ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

DENISE HUET

Perturbations singulières relatives au problème de Dirichlet dans un demi-espace

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 18, nº 4 (1964), p. 425-448

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1964_3_18_4_425_0>

PERTURBATIONS SINGULIÈRES RELATIVES AU PROBLÈME DE DIRICHLET DANS UN DEMI-ESPACE

DENISE HUET

INTRODUCTION

Le but de ce travail est de donner une démonstration du théorème 3.1, annoncé dans D. HUET [7].

On se place dans le demi-espace R^n_+, et on considère un opérateur elliptique B, d'ordre $2m'$ et une famille d'opérateurs $B_\varepsilon = \varepsilon A + B$, pour $\varepsilon \in]0, 1]$, elliptiques d'ordre $2m$ $(m > m')$. On étudie la convergence, lorsque $\varepsilon \to 0$, de la solution d'un problème de DIRICHLET non homogène, relatif à l'opérateur B_ε, vers la solution d'un problème de DIRICHLET relatif à B, en utilisant les espaces $T^{k,r}(R^n_+)$, de LIONS-MAGÉNÈS [13], PEETRE [14] et HÖRMANDER [5].

§ 1. Espaces $T^{k,r}(R^n_+)$ et problème de DIRICHLET.

1. Soit R^n l'espace euclidien réel à n dimensions. On désigne par R^n_+ le sous-espace de R^n formé des points $x = (x_1, \dots, x_n)$ qui vérifient $x_n > 0$. On pose $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ et on appelle π l'hyperplan $x_n = 0$.

Soit $\mathcal{S}'_x$ [resp. $\mathcal{S}'_{x'}$] l'espace des distributions tempérées (1) sur R^n [resp. π]. On désigne par $\mathcal{F}$ [resp. $\mathcal{F}_{x'}$] la transformation de FOURIER en x [resp. en x'] isomorphisme de $\mathcal{S}'_x$ [resp. $\mathcal{S}'_{x'}$] sur $\mathcal{S}'_\xi$ [resp. $\mathcal{S}'_{\xi'}$], où $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ est la variable duale de x et $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ la variable duale de x'. On désigne par $\mathcal{F}^{-1}$ [resp. $\mathcal{F}^{-1}_{\xi'}$] l'isomorphisme inverse de $\mathcal{F}_x$ [resp. $\mathcal{F}_{x'}$].

Pervenuto alla Redazione il 3 Aprile 1964.

(1) Voir SCHWARTZ [16].

Soit Ω un ouvert de R^n; $L^2(\Omega)$ est l'espace hilbertien des classes de fonctions complexes, de carré sommable sur Ω, muni de la norme

$$\| u \|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega | u(x) |^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1.1}$$

Pour k réel quelconque, $H^k(R^n)$ (2) est l'espace des $u \in \mathcal{S}'_x$ tels que

$$[1 + | \xi |^2]^{\frac{k}{2}} \mathcal{F} u \in L^2(R^n)$$

muni de la norme

$$\| u \|_{H^k(R^n)} = \| [1 + | \xi |^2]^{\frac{k}{2}} \mathcal{F} u \|_{L^2(R^n)}. \tag{1.1.2}$$

Pour k entier ≥ 0, on désigne par $H^k(R^n_+)$ l'espace de HILBERT des distributions u sur R^n_+ telles que (3) $D^p u \in L^2(R^n_+)$ pour $| p | \leq k$, muni de la norme

$$\| u \|_{H^k(R^n_+)} = (\Sigma \| D^p u \|^2_{L^2(R^n_+)})^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1.3}$$

On appelle $H^k_0(R^n_+)$ l'adhérence dans $H^k(R^n_+)$ de l'espace $\mathcal{D}(R^n_+)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans R^n_+, et par $H^{-k}(R^n_+)$ le dual fort de $H^k_0(R^n_+)$.

2. Soient k un entier quelconque et r un nombre réel quelconque. La transformation $\mathcal{G}^r = \mathcal{F}^{-1}_{\xi'} (1 + | \xi' |^2)^{\frac{r}{2}} \mathcal{F} x'$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}'_{x'}$ sur lui-même. On appelle $T^{k,r}(R^n_+)$ (4), l'espace hilbertien des distributions u sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathcal{S}'_{x'}$ (5) telles que $\mathcal{G}^r u = (\mathrm{I} \otimes \mathcal{G}^r) u \in H^k(R^n_+)$, muni de

---

(2) Voir en ce qui concerne ces espaces, SOBOLEV [21], [22], SCHWARTZ [17], [18], [19].

(3) Suivant les notations habituelles $p = (p_1, \dots, p_n)$ où les p_i sont des entiers ≥ 0, $| p | = p_1 + \dots + p_n$. Si $p = (0, \dots, 0)$, $D^p u = u$, si $| p | > 0$, $D^p u = \dfrac{\partial^{| p |} u}{\partial x_1^{p_1}, \dots, \partial x_n^{p_n}}$.

(4) Ces espaces ont été introduits dans LIONS-MAGÉNÈS [13]. Voir aussi PEETRE [14] et [15] et HÖRMANDER [5]. Nous renvoyons à [13] pour les démonstrations des propriétés de ces espaces énoncés dans le § 1.

(5) Pour les distributions à valeurs vectorielles, voir SCHWARTZ [20]. L'espace utilisé ici est $\mathcal{D}'\,[0, +\infty; \mathcal{S}'_{x'}] = \mathcal{D}'(0, +\infty) \hat{\otimes} \mathcal{S}'_{x'}$.

la norme

$$\| u \|_{T^{k,r}(R^n_+)} = \| \mathcal{G}^r u \|_{H^k(R^n_+)}. \tag{1.2.1}$$

Pour r entier ≥ 0, $T^{k,r}(R^n_+)$ est identifiable à l'espace des distributions u sur R^n_+ telles que $D^p_{x'} u \in H^k(R^n_+)$ pour $|p| \leq r$ la norme (1.2.1) étant alors équivalente à la norne:

$$\| u \|_{T^{k,r}(R^n_+)} = \left(\sum_{|p| \leq r} \| D^p_{x'} u \|^2_{H^k(R^n_+)} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2.2}$$

Notons que l'on a:

$$T^{k,r}(R^n_+) \subset T^{k',r'}(R^n_+) \qquad \text{pour } \begin{array}{l} k \geq k' \\ r \geq r' \end{array} \text{[6]}. \tag{1.2.3}$$

D'autre part, si on désigne par $\mathcal{B}(\overline{R^n_+})$ l'espace des fonctions complexes indéfiniment différentiables et bornées ainsi que chacune de leurs dérivées sur l'adhérence $\overline{R^n_+}$ de R^n_+, on a la

PROPOSITION 1.1: Le produit αu d'une fonction de $\mathcal{B}(\overline{R^n_+})$ par une distribution $u \in T^{k,r}(R^n_+)$, k entier, r réel, est dans $T^{k,r}(R^n_+)$ et l'application $u \longrightarrow \alpha u$ est linéaire et continue.

Pour k entier ≥ 0, r réel quelconque, on désigne par $T^{k,r}_0(R^n_+)$ l'adhérence dans $T^{k,r}(R^n_+)$ de l'espace $\mathcal{D}(R^n_+)$. Cet espace $T^{k,r}_0(R^n_+)$ coincide alors avec le sous-espace de $T^{k,r}(R^n_+)$ formé des u pour lesquels $\mathcal{G}^r u \in H^k_0(R^n_+)$. Si r est entier ≥ 0, $T^{k,r}_0(R^n_+)$ est aussi $T^{k,r}(R^n_+) \cap H^k_0(R^n_+)$. Enfin on a la

PROPOSITION 1.2: Pour k entier ≥ 0, et r réel, le dual de $T^{k,r}_0(R^n_+)$ coïncide avec l'espace $T^{-k,-r}(R^n_+)$.

Soient k entier ≥ 1, r réel. Pour $u \in T^{k,r}(R^n_+)$, on peut alors définir la trace sur π, $\gamma_j u$ de $\dfrac{\partial^j u}{\partial x^j_n}$ pour $j = 0, 1, \dots, k-1$. Posons $\vec{\gamma u} = (\gamma_0 u, \dots, \gamma_{k-1} u)$. On a alors la

---

[6] E et F étant deux espaces vectoriels topologiques, $E \subset F$ signifie que E est contenu dans F et possède une topologie plus fine que la topologie induite par F.

