ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MARIO MIRANDA

Superfici cartesiane generalizzate ed insiemi di perimetro localmente finito sui prodotti cartesiani

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 18, nº 4 (1964), p. 515-542

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1964_3_18_4_515_0>

SUPERFICI CARTESIANE GENERALIZZATE ED INSIEMI DI PERIMETRO LOCALMENTE FINITO SUI PRODOTTI CARTESIANI

MARIO MIRANDA (Pisa)

0. Introduzione.

Questo lavoro è diviso in due parti. Nella prima si considera una generalizzazione delle superfici n-dimensionali in R^{n+1} in forma cartesiana. Il collegamento di esse colle superfici di area di Lebesgue finita [1] viene stabilito nei Teorr. 1.3, 1.8. Le proprietà più importanti delle nuove superfici, fra le quali il legame colla teoria degli insiemi di perimetro localmente finito trattata in [2], sono raccolte nel Teor. 1.10. Nella seconda parte si studiano gli insiemi le cui intersezioni con cilindri hanno perimetro finito [3]. Per questi si trova, vedi il Teor. 2.1 che possono dividersi in due categorie: quelli le cui intersezioni coi cilindri hanno misura finita, le proprietà dei quali sono raccolte nel Teor. 2.2, e quelli le cui intersezioni coi cilindri hanno misura infinita, le proprietà dei quali sono raccolte nei Teorr. 2.3, 2.4, 2.5. In questi risultati vi è anche un collegamento fra tali insiemi e le superfici cartesiane generalizzate, trattate nella prima parte, collegamento che può servire nello studio del problema di Plateau. Per le notazioni e per ulteriori riferimenti rinviamo al lavoro [2].

1. Superfici cartesiane generalizzate.

1.1. DEFINIZIONE. Diremo superficie cartesiana generalizzata n-dimensionale, definita sull'aperto $\Omega \subset R^n$, l'insieme di R^{n+1} $\{(x, y)\,;\, x \in \Omega,\ y = f(x)\}$, dove $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ed ha derivate misure in Ω.

Pervenuto alla Redazione il 27 luglio 1964 ed in forma definitiva il 5 dicembre 1964.

Questo lavoro è stato eseguito in seno al Gruppo di Ricerca n. 9 del C. N. R. nell'anno Accademico 1963-64, sotto la guida del Prof. Ennio De Giorgi, che qui colgo l'occasione per ringraziare.

1.2. OSSERVAZIONE. Considereremo equivalenti due superfici cartesiane generalizzate definite sullo stesso aperto da funzioni eguali quasi ovunque.

Le superfici cartesiane generalizzate sono una generalizzazione delle superfici cartesiane di area di Lebesgue [1] finita, come viene precisato nel seguente teorema, (cfr. anche [6]).

1.3. TEOREMA. Le superfici cartesiane generalizzate continue sono tutte e sole le superfici cartesiane di area di Lebesgue localmente finita, e cioè quelle superfici $\{(x, y);\ x \in \Omega,\ y = f(x)\}$ per le quali esiste una successione $\{f_h\} \subset C^1(\Omega)$, tale che

$$\lim_{h \to \infty} f_h = f, \quad \text{uniformemente sui } K \in \mathcal{K}(\Omega), \tag{1.1}$$

$$\int_K \left\{1 + \sum_{i=1}^n [D_i f_h(x)]^2\right\}^{\frac{1}{2}} dx \leq \gamma(K) < \infty, \quad \forall\ K \in \mathcal{K}(\Omega). \tag{1.2}$$

DIMOSTRAZIONE.

Supponiamo che per la $\{(x, y);\ x \in \Omega,\ y = f(x)\}$ esista la successione $\{f_h\} \subset C^1(\Omega)$ e verificante (1.1) e (1.2). Allora ovviamente f è continua, si ha inoltre che f ha derivate misure su Ω, ed anzi vale

$$\int_K |Df| \leq \gamma(K), \quad \forall\ K \in \mathcal{K}(\Omega), \tag{1.3}$$

come conseguenza delle (1.1), (1.2), della Prop. 0.3 di [2], e delle relazioni

$$\int_K |Df| = \theta(f, K). \tag{1.4}$$

$$\theta(f_h, K) = \int_K |Df_h(x)|\, dx < \int_K \left\{1 + \sum_{i=1}^n [D_i f_h(x)]^2\right\}^{\frac{1}{2}} dx. \tag{1.5}$$

Supponiamo ora che f sia continua ed abbia derivate misure su Ω. Sia $\{\tau_h\}$ una successione regolarizzante appartenente a $\mathcal{D}(R^n)$ (cfr. [2], pag. 30). Indichiamo con $\{f_h\}$ una successione di regolarizzate della f mediante le τ_h, cioè una successione di funzioni appartenenti a $C^1(\Omega)$ e verificanti

$$f_h(x) = \int \tau_h(x - y) f(y)\, dy, \quad \text{per} \quad \operatorname{dist}(x, R^n - \Omega) > h^{-1}. \tag{1.6}$$

Se ora $K \in \mathcal{K}(\Omega)$ si ha:

$$(1.7)\qquad \int_K \left\{1 + \sum_{i=1}^n [D_i f_h(x)]^2\right\}^{\frac{1}{2}} dx \leq \text{mis}\, K + \sum_{i=1}^n \int_K |D_i f_h(x)|\, dx,$$

d'altra parte se h è sufficientemente grande la f_h verifica la (1.6) su tutto K e perciò vale

$$(1.8)\qquad \int_K |D_i f_h(x)|\, dx \leq \int_{K_h} |D_i f|, \qquad K_h = \{x\,;\ \text{dist}(x, K) < h^{-1}\}.$$

Dalle (1.7), (1.8) e per il fatto che la f ha derivate misure segue allora l'esistenza di $\gamma(K) < \infty$ per cui è verificata la (1.2). Essendo poi la f continua e valendo (1.6) ne segue la (1.1).

c. v. d.

Ad ogni superficie cartesiana generalizzata $\{(x, y)\,;\ x \in \Omega,\ y = f(x)\}$ associamo l'insieme E di R^{n+1} definito da $E = \{(x, y)\,;\ x \in \Omega,\ x < f(x)\}$. Per tale insieme si ha la seguente

1.4. Proposizione. Se $\{(x, y)\,;\ x \in \Omega,\ y = f(x)\}$ è una superficie cartesiana generalizzata allora l'insieme $E = \{(x, y)\,;\ x \in \Omega,\ y < f(x)\}$ ha perimetro localmente finito su $\Omega \times R$ (cfr. [2]), si ha anzi di più e precisamente valgono le

$$(1.9)\qquad \int_{K\times R} |D_i \varphi(x, y\,;\, E)| \leq \int_K |D_i f|, \quad \text{per} \quad i < n+1,\ \ \forall K \in \mathcal{K}(\Omega),$$

$$(1.10)\qquad \int_{K\times R} |D_{n+1} \varphi(x, y\,;\, E)| \leq \text{mis}\, K, \qquad \forall K \in \mathcal{K}(\Omega).$$

Dimostrazione.

