathcal{C}, \mathcal{G}), \text{ per ogni } \mathcal{G} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}^1(A, \mathcal{C}, \mathcal{G}).$$

La proposizione XIX. e la definizione della relazione d'equivalenza $\backsim^1$ permettono di concludere che:

Se $(A, \mathcal{C}, \mathcal{G}) = (A, \mathcal{H}, \mathcal{L})$ *allora*

(i) *le due varietà hanno le stesse applicazioni differenziabili, cioè*

$$\mathcal{C}^1(A, \mathcal{C}, \mathcal{G}) = \mathcal{C}^1(A, \mathcal{H}, \mathcal{L});$$

(ii) *per ogni* $a \in A$, *gli spazi tangenti* $T_a(A, \mathcal{C}, \mathcal{G})$ *e* $T_a(A, \mathcal{H}, \mathcal{L})$ *sono isomorfi algebricamente e topologicamente;*

(iii) *per ogni applicazione differenziabile* $f: A \longrightarrow R$, *i differenziali* df *in vettori applicati corrispondenti* (propos. (ii)) *sono uguali.*

Questo n. viene concluso mostrando un notevole esempio di varietà di classe $\mathcal{C}^1$, potendo rimanere così giustificate alcune notazioni.

XX. *Sia n un numero naturale non nullo e sia $\mathcal{L}$ la famiglia delle n proiezioni $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ dell'insieme R^n.*

Considerata allora la varietà di classe $\mathcal{C}^1$ $(R^n, \mathcal{L}, \mathcal{L})$ si ha:

(i) *le applicazioni differenziabili sulla varietà considerata sono tutte e soltanto le applicazioni continue assieme alle n derivate prime;*

(ii) *per ogni $a \in R^n$, lo spazio tangente $T_a(R^n, \mathcal{L}, \mathcal{L})$ è isomorfo (algebricamente e topologicamente) all'intero spazio R^n;*

(iii) *per ogni applicazione differenziabile f il differenziale df nel punto $a \in R^n$ si può esprimere come segue* (9)

$$(D_1 f)_a \, d\pi_1 + \dots + (D_n f)_a \, d\pi_n$$

dove $(D_i f)_a$ indica la derivata i-ma dell'applicazione f calcolata nel punto a.

DIM. Se $\lambda \in \mathcal{L}^*$ è tale che

$$\lambda(\pi_i) = a_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

si conviene di indicare la stessa applicazione λ col punto $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ dell'insieme R^n. È subito visto allora che lo spazio vettoriale $\mathcal{L}^*$ coincide con lo spazio vettoriale R^n e, osservato che π_i-proiezione ν_{π_i} dello spazio $\mathcal{L}^*$ coincide con la i-ma proiezione dello spazio R^n, cioè

$$\nu_{\pi_i}(a) = a_i = \pi_i(a), \qquad \text{per ogni} \quad a \in R^n, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

si conclude che $\mathcal{L}^*$ ed R^n coincidono anche come spazi vettoriali topologici. Se si osserva, poi, che, per la convenzione fatta, ogni punto a del sostegno della varietà $(R^n, \mathcal{L}, \mathcal{L})$ è tale che

$$a\text{-proiezione dello spazio } \mathcal{L} = a \in \mathcal{L}^*,$$

si può scrivere

$$\mathcal{G}(R^n, \mathcal{L}, \mathcal{L}) = \{(a, b, a - b) : a, b \text{ in } R^n\}$$

e si vede che l'insieme $\mathcal{D}(R^n, \mathcal{L}, \mathcal{L})$ risulta essere l'unione degli insiemi:

$$Q_1 = \{(a, b, y(a - b)) : a, b \text{ in } R^n;\ y \in R\},$$

$$Q_2 = \{(a, a, b) : a, b \text{ in } R_n\}$$

---

(9) Questa formula assume l'aspetto usuale che ha in Analisi Matematica se le proiezioni $\pi_1, \dots, \pi_n$ vengono indicate con $x_1, \dots, x_n$.

(è chiaro, infatti, che ogni punto $(a, a, b) \in R^n \times R^n \times \mathcal{L}^*$ è limite di una successione $\omega = \{(c_i, c_i', c_i'')\}_{i \in N}$ di punti appartenenti all'insieme Q_1 : basta porre

$$c_i = a\,; \quad c_i' = a - \frac{1}{i} b\,; \quad c_i'' = i\,(c_i - c_i')\,;$$

d'altra parte, se un punto (a, b, c) (con $a \neq b$) dello spazio $R^n \times R^n \times \mathcal{L}^*$ è limite di una successione di punti dell'insieme Q_1, necessariamente c deve essere un multiplo (reale) del punto $a - b$).