Proposition 1.3 : Pour k entier $\geq 1, r$ réel, l'application $u \longrightarrow \overrightarrow{\gamma u}$ est linéaire et continue de $T^{k,r}(R^n_+)$ sur $\prod_{j=0}^{k-1} H^{k+r-j-\frac{1}{2}}(\pi)$. (7)

3. On peut encore, pour r entier ≥ 0, θ réel avec $0 < \theta < 1$, caractériser d'une autre manière l'espace $T^{k,r+1-\theta}(R^n_+)$ en utilisant les résultats de Lions [9]. (8)

Considérons un espace de Banach E, de norme $\|\cdot\|$. Soient, dans E, ν opérateurs $\Lambda_1, \dots, \Lambda_\nu$, fermés, non bornés; le domaine $D(\Lambda_i)$ de Λ_i, pour $i = 1, \dots, \nu$, étant dense dans E et muni de la norme

$$\|e\|_{D(\Lambda_i)} = \|e\| + \|\Lambda_i e\|. \tag{1.3.1}$$

On fait les hypothèses suivantes:

($S.G.$) Pour $i = 1, \dots, \nu$, Λ_i est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $t \longrightarrow G_i(t)$ fortement continu et borné.

(C) Quels que soient i, j $(1 \leq i \leq \nu,\ 1 \leq j \leq \nu)$ et s, t $(s \geq 0,\ t \geq 0)$, on a

$$G_i(s)\, G_j(t) = G_j(t)\, G_i(s). \tag{1.3.2}$$

Il en résulte que $G_j(t)$ applique $D(\Lambda_i)$ dans lui-même et que

$$\Lambda_i G_j(t)\, e = G_j(t)\, \Lambda_i e \qquad \text{pour tout } e \in D(\Lambda_i). \tag{1.3.3}$$

Soit θ compris entre 0 et 1 ; posons $\alpha = \theta - \dfrac{1}{2}$. Désignons par $W(2, \alpha\,; \Lambda_1, \dots, \Lambda_\nu)$ l'espace de Banach des fonctions u vérifiant :

$$t^\alpha u \in L^2(0, +\infty\,; D(\Lambda_i)) \qquad i = 1, \dots, \nu \tag{1.3.4}$$

$$t^\alpha \frac{du}{dt} \in L^2(0, +\infty\,; E) \tag{1.3.5}$$

$\left(\dfrac{du}{dt}\right.$ est la dérivée de u dans l'espace $\left.\mathcal{D}'(0, +\infty\,; E)\right)$

muni de la norme

$$\left(\int_0^\infty t^{2\alpha}\left\{\|u(t)\|^2 + \sum_{i=1}^{\nu} \|\Lambda_i u(t)\|^2 + \left\|\frac{du}{dt}\right\|^2\right\} dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.3.6}$$

---

(7) π étant isomorphe à R^{n-1}, pour s réel quelconque, $H^s(\pi)$ est isomorphe à $H^s(R^{n-1})$.

(8) Il existe d'autres procédés de construction d'espaces « intermédiaires ». Voir Calderon [1], Lions [10], [11], [12].

Désignons par $E(2, \alpha; A_1, \dots, A_\nu)$ l'espace de BANACH des $e \in E$ tels que

$$t^{\alpha-1}[G_i(t)e - e] \in L^2(0, +\infty; E) \qquad i = 1, \dots, \nu \tag{1.3.7}$$

muni de la norme

$$\| e \| + \sum_{i=1}^{\nu} \left(\int_0^\infty t^{2(\alpha-1)} \| G_i(t)e - e \|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.3.8}$$

Si l'on désigne par $D(A)$ l'espace de BANACH des $e \in E$ tels que $e \in D(A_i)$ pour $i = 1, \dots, \nu$, muni de la norme

$$\| e \| + \sum_{i=1}^{\nu} \| A_i e \| \tag{1.3.9}$$

on a

$$D(A) \subset E(2, \alpha; A_1, \dots, A_\nu) \subset E. \tag{1.3.10}$$

L'application $u \longrightarrow u(0)$ est alors continue de $W(2, \alpha; A_1, \dots, A_\nu)$ sur $E(p, \alpha; A_1, \dots, A_\nu)$.

Prenons $E = T^{k,r}(R^n_+)$ r entier ≥ 0. Soit $A_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n-1$, le générateur infinitésimal du semi-groupe $t \longrightarrow G_i(t)$ avec

$$G_i(t)f = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n). \tag{1.3.11}$$

L'espace $D(A)$ est alors $T^{k, r+1}(R^n_+)$ et on a [9]

PROPOSITION 1.4: Les espaces $T^{k, r+1-\theta}(R^n_+)$ et $E(2, \alpha; A_1, \dots, A_{n-1})$ sont identifiables algébriquement et topologiquement.

4. Considérons l'opérateur différentiel linéaire d'ordre $2m$

$$A = \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (a_{pq} D^q). \tag{1.4.1}$$

On suppose que les coefficients $a_{pq}(x)$ sont des restrictions à R^n_+ de fonctions de $\mathcal{B}(\overline{R^n_+})$. On associe à A la forme sesqui-linéaire

$$a(u, v) = \int_{R^n_+} \sum_{|p|, |q| \leq m} a_{pq} D^q u \, \overline{D^p v} \, dx. \tag{1.4.2}$$

---

(9) Voir par exemple LIONS [11] p. 1.11 et 1.12.

On dira que A est $H_0^m(R_+^n)$ elliptique s'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\text{Re}\,[a(u,u)] \geq c \, \| u \|^2_{H^m(R_+^n)} \qquad \text{pour tout } u \in H_0^m(R_+^n). \tag{1.4.3}$$

On notera encore A^* l'opérateur adjoint formel de A. C'est l'opérateur, qui, appliqué à u s'écrit

$$A^* u = \sum_{|p|,|q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p [\overline{a_{pq}} \, D^q u]. \tag{1.4.4}$$

A A^* est associée la forme sesqui-linéaire

$$a^*(u,v) = \overline{a(v,u)}. \tag{1.4.5}$$

On a alors le théorème suivant, dû à LIONS MAGÉNÈS [13] :

THÉORÈME 1.1 : Soit A l'opérateur différentiel défini par (1.4.1), dont les coefficients sont des restrictions à R_+^n de fonctions de $\mathcal{B}(\overline{R_+^n})$. Si A est $H_0^m(R_+^n)$-elliptique, alors A [resp. $(A, \vec{\gamma})$] est un isomorphisme de $T_0^{m,r}(R_+^n)$ $\left[\text{resp. } T^{m,r}(R_+^n) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{m+r-j-\frac{1}{2}}(\pi)\right]$ sur $T^{-m,r}(R_+^n)$, pour r réel quelconque. Pour r entier ≥ 0, on peut améliorer le théorème 1.1, en faisant des hypothèses un peu plus restrictives sur l'opérateur A. On dira que A satisfait à l'hypothèse H_0 si les conditions suivantes sont satisfaites :

1) A est uniformément fortement elliptique dans R_+^n, i. e.

$$\text{Re} \sum_{|p|,|q| = m} a_{pq}(x) \, \xi^{p+q} \geq c \, | \xi |^{2m} \tag{1.4.6}$$

pour tout $x \in R_+^n$ et tout vecteur ξ réel [10].

2) Les coefficients $a_{pq}(x)$, $|p|$, $|q| \leq m$ possèdent une limite finie quand $|x| \to \infty$.

3) Le coefficient a_{00} du terme en u est suffisamment grand.

D'après les travaux de GÅRDING, si A vérifie l'hypothèse H_0, alors A est $H_0^m(R_+^n)$-elliptique. On a le

THÉORÈME 1.2 : Soit A l'opérateur différentiel défini par (1.4.1) dont les coefficients sont restrictions a R_+^n de fonctions de $\mathcal{B}(\overline{R_+^n})$. Si A satisfait

---

[10] $\xi^{p+q} = \xi_1^{p_1+q_1} \ldots \xi_n^{p_n+q_n}$.

à l'hypothèse H_0, et si k et r sont deux entiers ≥ 0, alors A est un isomorphisme de $T^{k+m, r}(R_+^n) \cap H_0^m(R_+^n)$ sur $T^{-m+k, r}(R_+^n)$ [11].

§ 2. Perturbations singulières pour le problème de Dirichlet homogène.

1. On considère maintenant les 2 opérateurs différentiels

$$A = \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p [a_{pq}(x) D^q] \tag{2.1.1}$$

et

$$B = \sum_{|p|, |q| \leq m'} (-1)^{|p|} D^p [b_{pq}(x) D^q] \tag{2.1.2}$$

sur lesquels on fait les hypothèses suivantes :

H_1 : les coefficients a_{pq} ($|p|, |q| \leq m$) et b_{pq} ($|p|, |q| \leq m'$) sont des restrictions à R_+^n de fonctions de $\mathcal{B}(\overline{R_+^n})$.

H_2 : $m > m'$.

H_3 : B est $H_0^{m'}(R_+^n)$-elliptique.

On pose, pour $\varepsilon \in I =]0, 1[$

$$B_\varepsilon = \varepsilon A + B \tag{2.1.3}$$

et on fait l'hypothèse

H_4 : pour $\varepsilon \in I$, B_ε est $H_0^m(R_+^n)$-elliptique.

Si les hypothèses H_1 à H_4 sont vérifiées, d'après le théorème 1.1, B_ε est, pour $\varepsilon \in I$, un isomorphisme de $T_0^{m, r}(R_+^n)$ sur $T^{-m, r}(R_+^n)$, tandis que B est un isomorphisme de $T_0^{m', r}(R_+^n)$ sur $T^{-m', r}(R_+^n)$.