Sia, come nella dimostrazione del precedente teorema, $\{\tau_h\}$ una successione regolarizzante e $\{f_h\}$ una successione di regolarizzate della f mediante le τ_h. Sia $\{E_h\}$ la successione di insiemi $E_h = \{(x, y)\,;\ x \in \Omega,\ y < f_h(x)\}$. Avremo allora, per note proprietà della regolarizzazione, che $\{E_h\}$ converge ad E in $L^1_{\text{loc}}(\Omega \times R)$. Sia $K \in \mathcal{K}(\Omega)$ e $g \in \mathcal{D}(K \times R)$, con $|g| \leq 1$. Valutiamo gli integrali

$$(1.11)\qquad \int_E D_i g(x, y)\, dx\, dy = \lim_{h\to\infty} \int_{E_h} D_i g(x, y)\, dx\, dy, \qquad (i = 1, \dots, n+1).$$

Avremo, per $i < n + 1$, dalle formule di Green classiche

$$\int_{E_h} D_i\, g(x, y)\, dx\, dy = -\int g(x, f_h(x))\, D_i f_h(x)\, dx, \tag{1.12}$$

e, per $i = n + 1$, dal teorema di Fubini

$$\int_{E_h} D_{n+1}\, g(x, y)\, dx\, dy = \int g(x, f_h(x))\, dx. \tag{1.13}$$

Quindi, per h sufficientemente generale, e per $i < n + 1$ avremo dalla (1.12), per la (1.6) e per la (1.8)

$$\int_{E_h} D_i\, g(x, y)\, dx\, dy \leq \int_{pr\,(\mathrm{supp}\, g)} |D_i f_h(x)|\, dx \leq \int_K |D_i f|, \tag{1.14}$$

dove $pr\,(\mathrm{supp}\, g) = \{x\,;\ [\{x\} \times R] \cap \mathrm{supp}\, g \neq \emptyset\}$.

Mentre per $i = n + 1$, dalla (1.13) si ricava

$$\int_{E_h} D_{n+1}\, g(x, y)\, dx\, dy \leq \mathrm{mis}\, K, \quad \forall\, h. \tag{1.15}$$

Dalle (1.11), (1.14) e (1.15) si ricava finalmente

$$\int_E D_i\, g(x, y)\, dx\, dy \leq \int_K |D_i f|, \qquad i < n + 1, \tag{1.16}$$

$$\int_E D_{n+1}\, g(x, y)\, dx\, dy \leq \mathrm{mis}\, K. \tag{1.17}$$

Dalle (1.16) e (1.17), ricordando che vale

$$\int_{K \times R} |D_i\, \varphi(x, y\,; E)| = \sup \left\{ \int_E D_i\, g(x, y)\, dx\, dy\,;\ g \in \mathcal{D}(K \times R),\ |g| \leq 1 \right\} \tag{1.18}$$

seguono le (1.9) e (1.10).

c. v. d.

Mostreremo ora come la Proposizione 1.4 possa essere invertita, ma prima di fare ciò proveremo un lemma relativo agli insiemi E contenuti in un prodotto cartesiano $\Omega \times R$ per i quali valga:

$$\int_{K\times R} |D\varphi(x, y; E)| < \infty, \quad \forall K \in \mathcal{K}(\Omega). \tag{1.19}$$

1.5. Lemma. Se Ω è un aperto di R^n ed E è un sottoinsieme misurabile di $\Omega \times R$ per il quale valga la (1.19); allora posto, per $K \in \mathcal{K}(\Omega)$

$$\int_K |D_x\varphi(x, y; E)| = \sup\left\{\int \sum_{i=1}^n D_i g_i(x)\, \varphi(x, y; E)\, dx;\ g_i \in \mathcal{D}(K), |g| \leq 1\right\}, \tag{1.20}$$

$$\int_R |D_{n+1}\, \varphi(x, y; E)| = \sup\left\{\int D_y g(y)\, \varphi(x, y; E)\, dy;\ g \in \mathcal{D}(R), |g| \leq 1\right\}, \tag{1.21}$$

si ha

$$\int dy \int_K |D_x\, \varphi(x, y;\ E)| = \int_{K\times R} |D_x\, \varphi(x, y;\ E)|, \ \forall K \in \mathcal{K}(\Omega), \tag{1.22}$$

$$\int_K dx \int_R |D_{n+1}\, \varphi(x, y;\ E)| = \int_{K\times R} |D_{n+1}\, \varphi(x, y;\ E)|, \ \forall K \in \mathcal{K}(\Omega). \tag{1.23}$$

Dimostrazione.

Per la dimostrazione di questo lemma rimandiamo all'Appendice.

c. v. d.

Possiamo ora invertire la Proposizione 1.4, si ha infatti

1.6. Proposizione. Se f è una funzione misurabile definita su un aperto Ω di R^n e se per l'insieme $E = \{(x, y);\ x \in \Omega,\ y < f(x)\}$ vale la (1.19) allora $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e valgono le

$$-\int f(x)\, D_i\, g(x)\, dx = \int g(x)\, D_i\, \varphi(x, y; E), \quad i < n+1, \quad \forall g \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{1.24}$$

$$-\int g(x)\, dx = \int g(x)\, D_{n+1}\, \varphi(x, y; E), \quad \forall g \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.25}$$

Quindi $\{(x, y);\ x \in \Omega,\ y = f(x)\}$ è una superficie cartesiana generalizzata e valgono le

$$\int_K |D_i f| \leq \int_{K\times R} |D_i\, \varphi(x, y; E)|, \quad i < n+1, \quad \forall K \in \mathcal{K}(\Omega), \tag{1.26}$$

$$\text{mis}\, K \leq \int_{K\times R} |D_{n+1}\, \varphi(x, y; E)|, \ \forall K \in \mathcal{K}(\Omega). \tag{1.27}$$

DIMOSTRAZIONE.

Per provare la locale sommabilità di f possiamo limitarci a provare la sommabilità di f sulle sfere $C \in \mathcal{K}(\Omega)$.

Cominciamo dal caso $n = 1$. Fissato $C \in \mathcal{K}(\Omega)$ indichiamo con Y l'insieme $\left\{ y ; \int_C | D_x \varphi(x, y ; E) | > 0 \right\}$. Poichè $\int_C | D_x \varphi(x, y ; E) |$ ha valori interi avremo

$$\text{(1.28)} \qquad \text{mis}\, Y \leq \int dy \int_C | D_x \varphi(x, y) ; E) | = \int_{C \times R} | D_x \varphi(x, y ; E) | < \infty .$$

Poichè vale d'altra parte

$$\text{(1.29)} \qquad \lim_{y \to +\infty} \int_C \varphi(x, y ; E)\, dx = \lim_{y \to -\infty} \int_C [1 - \varphi(x, y ; E)]\, dx = 0 \ (^1)$$

avremo che esiste $\gamma(C) \in R$ tale che

$$\text{(1.30)} \qquad \int_C \varphi(x, y ; E)\, dx = 0, \text{ per quasi tutti gli } y > \gamma(C),\ y \notin Y,$$

$$\text{(1.31)} \qquad \int_C [1 - \varphi(x, y ; E)]\, dx = 0, \text{ per quasi tutti gli } y < -\gamma(C),\ y \notin Y.$$

D'altra parte, poichè vale

$$\text{(1.32)} \qquad \int_C |f|\, dx = \int_0^{+\infty} dy \int_C \varphi(x, y ; E)\, dx + \int_{-\infty} dy \int_C [1 - \varphi(x, y ; E)]\, dx,$$

avremo:

$$\text{(1.33)} \qquad \int_C | f(x) |\, dx \leq (2\gamma(C) + \text{mis}\, Y) \cdot \text{mis}\, C.$$

Per $n > 1$, per il Teorema 4.3 di [2] e per quasi tutti gli y

$$\text{(1.34)} \qquad \int_C \varphi(x, y ; E)\, dx \cap \int_C [1 - \varphi(x, y ; E)]\, dx \leq c(n) \left[\int_C | D_x \varphi(x, y ; E) | \right]^{\frac{n}{n-1}}$$

(1) Nel calcolo dei limiti y è preso al di fuori dell'insieme, di misura nulla, per cui non hanno senso gli integrali.

