ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LAMBERTO CESARI

Semicontinuità e convessità nel calcolo delle variazioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 18, nº 4 (1964), p. 389-423

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1964_3_18_4_389_0>

SEMICONTINUITÀ E CONVESSITÀ NEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI (*)

LAMBERTO CESARI

Considereremo integrali di linea in forma non parametrica

$$I[C] = \int_a^b f(t, x, x')\, dt$$

per curve $C: x = x(t) = (x_1, \dots, x_n)$, $a \leq t \leq b$, in E_{n+1}, le cui componenti $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, sono funzioni assolutamente continue nell'intervallo di definizione. La funzione integranda $f(t, x, d)$ si suppone continua nei suoi $2n+1$ argomenti t, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $d = (d_1, \dots, d_n)$. È noto che condizioni di convessività debole della f nei suoi argomenti $d_1, \dots, d_n$ assicurano la semicontinuità inferiore di $I[C]$ nella topologia uniforme (1). Teoremi di J. W. Lindeberg (2), L. Tonelli, E. E. Levi, W. T. Reid, M. R. Hestenes (3), e altri assicurano poi che, sotto condizioni di convessità forte della f negli stessi argomenti $d_1, \dots, d_n$, la differenza $I[C] - I[C_0]$ si mantiene essenzialmente positiva quando $C: x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, è in un intorno sufficientemente piccolo di $C_0: x = x_0(t)$, $a_0 \leq t \leq b_0$, e la differenza $|x'(t) - x_0'(t)|$

Pervenuto alla Redazione il 26 Marzo 1964.

(*) Lavoro letto all'Istituto Matematico dell'Università di Pisa, ed eseguito con parziale assistenza finanziaria dell'Istituto di Alta Matematica di Roma e della US National Science Foundation (research grant G-57 all'Università di Michigan).

(1) Si veda L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, 2 voll., Zanichelli, Bologna, 1921-23.

(2) J. W. LINDEBERG, *Über einige Fragen der Variationsrechnung*, Math. Annalen, 67, 1909, 340-354.

(3) L. TONELLI, loc. cit. in (1), vol. I, p. 422. Si veda anche L. TONELLI, *Su due proposizioni di J. W. Lindeberg ed E. E. Levi*, Rend. Accad. Lincei, 30, 1921, 1° sem., 19-22, 110-112; oppure L. TONELLI, *Opere Scelte*, Cremonese, Roma 1962, III, pp. 443-449; E. E. LEVI, *Sopra un teorema del calcolo delle variazioni di* J. W. LINDEBERG, Rend. Circolo Mat. Palermo, 37, 1914, 245-248; W. T. REID, *Isoperimetric problems of Bolza in non-parametric form*, Duke Math. Journ., 5, 1939, 675-691; M. R. HESTENES, *Theorem of Lindeberg in the calculus of variations*, Transactions Amer. Math. Soc., 60, 1946, 72-92; *Sufficient conditions for the isoperimetric problem of Bolza in the calculus of variations*, ibid., 93-118; *An indirect sufficiency proof for the problem of Bolza in nonparametric form*, ibid., 62, 1947, 509-535.

non converge a zero in misura. Tali teoremi sono detti qualche volta teoremi di confronto.

Nel presente lavoro dimostriamo (§§ 3, 4) alcune proposizioni, nello stesso spirito di quelle di J. W. Lindeberg e Tonelli, mostrando che, sotto opportune ipotesi di convessità forte, la differenza $I[C] - I[C_0]$ si mantiene essenzialmente al disopra dell'integrale

$$\int_a^b c(t)\,|\,x'(t) - x_0'(t)\,|^2\,dt$$

ove $c(t)$ è un'opportuna funzione peso.

In un successivo lavoro (4) avremo occasione di applicare questi risultati alla dimostrazione di un teorema di esistenza per problemi di ottimo controllo.

§ 1. Notazioni.

Indichiamo con t la variabile indipendente, e con $x = (x_1, \dots, x_n)$, $d = (d_1, \dots, d_n)$ vettori reali $x \in E_n$, $d \in E_n$. Sia A un insieme chiuso e limitato dello spazio (t, x), cioè $A \subset E_1 \times E_n$, e sia $f(t, x, d)$ una funzione reale e continua di (t, x, d) in $A \times E_n$. Denoteremo con $[\bar{a}, \bar{b}]$ un intervallo (finito e chiuso), $[\bar{a}, \bar{b}] \subset E_1$, che contenga interamente la proiezione dell'insieme A sull'asse t.

Denoteremo con K la collezione di tutte le curve non parametriche $C: x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, giacenti in A, cioè di funzioni (vettore) reali $x(t)$, $a \leq t \leq b$, a componenti $x_i(t)$ assolutamente continui in $[a, b]$, tali che $(t, x(t)) \in A$ per ogni $a \leq t \leq b$, e tali che la funzione $f(t, x(t), x'(t))$, definita quasi ovunque in $[a, b]$, sia L-integrabile in $[a, b]$. Denoteremo pertanto con $I[C]$ l'integrale di Lebesgue

$$I[C] = \int_a^b f(t, x(t), x'(t))\,dt.$$

Per ogni curva $C: x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, della classe K si ha necessariamente $\bar{a} \leq a \leq b \leq \bar{b}$. Denoteremo con $[C]$ l'insieme di tutti i punti (t, x) della curva C, e quindi $[C] \subset A$, e $[C]$ è un insieme chiuso e limitato (compatto).

(4) L. CESARI, *Un teorema di esistenza in problemi di controlli ottimi.* In corso di stampa in questi stessi Annali.

Per ogni vettore d denoteremo con $|d|$ la sua norma euclidea. Se b, d sono due vettori qualsiasi, $b, d \in E_n$, denoteremo con $b \cdot d$ il prodotto interno $b_1 d_1 + ... + b_n d_n$. Pertanto ogni funzione reale lineare in d ha la forma $z(d) = r + b \cdot d$, con r scalare e $b = (b_1, ..., b_n) \in E_n$ costanti. Per ogni funzione lineare $z(d)$ e ogni particolare vettore d_0 si ha poi

$$z(d_0) = r + b \cdot d_0, \qquad z(d) = z(d_0) + b \cdot (d - d_0).$$

Date due qualunque curve C e C_0 di K, $C: x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, $C_0: x = x_0(t)$, $a_0 \leq t \leq b_0$, diremo distanza $\| C, C_0 \|$ di C e C_0 il numero definito come d'uso nel modo seguente. Si estenda la definizione di $x(t)$ e $x_0(t)$ su tutto $(-\infty, +\infty)$ prendendo $x(t)$ costante e uguale a $x(a)$ in $(-\infty, a)$, e costante e uguale a $x(b)$ in $(b, +\infty)$, e analogamente si proceda per $x_0(t)$. Si ponga ora

$$\| C, C_0 \| = |a - a_0| + |b - b_0| + \operatorname{Max} |x(t) - x_0(t)|,$$

ove il massimo è preso in $(-\infty, +\infty)$. Si noti che $x'(t)$ è ora zero in $(-\infty, a)$ e in $(b, +\infty)$, e analoga proprietà vale per $x'_0(t)$. Ogni volta che occorra, intenderemo che $x(t)$, $x'(t)$, ecc. sono estese sull'intero intervallo $(-\infty, +\infty)$, o almeno in $[\bar{a}, \bar{b}]$, mediante le convenzioni ora stabilite. Indicheremo con intorno (ϱ) di una curva C_0 di K la sottocollezione di tutte le curve C di K con $\| C, C_0 \| < \varrho$.

§ 2. Due teoremi di Lindeberg e Tonelli.

Enunciamo qui due proposizioni, per curve in E_{n+1}, che furono dimostrate da Tonelli (5) per curve in E_2 e che estendono una precedente proposizione di J. W. Lindeberg (6). Allo scopo di non modificare inutilmente tali enunciati, supporremo con Tonelli — ma soltanto in questa sezione — che $f(t, x, d)$ sia continua in $A \times E_n$ e abbia ivi derivate parziali prime f_{d_i} pure continue in $A \times E_n$. In queste condizioni le proprietà di convessità che qui interessano possono essere espresse mediante la funzione di Weierstrass

$$E(t, x, d, D) = f(t, x, D) - f(t, x, d) - f_d(t, x, d) \cdot (D - d),$$

ove $D = (D_1, ..., D_n) \in E_n$ è un vettore reale arbitrario, e $f_d(t, x, d)$ denota il vettore $f_d(t, x, d) = (f_{d_1}, ..., f_{d_n})$.

(5) loc. cit. in (3).
(6) loc. cit. in (4).

TEOREMA A (Tonelli [7]). Sia $C_0: x = x_0(t)$, $a_0 \leq t \leq b_0$, una curva della classe K. Supponiamo che (α) ad ogni suo punto $(t_0, x_0(t_0))$ si possano far corrispondere un numero $\delta = \delta(t_0) > 0$, e un vettore $\overline{x'_0} = \overline{x'_0}(t_0)$ tali che per tutti i punti (t, x) dell'insieme A posti ad una distanza $\leq \delta$ da $(t_0, x_0(t_0))$ e per tutti i vettori x' con $| x' - \overline{x'_0} | \leq \delta$ e $X' \neq x'$ risulti $E(t, x, x', X') > 0$. Supponiamo inoltre che (β) per quasi tutti i punti t_0 di $[a_0, b_0]$ sia $\overline{x'_0}(t_0) = x'_0(t_0)$. Allora, scelti ad arbitrio due numeri $\sigma > 0$, $\lambda > 0$, si possano sempre determinare due altri numeri $\varrho > 0$, $\varepsilon > 0$ in modo che per ogni curva $C: x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, della classe K, appartenente all'intorno (ϱ) della curva C_0, e tale che $| x'(t) - x'_0(t) | \geq \sigma$ in un insieme di misura $\geq \lambda$, risulta $I[C] - I[C_0] \geq \varepsilon$.