On a alors le :

Lemme 2.1 : Soit B_ε l'opérateur défini par (2.1.3) où A et B sont définis respectivement par (2.1.1) et (2.1.2). On suppose que les hypothèses H_1 à H_4 sont vérifiées. Soit r un entier ≥ 0. Soient $f^\varepsilon \in T^{-m, r}(R_+^n)$,

---

[11] Si E_1 et E_2 sont deux espaces de Hilbert contenus dans un même espace vectoriel topologique F, la norme dans $E_1 \cap E_2$ est définie par

$$\| e \|_{E_1 \cap E_2} = \left(\sum_{i=1}^{2} \| e \|_{E_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$h_\varepsilon \in T^{-m', r}(R^n_+)$, $\varepsilon \in I$. Soit u_ε l'élément de $T_0^{m,r}(R^n_+)$ qui vérifie

$$B_\varepsilon u_\varepsilon = \varepsilon f_\varepsilon + h_\varepsilon , \; \varepsilon \in I. \tag{2.1.4}$$

Il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \|_{T^{m,r}(R^n_+)} + \| u_\varepsilon \|_{T^{m',r}(R^n_+)} \leq K [\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon \|_{T^{-m,r}(R^n_+)} + \| h_\varepsilon \|_{T^{-m',r}(R^n_+)}] \tag{2.1.5}$$

la constante K étant indépendante de ε.

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.1.

Désignons par $b(u, v)$ la forme sesqui-linéaire associée à B. A B_ε, $\varepsilon \in I$, est alors associée la forme sesqui-linéaire

$$b_\varepsilon (u, v) = \varepsilon a (u, v) + b (u, v). \tag{2.1.6}$$

En vertu des hypothèses H_3 et H_4 et de D. HUET [6], il existe des constantes α et β, positives, telles que

$$\mathrm{Re}\, [b_\varepsilon (u, u)] \geq \alpha\varepsilon \| u \|^2_{H^m(R^n_+)} + \beta \| u \|^2_{H^{m'}(R^n_+)} \tag{2.1.7}$$

pour tout $\varepsilon \in I$ et tout $u \in H_0^m(R^n_+)$.

Démontrons le lemme pour $r = 0$.

On a

$$b_\varepsilon (u_\varepsilon , u_\varepsilon) = \langle \varepsilon f_\varepsilon + h_\varepsilon , \bar{u}_\varepsilon \rangle \tag{2.1.8}$$

où l'on fait intervenir, dans le second membre, la dualité entre $H^{-m}(R^n_+)$ et $H_0^m(R^n_+)$.

On en déduit, en utilisant (2.1.7)

$$\alpha \| \varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \|^2_{H^m(R^n_+)} + \beta \| u_\varepsilon \|^2_{H^{m'}(R^n_+)} \leq c_0 \{ \| \varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon \|_{H^{-m}(R^n_+)} \| \varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \|_{H^m(R^n_+)} + \\ + \| h_\varepsilon \|_{H^{-m'}(R^n_+)} \| u_\varepsilon \|_{H^{m'}(R^n_+)} \} \tag{2.1.9}$$

d'où l'inégalité de la forme (2.1.5) :

$$\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \|_{H^{-m}(R^n_+)} + \| u_\varepsilon \|_{H^{m'}(R^n_+)} \leq K_0 [\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon \|_{H^{-m}(R^n_+)} + \| h_\varepsilon \|_{H^{-m'}(R^n_+)}]. \tag{2.1.10}$$

Pour démontrer le lemme pour $r \geq 1$, nous raisonnons par récurrence. Supposons que le lemme soit démontré jusqu'à l'ordre $r-1$, et montrons-le pour l'entier r.

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une constante $K_1 > 0$ telle que

$$\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \|_{T^{m,r-1}(R_+^n)} + \| u_\varepsilon \|_{T^{m',r-1}(R_+^n)} \leq K_1 [\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon \|_{T^{-m,r-1}(R_+^n)} + \\ + \| h_\varepsilon \|_{T^{-m',r-1}(R_+^n)}]. \tag{2.1.11}$$

Posons $w_\varepsilon = D_{x'}^q u_\varepsilon$, avec $|q| \leq r-1$. Soit i avec $1 \leq i \leq n-1$. Alors $\dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \in H_0^m(R_+^n)$. Calculons $B_\varepsilon\left(\dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i}\right)$. On a

$$B_\varepsilon\left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}(B_\varepsilon w_\varepsilon) + \left[B_\varepsilon\left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}(B_\varepsilon w_\varepsilon)\right] \tag{2.1.12}$$

avec

$$B_\varepsilon w_\varepsilon = B_\varepsilon (D_{x'}^q u_\varepsilon) = D_{x'}^q (B_\varepsilon u_\varepsilon) + [B_\varepsilon (D_{x'}^q u_\varepsilon) - D_{x'}^q (B_\varepsilon u_\varepsilon)] \tag{2.1.13}$$

d'où

$$B_\varepsilon\left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x'}^q (B_\varepsilon u_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}[B_\varepsilon (D_{x'}^q u_\varepsilon) - D_{x'}^q (B_\varepsilon u_\varepsilon)] + \\ + \left[B_\varepsilon\left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}(B_\varepsilon w_\varepsilon)\right]. \tag{2.1.14}$$

Or, d'après (2.1.4)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} D_{x'}^q (B_\varepsilon u_\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x'}^q (\varepsilon f_\varepsilon + h_\varepsilon) = \varepsilon F_{1,\varepsilon} + H_{1,\varepsilon} \tag{2.1.15}$$

avec

$$F_{1,\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x'}^q f_\varepsilon \in H^{-m}(R_+^n) \tag{2.1.16}$$

et

$$H_{1,\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x'}^q h_\varepsilon \in H^{-m'}(R_+^n) \tag{2.1.17}$$

et

$$\begin{cases} \| F_{1,\varepsilon} \|_{H^{-m}(R_+^n)} \leq K_2 \| f_\varepsilon \|_{T^{-m,r}(R_+^n)} \\ \| H_{1,\varepsilon} \|_{H^{-m'}(R_+^n)} \leq K_3 \| h_\varepsilon \|_{T^{-m',r}(R_+^n)} \end{cases}. \tag{2.1.18}$$

D'autre part, en remarquant qu'on a aussi

$$(2.1.19) \qquad A = \sum_{|p| \leq 2m} \alpha_p(x) D^p \qquad B = \sum_{|p| \leq 2m'} \beta_p(x) D^p$$

où les α_p ($|p| \leq m$) et β_p ($|p| \leq m'$) sont encore des restrictions à R_+^n de fonctions de $\mathcal{B}(\overline{R_+^n})$, on peut écrire

$$(2.1.20) \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}[B_\varepsilon(D_{x'}^q u_\varepsilon) - D_{x'}^q(B_\varepsilon u_\varepsilon)] =$$

$$= \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{|p| \leq 2m} [\alpha_p D^p [D_{x'}^q u_\varepsilon] - D_{x'}^q [\alpha_p D^p u_\varepsilon]] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{|p| \leq 2m'} [\beta_p D^p [D_{x'}^q u_\varepsilon] - D_{x'}^q [\beta_p D^p u_\varepsilon]] = \varepsilon F_{2,\varepsilon} + H_{2,\varepsilon}$$

avec

$$(2.1.21) \qquad \begin{cases} F_{2,\varepsilon} = \dfrac{\partial}{\partial x_i} \displaystyle\sum_{\substack{|p| \leq 2m \\ |s| \leq r-2}} \gamma_{ps}(x) D_{x'}^s (D^p u_\varepsilon) \in H^{-m}(R_+^n) \\ H_{2,\varepsilon} = \dfrac{\partial}{\partial x_i} \displaystyle\sum_{\substack{|q| \leq 2m' \\ |t| \leq r-2}} \delta_{qt}(x) D_{x'}^t (D^q u_\varepsilon) \in H^{-m'}(R_+^n) \text{ [12]} \end{cases}$$

et

$$(2.1.22) \qquad \| F_{2,\varepsilon} \|_{H^{-m}(R_+^n)} \leq K_4 \| u_\varepsilon \|_{T^{-m,\, r-1}(R_+^n)}$$

$$\| H_{2,\varepsilon} \|_{H^{-m'}(R_+^n)} \leq K_5 \| u_\varepsilon \|_{T^{-m',\, r-1}(R_+^n)} .$$