Dalla (1.29) avremo allora che esiste $\alpha(C) \in R$ tale che

$$(1.35)\qquad \int_C \varphi(x, y; E)\, dx \leq c(n) \left[\int_C | D_x\varphi(x, y; E) | \right]^{\frac{n}{n-1}}, \text{ per quasi tutti } y > \alpha(C),$$

$$(1.36)\qquad \int_C [1-\varphi(x, y; E)] dx \leq c(n) \left[\int_C | D_x\varphi(x, y; E) | \right]^{\frac{n}{n-1}}, \text{ per quasi tutti } y < -\alpha(C).$$

E poichè vale

$$(1.37)\qquad \int_C | f(x) | \, dx = \int_0^{+\infty} dy \int_C \varphi(x, y; E)\, dx + \int_{-\infty}^{0} dy \int_C [1 - \varphi(x, y; E)]\, dx,$$

avremo, tenuto conto (1.35), (1.36) e (1.22)

$$(1.38)\qquad \int_C | f(x) | \, dx \leq 2\alpha(C) \operatorname{mis} C + c(n)^{\frac{n-1}{n}} [\operatorname{mis} C]^{\frac{1}{n}} \int_{C\times R} | D_x \varphi(x, y; E) | .$$

Verifichiamo ora le (1.24) e (1.25). Per questo indichiamo con η_ε la funzione reale di variabile reale definita da

$$(1.39)\qquad \eta_\varepsilon(y) = \begin{cases} 1, & \text{per } |y| < \varepsilon \\ 0, & \text{per } |y| > \varepsilon + 1 \\ \text{lineare.} \end{cases}$$

Avremo allora le relazioni

$$(1.40)\qquad \int g(x)\, D_i\, \varphi(x, y; E) = \lim_{\varepsilon\to+\infty} \int \eta_\varepsilon(y)\, g(x)\, D_i\, \varphi(x, y; E), \quad g \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$(1.41)\qquad \int \eta_\varepsilon(y)\, g(x)\, D_i\varphi(x, y; E) = - \int D_i\, g(x)\, dx \int \eta_\varepsilon(y)\, \varphi(x, y; E)\, dy, \; i < n + 1,$$

$$(1.42)\qquad \int \eta_\varepsilon(y)\, g(x)\, D_{n+1}\, \varphi(x, y; E) = - \int g(x)\, dx \int D_y\, \eta_\varepsilon(y)\, \varphi(x, y; E)\, dy,$$

e poichè valgono le relazioni

$$\lim_{s\to+\infty}\left(\int \eta_s(y)\,\varphi(x,y;E)\,dy-\varepsilon-\frac{1}{2}\right)=f(x), \tag{1.43}$$

$$\lim_{s\to\infty}\int D_y\,\eta_s(y)\,\varphi(x,y;E)\,dy=+1, \tag{1.44}$$

e le maggiorazioni

$$\left|\int \eta_s(y)\,\varphi(x,y;E)\,dy-\varepsilon-\frac{1}{2}-f(x)\right|\leq 1+|f(x)|, \tag{1.45}$$

$$\left|\int D_y\,\eta_s(y)\,\varphi(x,y;E)\,dy\right|\leq 2, \tag{1.46}$$

passando al limite nelle (1.41) e (1.42) si hanno le (1.24) e (1.25).

Le (1.26) e (1.27) sono infine conseguenza immediata delle (1.24) e (1.25).

c. v. d.

Vediamo ora come si possa introdurre per le superfici cartesiane generalizzate una nozione di area e come questa sia collegata con l'area di Lebesgue nel caso delle superfici cartesiane generalizzate continue, (cfr. [6]).

1.7. DEFINIZIONE. Se $\{(x,y);\ x\in\Omega,\ y=f(x)\}$ è una superficie cartesiana generalizzata, indicheremo con ν la misura vettoriale a $n+1$ componenti definita su Ω da

$$\nu_i=D_i\,f,\ \text{per}\ i<n+1, \tag{1.47}$$

$$\nu_{n+1}=\text{misura di Lebesgue}. \tag{1.48}$$

Diremo area della porzione di superficie definita sull'aperto $K\in\mathcal{K}(\Omega)$ la variazione totale della ν su K, e la indicheremo al solito con $\int_K |d\nu|$.

1.8. TEOREMA. Sia $\{(x,y);x\in\Omega,\ y=f(x)\}$ una superficie cartesiana generalizzata continua. Se per $K\in\mathcal{K}(\Omega)$ vale la

$$\int_{\partial K}|d\nu|=0, \tag{1.49}$$

allora l'area della porzione di superficie definita su K coincide coll'area di Lebesgue della stessa e cioè con:

$$\inf\left\{ \min_{h\to\infty}\lim \int_K [1+|Df_h(x)|^2]^{\frac{1}{2}}\,dx\,;\, f_h \in C^1(\Omega),\ \lim f_h = f,\ \text{uniform. su } K \right\}.$$

DIMOSTRAZIONE.

Cominciamo col far vedere che vale

$$\int_K |d\nu| \leq \text{area di Lebesgue.} \tag{1.50}$$

Per questo si ricordi che vale

$$\int_K |d\nu| = \sup\left\{ \int\left(\sum_{i=1}^n fD_i g_i + g_{n+1}\right) dx\,;\, g_i \in \mathcal{D}(K),\ |g| \leq 1 \right\}. \tag{1.51}$$

Ora se $\{f_h\} \subset C^1(\Omega)$ converge uniformemente a f su K si ha

$$\int\left(\sum_{i=1}^n fD_i g_i + g_{n+1}\right) dx = \lim_{h\to\infty} \int\left(\sum_{i=1}^n f_h\, D_i g_i + g_{n+1}\right) dx, \tag{1.52}$$

e d'altra parte essendo

$$\int\left(\sum_{i-1}^n f_h\, D_i g_i + g_{n+1}\right) dx = \int\left(-\sum_{i=1}^n g_i D_i f_h + g_{n+1}\right) dx, \tag{1.53}$$

$$\int\left(-\sum_{i=1}^n g_i D_i f_h + g_{n+1}\right) dx \leq \int_K \{1+|Df_h(x)|^2\}^{\frac{1}{2}}\,dx, \tag{1.54}$$

si ha

$$\int\left(\sum_{1=1}^n f_i g_i + g_{n+1}\right) dx \leq \min_{h\to\infty}\lim \int_K \{1+|Df_h(x)|^2\}^{\frac{1}{2}}\,dx, \tag{1.55}$$

e quindi vale la (1.50)

Sia ora $\{\tau_h\} \subset \mathcal{D}(R^n)$ una successione regolarizzante e $\{f_h\} \subset C^1(\Omega)$ una successione di regolarizzate di f mediante le τ_h. Avremo allora per h sufficientemente grande

$$\int_K \{1+|Df_h(x)|^2\}^{\frac{1}{2}}\,dx \leq \int_{K_h} |d\nu|, \tag{1.56}$$

e quindi

$$\min_{h \to \infty} \lim \int_K \{1 + | Df_h(x)|^2\}^{\frac{1}{2}} dx \leq \int_{\overline{K}} | d\nu | = \int_K | d\nu |. \tag{1.57}$$

Dalle (1.50) e (1.57) segue allora l'asserto.

c. v. d.

L'area delle porzioni di superficie cartesiana generalizzata può calcolarsi anche attraverso l'insieme ad essa associato, e precisamente si ha

1.9. PROPOSIZIONE. Se $\{(x, y) ; x \in \Omega, y = f(x)\}$ è una superficie cartesiana generalizzata ed E è l'insieme $\{(x, y) ; x \in \Omega, y < f(x)\}$ allora vale

$$\int_K | d\nu | = \int_{K \times R} | D\varphi(x, y ; E)|, \ \forall\, K \in \mathcal{K}(\Omega). \tag{1.58}$$

DIMOSTRAZIONE

Per quanto riguarda la

$$\int_K | d\nu | \leq \int_{K \times R} | D\varphi(x, y ; E)|, \tag{1.59}$$

questa è conseguenza delle (1.26) e (1.27).