TEOREMA B (Tonelli [8]). Sia $C_0: x = x_0(t)$, $a_0 \leq t \leq b_0$, una curva della classe K soddisfacente le condizioni (α) e (β) del teorema A. Supponiamo inoltre che (γ) esistono due numeri $\Delta > 0$, $\varphi > 0$ tali che per quasi tutti i t e per ogni X' con $| X' - x'_0(t) | = \delta(t)$ risulti $\delta(t) \leq \Delta$, $E(t, x_0(t), x'_0(t), X') \geq \varphi$. Allora, scelto ad arbitrio un numero $\lambda > 0$ è sempre possibile determinare due numeri $\varrho > 0$, $\varepsilon > 0$ tali che per ogni curva $C: x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, della classe K, appartenente all'intorno (ϱ) di C_0 e soddisfacente la disuguaglianza $\int_a^b | x'(t) - x'_0(t) | \, dt \geq \lambda$, risulti anche $I[C] - I[C_0] \geq \varepsilon$.

Le dimostrazioni di questi due teoremi date da Tonelli nel caso $n = 1$ si estendono al caso $n > 1$.

§ 3. Teoremi di confronto nella classe K_η.

Supporremo la f soltanto continua come si è detto nella § 1, e pertanto dovremo esprimere come d'uso le proprietà di convessità della f mediante l'esistenza e proprietà degli iperpiani d'appoggio. Nei teoremi seguenti si userà una condizione alquanto più forte della convessità insieme a limitazioni nella classe K. Una discussione delle condizioni è fatta nella § 5. Come vedremo le asserzioni dei teoremi cadono facilmente in difetto senza tali condizioni.

Sia $\eta(t)$, $\bar{a} \leq t \leq \bar{b}$, una funzione non negativa ed a quadrato integrabile in $[\bar{a}, \bar{b}]$. Diciamo K_η la sottoclasse di tutte le curve $C: x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, di K con $| x'(t) | \leq \eta(t)$ quasi dappertutto in $[a, b]$.

---

(7) loc. cit. in (1), vol., I, pag. 422.
(8) loc. cit. in (1), vol., I, pag. 429.

TEOREMA I. Sia $C_0 : x = x_0(t)$, $a_0 \leq t \leq b_0$, una curva della classe K_η. Supponiamo che esista un $\delta_0 > 0$ tale che si abbia $f(t, x, d) \geq 0$ per ogni d e per ogni $(t, x) \in A$ ad una distanza $\leq \delta_0$ da $[C_0]$. Supponiamo ancora che esista una funzione non negativa, misurabile e limitata $c(t)$, $a_0 \leq t \leq b_0$, tale che quasi ogni punto t_0 di $[a_0, b_0]$, in cui $d_0 = x_0'(t_0)$ esiste, ha la seguente proprietà: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero $\delta = \delta(t_0) > 0$ e una funzione lineare $z(d) = r + b \cdot d$ tale che, per ogni $(t, x) \in A$ ad una distanza $\leq \delta$ da $(t_0, x_0(t_0))$ si abbia

$$f(t, x, d) \geq z(d) + c(t_0) \, | d - d_0 |^2 \text{ per ogni } d \in E_n, \tag{1}$$

$$f(t, x, d) \leq z(d) + \varepsilon \text{ per ogni } d \in E_n \text{ con } | d - d_0 | < \delta. \tag{2}$$

Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\varrho > 0$ tale che, per ogni curva $C : x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, della classe K_η e appartenente all'intorno (ϱ) di C_0 risulta

$$I[C] > I[C_0] - \varepsilon + \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} c(t) \, | x'(t) - x_0'(t) |^2 \, dt. \tag{3}$$

DIMOSTRAZIONE. Denoteremo con μ l'integrale a secondo membro della (3). La funzione $c(t) \geq 0$ è limitata. Sarà perciò $0 \leq c(t) \leq M_0$ per qualche costante M_0. Denotiamo con M_1 e M_2 i valori degli integrali $\int_a^b \eta(t) \, dt$, $\int_a^b \eta^2(t) \, dt$. Le funzioni $\eta(t)$, $\eta^2(t)$, $f(t, x_0(t), x_0'(t))$ sono integrabili negli intervalli $[\bar{a}, \bar{b}]$ e $[a_0, b_0]$ rispettivamente. Pertanto, dato $\varepsilon > 0$, esiste un numero $\tau > 0$ tale che per ogni insieme E di questi intervalli con mis $E < \tau$ risulta

$$(E) \int \eta \, dt < \varepsilon / M_0, \quad (E) \int \eta^2 \, dt < \varepsilon / M_0, \left| (E) \int f(t, x_0(t), x_0'(t)) \, dt \right| < \varepsilon.$$

In forza del teorema di Lusin esiste un insieme chiuso $B \subset [a_0, b_0]$ tale che $x_0'(t)$ esiste in B ed entrambe le funzioni $c(t)$, $x_0'(t)$ sono continue su B. Possiamo assumere che ogni $t \in B$ soddisfi le condizioni del teorema e che mis $B < b_0 - a_0 - \tau$.

Per ogni $\bar{t} \in B$ esistono un numero $\bar{\delta} > 0$ e una funzione lineare $z(d) = r + b \cdot d$ soddisfacenti (1) e (2). In corrispondenza dello stesso $\bar{t} \in B$ possiamo scegliere un numero $0 < \bar{\varrho} \leq \bar{\delta}/4$ tale che $| x_0'(t) - x_0'(\bar{t}) | <$

$\min[\bar{\delta}/4,\ \varepsilon/M_0 M_1,\ (\varepsilon/M_0)^{\frac{1}{2}}]$, $|c(t) - c(\bar{t})| < \varepsilon/M_2$ per ogni $t \in B$ con $|t - \bar{t}| \leq \varrho$, e inoltre tale che $|x_0(t) - x_0(\bar{t})| < \bar{\delta}/4$ per ogni $t \in [a_0, b_0]$ con $|t - \bar{t}| \leq \varrho$.

Gli intervalli $(\bar{t} - \bar{\varrho}, \bar{t} + \bar{\varrho})$ formano un ricoprimento dell'insieme compatto B. Pertanto, un numero finito di tali intervalli ricoprono B. Diciamo $I_j, j = 1, \dots, p$, tali intervalli, e $t_j, \delta_j, \varrho_j, z_j(d) = r_j + b_j \cdot d$ siano rispettivamente il centro di I_j, i due numeri e la funzione lineare associata ad I_j. Sia $R = \max[|r_j|, |b_j|, |x_0'(t_j)|, j = 1, \dots, p]$. Sia $\xi > 0$ un numero abbastanza piccolo affinchè sia $\xi \leq \varepsilon/R$, $\xi \leq \tau$, $\xi \leq \varepsilon/M_0 R^2$, e inoltre tale che

$$(H)\int |x_0'(t)|\, dt < \varepsilon/R, \quad (H)\int \eta(t)\, dt < \varepsilon/M_0(R+1),$$

per ogni insieme misurabile $H \subset [a_0, b_0]$ con $\operatorname{mis} H < \xi$. Sia G un insieme aperto di $[a_0, b_0]$ tale che $G \supset B$, $\operatorname{mis}(G - B) < \xi$. L'insieme aperto G è l'unione numerabile di intervalli aperti senza punti in comune. Dato che B è compatto, un numero finito di questi intervalli aperti già ricopre B. Dunque, possiamo assumere che G sia l'unione finita di intervalli aperti senza punti in comune. Ne consegue che anche gli insiemi $G \cap I_j, j = 1, \dots, p$, sono in numero finito. Con eventuali riduzioni possiamo ottenere un gruppo finito di intervalli chiusi, ricoprenti B e senza puuti interni in comune. Possiamo anche trascurare tutti quelli che non contengono punti di B. Diciamo $[\alpha_s, \beta_s], s = 1, \dots, N$, tali intervalli. Dunque

$$\operatorname{mis}[\cup [\alpha_s, \beta_s] - B] < \operatorname{mis}(G - B) < \xi,$$