Enfin

$$(2.1.23) \qquad B_\varepsilon\left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}(B_\varepsilon w_\varepsilon) = \varepsilon \sum_{|p| \leq 2m} \left[\alpha_p D^p \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha_p D^p w_\varepsilon)\right] +$$

$$+ \sum_{|p| \leq 2m'} \left[\beta_p D^p \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}(\beta_p D^p w_\varepsilon)\right] =$$

$$= - \varepsilon \sum_{|p| \leq 2m} \frac{\partial \alpha_p}{\partial x_i} D^p w_\varepsilon - \sum_{|p| \leq 2m'} \frac{\partial \beta_p}{\partial x_i} D^p w_\varepsilon =$$

$$= - \varepsilon F_{3,\varepsilon} - H_{3,\varepsilon}$$

---

[12] Les coefficients γ_{ps} ($|p| \leq 2m$, $|s| \leq r-2$) et δ_{qt} ($|q| \leq 2m'$, $|t| \leq r-2$) sont toujours des restrictions à R_+^n de fonctions de $\mathcal{B}(\overline{R_+^n})$.

avec

$$(2.1.24)\qquad \begin{cases} F_{3,\varepsilon} = \sum_{|p| \leq 2m} \dfrac{\partial \alpha_p}{\partial x_i} D^p w_\varepsilon \in H^{-m}(R^n_+) \\ H_{3,\varepsilon} = \sum_{|p| \leq 2m'} \dfrac{\partial \beta_p}{\partial x_i} D^p w_\varepsilon \in H^{-m'}(R^n_+) \end{cases}$$

et

$$(2.1.25)\qquad \begin{cases} \| F_{3,\varepsilon} \|_{H^{-m}(R^n_+)} \leq K_6 \| w_\varepsilon \|_{H^{-m}(R^n_+)} \leq K_7 \| u_\varepsilon \|_{T^{m,r-1}(R^n_+)} \\ \| H_{3,\varepsilon} \|_{H^{-m'}(R^n_+)} \leq K_8 \| u_\varepsilon \|_{T^{m',r-1}(R^n_+)} . \end{cases}$$

En réunissant (2.1.14), (2.1.15), (2.1.20) et (2.1.23), on obtient

$$(2.1.26)\qquad B_\varepsilon\left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i}\right) = \varepsilon F_\varepsilon + H_\varepsilon$$

avec

$$(2.1.27)\qquad \begin{cases} F_\varepsilon = F_{1,\varepsilon} + F_{2,\varepsilon} - F_{3,\varepsilon} \in H^{-m}(R^n_+) \\ H_\varepsilon = H_{1,\varepsilon} + H_{2,\varepsilon} - H_{3,\varepsilon} \in H^{-m'}(R^n_+). \end{cases}$$

On a donc d'après (2.1.10)

$$(2.1.28)\qquad \| \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \|_{H^m(R^n_+)} + \| \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \|_{H^{m'}(R^n_+)} \leq K_0 [\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} F_\varepsilon \|_{H^{-m}(R^n_+)} + \\ + \| H_\varepsilon \|_{H^{-m'}(R^n_+)})].$$

Mais, on a, en tenant compte de (2.1.18), (2.1.22), (2.1.25)

$$(2.1.29)\qquad \begin{cases} \| \varepsilon^{\frac{1}{2}} F_\varepsilon \|_{H^{-m}(R^n_+)} \leq K_2 \| \varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon \|_{T^{-m,r}(R^n_+)} + K_9 \| \varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \|_{T^{-m,r-1}(R^n_+)} \\ \| H_\varepsilon \|_{H^{-m'}(R^n_+)} \leq K_3 \| h_\varepsilon \|_{T^{-m',r}(R^n_+)} + K_{10} \| u_\varepsilon \|_{T^{-m',r-1}(R^n_+)} \end{cases}$$

d'où, en vertu de (2.1.11) et (1.2.3)

$$(2.1.30)\qquad \begin{cases} \| \varepsilon^{\frac{1}{2}} F_\varepsilon \|_{H^{-m}(R^n_+)} \leq K_{11} \| \varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon \|_{T^{-m,r}(R^n_+)} \\ \| H_\varepsilon \|_{H^{-m'}(R^n_+)} \leq K_{12} \| h_\varepsilon \|_{T^{-m',r}(R^n_+)} \end{cases} .$$

Les inégalités (2.1.11), (2.1.28) et (2.1.30) entraînent immédiatement une inégalité du type (2.1.5).

En ce qui concerne la convergence de u_ε, on a le

THÉORÈME 2.1 : Les hypothèses sont celles du lemme 2.1. Nous supposons en outre que

1) $\varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon \longrightarrow 0$ dans $T^{-m,r}(R^n_+)$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$;

2) il existe $h \in T^{-m'r}(R^n_+)$ telle que $h_\varepsilon \longrightarrow h$ dans $T^{-m',r}(R^n_+)$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Alors, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, la solution $u_\varepsilon \in T_0^{m,r}(R^n_+)$ de (2.1.4) tend, dans $T_0^{m',r}(R^n_+)$, vers la solution u de

$$Bu = h. \tag{2.1.31}$$

En outre $\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \longrightarrow 0$ dans $T_0^{m,r}(R^n_+)$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.1.

Nous démontrons tout d'abord le théorème pour $r = 0$. D'après le lemme 2.1, u_ε est alors borné dans $H^{m'}(R^n_+)$ tandis que $\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon$ est borné dans $H^m(R^n_+)$. De toute suite u_{ε_p}, on peut donc extraire une sous-suite, que nous noterons encore u_{ε_p} telle que u_{ε_p} converge faiblement dans $H_0^{m'}(R^n_+)$ vers un élément w, et telle que $\varepsilon_p^{\frac{1}{2}} u_{\varepsilon_p}$ converge vers 0 dans $H_0^m(R^n_+)$. Mais on a

$$b_{\varepsilon_p}(u_{\varepsilon_p}, v) = \varepsilon_p\, a(u_{\varepsilon_p}, v) + b(u_{\varepsilon_p}, v) = \langle \varepsilon_p f_{\varepsilon_p} + h_{\varepsilon_p}, \bar{v} \rangle \tag{2.1.32}$$

pour tout $v \in H_0^m(R^n_+)$. Par passage à la limite, en tenant compte des hypothèses faites sur f_ε et h_ε, on en déduit que w vérifie

$$b(w, v) = \langle h, \bar{v} \rangle \tag{2.1.33}$$

pour tout $v \in H_0^m(R^n_+)$, donc pour tout $v \in H_0^{m'}(R^n_+)$. Par suite $w = u$.

Il reste à montrer que $u_\varepsilon \longrightarrow u$ dans $H_0^{m'}(R^n_+)$ fort et que $\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \longrightarrow 0$ dans $H_0^m(R^n_+)$ fort. Pour cela, en vertu de (2.1.7), il suffit de montrer que

$$\varepsilon a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + b(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon - u) \longrightarrow 0 \qquad \text{qund } \varepsilon \longrightarrow 0. \tag{2.1.34}$$

Or, d'apres (2.1.4) et (2.1.5), on a

$$\varepsilon a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + b(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon - u) = \langle \varepsilon f_\varepsilon, \bar{u}_\varepsilon \rangle + \\ + \langle h_\varepsilon - h, \bar{u}_\varepsilon \rangle + b(u, u) - b(u_\varepsilon, u), \tag{2.1.35}$$

et le second membre tend bien vers 0 quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Pour $r \geq 1$, on raisonne par récurrence. Supposons donc que le théorème soit démontré jusqu'à l'ordre $r-1$; démontrons-le pour r.

D'après l'hypothèse de récurrence, on sait déjà que $u_\varepsilon \longrightarrow u$ dans $T^{m', r-1}(R_+^n)$ et que $\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \longrightarrow 0$ dans $T^{m, r-1}(R_+^n)$. Soient alors $w_\varepsilon = D_{x'}^q u_\varepsilon$, $w = D_{x'}^q u$, avec $|q| \leq r-1$. Soit $1 \leq i \leq n-1$. Il suffit de démontrer que $\dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \longrightarrow \dfrac{\partial w}{\partial x_i}$ dans $H^{m'}(R_+^n)$ et que $\varepsilon^{\frac{1}{2}} \dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \longrightarrow 0$ dans $H^m(R_+^n)$. Or,

$$B_\varepsilon\left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i}\right) = \varepsilon F_\varepsilon + H_\varepsilon \tag{2.1.26}$$

et d'apres (2.1.31) et l'hypothèse faite sur f_ε, $\varepsilon^{\frac{1}{2}} F_\varepsilon \longrightarrow 0$ dans $H^{-m}(R_+^n)$. D'autre part, d'après (2.1.16) et (2.1.17) et l'hypothèse faite sur h_ε, $H_{1,\varepsilon}$ converge dans $H^{-m'}(R_+^n)$, vers

$$H_1 = \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x'}^q h. \tag{2.1.36}$$

En outre, puisque $u_\varepsilon \longrightarrow u$ dans $T^{-m', r-1}(R_+^n)$, d'après (2.1.21) et (2.1.25), $H_{2,\varepsilon}$ et $H_{3,\varepsilon}$ convergent respectivement, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, dans $H^{-m'}(R_+^n)$ vers

$$H_2 = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\substack{|q| \leq 2m' \\ |t| \leq r-2}} \delta_{qt} D_{x'}^t (D^q u) \tag{2.1.37}$$

$$H_3 = \sum_{|p| \leq 2m'} \frac{\partial \beta_p}{\partial x_i} D^p w \tag{2.1.38}$$

et on a

$$B\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right) = H \tag{2.1.39}$$

avec

$$H = H_1 + H_2 - H_3. \tag{2.1.40}$$

Il résulte alors de la validité du théorème pour $r = 0$ que $\varepsilon^{\frac{1}{2}} \dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \longrightarrow 0$ dans $H^m(R_+^n)$ et que $\dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \longrightarrow \dfrac{\partial w}{\partial x_i}$ dans $H^{m'}(R_+^n)$, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. C. Q. F. D.