Per la diseguaglianza inversa sia al solito $\{f_h\}$ una successione di regolarizzate della f e sia E_h l'insieme $\{(x, y) ; x \in \Omega, y < f_h(x)\}$. Avremo allora, per h sufficientemente grande (cfr. anche la (1.56))

$$\int_{K \times R} | D\varphi(x, y ; E_h)| = \int_K \{1 + |Df_h(x)|\}^{\frac{1}{2}} dx \leq \int_{K_h} | d\nu |, \tag{1.60}$$

$$\int_{K \times R} | D\varphi(x, y ; E)| \leq \min_{h \to \infty} \lim \int_{K \times R} | D\varphi(x, y ; E_h)|. \tag{1.61}$$

Dalle (1.60) e (1.61) segue allora

$$\int_{K \times R} | D\varphi(x, y ; E)| \leq \int_{\overline{K}} | d\nu |, \tag{1.62}$$

dove $\overline{K}$ può sostituirsi con K e si ha quindi l'asserto

c. v. d.

Quanto provato in questa prima parte sulla relazione fra le superfici cartesiane generalizzate e gli insiemi ad esse associati può riassumersi nel seguente enunciato

1.10 TEOREMA. Sia Ω aperto di R^n e f sia una funzione misurabile su Ω. Sono equivalenti le condizioni seguenti

a) $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, ed ha derivate misure,

b) l'insieme $E = \{(x, y) ; x \in \Omega, y < f(x)\}$ ha perimetro localmente finito su $\Omega \times R$ e per ogni $K \in \mathcal{K}(\Omega)$ si ha

$$\int_{K \times R} |D\varphi(x, y ; E)| < \infty.$$

Sotto queste condizioni valgono per ogni insieme di Borel $B \subset \Omega$ le

I) $$\int_{B \times R} |D_i \varphi(x, y ; E)| = \int_B |D_i f|, \quad \text{per } i < n + 1,$$

II) $$\int_{B \times R} |D_{n+1} \varphi(x, y ; E)| = \operatorname{mis} B,$$

III) $$\int_{B \times R} |D\varphi(x, y ; E)| = \int_B |d\nu|, \quad (\text{dove per } \nu \text{ cfr. Def. 1.8}).$$

Se uno dei due membri ha senso vale inoltre (²)

I') $$\int_{B \times R} D_i \varphi(x, y ; E) = \int_B D_i f.$$

E vale infine sempre

II') $$\int_{B \times R} D_{n\pm 1} \varphi(x, y ; E) = \operatorname{mis} B.$$

(²) Per una misura relativa μ intendiamo che $\int_B d\mu$ ha senso se è finito uno dei due integrali $\int_B d\mu^+$, $\int_B d\mu^-$, dove μ^+ e μ^- sono le variazioni positiva e negativa di μ.

2. Insiemi di perimetro localmente finito su prodotti cartesiani.

Nella prima parte di questo lavoro abbiamo cominciato a considerare, vedi il Lemma 1.5, gli insiemi $E \subset \Omega \times R$ per i quali

$$\int_{K\times R} | D\varphi(x, y ; E) | < \infty, \ \forall\ K \in \mathcal{K}(\Omega). \tag{2.1}$$

In questa seconda parte analizzeremo alcune proprietà di tali insiemi.

Dal Lemma 1.5 e precisamente dalla relazione (1.23) discende, se per E vale la (2.1) che l'insieme $E_x = \{y ; (x, y) \in E\}$, che è misurabile per quasi tutti gli $x \in \Omega$, ha anche perimetro finito per quasi tutti gli $x \in \Omega$. Allora E_x è equivalente ad un numero finito di intervalli (cfr. [3]) e possiamo allora supporre che valga, per quasi tutti gli $x \in \Omega$

$$\lim_{y \to y_0 -} \varphi(x, y ; E) = \varphi(x, y_0 ; E), \ \forall\ y_0 \in R. \tag{2.2}$$

La proprietà base per gli insiemi E per cui vale la (2.1) è stabilita nel seguente teorema

2.1. TEOREMA. Sia E un sottoinsieme misurabile di $\Omega \times R$, dove Ω è un aperto connesso di R^n. Allora, se per E vale la (2.1), si hanno le seguenti alternative

$$\lim_{y \to +\infty} \varphi(x, y; E) = \begin{cases} 0, & \text{per quasi tutti gli} \quad x \in \Omega \\ 1, & \text{per quasi tutti gli} \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\lim_{y \to -\infty} \varphi(x, y; E) = \begin{cases} 0, & \text{per quasi tutti gli} \quad x \in \Omega \\ 1, & \text{per quasi tutti gli} \quad x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

DIMOSTRAZIONE.

Osserviamo innanzitutto che i limiti considerati esistono per tutti gli x per cui E_x ha perimetro finito, e quindi per quasi tutti gli $x \in \Omega$.

Per valutare tali limiti consideriamo una qualunque sfera $C \in \mathcal{K}(\Omega)$ e quindi la funzione di y:

$$g(y) = \int_C \varphi(x, y ; E)\, dx. \tag{2.5}$$

La g, per la (2.2), risulta essere continua da sinistra, ed è d'altra parte limitata, quindi possiamo considerarne la derivata nel senso delle distribuzioni. Questa derivata risulta essere una misura finita su tutto R, infatti (cfr. (1.23))

$$\int_R |Dg(y)| \leq \int_C dx \int_R |D_{n+1}\varphi(x, y; E)| = \int_{C\times R} |D_{n+1}\varphi(x, y; E)|. \tag{2.6}$$

La funzione g ha allora limite per y tendente $a + \infty$ e $a - \infty$.

Si tratta ora di valutare tali limiti.

Cominciamo dal caso $n = 1$. Detto Y l'insieme

$$\left\{ y : y \in R, \int_C |D_x \varphi(x, y; E)| > 0 \right\},$$

si ha, per la (1.22) e per il fatto che $\int_C |D_x \varphi(x, y; E)|$ ha valori interi,

$$\text{mis } Y \leq \int_{C\times R} |D_x \varphi(x, y : E)| < \infty. \tag{2.7}$$

D'altra parte abbiamo, per $y \notin Y$, l'alternativa

$$g(y) = \begin{cases} 0 \\ \text{mis } C. \end{cases} \tag{2.8}$$

Dalle (2.7) e (2.8) seguono allora le alternative

$$\lim_{y \to +\infty} g(y) = \begin{cases} 0 \\ \text{mis } C, \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\lim_{y \to -\infty} g(y) = \begin{cases} 0 \\ \text{mis } C. \end{cases} \tag{2.10}$$

Dalle (2.9) e (2.10) valide per ogni sfera $C \in \mathcal{K}(\Omega)$, essendo Ω connesso, seguono le alternative (2.3) e (2.4), nel caso $n = 1$.

Per $n > 1$, dalle (1.34), (1.22) e (2.1) si ha:

$$\lim_{|y| \to \infty} g(y) \cap [\text{mis } C - g(y)] = 0, \tag{2.11}$$

e quindi valgono ancora le alternative (2.9) e (2.10) e da queste l'asserto.

c.v.d.

Abbiamo allora che gli insiemi $E \subset \Omega \times R$ per i quali vale (2.1), nel caso in cui Ω sia connesso, possono essenzialmente dividersi in due categorie. Quelli per cui vale

$$(2.12) \qquad \text{per quasi tutti gli } x \in \Omega : \begin{cases} \lim\limits_{y \to +\infty} \varphi(x, y; E) = 0 \\ \lim\limits_{y \to -\infty} \varphi(x, y; E) = 0, \end{cases}$$

e quelli per cui vale

$$(2.13) \qquad \text{per quasi tutti gli } x \in \Omega : \begin{cases} \lim\limits_{y \to +\infty} \varphi(x, y; E) = 0 \\ \lim\limits_{y \to -\infty} \varphi(x, y; E) = 1. \end{cases}$$

Abbiamo parlato di suddivisione «essenziale» intendendo che se per un insieme di $\Omega \times R$, con Ω connesso, vale (2.1), allora esso o il suo complementare appartengono ad una delle due categorie.