dove l'unione $\cup$ è fatta per tutti gli $s = 1, \dots, N$. Ciascun intervallo $[\alpha_s, \beta_s]$ è contenuto in uno degli intervalli I_j. Se $[\alpha_s, \beta_s] \subset I_j$ diciamo $t_s, \delta_s, \varrho_s, z_s(d) = r_s + b_s \cdot d$ i corrispondenti elementi $t_j, \delta_j, \varrho_j, z_j(d)$ associati con I_j. Possiamo assumere che gli intervalli $[\alpha_s, \beta_s]$ siano stati numerati in modo che per $s < s'$ si abbia $\alpha_s < \beta_s \leq \alpha_{s'} < \beta_{s'}$. Possiamo anche assumere che i due intervalli estremi $[\alpha_1, \beta_1]$ e $[\alpha_N, \beta_N]$, abbiano lunghezze $< \tau$, cioè $0 < \beta_1 - \alpha_1 < \tau$, $0 < \beta_N - \alpha_N < \tau$. Infatti, in caso opposto, si potrebbe suddividere tali intervalli in parti di lunghezza $< \tau$ e rinumerare tutti gli intervalli. Siano B_s, E_s gli insiemi $B_s = [\alpha_s, \beta_s] \cap B$, $E_s = [\alpha_s, \beta_s] - B$, $s = 1, \dots, N$, denotiamo con Σ' ogni somma fatta rispetto all'indice s per $s = 2, \dots, N-1$, e con E l'insieme $E = E_2 \cup \dots \cup E_{N-1}$, così che $\operatorname{mis} E < \xi$. Si ha

$$I[C_0] = \int_{a_0}^{b_0} f(t, x_0, x_0')\, dt \leq (B)\int f(t, x_0, x_0')\, dt + \varepsilon$$

$$= \Sigma' (B_s) \int f(t, x_0, x_0')\, dt + (B_1 + B_N) \int f(t, x_0, x_0')\, dt + \varepsilon$$

$$\leq \Sigma' (B_s) \int [r_s + b_s \cdot x_0'(t)]\, dt + (3 + b_0 - a_0)\, \varepsilon$$

$$= \Sigma' \left\{ \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r_s + b_s \cdot x_0'(t)]\, dt - (E_s) \int [r_s + b_s \cdot x_0'(t)]\, dt \right\} + (3 + b_0 - a_0)\, \varepsilon$$

$$\leq \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r_s + b_s \cdot x_0'(t)]\, dt + R\, \Sigma' (E_s) \int (1 + |x_0'(t)|)\, dt + (3 + b_0 - a_0)\, \varepsilon$$

$$\leq \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r_s + b_s \cdot x_0'(t)]\, dt + (5 + b_0 - a_0)\, \varepsilon. \tag{5}$$

Sia ϱ il numero

$$\varrho = 2^{-1} \min [\tau, \delta_0, \delta_s, \varrho_s, s = 2, \dots, N-1, \alpha_2 - a_0, b_0 - \beta_{N-1}, (2(N-2)R)^{-1} \varepsilon].$$

Sia $C: x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, una curva qualsiasi della classe K appartenente all'intorno (ϱ) di C_0. Allora $|a - a_0| \leq \varrho$, $|b - b_0| \leq \varrho$ e pertanto l'intervallo $[a, b]$ contiene nel suo interno ciascuno degli $N - 2$ intervalli $[\alpha_s, \beta_s]$, $s = 2, \dots, N-1$. Di più, per $t \in [\alpha_s, \beta_s]$, abbiamo $|t - t_s| \leq \varrho_s$,

$$|x(t) - x_0(t_s)| \leq |x(t) - x_0(t)| + |x_0(t) - x_0(t_s)| \leq 2^{-1} \delta_s + 2^{-1} \delta_s = \delta_s,$$

e quindi

$$f(t, x(t), x'(t)) \geq [r_s + b_s \cdot x'(t)] + c(t_s)\, |x'(t) - x_0'(t_s)|^2.$$

Si ha ora

$$I[C] = \int_a^b f(t, x(t), x'(t))\, dt \geq \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} f(t, x(t), x'(t))\, dt$$

$$\geq \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} \{[r_s + b_s \cdot x'(t)] + c(t_s)\, |x'(t) - x_0'(t_s)|^2\}\, dt. \tag{6}$$

Se indichiamo con $[a', b']$ l'unione di $[a_0, b_0]$ e $[a, b]$, e con E' l'insieme complementare degli intervalli $[\alpha_s, \beta_s]$, $s = 2, \dots, N-1$, in $[a', b']$, risulta mis $E' < | a - a_0 | + | b - b_0 | + \text{mis } E \leq \tau + \tau + \tau = 3\tau$. Si ha

$$\begin{aligned}
&\Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} c(t_s) \, | x'(t) - x'_0(t_s) |^2 - \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} c(t) \, | x'(t) - x'_0(t) |^2 \, dt \\
&= \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [c(t_s) - c(t)] \, | x'(t) - x'_0(t) |^2 \, dt + \\
&+ \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} c(t_s) \, [| x'(t) - x'_0(t_s) |^2 - | x'(t) - x'_0(t) |^2] \, dt \\
&= \Delta_1 + \Delta_2 .
\end{aligned} \tag{7}$$

Essendo $| x'(t) |$, $| x'_0(t) | \leq \eta(t)$, si ha

$$\begin{aligned}
| \Delta_1 | &\leq 4 \, \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} | c(t_s) - c(t) | \, \eta^2(t) \, dt \\
&= 4 \, \Sigma' (B_s + E_s) \int | c(t_s) - c(t) | \, \eta^2(t) \, dt \\
&\leq 4 \, (\varepsilon / M_2) \, \Sigma' (B_s) \int \eta^2(t) \, dt + 8 M_0 \, \Sigma' (E_s) \int \eta^2(t) \, dt \\
&\leq 4 \, (\varepsilon / M_2) \int_{a_0}^{b_0} \eta^2(t) \, dt + 8 M_0 (E) \int \eta^2(t) \, dt < 4 \, (\varepsilon / M_2) \, M_2 + 8 M_0 (\varepsilon / M_0) = 12 \varepsilon.
\end{aligned} \tag{8}$$

Osserviamo che, per a, b, c reali si ha

$$(a - b)^2 - (a - c)^2 = (b - c)^2 + 2 \, (b - c) \, (c - a).$$

Se ora $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, $c = (c_1, \dots, c_n)$ denotano vettori reali, si ha

$$\begin{aligned}
| \, | a - b |^2 - | a - c |^2 \, | &= | \, \Sigma_i [(a_i - b_i)^2 - (a_i - c_i)^2] \, | \\
&\leq \Sigma_i (b_i - c_i)^2 + 2 \, | \, \Sigma_i (b_i - c_i) (c_i - a_i) \, | \\
&\leq \Sigma_i (b_i - c_i)^2 + 2 \, [\Sigma_i (b_i - c_i)^2]^{\frac{1}{2}} [\Sigma_i (c_i - a_i)^2]^{\frac{1}{2}} ,
\end{aligned}$$

ossia

$$\big|\, |a-b|^2 - |a-c|^2 \,\big| \leq |b-c|^2 + 2\,|b-c|\;|c-a|\,.$$

Abbiamo ora, essendo $0 \leq c(t_s) \leq M_0$,

$$|\Delta_2| \leq \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} \big|\, |x'(t) - x_0'(t_s)|^2 - |x'(t) - x_0'(t)|^2 \,\big|\, c(t_s)\,dt$$

$$\leq M_0\, \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} \big|\, |x'(t) - x_0'(t_s)|^2 - |x'(t) - x_0'(t)|^2 \,\big|\, dt.$$

Applicando la formula precedente con $a = x'(t)$, $b = x_0'(t_s)$, $c = x_0'(t)$, ed essendo $|x'(t)|$, $|x_0'(t)| \leq \eta(t)$, troviamo

$$|\Delta_2| \leq M_0\, \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} \big[\, |x_0'(t) - x_0'(t_s)|^2 + 2\,|x_0'(t) - x_0'(t_s)|\;|x_0'(t) - x'(t)| \,\big]\, dt$$

$$\leq M_0\, \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} \big[\, |x_0'(t) - x_0'(t_s)|^2 + 4\eta(t)\,|x_0'(t) - x_0'(t_s)| \,\big]\, dt$$

$$\leq M_0\, \Sigma'(B_s + E_s) \int |x_0(t) - x_0(t_s)|^2\, dt + 4M_0\, \Sigma'(B_s + E_s) \int |x_0(t) - x_0(t_s)|\, \eta(t)\, dt$$

$$\leq M_0\, \Sigma'\, (\varepsilon/M_0) \cdot (B_s) \int dt + (E_s) \int (R + \eta(t))^2\, dt$$

$$+ 4M_0\, \Sigma'\, (\varepsilon/M_0 M_1) \cdot (B_s) \int \eta(t)\, dt + (E_s) \int (R + \eta(t))\, \eta(t)\, dt$$

$$\leq \varepsilon \operatorname{mis} B + M_0 R^2 \operatorname{mis} E + (2M_0 R + 4M_0) \cdot (E) \int \eta(t)\, dt + 5M_0 \cdot (E) \int \eta^2(t)\, dt$$

$$\leq \varepsilon(b_0 - a_0) + M_0 R^2 (\varepsilon/M_0 R^2) + (2M_0 R + 4M_0)(\varepsilon/M_0(R+1)) + 5M_0(\varepsilon/M_0)$$

$$< (b_0 - a_0 + 10)\, \varepsilon.$$

La relazione (7) tenendo conto della (8) e (9), diventa

$$\left| \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} c(t_s) \,|\, x'(t) - x_0'(t_s) \,|^2 \, dt - \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} c(t) \,|\, x'(t) - x_0'(t) \,|^2 \, dt \right|$$

$$\leq (b_0 - a_0 + 22)\, \varepsilon,$$

e finalmente (6) si riduce a

$$I[C] > \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r_s + b_s \cdot x'(t)]\, dt + \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} c(t) \,|\, x'(t) - x_0'(t) \,|^2 \, dt - (b_0 - a_0 + 22)\, \varepsilon.$$