2. Remplaçons maintenant les hypothèses H_3 et H_4 respectivement par
H_3' : B vérifie H_0;
H_4' : pour $\varepsilon \in I$, B_ε vérifie H_0.

Soient k et r deux entiers ≥ 0. Si les hypothèses H_1, H_2, H_3', H_4' sont satisfaites, alors, d'après le théorème 1.2, B est un isomorphisme de $T^{k+m', r}(R_+^n) \cap H_0^{m'}(R_+^n)$ sur $T^{-m'+k, r}(R_+^n)$ et, pour $\varepsilon \in I$, B_ε est un isomorphisme de $T^{k+m, r}(R_+^n) \cap H_0^m(R_+^n)$ sur $T^{-m+k, r}(R_+^n)$. On a alors le

THÉORÈME 2.2: Soit B_ε l'opérateur défini par (2.1.3) où A et B sont définis respectivement par (2.1.1) et (2.1.2). On suppose vérifiées les hypothèses H_1, H_2, H_3', H_4'. Soient k et r deux entiers ≥ 0. Soient $f_\varepsilon \in T^{-m+k, r}(R_+^n)$, $h_\varepsilon \in T^{-m'+k, r}(R_+^n)$, $\varepsilon \in I$, et $h \in T^{-m'+k, r}(R_+^n)$ des fonctions données telles que

1) $\varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon \longrightarrow 0$ dans $T^{-m+k, r}(R_+^n)$, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

2) $h_\varepsilon \longrightarrow h$ dans $T^{-m'+k, r}(R_+^n)$, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Soient u_ε l'élément de $T^{m+k, r}(R_+^n) \cap H_0^m(R_+^n)$ qui vérifie

$$B_\varepsilon u_\varepsilon = \varepsilon f_\varepsilon + h_\varepsilon, \qquad \varepsilon \in I. \tag{2.2.1}$$

et u l'élément de $T^{m'+k, r}(R_+^n) \cap H_0^{m'}(R_+^n)$ qui vérifie

$$Bu = h. \tag{2.2.2}$$

Alors, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, $u_\varepsilon \longrightarrow u$ dans $T^{m', k+r}(R_+^n)$ et $\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \longrightarrow 0$ dans $T^{m, k+r}(R_+^n)$, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, mais en général u_ε ne converge pas vers u dans $T^{k+m', r}(R_+^n)$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.2.

En vertu des hypothèses, $f_\varepsilon \in T^{-m, k+r}(R_+^n)$ et $\varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon \longrightarrow 0$ dans $T^{-m, k+r}(R_+^n)$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. De même, h_ε et h sont dans $T^{-m', k+1}(R_+^n)$ et $h_\varepsilon \longrightarrow h$ dans $T^{-m', k+r}(R_+^n)$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

D'autre part $u_\varepsilon \in H_0^m(R_+^n)$ et $u_\varepsilon \in T^{m, k+r}(R_+^n)$. Donc $u_\varepsilon \in T^{m, k+r}(R_+^n)$. De même $u \in T_0^{m', k+r}(R_+^n)$. En appliquant alors le théorème 2.1, on en déduit que $u_\varepsilon \longrightarrow u$ dans $T^{m', k+r}(R_+^n)$ et que $\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \longrightarrow 0$ dans $T^{m, k+r}(R_+^n)$.

Montrons qu'en général u_ε ne converge pas vers u dans $T^{m'+k, r}(R_+^n)$. Soient h donné dans $T^{1,1}(R_+^n)$, u_ε l'élément de $T^{2,1}(R_+^n) \cap H_0^1(R_+^n)$, vérifiant

$$-\varepsilon \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = h.$$

Le théorème 2.1 dit que $u_\varepsilon \longrightarrow h$ dans $T^{0,2}(R_+^n)$. Supposons que $u_\varepsilon \longrightarrow h$ dans $T^{1,1}(R_+^n)$. Comme $u_\varepsilon \in T_0^{1,1}(R_+^n)$ fermé dans $T^{1,1}(R_+^n)$, on aurait $h \in T_0^{1,1}(R_+^n)$; or h est choisie quelconque dans $T^{1,1}(R_+^n)$.

Ce théorème étand au demi-espace un résultat de D. HUET [6] ([13]).

3. Nous nous proposons d'étendre à r réel ≥ 0, le théorème 2.1 sous la forme :

THÉORÈME 2.3 : Soit B_ε l'opérateur défini par (2.1.3) où A et B sont définis respectivement par (2.1.1) et (2.1.2). On suppose que les hypothèses H_1 à H_4 sont vérifiées. Soient r un entier ≥ 0, et θ un nombre réel tel que $0 < \theta < 1$. Soient $f_\varepsilon \in T^{-m, r+1-\theta}(R^n_+)$, $h_\varepsilon \in T^{-m', r+1-\theta}(R^n_+)$, $\varepsilon \in I$; et $h \in T^{-m', r+1-\theta}(R^n_+)$ des fonctions données telles que

1) $\varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon \longrightarrow 0$ dans $T^{-m, r+1-\theta}(R^n_+)$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$;

2) $h_\varepsilon \longrightarrow h$ dans $T^{-m', r+1-\theta}(R^n_+)$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Soient u_ε l'élément de $T_0^{m, r+1-\theta}(R^n_+)$ qui vérifie

$$B_\varepsilon u_\varepsilon = \varepsilon f_\varepsilon + h_\varepsilon \tag{2.3.1}$$

et u l'élément de $T_0^{m', r+1-\theta}(R^n_+)$ qui vérifie

$$Bu = h. \tag{2.3.2}$$

Alors, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, $u_\varepsilon \longrightarrow u$ dans $T^{m', r+1-\theta}(R^n_+)$ et $\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \longrightarrow 0$ dans $T^{m, r+1-\theta}(R^n_+)$.

Reprenons les notations du § 1, n^0 3 ; soit $\alpha = \theta - \dfrac{1}{2}$. Nous avons le

LEMME 2.2 : Soient ν opérateurs $A_1, \dots, A_\nu$, fermés, non bornés dans l'espace de BANACH E, de domaines denses dans E, $D(A_1), \dots, D(A_\nu)$, satisfaisant aux hypothèses $(S \cdot G)$ et (C). Si e_ε converge, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, vers e, dans l'espace $E(2, \alpha ; A_1, \dots, A_\nu)$, alors, il existe w_ε et w dans l'espace $W(2, \alpha ; A_1, \dots, A_\nu)$ tels que

$$w_\varepsilon(0) = e_\varepsilon, \quad w(0) = e. \tag{2.3.3}$$

$$t^\alpha [w_\varepsilon - w] \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, +\infty ; D(A)) \text{ et, pour tout } t > 0, \quad w_\varepsilon(t) \longrightarrow w(t) \text{ dans } D(A) \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0. \tag{2.3.4}$$

$$t^\alpha [w'_\varepsilon - w'] \,(^{14}) \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, +\infty ; E) \text{ et, pour tout } t > 0, \quad w'_\varepsilon(t) \longrightarrow w'(t) \text{ dans } E, \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0. \tag{2.3.5}$$

([13]) Théorème 1.11.

([14]) De façon générale $f' = \dfrac{df}{dt}$.

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.2:

On peut supposer, sans nuire à la généralité, que $\nu = 2$. Posons [15]

$$H_i(t) = \frac{1}{t}\int_0^t G_i(\sigma)\,d\sigma \qquad i = 1, 2. \tag{2.3.6}$$

Pour $t > 0$, $H_i(t) \in \mathcal{L}[E\,;\,D(A_i)]$. Posons

$$v_\varepsilon(t) = H_1(t)\,H_2(t)\,e_\varepsilon\,,\quad v(t) = H_1(t)\,H_2(t)\,e \tag{2.3.7}$$

$$w_\varepsilon(t) = q(t)\,v_\varepsilon(t),\quad w(t) = q(t)\,v(t) \tag{2.3.8}$$

où $q(t)$ est une fonction indéfiniment différentiable, à support compact, égale à 1 dans un voisinage de l'origine.