Vogliamo ora stabilire dei confronti fra tali insiemi e gli insiemi del tipo di quelli considerati nella prima parte.

2.2. TEOREMA. Se per $E \subset \Omega \times R$ valgono le (2.1) e (2.12), allora si ha

$$(2.14) \qquad \int \varphi(x, y; E)\, dy \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$$

e, indicata con ψ la funzione definita quasi ovunque su Ω da $\psi(x) = \frac{1}{2}\int \varphi(x, y : E)\, dy$, e con L l'insieme $\{(x, y); x \in \Omega, |y| < \psi(x)\}$, si hanno le diseguaglianze:

$$(2.15) \qquad \int_{K \times R} |D_i \varphi(x, y; L)| \leq \int_{K \times R} |D_i \varphi(x, y; E)|, \ \forall\, i, \ \forall\, K \in \mathcal{K}(\Omega),$$

$$(2.16) \qquad \int_{K \times R} |D \varphi(x, y : L)| \leq \int_{K \times R} |D \varphi(x, y; E)|, \ \forall\, K \in \mathcal{K}(\Omega).$$

DIMOSTRAZIONE.

Cominciamo col provare la (2.14). Per questa basterà provare la sommabilità sulle sfere $C \in \mathcal{K}(\Omega)$.

Trattiamo a parte il caso $n = 1$. Qui per le (2.12) (cfr. anche la dimostrazione della Prop. 1.6) si ha che esiste $\gamma(C) \in R$ tale che

$$\int_C \varphi(x, y; E)\, dx = 0, \text{ per } |y| > \gamma(C),\ y \notin Y. \tag{2.17}$$

Da questa segue allora

$$\int_C dx \int \varphi(x, y; E)\, dy \leq [2\gamma(C) + \text{mis } Y] \text{ mis } C. \tag{2.18}$$

Per $n > 1$, dalle (1.34) e (2.12) si ha che esiste $\alpha(C) \in R$ per cui

$$\int_C \varphi(x, y; E)\, dx \leq c(n)^{\frac{n-1}{n}} (\text{mis } C)^{\frac{1}{n}} \int_C |D_x \varphi(x, y; E)|, \text{ per } |y| > \alpha(C). \tag{2.19}$$

Da questa, per le (1.22) e (2.1) segue la (2.14).

Per provare le disuguaglianze (2.15) facciamo vedere che vale innanzitutto

$$2\int_K |D_i \psi| \leq \int_{K\times R} |D_i \varphi(x, y; E)|,\ i < n+1,\ \forall K \in \mathcal{K}(\Omega). \tag{2.20}$$

Per questo ricordando che vale

$$\int_K |D_i \psi| = \sup\left\{\int D_i g(x)\, \psi(x)\, dx;\ g \in \mathcal{D}(K),\ |g| \leq 1\right\}, \tag{2.21}$$

si tratta di valutare gli integrali $\int D_i g(x)\, \psi(x)\, dx$. Per questi, se η_ε è la funzione definita dalla (1.39) si ha

$$\int \eta_\varepsilon(y)\, D_i g(x)\, \varphi(x, y; E)\, dx\, dy \leq \int_{K\times R} |D_i \varphi(x, y; E)|, \tag{2.22}$$

$$\int \eta_\varepsilon(y)\, D_i g(x)\, \varphi(x, y; E)\, dx\, dy = \int D_i g(x)\, dx \int \eta_\varepsilon(y)\, \varphi(x, y; E)\, dy, \tag{2.23}$$

e poichè valgono quasi ovunque su Ω le

$$\int \eta_s(y)\,\varphi(x, y; E)\,dy \leq 2\,\psi(x) \tag{2.24}$$

$$\lim_{s \to +\infty} \int \eta_s(y)\,\varphi(x, y; E)\,dy = 2\,\psi(x), \tag{2.25}$$

passando al limite nella (2.23) e tenendo conto della (2.22) si ha

$$2 \int \psi(x)\, D_i\, g(x) \leq \int_{K \times R} |\, D_i\, \varphi(x, y; E)\,|, \tag{2.26}$$

da cuí, tenuto conto della (2.21) si ricava la (2.20).

Facciamo ora vedere che vale

$$\int_{K \times R} |\, D_i\, \varphi(x, y; L)\,| \leq 2 \int_K |\, D_i\, \psi\,|,\ \ i < n + 1,\ \ \forall\, K \in \mathcal{K}(\Omega). \tag{2.27}$$

Per questo sia $\{\psi_h\}$ una successione regolarizzante della ψ e sia L_h la successione di insiemi $L_h = \{(x, y); x \in \Omega,\ |\,y\,| < \psi_h(x)\}$.

Ricordando che vale

$$\begin{aligned} \int_{K \times R} |\, D_i\, \varphi(x, y; L)\,| = \\ = \sup \left\{ \int D_i\, g(x, y)\, \varphi(x, y; L)\, dx\, dy;\ g \in \mathcal{D}(K \times R),\ |\,g\,| \leq 1 \right\}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

valutiamo gli integrali al secondo membro della (2.28). Per essi si ha

$$\int D_i\, g(x, y)\, \varphi(x, y; L)\, dx\, dy = \lim_{h \to \infty} \int D_i\, g(x, y)\, \varphi(x, y; L_h)\, dx\, dy. \tag{2.29}$$

D'altra parte, per le formule di Green classiche, vale

$$\begin{aligned} \int D_i\, g(x, y)\, \varphi(x, y; L_h)\, dx\, dy = - \int g(x, \psi_h(x))\, D_i\, \psi_h(x)\, dx\, + \\ + \int g(x, -\psi_h(x))\, D_i\, \psi_h(x)\, dx, \end{aligned} \tag{2.30}$$

da cui segue

$$\int D_i g(x,y)\,\varphi(x,y;L_h)\,dx\,dy \leq 2 \int_{pr\,(\mathrm{supp}\,g)} |D_i \psi_h(x)|\,dx, \tag{2.31}$$

Dalle (2.31), (2.29) segue allora la

$$\int D_i g(x,y)\,\varphi(x,y;L)\,dx\,dy \leq 2 \int_K |D_i \psi|. \tag{2.32}$$

Dalle (2.32) e (2.28) segue infine la (2.27).

Dalle (2.20) e (2.27) seguono allora le (2.15) per $i < n+1$. Per il caso $i = n+1$ la (2.15) è conseguenza delle seguenti diseguaglianze

$$\int_{K\times R} |D_{n+1}\varphi(x,y;E)| \geq 2 \operatorname{mis}[K \cap \{x;\psi(x) > 0\}] \tag{2.33}$$

$$\int_{K\times R} |D_{n+1}\varphi(x,y;L)| \leq 2 \operatorname{mis}[K \cap \{x;\psi(x) > 0\}]. \tag{2.34}$$

La prima delle quali è conseguenza immediata della (1.23) mentre la seconda si prova in maniera analoga a quella seguita per provare la (2.27).

La (2.16) è infine conseguenza immediata delle (2.15).

c. v. d.

2.3. Teorema. Se $E \subset \Omega \times R$ verifica le (2.1) e (2.13), allora esiste $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tale che, detto L l'insieme $\{(x,y);\ x \in \Omega,\ y < f(y)\}$, si ha

$$\int |\varphi(x,y;E) - \varphi(x,y;L)|\,dy \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$$

e

$$\int_K dx \int [\varphi(x,y;E) - \varphi(x,y;L)]\,dy = 0, \qquad \forall\, K \in \mathcal{K}(\Omega). \tag{2.35}$$

Inoltre valgono le diseguaglianze

$$\int_{K\times R} |D_i\varphi(x,y;L)| \leq \int_{K\times R} |D_i\varphi(x,y;E)|, \ \forall\, i, \quad \forall\, K \in \mathcal{K}(\Omega), \tag{2.36}$$

$$\int_{K\times R} |D\varphi(x,y;L)| \leq \int_{K\times R} |D\varphi(x,y;E)|, \quad \forall\, K \in \mathcal{K}(\Omega). \tag{2.37}$$

DIMOSTRAZIONE.