Dobbiamo modificare lievemente questa relazione. Allo scopo osserviamo che

$$S \equiv \int_{a'}^{b'} c(t) \,|\, x'(t) - x_0'(t) \,|^2 \, dt - \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} c(t) \,|\, x'(t) - x_0'(t) \,|^2 \, dt$$

$$= (E') \int c(t) \,|\, x'(t) - x_0'(t) \,|^2 \, dt$$

$$\leq 4M_0 \cdot (E') \int \eta^2(t)\, dt \leq 4M_0 \cdot 3\,(\varepsilon / M_0) = 12\varepsilon.$$

La relazione precedente relativa ad $I[C]$, aggiungendo e sottraendo S e maggiorando, diventa

$$I[C] > \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r_s + b_s \cdot x'(t)]\, dt + \int_{a'}^{b'} c(t) \,|\, x'(t) - x_0'(t) \,|^2 \, dt$$

$$- (b_0 - a_0 + 34)\, \varepsilon,$$

ove il secondo integrale coincide con μ. Confrontando con la (5) si ottiene

$$I[C] - I[C_0] \geq \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} \{ [r_s + b_s \cdot x'(t)] - [r_s + b_s \cdot x_0'(t)] \}\, dt$$

$$+ \mu - [39 + 2\,(b_0 - a_0)]\, \varepsilon.$$

$$= \Sigma' b_s \cdot \{ x(\beta_s) - x_0(\beta_s) - x(\alpha_s) + x_0(\alpha_s) \} + \mu - [39 + 2\,(b_0 - a_0)]\, \varepsilon,$$

ove ciascuna differenza $| x(\beta_s) - x_0(\beta_s) |$, $| x(\alpha_s) - x_0(\alpha_s) |$ è minore di $(2(N-2)R)^{-1}\varepsilon$, e d'altra parte $| b_s | \leq R$, $s = 2, \ldots, N-1$. Pertanto la somma Σ' ha valore assoluto $< \varepsilon$, e quindi

$$I[C] - I[C_0] > \mu - [40 + 2(b_0 - a_0)]\,\varepsilon.$$

Data l'arbitrarietà di ε, la relazione (3) è con ciò dimostrata.

TEOREMA II. Sia $C_0 : x = x_0(t)$, $a_0 \leq t \leq b_0$, una curva della classe K_η. Supponiamo esista una funzione non negativa, limitata e misurabile $c(t)$, $a_0 \leq t \leq b_0$, tale che quasi ogni punto t_0 di $[a_0, b_0]$, in cui $d_0 = x_0'(t_0)$ esiste, ha la seguente proprietà : Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un numero $\delta = \delta(t_0) > 0$ e una funzione lineare $z(d) = r + b \cdot d$ tali che, per ogni $(t, x) \in A$ ad una distanza $\leq \delta$ da $(t_0, x_0(t_0))$ si abbia

$$f(t, x, d) \geq z(d) + c(t_0)\, | d - d_0 |^2 \quad \text{per ogni } d \in E_n, \tag{10}$$

$$f(t, x, d) \leq z(d) + \varepsilon \quad \text{per ogni } d \in E_n \text{ con } | d - d_0 | < \delta. \tag{11}$$

Inoltre supponiamo che per ogni altro punto $t_0 \in [a_0, b_0]$ esistano un numero $\delta = \delta(t_0) > 0$ e una funzione lineare $z(d) = r + b \cdot d$ tali che, per ogni $(t, x) \in A$ ad una distanza $\leq \delta$ da $(t_0, x_0(t_0))$ si abbia

$$f(t, x, d) \geq z(d) \quad \text{per ogni } d \in E_n. \tag{12}$$

Allora, dato $\varepsilon > 0$, esiste un $\varrho > 0$ tale che, per ogni curva $C : x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, della classe K_η e appartenente all'intorno (ϱ) di C_0 risulti

$$I[C] > I[C_0] - \varepsilon + \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} c(t)\, | x'(t) - x_0'(t) |^2\, dt. \tag{13}$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $\bar{t} \in [a_0, b_0]$ esistono un $\bar{\delta}$ e una funzione lineare $z(d) = \bar{r} + \bar{b} \cdot d$ tali che $f(t, x, d) \geq z(d)$ per ogni d e per ogni $(t, x) \in A$ con $| t - \bar{t} | < \bar{\delta}$, $| x - x_0(\bar{t}) | < \bar{\delta}$. Scegliamo un numero $\bar{\varrho}$, $0 < \bar{\varrho} \leq \bar{\delta}$, tale che $| x_0(t) - x_0(\bar{t}) | < \bar{\delta}/4$ per ogni t con $| t - \bar{t} | < \bar{\varrho}$. Un numero finito di intervalli $(\bar{t} - \bar{\varrho}, \bar{t} + \bar{\varrho})$ ricopre $[a_0, b_0]$. Riducendo la lunghezza di questi stessi intervalli possiamo sempre ottenere una suddivisione P di un intervallo $[t_0, t_N]$ lievemente più grande di $[a_0, b_0]$, diciamo $P : t_0 < a_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < b_0 < t_N$ tale che ogni intervallo $[t_{j-1}, t_j]$ è contenuto in uno degli intervalli precedenti. Denoteremo con C_{0j}, $j = 1, \ldots, N$, la curva $C_{0j} : x = x_0(t)$, $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ se $j = 2, \ldots, N-1$, e altrimenti la stessa curva con a_0 al posto di t_0 se $j=1$, e b_0 al posto di t_N se $j=N$. Nelle righe precedenti abbiamo già associato ad ogni curva C_{0j} una funzione lineare $z_j(d)=r_j+b_j\cdot d$ tale che $f(t,x,d)-z_j(d)\geq 0$ per ogni d e per ogni $(t,x)\in A$ di un intorno della curva C_{0j} nello spazio (t,x).

Poniamo $f^{(j)}(t,x,d)=f(t,x,d)-z_j(d)$. Allora l'integrale $I^{(j)}[C]=$ $=\int f^{(j)}(t,x,x')\,dt$ soddisfa a tutte le ipotesi del teorema I rispetto alla curva C_{0j} col medesimo $c(t)\geq 0$ e funzioni lineari $z(d)-z_j(d)$, $(j=1,\dots,N)$. Dato $\varepsilon>0$, applichiamo il teorema I a ciascuna curva C_{0j} ottenendo il numero $\eta_j>0$ corrispondente a C_{0j} ed al numero ε/N al posto di ε. Posto $R=\max r_j, |b_j|$, $j=1,\dots,N$, prendiamo

$$\varrho=2^{-1}\min[\eta_1,\dots,\eta_N,\ a_0-t_0,\ t_1-a_0,\ b_0-t_{N-1},\ t_N-b_0,\ (3RN)^{-1}\varepsilon],$$

e sia $C: x=x(t)$, $a\leq t\leq b$, una qualsiasi curva di classe K_η appartenente all'intorno (ϱ) di C_0. Allora si ha $t_0<a<t_1$, $t_{N-1}<b<t_N$, e, se indichiamo con C_j, $j=1,\dots,N$, le curve rappresentate da $C_j: x=x(t)$ quando t varia nel rispettivo intervallo $[a,t_1]$, $[t_{j-1},t_j]$; $j=2,\dots,N-1$, $[t_{N-1},b]$, allora si ha $\|C_j, C_{0j}\|<\eta_j$, $j=1,\dots,N$. Pertanto

$$I^{(j)}[C_j]>I^{(j)}[C_{0j}]-N^{-1}\varepsilon+\int_{t_{j-1}}^{t_j}c(t)\,|x'(t)-x_0'(t)|^2\,dt,$$

per ogni $j=1,\dots,N$, e ove scriveremo $\bar a$ al posto di t_0 per $j=1$, e $\bar b$ al posto di t_N per $j=N$. D'altra parte

$$I[C_j]-I[C_{0j}]=I^{(j)}[C_j]-I^{(j)}[C_{0j}]+\Delta_j,$$

ove

$$\Delta_j=\int_{t_{j-1}}^{t_j}[r_j+b_j\cdot x'(t)]\,dt-\int_{t_{j-1}}^{t_j}[r_j+b_j\cdot x_0'(t)]\,dt,$$

con le ovvie convezioni circa t_0 e t_N per $j=1$ e $j=N$ in ciascun integrale. Per $j=2,\dots,N-1$, si ha

$$\begin{aligned}|\Delta_j|&=\left|\int_{t_{j-1}}^{t_j}b_j\cdot[x'(t)-x_0'(t)]\,dt\right|\\&=|b_j\cdot[x(t_j)-x_0(t_j)-x'(t_{j-1})+x_0'(t_{j-1})]|\\&\leq 2R\varrho<N^{-1}\varepsilon.\end{aligned}$$

Indicando con $a'' = \max[a, a_0]$ e con $a' = \min[a, a_0]$, abbiamo poi

$$|\Delta_1| \leq \int_{a'}^{a''} |r_1|\,\eta(t)\,dt + \left|\int_{a''}^{t_1} b_1 \cdot [x'(t) - x'_0(t)]\,dt\right|$$

$$\leq R\varrho + 2R\varrho = 3R\varrho \leq N^{-1}\varepsilon,$$

e analogamente $|\Delta_N| \leq N^{-1}\varepsilon$. Pertanto

$$I[C_j] - I[C_{0j}] - 2N^{-1}\varepsilon + \int_{t_{j-1}}^{t_j} c(t)\,|x'(t) - x'_0(t)|^2\,dt,$$

per ogni $j = 1, \dots, N$, e ove scriveremo $\bar{a}$ al posto di t_0 per $j = 1$, e $\bar{b}$ al posto di t_N per $j = N$. Sommando rispetto a j abbiamo

$$I[C] > I[C_0] - 2\varepsilon + \mu,$$

per ogni curva C della classe K_η con $\| C, C_0 \| < \varrho$. Il teorema II è così completamente dimostrato.