Les conditions 2.3.3 sont évidemment satisfaites, et il est immédiat de vérifier que, pour chaque $t > 0$, $w_\varepsilon(t) \longrightarrow w(t)$ dans E et que $t^\alpha[w_\varepsilon - w] \longrightarrow 0$ dans $L^2(0, +\infty\,;\,E)$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

D'autre part, on a

$$A_i H_i(t) = \frac{1}{t}\,[G_i(t) - I]. \tag{2.3.9}$$

D'où en posant

$$\begin{cases} f_\varepsilon = e_\varepsilon - e \\ r_\varepsilon = v_\varepsilon - v \\ s_\varepsilon = w_\varepsilon - w \end{cases} \tag{2.3.10}$$

$$\| A_1\, r_\varepsilon(t) \| \leq M_2\,\frac{1}{t}\,\| G_1(t) f_\varepsilon - f_\varepsilon \| \text{ [16]}. \tag{2.3.11}$$

On obtiendrait une majoration analogue, en remplaçant A_1 par A_2.

D'après (2.3.11), pour chaque $t > 0$, $s_\varepsilon(t) \longrightarrow 0$ dans $D(A)$. En outre, comme $f_\varepsilon \longrightarrow 0$ dans $E(2, \alpha\,;\,A_1, \dots, A_\nu)$, en vertu de (1.3.14), $t^\alpha A_i s_\varepsilon \longrightarrow 0$ dans $L^2(0, +\infty\,;\,E)$ ce qui achève de démontrer (2.3.4).

De (2.3.7) et (2.3.10), on déduit:

$$r'_\varepsilon(t) = H_1'(t)\,H_2(t) f_\varepsilon + H_1(t)\,H_2'(t) f_\varepsilon \tag{2.3.12}$$

---

[15] On utilise ici une construction classique: voir LIONS [9] et GAGLIARDO [2].

[16] On a en effet, d'après l'hypothèse $(S \cdot G)$, $\| G_i(t) \|_{\mathcal{L}_b(E,E)} \leq M_i$, $i = 1, 2$, $\mathcal{L}_b(E, E)$ étant l'espace $\mathcal{L}(E, E)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E. Il résulte alors de (2.3.6), que $\| H_i(t) \| \leq M_i$.

et on a

$$(2.3.13) \qquad H_1'(t)\, H_2(t) f_\varepsilon = \Lambda_1 H_1(t)\, H_2(t) f_\varepsilon - \\ - \frac{1}{t^2} \int_0^t [G_1(\sigma) - I]\, H_2(t) f_\varepsilon \, d\sigma.$$

Or

$$(2.3.14) \qquad \left\| \frac{1}{t^2} \int_0^t [G_1(\sigma) - I]\, H_2(t) f_\varepsilon \, d\sigma) \right\| \leq M_2 \frac{1}{t^2} \int_0^t \| (G_1(\sigma) - I) f_\varepsilon \| \, d\sigma.$$

Par suite, pour tout $t > 0$, $r_\varepsilon'(t) \to 0$ dans E, quand $\varepsilon \to 0$. En outre

$$(2.3.15) \qquad t^\alpha \left\| \frac{1}{t^2} \int_0^t [G_1(\sigma) - I]\, H_2(t) f_\varepsilon \, d\sigma \right\| \leq M_2 t^{-1} \int_0^t \sigma^{\alpha-1} \| G_1(\sigma) f_\varepsilon - f_\varepsilon \| \, d\sigma$$

d'où, en tenant compte d'une inégalité de HARDY [17]:

$$(2.3.16) \qquad \int_0^\infty t^{2\alpha} \left\| \frac{1}{t^2} \int_0^t [G_1(\sigma) - I]\, H_2(t) f_3 \, d\sigma \right\| dt \leq \\ \leq K \int_0^\infty t^{(\alpha-1)^2} \| G_1(t) f_\varepsilon - f_\varepsilon \|^2 \, dt$$

et ceci tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$, en vertu de la topologie de $E(2, \alpha; \Lambda_1, \ldots, \Lambda_\nu)$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.3.

D'après la proposition 1.3 et le lemme 2.2, il existe des fonctions $\varphi_\varepsilon(t)$, $\psi_\varepsilon(t)$, $\varepsilon \in I$ et $\psi(t)$ telles que

1) $\varphi_\varepsilon(0) = f_\varepsilon$, $\psi_\varepsilon(0) = h_\varepsilon$, $\psi(0) = h$;

2) quand $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon^{\frac{1}{2}} \varphi_\varepsilon(t) \to 0$ dans $T^{-m, r+1}(R_+^n)$, $\psi_\varepsilon(t) \to \psi(t)$ dans $T^{-m', r+1}(R_+^n)$, pour tout $t > 0$, et en outre $t^\alpha \varepsilon^{\frac{1}{2}} \varphi_\varepsilon \to 0$ dans $L^2[0, +\infty; T^{-m, r+1}(R_+^n)]$ et $t^\alpha \psi_\varepsilon \to t^\alpha \psi$ dans $L^2(0, +\infty; T^{-m', r+1}(R_+^n))$;

---

[17] Voir HARDY-LITTLEWOOD-POLYA [4] p. 245.

3) quand $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon^{\frac{1}{2}} \varphi'_\varepsilon(t) \to 0$ dans $T^{-m, r}(R^n_+)$ et $\psi'_\varepsilon(t) \to \psi'(t)$ dans $T^{-m', r}(R^n_+)$ pour tout $t > 0$, et en outre $t^\alpha \varepsilon^{\frac{1}{2}} \varphi'_\varepsilon \to 0$ dans $L^2(0, +\infty; T^{-m, r}(R^n_+))$ tandis que $t^\alpha \psi'_\varepsilon \to t^\alpha \psi'$ dans $L^2(0, +\infty; T^{-m', r}(R^n_+))$.

Soient alors, pour $t > 0$, $\mu_\varepsilon(t)$, l'élément de $T_0^{m, r+1}(R^n_+)$ tel que

$$B_\varepsilon \mu_\varepsilon(t) = \varepsilon\varphi_\varepsilon(t) + \psi_\varepsilon(t) \qquad \varepsilon \in I \tag{2.3.17}$$

et $\mu(t)$ l'élément de $T_0^{m', r+1}(R^n_+)$ tel que

$$B\mu(t) = \psi(t). \tag{2.3.18}$$

On a alors

$$\mu_\varepsilon(0) = u_\varepsilon \quad \text{et} \quad \mu(0) = u.$$

En outre, $\mu'_\varepsilon(t)$ [18] est à valeurs dans $T_0^{m, r}(R^n_+)$ et vérifie, pour tout $t > 0$

$$B_\varepsilon \mu'_\varepsilon(t) = \varepsilon\varphi'_\varepsilon(t) + \psi'_\varepsilon(t) \tag{2.3.19}$$

et de même, $\mu'(t)$ est à valeurs dans $T_0^{m', r}(R^n_+)$ et vérifie, pour tout $t > 0$

$$B\mu'(t) = \psi'(t). \tag{2.3.20}$$

D'après le théorème 2.1, pour tout $t > 0$, $\mu_\varepsilon(t) \to \mu(t)$ dans $T_0^{m', r+1}(R^n_+)$, $\varepsilon^{\frac{1}{2}} \mu_\varepsilon(t) \to 0$ dans $T_0^{m, r+1}(R^n_+)$, $\mu'_\varepsilon(t) \to \mu'(t)$ dans $T_0^{m', r}(R^n_+)$ et $\varepsilon^{\frac{1}{2}} \mu'_\varepsilon(t) \to 0$ dans $T_0^{m, r}(R^n_+)$.

En outre, d'après (2.3.17), (2.3.19) et le lemme 2.1, on a, pour $t > 0$, $\varepsilon \in I$

$$\begin{aligned} t^\alpha [\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} \mu_\varepsilon(t) \|_{T^{m, r+1}(R^n_+)} + \| \mu_\varepsilon(t) \|_{T^{m', r+1}(R^n_+)}] \leq \\ \leq K_1 t^\alpha [\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} \varphi_\varepsilon(t) \|_{T^{-m, r+1}(R^n_+)} + \| \psi_\varepsilon(t) \|_{T^{-m', r+1}(R^n_+)}] \end{aligned} \tag{2.3.21}$$

et

$$\begin{aligned} t^\alpha \| \varepsilon^{\frac{1}{2}} \mu'_\varepsilon(t) \|_{T^{m, r}(R^n_+)} + \| \mu'_\varepsilon(t) \|_{T^{m', r}(R^{n+1})} \leq \\ \leq K_2 t^\alpha [\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} \varphi'_\varepsilon(t) \|_{T^{-m, r}(R^n_+)} + \| \psi'_\varepsilon(t) \|_{T^{-m', r+1}(R^n_+)}] \end{aligned} \tag{2.3.22}$$

et les seconds membres de (2.3.21) et (2.3.22) sont bornés dans $L^2(0, +\infty)$.

---

[18] $\mu'_\varepsilon(t)$ [resp. $\mu'(t)$] est la dérivée de $\mu_\varepsilon(t)$ [resp. $\mu(t)$] dans l'espace $\mathcal{D}'(0, +\infty; T^{m, r}(R^n_+))$ [resp. $\mathcal{D}'(0, +\infty; T^{m', r}(R^n_+))$].