Indichiamo con $\{f_h\}$ la successione di funzioni definite quasi ovunque su Ω da

$$f_h(x) = \int_{-h}^{h} \varphi(x, y; E)\, dy - h. \tag{2.38}$$

Osserviamo che se $P(E_x) < \infty$ e se valgono $\lim\limits_{y \to +\infty} \varphi(x, y; E) = 0$, $\lim\limits_{y \to -\infty} \varphi(x, y; E) = 1$, allora la successione $\{f_h(x)\}$ risulta costante per h « grande », e perciò, quasi ovunque su Ω esiste finito il limite

$$\lim_{h \to \infty} f_h(x) = f(x), \tag{2.39}$$

La f così definita verifica, quasi ovunque su Ω, la

$$\int_{f(x)}^{+\infty} \varphi(x, y; E)\, dy = \int_{-\infty}^{f(x)} [1 - \varphi(x, y; E)]\, dy. \tag{2.40}$$

Proviamo ora che $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Per questo proviamo la sommabilità di f sulle sfere $C \in \mathcal{K}(\Omega)$.

Cominciamo dal caso $n = 1$. Fissata $C \in \mathcal{K}(\Omega)$, tenuto conto delle (2.13) (cfr. anche la dimostrazione della Proposizione 1.6), si ha che esiste $\gamma(C) \in R$ per cui

$$\int_C \varphi(x, y; E) = 0, \qquad \text{per} \qquad y > \gamma(C), \quad y \notin Y, \tag{2.41}$$

$$\int_C \varphi(x, y; E)\, dx = \operatorname{mis} C, \qquad \text{per} \qquad y < -\gamma(C), \quad y \notin Y. \tag{2.42}$$

D'altra parte poichè vale

$$f_h(x) = \int_{-\gamma(C)}^{\gamma(C)} \varphi(x, y; E)\, dy - \gamma(C) + \int_{\gamma(C)}^{h} \varphi(x, y; E)\, dy + \int_{-h}^{-\gamma(C)} [1 - \varphi(x, y; E)]\, dy, \tag{2.43}$$

si ha

$$|f_h(x)| \leq \gamma(C) + \int_{\gamma(C)}^{h} \varphi(x, y; E)\, dy + \int_{-h}^{-\gamma(C)} [1 - \varphi(x, y; E)]\, dy, \quad \text{per } h > \gamma(C) \tag{2.44}$$

da cui, passando al limite per $h \to \infty$,

$$(2.45) \qquad |f(x)| \leq \gamma(C) + \int_{\gamma(C)}^{\infty} \varphi(x, y; E)\, dy + \int_{-\infty}^{-\gamma(C)} [1 - \varphi(x, y; E)]\, dy.$$

Da questa, integrando su C

$$(2.46) \qquad \int_C |f(x)|\, dx \leq \gamma(C) \operatorname{mis} C + \int_{\gamma(C)}^{\infty} dy \int_C \varphi(x, y; E)\, dx + \int_{-\infty}^{-\gamma(C)} dy \int_C [1 - \varphi(x, y; E)]\, dy,$$

e, tenuto conto delle (2.41) e (2.42), si ricava infine

$$(2.47) \qquad \int_C |f(x)|\, dx \leq [\gamma(C) + \operatorname{mis} Y] \operatorname{mis} C.$$

Per $n > 1$ grazie alle (2.13) (cfr. anche la dimostrazione della Prop. 1.7) si ha che esiste $\alpha(C)$ tale che

$$(2.48) \qquad \int_C \varphi(x, y; E)\, dx \leq c(n)^{\frac{n-1}{n}} (\operatorname{mis} C)^{\frac{1}{n}} \int_C |D_x \varphi(x, y; E)|, \qquad y > \alpha(C)$$

$$(2.49) \qquad \int_C [1 - \varphi(x, y; E)]\, dx \leq c(n)^{\frac{n-1}{n}} (\operatorname{mis} C)^{\frac{1}{n}} \int_C |D_x \varphi(x, y; E)|, \quad y < -\alpha(C).$$

D'altra parte per $h > \alpha(C)$ abbiamo:

$$(2.50) \qquad \int_C |f_h(x)|\, dx \leq \int_C dx \left| \int_{-\alpha(C)}^{\alpha(C)} \varphi(x, y; E)\, dy - \alpha(C) \right| + \int_C dx \int_{\alpha(C)}^{h} \varphi(x, y; E)\, dy + \int_C dx \int_{-h}^{-\alpha(C)} [1 - \varphi(x, y; E)]\, dy,$$

e quindi, per le (2.48), (2.49) e (2.50) si ha

$$(2.51)\qquad \int_C |f_h(x)|\,dx \leq \alpha(C)\,\mathrm{mis}\,C + c(n)^{\frac{n-1}{n}}(\mathrm{mis}\,C)^{\frac{1}{n}} \int dy \int_C |D_x\varphi(x,y;E)|\,.$$

Dalla (2.51) e (1.22) si ha allora la sommabilità di f su C.

La (2.35) è poi conseguenza immediata della (2.40).

Per le (2.30), nel caso $i < n + 1$, grazie alle (1.9), basterà far vedere che vale

$$(2.52)\qquad \int_K |D_i f| \leq \int_{K\times R} |D_i\varphi(x,y;E)|, \qquad \forall K \in \mathcal{K}(\Omega).$$

Per provare la (2.52) basta ragionare come nella parte finale della dimostrazione della Prop. 1.6 e osservare che vale:

$$(2.53)\qquad \left|\int \eta_\varepsilon(y)\,\varphi(x,y;E)\,dy - \varepsilon - \frac{1}{2} - f(x)\right| \leq$$

$$\leq \int_\varepsilon^{+\infty} \varphi(x,y;E)\,dy + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} [1 - \varphi(x,y;E)]\,dy.$$

Per quanto riguarda il caso $i = n + 1$ basta, grazie alla (1.10), osservare che vale

$$(2.54)\qquad \int_{K\times R} |D_{n+1}\varphi(x,y;E)| \geq \mathrm{mis}\,K, \qquad \forall K \in \mathcal{K}(\Omega),$$

e questa è conseguenza immediata della (1.23).

Finalmente le (2.37) sono facile conseguenza delle (2.36). c. v. d.

Nel caso in cui E verifichi la (2.13) possiamo valutare quantitativamente la differenza fra esso e l'insieme L ad esso associato; daremo precisamente delle valutazioni per la loro differenza simmetrica.

2.4. TEOREMA. Se $E \subset \Omega \times R$ verifica le (2.1) e (2.13), allora detto L l'insieme introdotto nel Teor. 2.3 e indicata con $E \triangle L$ la differenza simmetrica dei due insiemi E ed L, ovvero posto $E \triangle L = (E - L) \cup (L - E)$, si hanno le relazioni, per ogni $K \in \mathcal{K}(\Omega)$,

$$(2.55)\qquad \mathrm{mis}[pr(E \triangle L) \cap K] \leq \frac{1}{2}\left\{\int_{K\times R} |D_{n+1}\varphi(x,y;E)| - \int_{K\times R} |D_{n+1}\varphi(x,y;L)|\right\},$$

$$(2.56) \qquad \operatorname{mis}[pr(E \triangle L) \cap K] \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \left\{ \int_{K\times R} |D\varphi(x, y; E)| \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{K\times R} |D\varphi(x, y; E)| - \int_{K\times R} |D\varphi(x, y; L)| \right\}^{\frac{1}{2}}$$

dove

$$pr(E \triangle L) = \left\{ x ; \int \varphi(x, y; E \triangle L)\, dy > 0 \right\}.$$

DIMOSTRAZIONE.