Osservazione. Le condizioni dei teoremi I e II sono certamente soddisfatte con $c(t) > 0$ se $f(t, x, d)$ è continua in $A \times E_n$, se per ogni $(t, x) \in A$ la funzione $f(t, x, d)$ è di classe C^2 in $d = (d_1, \dots, d_n)$, con derivate continue in $A \times E_n$ e se esiste una costante $\gamma > 0$ tale che

$$\Sigma_{ij} f_{d_i d_j} \xi_i \xi_j \geq \gamma\,|\xi|^2$$

per ogni $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in E_n$, ove $f_{d_i d_j} = \partial^2 f / \partial d_i\,\partial d_j$.

Corollario. Se $C_k : x = x_k(t)$, $a_k \leq t \leq b_k$, $k = 1, 2, \dots$, è una successione minimizzante per l'integrale $I[C]$ in una sottoclasse completa $K_{0\eta}$ di K_η, se C_{k_s}, $s = 1, 2, \dots$, è una sottosuccessione convergente con limite $C_0 : x = x_0(t)$, $a_0 \leq t \leq b_0$, cioè $\| C_{k_s}, C_0 \| \to 0$ quando $s \to \infty$, e se la curva C_0 soddisfa le ipotesi dei teoremi I o II, allora si ha necessariamente

$$(15) \qquad C_0 \in K_{0\eta}, \quad I[C_0] = \lim I[C_{k_s}], \quad \lim \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} c(t)\,|x'_{k_s}(t) - x'_0(t)|^2\,dt = 0.$$

In altre parole, la sottosuccessione C_{k_s}, oltre che essere convergente nella metrica $\| \quad \|$ (topologia uniforme), è anche convergente nella metrica della convergenza L^2 con peso $c(t)$ sulle derivate.

DIMOSTRAZIONE. Sia $i = \operatorname{Inf} I[C]$, ove Inf è preso nella classe $K_{0\eta}$. Essendo C_k, $k = 1, 2, \dots$, una successione minimizzante in $K_{0\eta}$, abbiamo $i = \lim I[C_k]$ quando $k \to \infty$, e perciò anche $i = \lim I[C_{k_s}]$ quando $s \to \infty$. Qui i è certamente finito. Infatti, se C_0 soddisfa le ipotesi del teorema I, allora $f \geq 0$ in un intorno di C_0 e quindi $I[C_{k_s}] \geq 0$ per ogni s abbastanza grande e quindi $i \geq 0$. Se C_0 soddisfa le ipotesi del teorema II allora il ragionamento fatto per il teorema II mostra che la successione $I[C_{k_s}]$, $s = 1, 2, \dots$, è limitata inferiormente e quindi di nuovo i è finito. Possiamo ora supporre

$$i \leq I[C_k] \leq i + k^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Indichiamo con μ_{k_s} l'integrale nella terza relazione (15). Dato $\varepsilon > 0$, dai teoremi I e II risulta che, per ogni s sufficientemente grande, si ha

$$i + 1/k_s > I[C_{k_s}] > I[C_0] - \varepsilon + \mu_{k_s} .$$

D'altra parte $C_0 \in K_{0\eta}$ essendo $K_{0\eta}$ una classe completa e pertanto $I[C_0] \geq i$. Dunque

$$i \leq I[C_0] < i + 1/k_s + \varepsilon - \mu_{k_s}$$

per ogni s sufficientemente grande, e quindi

$$0 \leq \mu_{k_s} < \varepsilon + 1/k_s .$$

Dunque $\mu_{k_s} \to 0$ quando $s \to \infty$ e, dalla relazione precedente, anche $I[C_0] = i$. Le relazioni (15) sono con ciò dimostrate.

OSSERVAZIONE. Nelle ipotesi del corollario, $C_k \in K_{0\eta}$ implica $|x_k'(t)| \leq$ $\leq \eta(t)$ ove $\eta(t)$ è una funzione fissa integrabile (col suo quadrato in $[a, b]$. Questo implica a sua volta che le funzioni $x_k(t)$ sono equicontinue e persino equiassolutamente continue. D'altra parte $(t, x_k(t)) \in A$ per ogni t e k, ove A è un insieme chiuso e limitato in E_{n+1}. Dunque, nelle ipotesi del corollario esiste sicuramente una sottosuccessione convergente in forza del teorema di Ascoli.

OSSERVAZIONE. Può accadere che non tutte le componenti d_j, $j = 1, \dots, n$, di d compaiono esplicitamente in $f(t, x, d)$, Per fissare le idee supponiamo che f sia una funzione $f(t, x_1, \dots, x_n, d_1, \dots, d_m)$ contenente solo le prime m delle n componenti d_j di d, $0 \leq m \leq n$. I teoremi I e II e le rimanenti considerazioni valgono ancora purchè tutte le disuguaglianze (nelle ipotesi e nelle asserzioni) vengano espresse nei termini del vettore $(d_1, \dots, d_m)$, e in particolare l'espressione $|x'(t) - x_0'(t)|^2$ venga sostituita ovunque con

$$\sum_{j=1}^{m} [x_j'(t) - x_{0j}'(t)]^2.$$

OSSERVAZIONE. La tecnica dei piani d'appoggio usata nei teoremi I e II è la ben nota tecnica usata da Tonelli per teoremi di semicontinuità [9].

4. Teoremi di confronto con curve della classe K.

TEOREMA III. Sia $C_0: x = x_0(t)$, $a_0 \leq t \leq b_0$, una curva della classe K. Sia $\bar{x}_0'(t)$, $a_0 \leq t \leq b_0$, un vettore funzione definito per ogni $a_0 \leq t \leq b_0$. Sia $c(t)$ una funzione scalare continua in $[a_0, b_0]$. Siano $r = r(t, \varepsilon)$ scalare, $b = b(t, \varepsilon)$ vettore, entrambi funzioni di (t, ε) per $a_0 \leq t \leq b_0$, $0 < \varepsilon \leq 1$, e sia z la funzione lineare in d definita per ogni $(t, \varepsilon) \in [a_0, b_0] \times (0, 1]$ da $z = z(t, d, \varepsilon) = r(t, \varepsilon) + b(t, \varepsilon) \cdot d$, $d \in E_n$. Supponiamo che (α) $\bar{x}_0'(t) = x_0'(t)$ quasi dappertutto in $[a_0, b_0]$, e $|\bar{x}_0'(t)| \leq M$ per ogni $a_0 \leq t \leq b_0$, ove M è una costante; (β) $0 < \nu \leq c(t) \leq M_0$ per ogni $a_0 \leq t \leq b_0$ ove $0 < \nu \leq M_0$ sono due costanti; (γ) per ogni $t_0 \in [a_0, b_0]$ esiste un $\delta = \delta(t_0, \varepsilon, C_0) > 0$ tale che per ogni $(t, x) \in A$ ad una distanza $\leq \delta$ da $(t_0, x_0(t_0))$ sia

$$f(t, x, d) \geq z(t_0, d, \varepsilon) + c(t_0) \, |d - \bar{x}_0'(t_0)|^2 \quad \text{per ogni} \quad d \in E_n, \tag{16}$$

$$f(t, x, d) \leq z(t_0, d, \varepsilon) + \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad d \in E_n \quad \text{con} \quad |d - x_0'(t_0)| \leq \delta. \tag{17}$$

Allora, dati due numeri $0 < \varepsilon \leq 1$, $0 < \varphi < 1$, esiste un $\varrho = \varrho(\varepsilon, \varphi, C_0)$ tale che, per ogni curva $C: x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, della classe K appartenente all'intorno (ϱ) di C_0, risulta

$$I[C] > I[C_0] - \varepsilon + \varphi \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} c(t) \, |x'(t) - x_0'(t)|^2 \, dt. \tag{18}$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è divisa nelle parti (a), (b), (c), (d). Anche qui, come per i teoremi I e II, supponiamo che A sia un insieme

---

(9) L. TONELLI, *Sugli integrali del calcolo delle variazioni in forma ordinaria*, Annali Scuola Norm. Sup Pisa, (2) 3, 1934, 401-450, oppure, L. TONELLI, *Opere Scelte*, 3, 192-253.

compatto di $E_1 \times E_n$, e che $f(t, x, d)$ sia una funzione continua di (t, x, d) in $A \times E_n$.