D'après le théorème de LEBESGUE, $t^\alpha \mu_\varepsilon \rightarrow t^\alpha \mu$ dans $L^2(0, +\infty; T^{m', r+1}(R^n_+))$, $t^\alpha \mu'$ dans $L^2(0, +\infty; T^{m', r}(R^n_+))$. Il en résulte alors que $u_\varepsilon = \mu_\varepsilon(0) \rightarrow u = \mu(0)$ dans $T_0^{m', r+1-\theta}(R^n_+)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. De même $\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T_0^{m, r+1-\theta}(R^n_+)$.

REMARQUE : De (1.3.12), de la proposition 1.3, de (2.3.21) et (2.3.22) on déduit la généralisation suivante du lemme 2.1 :

LEMME 2.3 : Soit B_ε l'opérateur défini par (2.1.3) où A et B sont définis respectivement par (2.1.1) et (2.1.2). On suppose que les hypothèses H_1 à H_4 sont vérifiées. Soit r réel ≥ 0. Soient $f_\varepsilon \in T^{-m, r}(R^n_+)$, $h_\varepsilon \in T^{-m, r}(R^n_+)$, $\varepsilon \in I$. Soit u_ε l'élément de $T_0^{m, r}(R^n_+)$ qui vérifie

$$B_\varepsilon u_\varepsilon = \varepsilon f_\varepsilon + h_\varepsilon \qquad \varepsilon \in I. \tag{2.3.23}$$

Il existe une constante $K > 0$, indépendante de ε telle que :

$$\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \|_{T^{m, r}(R^n_+)} + u_\varepsilon \|_{T^{m', r}(R^n_+)} \leq K [\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon \|_{T^{-m, r}(R^n_+)} + \\ + \| h_\varepsilon \|_{T^{-m', r}(R^n_+)}]. \tag{2.3.24}$$

4. Dans le cas où r est réel < 0, on a le

THÉORÈME 2.4 : Soit B_ε l'opérateur défini par (2.1.3) où A et B sont définis respectivement par (2.1.1) et (2.1.2). On suppose que les hypothèses H_1 à H_4 sont vérifiées. Soit r réel < 0. Soient $f_\varepsilon \in T^{-m, r}(R^n_+)$, $h_\varepsilon \in T^{-m', r}(R^n_+)$, $\varepsilon \in I$ et $h \in T^{-m', r}(R^n_+)$ des fonctions données telles que

1) $\varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T^{-m, r}(R^n_+)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$;

2) $h_\varepsilon \rightarrow h$ dans $T^{-m', r}(R^n_+)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Soient u_ε l'élément de $T_0^{m, r}(R^n_+)$ vérifiant

$$B_\varepsilon u_\varepsilon = \varepsilon f_\varepsilon + h_\varepsilon \tag{2.4.1}$$

et u l'élément de $T_0^{m', r}(R^n_+)$ vérifiant

$$Bu = h. \tag{2.4.2}$$

Alors, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $T_0^{m', r}(R^n_+)$ faible et $\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T_0^{m, r}(R^n_+)$ faible.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.4.

Nous désignons par B_ε^* [resp. B^*] l'adjoint formel de B_ε, $\varepsilon \in I$ [resp. B].
D'après la proposition 1.2, le dual de $T_0^{m',r}(R_+^n)$ [resp. $T_0^{m,r}(R_+^n)$] coincide avec $T^{-m',-r}(R_+^n)$ [resp. $T^{-m,-r}(R_+^n)$].
Soit $\varphi \in T^{-m',-r}(R_+^n)$. Soient v_ε l'élément de $T_0^{m,-r}(R_+^n)$ tel que

$$B_\varepsilon^* v_\varepsilon = \varphi \qquad \varepsilon \in I \tag{2.4.3}$$

et v l'élément de $T_0^{m',-r}(R_+^n)$ tel que

$$B^* v = \varphi. \tag{2.4.4}$$

D'après les théorèmes 2.1 et 2.3, $v_\varepsilon \longrightarrow v$ dans $T_0^{m',-r}(R_+^n)$ et $\varepsilon^{\frac{1}{2}} v_\varepsilon \longrightarrow 0$ dans $T_0^{m,-r}(R_+^n)$, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. Or, on a

$$\langle u_\varepsilon - u, \varphi \rangle = \langle u_\varepsilon, \overline{B_\varepsilon^* v_\varepsilon} \rangle - \langle u, \overline{B^* v} \rangle = \tag{2.4.5}$$

$$= \langle \varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon, \varepsilon^{\frac{1}{2}} \overline{v_\varepsilon} \rangle + \langle h_\varepsilon, \overline{v_\varepsilon} \rangle - \langle h, \overline{v} \rangle$$

et le second membre tend vers 0 quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.
Soit maintenant $\psi \in T^{-m,-r}(R_+^n)$ et soit w_ε l'élément de $T_0^{m,-r}(R_+^n)$ tel que

$$B_\varepsilon^* w_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \psi \qquad \varepsilon \in I. \tag{2.4.6}$$

D'après le lemme 2.3, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} w_\varepsilon \|_{T_0^{m,-r}(R_+^n)} + \| w_\varepsilon \|_{T_0^{m',-r}(R_+^n)} \leq K \| \psi \|_{T^{-m,-r}(R_+^n)}. \tag{2.4.7}$$

Mais on a

$$\langle \varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon, \overline{\psi} \rangle = \langle u_\varepsilon, B_\varepsilon^* w_\varepsilon \rangle = \langle \varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon, \varepsilon^{\frac{1}{2}} \overline{w_\varepsilon} \rangle + \langle h_\varepsilon, \overline{w_\varepsilon} \rangle \tag{2.4.8}$$

d'où, en tenant compte de (2.4.7)

$$| \langle \varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon, \overline{\psi} \rangle | \leq K_1 \| \psi \|_{T^{-m,-r}(R_+^n)}. \tag{2.4.9}$$

Il en résulte que $\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon$ est faiblement borné, donc borné dans $T_0^{m,r}(R_+^n)$. De toute suite, on peut donc extraire une sous-suite u_{ε_p} convergeant faiblement dans $T_0^{m,r}(R_+^n)$, vers une limite qui ne peut être que 0, puisque $\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \longrightarrow 0$ faiblement dans $T_0^{m',r}(R_+^n)$, ce qui achève la démonstration du théorème.

§ 3. Perturbations singulières pour le problème de Dirichlet non homogène.

1. En ce qui concerne le problème de Dirichlet non homogène, on a le théorème général suivant:

Théorème 3.1: Soit B_ε l'opérateur défini par (2.1.3) où A et B sont définis respectivement par (2.1.1) et (2.1.2). On suppose que les hypothèses H_1 à H_4 sont vérifiées. Soit r réel quelconque. Soient $f_\varepsilon \in T^{-m,r}(R_+^n)$, $h_\varepsilon \in T^{-m',r}(R_+^n)$, $\varepsilon \in I$, $h \in T^{-m',r}(R_+^n)$ des fonctions données telles que

1) $\varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon \longrightarrow 0$ dans $T^{-m,r}(R_+^n)$;
2) $h_\varepsilon \longrightarrow h$ dans $T^{-m',r}(R_+^n)$.

On se donne aussi $g_j^\varepsilon \in H^{m+r-j-\frac{1}{2}}(\pi)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, $\varepsilon \in I$ et $g_i \in H^{m'+r-i-\frac{1}{2}}(\pi)$, $i = 0, 1, \dots, m'-1$ vérifiant la condition suivante: il existe $v_\varepsilon \in T^{m,r}(R_+^n)$ et $v \in T^{m',r}(R_+^n)$ telles que $\gamma_j v_\varepsilon = g_j^\varepsilon$ pour $j = 0, 1, \dots, m-1$, $\varepsilon \in I$, $\gamma_i v = g_i$ pour $i = 0, 1, \dots, m'-1$ et telles que $v_\varepsilon \longrightarrow v$ dans $T^{m',r}(R_+^n)$ et $\varepsilon^{\frac{1}{2}} v_\varepsilon \longrightarrow 0$ dans $T^{m,r}(R_+^n)$, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. Si, dans ces conditions, u_ε est l'élément [19] de $T^{m,r}(R_+^n)$ qui vérifie

$$B_\varepsilon u_\varepsilon = \varepsilon f_\varepsilon + h_\varepsilon \qquad \gamma_j u_\varepsilon = g_j^\varepsilon \qquad j = 0, 1, \dots, m-1, \ \varepsilon \in I \tag{3.1.1}$$

et si u est l'élément de $T^{m',r}(R_+^n)$ qui vérifie

$$Bu = h \qquad \gamma_i u = g_i \qquad i = 0, 1, \dots, m'-1 \tag{3.1.2}$$

---

[19] D'après le théorème 1.1, $(B_\varepsilon, \vec{\gamma})$ où $\vec{\gamma} = (\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1})$ [resp. $(B, \vec{\gamma})$ où $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{m'-1})$] est un isomorphisme de $T^{m,r}(R_+^n) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{m+r-j-\frac{1}{2}}(\pi)$ $\left[\text{resp. de } T^{m',r}(R_+^n) \times \prod_{j=0}^{m'-1} H^{m'+r-j-\frac{1}{2}}(\pi)\right]$ sur $T^{-m,r}(R_+^n)$, [resp. $T^{-m',r}(R_+^n)$].

alors, quand $\varepsilon \to 0$, $u_\varepsilon \to u$ dans $T^{m',r}(R^n_+)$ et $\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \to 0$ dans $T^{m,r}(R^n_+)$ pour $r \geq 0$, $u_\varepsilon \to u$ dans $T^{m',r}(R^n_+)$ faible et $\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \to 0$ dans $T^{m,r}(R^n_+)$ faible pour $r < 0$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.1.