Per il Teor. 1.10 si ha

$$(2.57) \qquad \int_{K\times R} | D_{n+1} \varphi(x, y; L) | = \operatorname{mis} K,$$

e d'altra parte, per le (2.13) si ha:

$$(2.58) \qquad 2\varphi(x, pr(E \triangle L)) \leq \int_R | D_{n+1} \varphi(x, y; E) | - 1, \qquad \text{quasi-ovunque su } \Omega,$$

da cui, integrando su K

$$(2.59) \qquad 2 \operatorname{mis}[pr(E \triangle L) \cap K] \leq \int_{K\times R} | D_{n+1} \varphi(x, y; E) | - \operatorname{mis} K,$$

e perciò, grazie alla (2.57) si ha la (2.55).

La (2.56) discende poi dalla (2.55) e da

$$(2.60) \qquad \int_{K\times R} | D_{n+1} \varphi(x, y; E) | - \int_{K\times R} | D_{n+1} \varphi(x, y; L) | \leq \sqrt{2} \left\{ \int_{K\times R} | D\varphi(x, y; E) | \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \int_{K\times R} | D\varphi(x, y; E) | - \int_{K\times R} | D\varphi(x, y; L) | \right\}^{\frac{1}{2}},$$

la quale è conseguenza del Lemma di De Giorgi (cfr. [4], pag. 38) applicato alle funzioni vettoriali di insieme definite da

$$\alpha_i(K) = \int_{K \times R} | D_i \varphi(x, y; L) | , \tag{2.61}$$

$$\gamma_i(K) = \int_{K \times R} | D_i \varphi(x, y; E) | , \tag{2.62}$$

e dalle relazioni

$$\int_K | d\gamma | \leq \int_{K \times R} | D\varphi(x, y; E) | , \tag{2.63}$$

$$\int_K | d\alpha | = \int_{K \times R} | D\varphi(x, y; L) | , \tag{2.64}$$

$$\int_K | d(\gamma - \alpha) | \geq \gamma_{n+1}(K) - \alpha_{n+1}(K). \tag{2.65}$$

c. v. d

In un caso particolare, ma interessante per le applicazioni, possiamo valutare più precisamente $E \triangle L$, si tratta del caso in cui esiste $K \in \mathcal{K}(\Omega)$ tale che

$$\overline{pr\,(E \triangle L)} \subset K. \tag{2.66}$$

Abbiamo infatti il seguente risultato

2.5. TEOREMA. Se $E \subset \Omega \times R$ verifica le (2.1) e (2.13), se L è l'insieme introdotto nel Teorema 2.3, valgono, se K verifica la (2.66), le

$$\operatorname{mis}(E \triangle L) \leq 2^{-\frac{1}{n}} \left\{ \int_{K \times R} | D\varphi(x, y; E) | \right\} \left\{ \int_{K \times R} | D_{n+1}\varphi(x, y; E) | - \int_{K \times R} | D_{n+1}\varphi(x, y; L) | \right\}^{\frac{1}{n}} \tag{2.67}$$

$$\operatorname{mis}(E \triangle L) \leq 2^{-\frac{1}{2n}} \left\{ \int_{K \times R} | D\varphi(x, y; E) | \right\}^{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)} \left\{ \int_{K \times R} | D\varphi(x, y; E) | - \int_{K \times R} | D\varphi(x, y; L) | \right\}^{\frac{1}{2n}}. \tag{2.68}$$

DIMOSTRAZIONE.

Cominciamo col considerare il caso $n = 1$. Indichiamo allora con $Y = \left\{ y ; \int_K |D_x \varphi(x, y; E \triangle L)| \neq 0 \right\}$. Avremo ovviamente

$$2 \operatorname{mis} Y \leq \int_{K \times R} | D_x \varphi(x, y; E \triangle L) | \leq \int_{K \times R} | D\varphi(x, y; E \triangle L) | \tag{2.69}$$

e quindi, poichè vale (cfr. [5] teor. 3.IV)

$$\int_{K \times R} | D\varphi(x. y, E \triangle L) | \leq \int_{K \times R} | D\varphi(x, y; E) | + \int_{K \times R} | D\varphi(x, y; L) |, \tag{2.70}$$

tenuto conto della (2.37) si ha

$$\operatorname{mis} Y \leq \int_{K \times R} | D\varphi(x, y; E) | . \tag{2.71}$$

D'altra parte, dalla (2.66) e per la definizione di Y si ha

$$\int_K \varphi(x, y; E \triangle L)\, dx = 0, \qquad \text{se} \quad y \notin Y, \tag{2.72}$$

e quindi

$$\operatorname{mis}(E \triangle L) \leq \operatorname{mis} Y \cdot \operatorname{mis} pr\,[(E \triangle L) \cap K], \tag{2.73}$$

e quindi, ricordando la (2.55) si ha la (2.67), e ricordando la (2.56) si ha la (2.68), nel caso $n = 1$.

Per $n > 1$ abbiamo, per la diseguaglianza isoperimetrica (cfr. [3] formula (52))

$$\left[\int_K \varphi(x, y; E \triangle L)\, dx \right]^{1 - \frac{1}{n}} \leq k(n) \int_{K \times R} | D_x \varphi(x, y; E \triangle L) |, \tag{2.74}$$

per quasi tutti gli y, dove $k(n)$ si calcola (cfr. [4]) nel caso della sfera, e quindi si ha,

$$k(n) \leq \frac{1}{2} . \tag{2.75}$$

Avremo allora, per quasi tutti gli y,

$$(2.76)\qquad \{\text{mis}\, pr\, [(E \triangle L] \cap K]^{-\frac{1}{n}} \int_K \varphi(x, y;\, E \triangle L)\, dx \leq \frac{1}{2} \int_K | D_x \varphi(x, y; E \triangle L) |,$$

da cui, tenuto conto delle (1.22), (2.66), (2.70) e (2.37),

$$(2.77)\qquad \text{mis}\,(E \triangle L) \leq \{\text{mis}\,[pr\,(E \triangle L) \cap K]\}^{\frac{1}{n}} \int_{K \times R} | D\varphi(x, y;\, E) |.$$

Dalle (2.77) tenuto conto della (2.55) e (2.56) si ricavano allora le (2.67) e (2.68)

c. v. d.

3. Appendice.

Sia A un aperto di R^{n+m}. Indichiamo con (x, y) il punto generico di R^{n+m}, intendendo che $x \in R^n$. Per ogni $f \in L^1_{\text{loc}}(A)$ ha senso considerare

$$(3.1)\qquad \int_A | D_x f | = \sup \left\{ \int f(x, y) \sum_{i=1}^{n} D_i\, g_i(x, y)\, dx\, dy\, ;\ g_i \in \mathcal{D}(A),\ \sum_{i=1}^{n} g_i^2 \leq 1 \right\}.$$

Vale allora la seguente

3.1. PROPOSIZIONE. Se $f \in C^1(A)$, allora si ha

$$(3.2)\qquad \int_A | D_x f | = \int_A \left\{ \sum_{i=1}^{n} | D_i f(x, y) |^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dx\, dy.$$

DIMOSTRAZIONE.