(*a*) Supporremo anzitutto che esista un $\delta_0 > 0$ tale che si abbia $f(t, x, d) \geq 0$ per ogni $d \in E_n$ e per ogni $(t, x) \in A$ ad una distanza $\leq \delta_0$ da $[C_0]$. In altre parole, dimostriamo prima il teorema III in una situazione simile a quella del teorema I. Diciamo A_0 il sottoinsieme compatto di tutti i punti $(t, x) \in A$ ad una distanza $\leq \delta_0$ da $[C_0]$. Indichiamo con μ l'ultimo integrale nella (18). Denotiamo con Z l'insieme compatto di tutti i punti $(t, x, d) \in E_1 \times E_n \times E_n$ con $(t, x) \in A_0$, $|d| \leq M + 1$. Allora f è continua in Z, e quindi limitata e uniformemente continua in Z. Esiste un $M_2 > 0$ tale che $0 \leq f(t, x, d) \leq M_2$ in Z. Di più, dato $\varepsilon_0 = 1$, esiste un $l > 0$ tale che $|f(t, x, d) - f(t_0, x_0, d_0)| \leq 1$ per ogni coppia (t, x, d), (t_0, x_0, d_0) di punti di Z aventi mutua distanza $\leq l$. Possiamo supporre $0 < l \leq 1$. Ora si noti che

$$z = z(t, d, \varepsilon) = r(t, \varepsilon) + b(t, \varepsilon) \cdot d$$

$$= z(t, \overline{x}_0'(t), \varepsilon) + b(t, \varepsilon) \cdot (d - \overline{x}_0'(t)),$$

per ogni $(t, \varepsilon) \in [a_0, b_0] \times (0, 1]$. In forza delle (16) e (17) si ha poi

$$M_2 \geq f(t, x_0(t), \overline{x}_0'(t)) \geq z(t, \overline{x}_0'(t), \varepsilon),$$

$$-M_2 \leq f(t, x_0(t), \overline{x}_0'(t)) \leq z(t, \overline{x}_0'(t), \varepsilon) + \varepsilon,$$

per ogni $(t, \varepsilon) \in [a_0, b_0] \times (0, 1]$. Dunque si ha, successivamente,

$$-M_2 - 1 \leq f(t, x_0(t), \overline{x}_0'(t)) - \varepsilon \leq z(t, \overline{x}_0'(t), \varepsilon) \leq f(t, x_0(t), \overline{x}_0'(t)) \leq M_2,$$

$$|z(t, \overline{x}_0'(t), \varepsilon)| \leq M_2 + 1, \tag{19}$$

per ogni $(t, \varepsilon) \in [a_0, b_0] \times (0, 1]$.

(*b*) Dimostriamo che

$$|b(t, \varepsilon)| \leq 2/l \tag{20}$$

per ogni $(t, \varepsilon) \in [a_0, b_0] \times (0, 1]$. Basta dimostrare questa relazione per ogni t con $b(t, \varepsilon) \neq 0$. Se $b(t, \varepsilon) \neq 0$, si prenda

$$d = \overline{x}_0'(t) + b(t, \varepsilon)\, l / |b(t, \varepsilon)|,$$

onde $| d - \overline{x}_0'(t) | = l \leq 1$, e quindi anche

$$(t, x_0(t), \overline{x}_0'(t)) \in Z, \quad (t, x_0(t), d) \in Z,$$

$$| f(t, x_0(t), d) - f(t, x_0(t), x_0'(t)) | \leq 1. \tag{21}$$

In forza della (16) si ha

$$\begin{aligned} f(t, x_0(t), d) \geq z(t, d, \varepsilon) &= z(t, \overline{x}_0'(t), \varepsilon) + b(t, \varepsilon) \cdot (d - \overline{x}_0'(t)) \\ &= z(t, x_0'(t), \varepsilon) + | b(t, \varepsilon) | \, l. \end{aligned} \tag{22}$$

Infine dalle (17) con $d = \overline{x}_0'(t)$ si ha

$$f(t, x_0(t), x_0'(t)) \leq z(t, \overline{x}_0'(t), \varepsilon) + \varepsilon. \tag{23}$$

Combinando le relazioni (21), (22), (23) otteniamo

$$\begin{aligned} 1 &\geq f(t, x_0(t), d) - f(t, x_0(t), \overline{x}_0'(t)) \\ &\geq z(t, x_0'(t), \varepsilon) + | b(t, \varepsilon) | \, l - f(t, x_0(t), \overline{x}_0'(t)) \\ &\geq -\varepsilon + | b(t, \varepsilon) | \, l, \end{aligned}$$

e finalmente $| b(t, \varepsilon) | \leq (1 + \varepsilon)/l \leq 2/l$, $0 < \varepsilon \leq 1$. La relazione (20) è cosí dimostrata per ogni $a_0 \leq t \leq b_0$. Si noti che combinando (19) e (20) con la definizione $z = r(t, \varepsilon) + b(t, \varepsilon) \cdot d$ della funzione z, otteniamo anche

$$\begin{aligned} r(t, \varepsilon) &= z(t, \overline{x}_0'(t), \varepsilon) - b(t, \varepsilon) \cdot \overline{x}_0'(t) \\ &\leq M_2 + 1 + 2\, l^{-1} M. \end{aligned} \tag{24}$$

(*c*) Dimostriamo che esiste un $l' > 0$ tale che, per ogni curva $C: x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, della classe K, appartenente all'intorno (l') di C_0, risulta

$$| x'(t) | \leq M + 2^{\frac{1}{2}} \nu^{-\frac{1}{2}} [f(t, x(t), x'(t)) + M_2 + 1 + 2\nu^{-1} l^{-2}]^{\frac{1}{2}}, \tag{25}$$

e pertanto $x'(t)$ è a quadrato integrabile in $[a, b]$.

Per ogni $\overline{t} \in [a_0, b_0]$ e preso $\varepsilon_0 = 1$, esiste un $\delta = \delta(t, \varepsilon_0, C_0) > 0$ per cui valgono (16) e (17). Prendiamo un numero ϱ, $0 < \varrho \leq \delta/4$, così piccolo che $x_0(t)$ abbia una oscillazione $< \delta/4$ sul corrispondente intervallo $(\overline{t} - \varrho, \overline{t} + \varrho)$.

Gli intervalli $(\bar{t} - \varrho, \bar{t} + \varrho)$ costituiscono un ricoprimento di $[a_0, b_0]$. Un numero finito di tali intervalli ricoprono $[a_0, b_0]$, diciamo $(t_j - \varrho_j, t_j + \varrho_j)$, $j = 1, \dots, p$. Con opportune riduzioni possiamo ottenere una suddivisione $[\alpha_s, \beta_s]$, $s = 1, \dots, N$, di un intervallo $[a_0', b_0']$ contenente nel suo interno $[a_0, b_0]$ e tale che ogni intervallo $[\alpha_s, \beta_s]$ è parte di un intervallo $(t_j - \varrho_j, t_j + \varrho_j)$. Denoteremo con t_s, δ_s, ϱ_s rispettivamente il punto t_j e i numeri δ_j, ϱ_j relativi ad $[\alpha_s, \beta_s]$. Poniamo

$$l' = 2^{-1} \min [\delta_0, l, \delta_1, \dots, \delta_N, a_0 - a_0', b_0' - b_0].$$

Sia $C: x = x(t)$, $a \le t \le b$, una qualsiasi curva della classe K appartenente all'intorno (l') di C_0. Allora $a_0' < a < b < b_0'$, $|a - a_0| \le l'$, $|b - b_0| \le l'$. Per ogni $s = 1, \dots, N$ e per ogni $\alpha_s \le t \le \beta_s$ si ha ora

$$f(t, x(t), x'(t)) \ge z(t_s, \bar{x}_0'(t_s), \varepsilon) + b(t_s, \varepsilon) \cdot [x'(t) - \bar{x}_0'(t_s)]$$
$$+ c(t_s) \, | x'(t) - \bar{x}_0'(t_s) |^2,$$

e quindi anche

$$f(t, x(t), x'(t)) \ge - M_2 - 1 + b(t_s, \varepsilon) \cdot [x'(t) - \bar{x}_0'(t_s)] \tag{26}$$
$$+ c(t_s) \, | x'(t) - \bar{x}_0'(t_s) |^2.$$

Per ogni $\lambda > 0$ ed α, β reali si ha

$$0 \le (\lambda\alpha + \lambda^{-1}\beta)^2 = \lambda^2\alpha^2 + \lambda^{-2}\beta^2 + 2\alpha\beta$$

e quindi come è noto

$$|\alpha\beta| \le 2^{-1}\lambda^2\alpha^2 + 2^{-1}\lambda^{-2}\beta^2.$$

Analogamente, se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ sono vettori reali, si ha

$$|\alpha \cdot \beta| = |\Sigma_i \alpha_i \beta_i| \le \Sigma_i (2^{-1}\lambda^2\alpha_i^2 + 2^{-1}\lambda^{-2}\beta_i^2)$$
$$\le 2^{-1}\lambda^2 |\alpha|^2 + 2^{-1}\lambda^{-2} |\beta|^2.$$

Pertanto

$$|b(t_s, \varepsilon) \cdot [x'(t) - \bar{x}_0'(t_s)]| \le 2^{-1}\lambda^2 \, |x'(t) - \bar{x}_0'(t_s)|^2 + 2^{-1}\lambda^{-2} \, |b(t_s, \varepsilon)|^2.$$

Infine, in forza della (26) si ha

$$[c(t_s) - 2^{-1}\lambda^2] \, |x'(t) - \bar{x}_0'(t_s)|^2 \le$$
$$\le f(t, x(t), x'(t)) + M_2 + 1 + 2^{-1}\lambda^{-2} \, |b(t_s, \varepsilon)|^2.$$

Essendo $c(t) \geq \nu > 0$, e prendendo λ così che $\lambda^2 = \nu$ risulta $c(t_s) - 2^{-1}\lambda^2 \geq \nu/2$, e infine

$$| x'(t) - \bar{x}_0'(t_s) |^2 \leq 2\nu^{-1} [f(t, x(t), x'(t)) + M_2 + 1 + 2^{-1}\nu^{-1} \ | b(t_s, \varepsilon) |^2].$$

Essendo $| \bar{x}_0'(t) | \leq M$, $| b(t, \varepsilon) | \leq 2l^{-1}$ per ogni t, risulta

$$| x'(t) | \leq M + 2^{\frac{1}{2}} \nu^{-\frac{1}{2}} [f(t, x(t), x'(t)) + M_2 + 1 + 2\nu^{-1} l^{-2}]^{\frac{1}{2}}$$

per ogni $\alpha_s \leq t \leq \beta_s$, e quindi anche per ogni $a \leq t \leq b$. La relazione (25) è così dimostrata.