Soient v_ε, $\varepsilon \in I$ et v satisfaisant aux hypothèses du théorème. Alors $Av_\varepsilon \in T^{-m,r}(R^n_+)$ et $\varepsilon^{\frac{1}{2}} Av_\varepsilon \to 0$ dans $T^{-m,r}(R^n_+)$, $Bv_\varepsilon \in T^{-m',r}(R^n_+)$, $Bv \in$ $\in T^{-m',r}(R^n_+)$ et $Bv_\varepsilon \to Bv$ dans $T^{-m',r}(R^n_+)$. Soient alors w_ε l'élément de $T_0^{m,r}(R^n_+)$ tel que

$$B_\varepsilon w_\varepsilon = \varepsilon [f_\varepsilon - Av_\varepsilon] + h_\varepsilon - Bv_\varepsilon \tag{3.1.3}$$

et w l'élément de $T_0^{m',r}(R^n_+)$ tel que

$$Bw = h - Bv. \tag{3.1.4}$$

En vertu des théorème 2.1, 2.3 et 2.4, quand $\varepsilon \to 0$, $w_\varepsilon \to w$ dans $T_0^{m',r}(R^n_+)$ et $\varepsilon^{\frac{1}{2}} w_\varepsilon \to 0$ dans $T_0^{m,r}(R^n_+)$, pour $r \geq 0$, $w_\varepsilon \to w$ dans $T_0^{m',r}(R^n_+)$ faible et $\varepsilon^{\frac{1}{2}} w_\varepsilon \to 0$ dans $T_0^{m,r}(R^n_+)$ faible pour $r < 0$.

Mais $u_\varepsilon = w_\varepsilon + v_\varepsilon$ et $u = w + v$, d'où le résultat.

REMARQUE 1 : Supposons que $g_i \in H^{m+r-i-\frac{1}{2}}(\pi)$, $i = 0, 1, \dots, m'-1$ et que, pour chaque $j = 0, 1, \dots, m-1$, g_j^ε possède une limite, quand $\varepsilon \to 0$, dans $H^{m+r-j-\frac{1}{2}}(\pi)$, cette limite étant en outre égale à g_j pour $j = 0, 1, \dots, m'-1$. Alors, en vertu des résultats de LIONS [8], il existe des fonctions $v_\varepsilon \in T^{m,r}(R^n_+)$ et $v \in T^{m',r}(R^n_+)$, vérifiant les hypothèses du théoreme.

REMARQUE 2 : On sait que le théorème 1.1 de LIONS-MAGÉNÈS [13] est encore vrai sous la seule hypothèses que A soit un isomorphisme de $H_0^m(R^n_+)$ sur $H^{-m}(R^n_+)$ [20].

D'autre part, si l'on regarde la démonstration du lemme 2.1, on voit qu'elle est encore valable, sous les hypothèses H_1, H_2, et

H_5 : B est un isomorphisme de $H_0^{m'}(R^n_+)$ sur $H^{-m'}(R^n_+)$;

H_6 : B_ε est, pour $\varepsilon \in I$, un isomorphisme de $H_0^m(R^n_+)$ sur $H^{-m}(R^n_+)$;

---

[20] Voir dans [13] remarque II, p. 305.

H_7 : il existe une constante $c > 0$, telle que

$$(3.1.5) \qquad \| \varepsilon^{\frac{1}{2}} v_\varepsilon \|_{H^m(R^n_+)} + \| v_\varepsilon \|_{H^{m'}(R^n_+)} \leq c \, [\, \| \varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon \|_{H^{-m}(R^n_+)} + \| h_\varepsilon \|_{H^{-m'}(R^n_+)}]$$

quels que soient $f_\varepsilon \in H^{-m}(R^n_+)$, $h_\varepsilon \in H^{-m'}(R^n_+)$ et $v_\varepsilon \in H_0^m(R^n_+)$ tels que

$$(3.1.6) \qquad B_\varepsilon v_\varepsilon = \varepsilon f_\varepsilon + h_\varepsilon .$$

Quant au théorème 2.1, il est vrai sous les hypothèses H_1, H_2, H_5, H_6 et H_8 : quels que soient $v_\varepsilon \in H_0^m(R^n_+)$, $\varepsilon \in I$, $v \in H_0^{m'}(R^n_+)$ tels que

$$(3.1.7) \qquad B_\varepsilon v_\varepsilon = \varepsilon f_\varepsilon + h_\varepsilon$$

$$(3.1.8) \qquad Bv = h$$

où $f_\varepsilon \in H^{-m}(R^n_+)$, $h_\varepsilon \in H^{-m'}(R^n_+)$, $\varepsilon \in I$, $h \in H^{-m'}(R^n_+)$; alors, $v_\varepsilon \to v$ dans $H_0^m(R^n_+)$, $\varepsilon^{\frac{1}{2}} v_\varepsilon \to 0$ dans $H_0^{m'}(R^n_+)$, quand $\varepsilon \to 0$, dès que $\varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon \to 0$ dans $H^{-m}(R^n_+)$ et que $h_\varepsilon \to h$ dans $H^{-m'}(R^n_+)$.

Institut de Mathématiques
Nancy

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. P. CALDERON : *Intermediate spaces and interpolation.* Convegno di Varsavia. Studia Math. Serie Speciale, t. I (1963).

[2] E. GAGLIARDO : *Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili* Rend. Sem. Mat. Padova 27 (1957) p. 284-305.

[3] L. GÅRDING : *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations,* Math. Scand., vol. I, 1953, p. 55-72.

[4] G. HARDY - J. E. LITTLEWOOD - G. POLYA : *Inequalities.* Cambridge University Press 1934.

[5] L. HÖRMANDER : *Linear Partial Differential operators,* Springer, 1963.

[6] D. HUET : *Phénomènes de perturbation singuelière dans les problèmes aux limites.* Ann. Inst. Fourier, 1960.

[7] D. HUET : *Perturbations singulières* C. R. Acad. Sc. Paris, t 257, p. 3264-3266, 1963.

[8] J. L. LIONS : *Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications,* Bull. Math Soc. Sc. Math. Phys. R. P. Roumanie, 2, 50 (1959), 419-432.

[9] J. L. LIONS : *Théorèmes de trace et d'interpolation,* Ann. Scu. Norm. di Pisa, 13, 1959 p. 389-403.

[10] J. L. LIONS : C. R. Acad. Sc., Paris, 251, 1960, p. 1851-1855.

[11] J. L. LIONS : *Quelques procédés d'interpolation d'opérateurs linéaires et quelques applications.* Séminaire SCHWARTZ 1960-1961, Paris.

[12] J. L. LIONS : *Sur les espaces d'interpolation - Dualité,* Math. Scand. 9-1961, p. 144-177.

[13] J. L. LIONS - E. MAGÉNÈS : *Problemi ai limiti non omogenei,* I, Ann. Scu. Norm. Pisa, 14, 1960, p. 269-308.

[14] J. PEETRE : *Another approach to elliptic boundary problems.* Comm. on pure and App. Math., 14, 4, 1961, p. 711-731.

[15] J. PEETRE : *Elliptic partial differential equations.* Lecture notes : University of Maryland - 1962.

[16] L. SCHWARTZ : *Théorie des distributions* - Hermann - 1951-1952.

[17] L. SCHWARTZ : *Les Travaux de* GÅRDING *sur le problème de* DIRICHLET. Séminaire BOURBAKI - 1952.

[18] L. SCHWARTZ , Séminaire 1954-1955, Paris.

[19] L. SCHWARTZ : *Ecuaciones diferenciales parciales ellipticas* - Lecture notes - Bogota, 1956.

[20] L. SCHWARTZ : *Théorie des distributions à valeurs vectorielles,* Ann. Inst. Fourier, 7, 1958, p. 1-141, 8, 1958, p. 1-209.

[21] S. L. SOBOLEV : *On a theorem of functional analysis,* Mat. Sbornik, N. S, 4, 1938, p. 471-497.

[22] S. L. SOBOLEV : *Some applications of functional analysis in mathematical physics* - Leningrad - 1950.