Dalla definizione di $\int_A | D_x f |$ e dalla formula di Green si ricava subito la

$$(3.3)\qquad \int_A | D_x f | \leq \int_A \left\{ \sum_{i=1}^{n} | D_i f(x, y) |^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dx\, dy.$$

D'altra parte se $K \in \mathcal{K}(A)$ si ha, sempre per la formula di Green e per noti teoremi sulla approssimazione delle funzioni misurabili:

$$\int_K |D_x f| = \sup \left\{ \int_K \sum_{i=1}^n D_i f(x, y) \cdot g_i(x, y) ; g_i \text{ misurabile}, \sum_{i=1}^n g_i^2 \leq 1 \right\}. \tag{3.4}$$

Dalla (3.4), ponendo

$$g_i(x,y) = \begin{cases} D_i f(x,y) \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n |D_i f(x,y)|^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}, \text{ se} \sum_{i=1}^n |D_i f(x,y)|^2 > 0 \\ 0, \text{ se} \sum_{i=1}^n |D_i f(x,y)|^2 = 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

si ricava

$$\int_K |D_x f| \geq \int_K \left\{ \sum_{i=1}^n |D_i f(x, y)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dx\, dy, \tag{3.6}$$

e da questa facilmente la

$$\int_A |D_x f| \geq \int_A \left\{ \sum_{i=1}^n |D_i f(x,y)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dx\, dy. \tag{3.7}$$

Dalle (3.3) e (3.7) segue allora l'asserto.

c. v. d.

Se $f \in L^1_{\text{loc}}(A)$ allora, per quasi tutti gli $y \in R^m$, la restrizione di f ad $A_y = \{x ; x \in R^n, (x, y) \in A\}$ appartiene a $L^1_{\text{loc}}(A_y)$ e quindi possiamo considerare

$$\int_{A_y} |D_x f| = \sup \left\{ \int f(x, y) \sum_{i=1}^n D_i g_i(x) ; g_i \in \mathcal{D}(A_y) \sum_{i=1}^n g_i^2 \leq 1 \right\}, \tag{3.8}$$

dove si deve intendere $\int_{A_y} |D_x f| = 0$ se $A_y = \emptyset$.

Abbiamo allora la seguente

3.2. Proposizione. La funzione $\int_{A_y} |D_x f|$ è misurabile in R^m.

Dimostrazione

Sia $\{f_j\} \subset C^1(A)$ una successione di regolarizzate della f. Indichiamo con $(A_y)_h$, per h intero, l'insieme $\{x ; x \in R^n, \text{dist}(x, R^n - A_y) > h^{-1}\}$, avremo allora, per quasi tutti gli $y \in R^m$, che $\{f_j\}$, converge ad f in $L^1_{\mathrm{loc}}(A_y)$ e quindi (cfr. Prop. 0.3, [2])

$$\int_{(A_y)_h} |D_x f| \leq \min_{j \to \infty} \lim \int_{(A_y)_h} |D_x f_j| . \tag{3.9}$$

D'altra parte vale, per note proprietà della regolarizzazione

$$\max_{j \to \infty} \lim \int_{(A_y)_{h-1}} |D_x f_j| \leq \int_{(A_y)_h} |D_x f| . \tag{3.10}$$

Dalle (3.9) e (3.10), ricordando che vale

$$\lim_{h \to \infty} \int_{(A_y)_h} |D_x f| = \int_{A_y} |D_x f| , \tag{3.11}$$

si ricava

$$\int_{A_y} |D_x f| = \lim_{h \to \infty} \min_{j \to \infty} \lim \int_{(A_y)_h} |D_x f_j| = \lim_{h \to \infty} \max_{j \to \infty} \lim \int_{(A_y)_h} |D_x f_j| . \tag{3.12}$$

Dalla (3.12), grazie alla Prop. 3.1, si ha la misurabilità di $\int_{A_y} |D_x f|$.

c.v.d.

Possiamo allora enunciare il seguente risultato (cfr. anche KRICKEBERG, [6], DE VITO [7]).

3.3. TEOREMA. « Per $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(A)$ vale

$$\int_A |D_x f| = \int_{R^m} dy \int_{A_y} |D_x f|. \tag{3.13}$$

Prima di dimostrare questo risultato dimostriamo un lemma.

3.4. LEMMA. Se $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(A)$, se $\{f_j\} \subset C^1(A)$ è una successione di regolarizzate di f, allora vale

$$\int_A |D_x f| = \lim_{h \to \infty} \min_{j \to \infty} \lim \int_{A_h} |D_x f_j| = \lim_{h \to \infty} \max_{j \to \infty} \lim \int_{A_h} |D_x f_j|, \tag{3.14}$$

dove $A_h = \{(x, y) ;\ \mathrm{dist}\,[(x, y), R^{n+m} - A] > h^{-1}\}$.

DIMOSTRAZIONE.

Così come valevano le (3.9) e (3.10) valgono le

$$\int_{A_h} | D_y f | \leq \min_{j \to \infty} \lim \int_{A_h} | D_x f_j |, \tag{3.15}$$

$$\int_{A_h} | D_x f | \geq \max_{j \to \infty} \lim \int_{A_{h-1}} | D_x f_j |. \tag{3.16}$$

E poichè ancora vale

$$\lim_{h \to \infty} \int_{A_h} | D_x f | = \int_{A} | D_x f |, \tag{3.17}$$

si ha, passando al limite nelle (3.15) e (3.16), la (3.14).

c.v.d.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.3.

Dalla definizione di $\int_A | D^x f |$, dal Teorema di Fubini e dalla definizione di $\int_{A_y} | D_x f |$ si ricava subito la

$$\int_{A} | D_x f | \leq \int_{R^m} dy \int_{A_y} | D_x f |. \tag{3.18}$$

D'altra parte, per il Lemma 3.4, si ha

$$\int_{A} | D_x f | = \lim_{h \to \infty} \ \min_{j \to \infty} \lim \int_{A_h} | D_x f_j |. \tag{3.19}$$

Per la Prop. 3.1 e per il Teorema di Fubini si ricava:

$$\int_{A_h} | D_x f_j | = \int_{R^m} dy \int_{(A_h)_y} | D_x f_j |. \tag{3.20}$$

D'altra parte (cfr. Prop. 0.3, [2]) si ha per quasi tutti gli y

$$\min_{j \to \infty} \lim \int_{(A_h)_y} | D_x f_j | \geq \int_{(A_h)_y} | D_x f |, \tag{3.21}$$

o perciò, dalle (3.19), (3.20) e (3.21), tenuto conto del Lemma di Fatou, si ha

$$\int_A |D_x f| \geq \lim_{h \to \infty} \int_{R^m} dy \int_{(A_h)_y} |D_x f|, \tag{3.22}$$

e quindi, poichè vale ovviamente, per quasi tutti gli y,

$$\lim_{h \to \infty} \int_{(A_h)_y} |D_x f| = \int_{A_y} |D_x f|, \tag{3.23}$$

tenuto conto del teorema di B. Levi, dalle (3.22) e (3.23) si ricava

$$\int_A |D_x f| \geq \int_{R^m} dy \int_{A_y} |D_x f|. \tag{3.24}$$

Dalle (3.18) e (3.24) segue allora l'asserto.

c. v. d.

BIBLIOGRAFIA

[1] SAKS, S. « *Theory of the integral* ». Varsavia, 1937.

[2] MIRANDA, M. « *Distribuzioni aventi derivate misure e insiemi di perimetro localmente finito* ». Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 1964.

[3] DE GIORGI, E. « *Su una teoria generale della misura* $(r-1)$*-dimensionale in uno spazio ad* r *dimensioni* ». Ann. Mat. Pura e Appl. (1954).

[4] DE GIORGI, E. « *Sulla proprietà isoperimetrica della ipersfera nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita* ». Atti Acc. Naz. Lincei (1958).

[5] DE GIORGI, E. « *Complementi alla teoria della misura* $(n-1)$*-dimensionale in uno spazio* n*-dimensionale* ». Sem. Mat. della Scuola Normale Superiore di Pisa. Anno Accad. 1960-61.

[6] KRICKERBERG, K. « *Distributions and Lebesgue area* ». Bull. Ann. Math. Soc., Abstr., Vol. 63 (1957).

[7] DE VITO L. « *Sulle funzioni di più variabili a variazione limitata* ». Arch. f. Rat. Mach. and Analysis Vol. 3, (1959).