(*d*) Siano $0 < \varphi < 1$, $0 < \varepsilon \leq 1$ due numeri arbitrari. Sia P il numero

$$P = 8M^2 + 4\nu^{-1}(M_2 + 1) + 6\nu^{-2} l^{-2}. \tag{27}$$

Sia γ il massimo numero reale tale che

$$\gamma \leq (1 - \varphi)(2\varphi)^{-1}, \quad 2\gamma I[C_0] \leq \varepsilon/2,$$

e pertanto $(1 + 2\gamma)^{-1} \geq \varphi$. Sia σ il massimo numero reale tale che

$$\sigma \leq \varepsilon/10, \quad \sigma \leq \gamma/2.$$

Sia η il massimo numero reale tale che

$$\begin{gathered}
M_2 \eta \leq \sigma, \quad [5 + b_0 - a_0 + 5(M_2 + 1 + 4l^{-1}M)]\eta \leq \sigma, \\
4\eta\nu^{-1} \leq \sigma, \quad (b_0 - a_0 + 1)P\eta + 4\eta^2\nu^{-1}M_2 \leq \sigma, \\
2\eta^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{2}} M_0(b_0 - a_0 + 1 + 4M^2) \leq \sigma, \quad 4\eta^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{2}} M_0(b_0 - a_0 + 4M^2)^{\frac{1}{2}} \nu^{-\frac{1}{2}} \leq \sigma, \\
12\eta^{\frac{1}{2}} M_0 M (b_0 - a_0 + 1)^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} \leq \sigma, \quad 24\eta^{\frac{1}{2}} M_0 M \nu^{-\frac{1}{2}} \leq \sigma.
\end{gathered} \tag{28}$$

Ovviamente $\gamma, \sigma, \eta > 0$. La funzione $f(t, x_0(t), x_0'(t))$ è integrabile in $[a_0, b_0]$. Pertanto, esiste un numero $\tau > 0$ tale che per ogni insieme $E \subset [a_0, b_0]$ con mis $E < \tau$ risulta

$$(E)\int f(t, x_0(t), x_0'(t))\, dt < \eta,$$

e possiamo assumere $\tau \leq \eta$. La funzione $c(t)$ è continua in $[a_0, b_0]$. Pertanto esiste un numero $l'' > 0$ tale che la funzione $c(t)$ ha una oscillazione $< \eta$ in ogni intervallo di lunghezza $\leq l''$.

In forza del teorema di Lusin esiste un insieme chiuso $B \subset [a_0, b_0]$ tale che $x_0'(t)$ esiste in B ed è continua in B. Possiamo assumere che ogni $t \in B$ soddisfi la condizione (α) del teorema e che mis $B > b_0 - a_0 - \tau$. Per ogni $\bar{t} \in B$ prendiamo $\delta = \delta(\bar{t}, \eta, C_0) > 0$ e prendiamo un ϱ tale che $0 < \varrho \leq \leq \min[\delta/4, l, l'', \tau/2]$, tale che $|x_0'(t) - x_0'(\bar{t})| < \min[\delta/4, \eta^{\frac{1}{2}}]$ per ogni $t \in B$ con $|t - \bar{t}| \leq \varrho$, e tale che $|x_0(t) - x_0(\bar{t})| < \delta/4$ per ogni $t \in [a_0, b_0]$ con $|t - \bar{t}| \leq \varrho$. Si noti che $\bar{x}_0'(\bar{t}) = x_0'(\bar{t})$.

Gli intervalli $(\bar{t} - \varrho, \bar{t} + \varrho)$ formano un ricoprimento di B. Pertanto, un numero finito di intervalli $(\bar{t} - \varrho, \bar{t} + \varrho)$ ricoprono B. Diciamo I_j, $j = 1, \dots, p$, tali intervalli, e $t_j, \delta_j, \varrho_j, z_j(d) = r_j + b_j \cdot d = r(t_j, \eta) + + b(t_j, \eta) \cdot d$ siano rispettivamente il centro di I_j, i due numeri e la funzione lineare associata a I_j. Sia $R = \max[|r_j|, |b_j|, j = 1, \dots, p]$. Sia $\xi > 0$ un numero abbastanza piccolo affinchè sia $\xi \leq \eta/R$, $\xi \leq \tau$, e inoltre $(H)\int |x_0'(t)|\, dt < \eta/R$ per ogni insieme misurabile $H \subset [a_0, b_0]$ con mis $H < \xi$. Sia G un insieme aperto in $[a_0, b_0]$ tale che $G \supset B$, mis $(G - B) < \xi$. L'insieme aperto G è l'unione numerabile di intervalli aperti senza punti in comune. Dato che B è compatto, un numero finito di questi intervalli aperti già ricopre B. Dunque, possiamo assumere che G sia l'unione finita di intervalli aperti senza punti in comune. Ne consegue che anche gli insiemi $G \cap I_j$, $j = 1, \dots, p$, sono un numero finito di intervalli. Con eventuali riduzioni, possiamo ottenere un gruppo finito di intervalli chiusi ricoprenti B e senza punti interni in comune. Possiamo anche trascurare tutti quelli che non contengono punti di B. Di tutti questi intervalli, in numero finito, diremo $[\alpha_{01}, \beta_{01}]$ quello più vicino ad a_0, $[\alpha_{02}, \beta_{02}]$ quello più vicino a b_0, e $[\alpha_s, \beta_s]$, $s = 1, \dots, N'$, tutti i rimanenti. Essendo $\varrho \leq \tau/2$, sappiamo già che ciascuno di questi intervalli ha lunghezza $\leq \tau$. Siano B_{01}, B_{02}, B_s le intersezioni di B con ciascuno di questi intervalli. Sia $E_s = [\alpha_s, \beta_s] - B_s$, $s = 1, \dots, N'$, e sia $E = E_1 \cup \dots \cup E_{N'}$.

Denotiamo con Σ', $\cup'$ somme o unioni estese a tutti i valori dell'indice $s = 1, \dots, N'$. Si noti che

$$E \subset \cup'[\alpha_s, \beta_s] - B \subset G - B, \quad \text{mis}\, E \leq \text{mis}\,(G - B) < \xi.$$

Si noti che $[a_0, b_0] - \cup'[\alpha_s, \beta_s]$ è un gruppo finito di intervalli di cui uno ha un punto estremo in a_0, e uno ha un punto estremo in b_0, e che

$$[a_0, b_0] - \cup'[\alpha_s, \beta_s] \subset B_{01} \cup B_{02} \cup ([a_0, b_0] - B),$$

$$\text{mis}\,([a_0, b_0] - \cup'[\alpha_s, \beta_s]) \leq \tau + \tau + \tau = 3\tau.$$

Si ha ora, come nella dimostrazione del teorema I,

$$I[C_0] = \int_{a_0}^{b_0} f(t, x_0(t), x_0'(t))\, dt \leq (B) \int f(t, x_0(t), x_0'(t))\, dt + \eta$$

$$= \Sigma' (B_s) \int f(t, x_0(t), x_0'(t))\, dt + (B_{01} \cup B_{02}) \int f(t, x_0(t), x_0'(t))\, dt + \eta$$

$$\leq \Sigma' (B_s) \int [r(t_s, \eta) + b(t_s, \eta) \cdot x_0'(t)]\, dt + (3 + b_0 - a_0)\, \eta$$

$$= \Sigma' \left\{ \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r(t_s, \eta) + b(t_s, \eta) \cdot x_0'(t)]\, dt - (E_s) \int [r(t_s, \eta) + b(t_s, \eta) \cdot x_0'(t)]\, dt \right.$$

$$+ (3 + b_0 - a_0)\, \eta$$

$$(30) \qquad \leq \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r(t_s, \eta) + b(t_s, \eta) \cdot x_0'(t)]\, dt + R\, \Sigma' (E_s) \int (1 + |x_0'(t)|)\, dt$$

$$+ (3 + b_0 - a_0)\, \eta$$

$$\leq \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r(t_s, \eta) + b(t_s, \eta) \cdot x_0'(t)]\, dt + (5 + b_0 - a_0)\, \eta.$$