(i) Sia ora $g \in \mathcal{C}^1(R^n, \mathcal{L}, \mathcal{L})$. La continuità di g è richiesta dalla stessa definizione (vedere la nota ([7])). L'esistenza della derivata parziale $D_1 g$ è presto stabilita osservando che, se per ogni numero reale y si indica con y_1 il punto $(y, 0, \ldots, 0)$ dello spazio R^n e se con $\tilde{\sigma}_g$ si indica il prolungamento continuo e lineare nel terzo argomento dell'applicazione σ_g, associata a g relativamente alla coppia $((R^n, \mathcal{L}), \mathcal{L})$, all'insieme $\mathcal{D}(R^n, \mathcal{L}, \mathcal{L})$, per ogni $a \in R^n$ si ha:

$$(D_1 g)_a = D_1 g(a) = \lim_{y \to 0} \frac{1}{y} (g(a + y_1) - g(a)) =$$

$$= \lim_{y \to 0} \tilde{\sigma}_g \left(a + y_1, a, \frac{1}{y} (\pi_{a+y_1} - \pi_a) \right) = \tilde{\sigma}_g (a, a, 1_1).$$

La continuità della derivata parziale $D_1 g$ discende dalla continuità dell'applicazione $\tilde{\sigma}_g$.

Analogamente si procede nei riguardi delle altre $n - 1$ derivate parziali dell'applicazione g.

Viceversa, sia ora g un'applicazione di R^n in R continua assieme alle sue derivate prime. Si vuol provare che esiste il prolungamento $\tilde{\sigma}_g$ dell'applicazione σ_g e precisamente che

$$\tilde{\sigma}_g (a, b, y(a - b)) = y(g(a) - g(b)), \quad \text{sull'insieme } Q_1,$$

$$\tilde{\sigma}_g (a, a, b) = b \times (\operatorname{grad} g)(a), \quad \text{sull'insieme } Q_2.$$

Intanto l'applicazione così definita è lineare nel terzo argomento (a causa della bilinearità del prodotto scalare) e sull'insieme $\mathcal{G}(R^n, \mathcal{L}, \mathcal{L})$ coincide con l'applicazione σ_g associata a g. Per completare la dimostrazione occorre mostrare che l'applicazione $\tilde{\sigma}_g$, così come è stata definita, è continua. La continuità sugli insiemi Q_1 e Q_2 è evidente, d'altra parte se l'elemento $(a, a, b) \in Q_2$

è limite della successione

$$\omega = \{(h_i\,,\, k_i\,,\, y_i\,(h_i - k_i)\}_{i \in N}$$

di elementi appartenenti all'insieme $\overset{\bullet}{Q}_1$, per ogni $i \in N$ esiste un punto $x_i \in R^n$ (teorema del valor medio) per cui

$$\lim \widetilde{\sigma}_g \circ \omega = \lim \{\, y_i\,(g\,(h_i) - g\,(k_i))\}_{i \in N} = \lim \{\, y_i\,(h_i - k_i) \times (\operatorname{grad} g)\,(x_i)\}_{i \in N} =$$

$$= b \times (\operatorname{grad} g)\,(a) = \widetilde{\sigma}_g\,(a,\, a,\, b).$$

(ii) Per ogni $a \in R^n$ lo spazio tangente $T_a\,(R^n\,,\, \mathcal{L},\, \mathcal{L})$, per quanto si è mostrato nella dimostrazione del caso precedente, coincide con $\{a,\, a\} \times R^n$.

(iii) Per ogni $(a,\, a,\, b) \in T\,(R^n,\, \mathcal{L},\, \mathcal{L})$ e per ogni $i = 1, 2, \dots, n$ si ha:

$$d\pi_i\,(a,\, a,\, b) = b_i\,,$$

perciò, per ogni applicazione differenziabile g, essendo:

$$dg\,(a,\, a,\, b) = \widetilde{\sigma}_g\,(a,\, a,\, b) = b \times (\operatorname{grad} g)\,(a)$$

(per quanto si è provato nel caso (i)) è anche:

$$dg\,(a,\, a,\, b) = (D_1\, g)_a\; d\pi_1\,(a,\, a,\, b) + \dots + (D_n\, g)_a\; d\pi_n\,(a,\, a,\, b).$$

Scuola Normale Superiore
Pisa