Consideriamo l'insieme compatto $F = [a_0, b_0] - \cup' (\alpha_s, \beta_s)$. Per ogni $\bar{t} \in F$ prendiamo $\bar{\delta} = \delta(\bar{t}, \eta, C_0) > 0$ e un numero $0 < \bar{\varrho} \leq \min [\bar{\delta}/4, l, l'', \tau/2, \delta/2, 1/2]$. Possiamo prendere $\bar{\varrho}$ in modo che $x_0(t)$ abbia una oscillazione $< \bar{\delta}/4$ nello stesso intervallo. Gli intervalli $(\bar{t} - \bar{\varrho}, \bar{t} + \bar{\varrho})$ formano un ricoprimento di F. Pertanto, un numero finito di questi intervalli ricoprono F, diciamo I_j, $j = p + 1, \dots, q$. Siano t_j, δ_j, ϱ_j, $z_j(d) = r_j + b_j . d = r(t_j, \eta) + b(t_j, \eta) \cdot d$ al solito il centro di I_j, i due numeri e la funzione lineare associati ad I_j. Abbandoneremo ora tutti gli intervalli I_j e quelle parti di questi intervalli che sono completamente contenute in qualche intervallo $[\alpha_s, \beta_s]$, $s = 1, \dots, N'$. Ridurremo poi i rimanenti intervalli così da ottenere un nuovo sistema finito di intervalli $[\alpha_s, \beta_s]$, $s = N' + 1, \dots, N$, senza punti interni in comune e senza punti interni in comune con i precedenti. È evidente che il sistema complessivo $[\alpha_s, \beta_s]$, $s = 1, \dots, N$, forma una suddivisione di un intervallo $[a_0', b_0']$ contenente $[a_0, b_0]$ nel suo interno.

Denoteremo come sopra con t_s, δ_s, ϱ_s, $z_s(d)$ il punto t_j, i due numeri δ_j, ϱ_j e la funzione lineare $z_j(d)$ relativi all'intervallo $[\alpha_s, \beta_s]$, $s = N' + 1, \dots, N$. Denoteremo con Σ'', $\bigcup''$ qualsiasi somma o unione estesa ai valori dell'indice $s = N' + 1, \dots, N$.

Degli intervalli $[\alpha_s, \beta_s]$, $s = N' + 1, \dots, N$, uno contiene a_0 nel suo interno e un altro contiene b_0 nel suo interno, diciamo $\alpha_{s'} < a_0 < \beta_{s'}$, $\alpha_{s''} < b_0 < \beta_{s''}$. Converrà rinumerare tutti gli intervalli $[\alpha_s, \beta_s]$, $s = 1, \dots, N$, così che $[\alpha_{s'}, \beta_{s'}]$ sia ora $[\alpha_1, \beta_1]$, e $[\alpha_{s''}, \beta_{s''}]$ sia ora $[\alpha_N, \beta_N]$, e

$$a_0' = \alpha_1 < a_0 < \beta_1 = \alpha_2 < \dots < \beta_{N-1} = \alpha_N < b_0 < \beta_N = b_0'.$$

Naturalmente Σ', $\bigcup'$, e Σ'', $\bigcup''$ denoteranno ancora somme e unioni relative agli stessi intervalli già indicati avanti, intervalli che ora avranno indici diversi. Si noti che $a_0 - a_0'$, $b_0' - b_0 \leq \min\,[\tau/2, 1/2]$, e pertanto $b_0' - a_0' \leq \leq b_0 - a_0 + \tau$, $b_0' - a_0' \leq b_0 - a_0 + 1$.

Sia

$$\zeta = \min\,[a_0 - \alpha_1, \beta_1 - a_0, b_0 - \alpha_N, \beta_N - b_0, \beta_s - \alpha_s, s = 1, \dots, N],$$

e prendiamo

$$\varrho = 2^{-1} \min\,[\xi, l, l', \delta_s, \varrho_s, s = 1, \dots, N, \zeta, \delta_0, 4^{-1}\, l\, N^{-1} \sigma].$$

Sia $C: x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, una curva qualsiasi di classe K appartenente all'intorno (ϱ) di C_0. Allora $|\, a - a_0 \,| \leq \varrho$, $|\, b - b_0 \,| \leq \varrho$, con $\varrho \leq \xi/2$, e quindi $[a, b]$ contiene ciascun intervallo $[\alpha^s, \beta^s]$, $s = 2, \dots, N-1$, mentre $\alpha_1 < a < \beta_1$, $\alpha_N < b < \beta_N$, $\alpha_1 < a_0 < \beta_1$, $\alpha_N < b_0 < \beta_N$.

Poniamo $a'' = \min\,[a, a_0]$, $b'' = \max\,[b, b_0]$, e riduciamo gli intervalli estremi $[\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_N, \beta_N]$ così che d'ora in poi avremo $\alpha_1 = a''$, $\beta_N = b''$. L'intervallo $[a'', b'']$ è interno all'intervallo $[a', b']$ e quindi $b'' - a'' < < b_0 - a_0 + \tau$, $b'' - a'' < b_0 - a_0 + 1$.

Per ogni $t \in [\alpha_s, \beta_s]$, $s = 1, \dots, N$, si ha

$$|\, x(t) - x_0(t_s) \,| \leq |\, x(t) - x_0(t) \,| + |\, x_0(t) - x_0(t_s) \,| \leq \delta_s/4 + \delta_s/4 = \delta_s/2,$$

con la solita convenzione circa l'estensione di $x(t)$ e $x_0(t)$, e quindi

$$f(t, x(t), x'(t)) \geq r(t_s, \eta) + b(t_s, \eta) \cdot x'(t) + c(t_s)\, |\, x'(t) - \overline{x_0'}(t_s) \,|^2.$$

Si noti che in queste relazioni per $a_0 < a$, $s = 1$, $t < a$, si ha $x(t) = x(a)$, $x'(t) = 0$, e per $a < a_0$, $s = 1$, $t \leq a_0$ si ha $x_0(t) = x_0(a_0)$. Nelle stesse relazioni, per $b < b_0$, $s = N$, $t > b$, si ha $x(t) = x(b)$, $x'(t) = 0$, e per

$b_0 < b$, $s = N$, $t > b_0$ si ha $x_0(t) = x_0(b_0)$. Di più, per $a_0 < a$, $a_0 \leq t \leq a$, scriveremo $f(t, x(t), x'(t))$, ossia $f(t, x(a), 0)$, per $f(a, x(a), 0)$. Con questa convenzione si è certi che $(a, x(a), 0)$ appartiene all'insieme $A_0 \times E_n$, e d'altra parte le solite disuguaglianze (16) e (17) seguitano a valere. Analogamente, per $b < b_0$, $b \leq t \leq b_0$, scriveremo $f(t, x(t), x'(t))$, ossia $f(t, x(b), 0)$, per $f(b, x(b), 0)$. Si noti che

$$(31)\qquad \begin{aligned} &\left| \int_a^{a''} f(t, x(t), x'(t))\, dt \right| + \left| \int_{b''}^{b} f(t, x(t), x'(t))\, dt \right| \\ &\leq M_2 [\,|a - a''| + |b'' - b|\,] \leq M_2 \tau \leq M_2 \eta \leq \sigma. \end{aligned}$$

Con queste convenzioni si ha ora

$$(32)\qquad \begin{aligned} I[C] &= \int_a^b f(t, x(t), x'(t))\, dt \\ &= \int_a^{a''} f(t, x(a), 0)\, dt + \int_{b''}^{b} f(t, x(b), 0)\, dt + \int_{a''}^{b''} f(t, x(t), x'(t))\, dt \\ &= \int_a^{a''} f(t, x(a), 0)\, dt + \int_{b''}^{b} f(t, x(b), 0)\, dt + (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} f(t, x(t), x'(t))\, dt \\ &\geq \int_a^{a''} f(t, x(a), 0)\, dt + \int_{b''}^{b} f(t, x(b), 0)\, dt \\ &\quad + (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} \{[r(t_s, \eta) + b(t_s, \eta) \cdot x'(t)] + c(t_s)\, |x'(t) - \overline{x}_0'(t_s)|^2\}\, dt. \end{aligned}$$

Dobbiamo ora modificare le relazioni (30) e (32) prima di confrontarle. Si noti che

$$S \equiv (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} c(t_s)\, |x'(t) - \overline{x}_0'(t_s)|^2 - (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} c(t)\, |x'(t) - x_0'(t)|^2\, dt$$

$$= (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [c(t_s) - c(t)] \, | x'(t) - x'_0(t) |^2 \, dt$$

$$+ (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} c(t_s) [\, | x'(t) - \overline{x'_0}(t_s) |^2 - | x'(t) - x'_0(t) |^2] \, dt = \Delta_1 + \Delta_2 .$$

Sottraendo e aggiungendo S alla (32) otteniamo la relazione modificata

$$I[C] \geq \int_a^{a''} f(t, x(a), 0) \, dt + \int_{b''}^{b} f(t, x(b), 0) \, dt + \Delta_1 + \Delta_2 +$$

$$+ (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} \{[r(t_s, \eta) + b(t_s, \eta) \cdot x'(t)] + c(t) \, | x'(t) - x'_0(t) |^2\} \, dt. \tag{33}$$

Diremo E^* la chiusura dell'insieme $[a'', b''] - \bigcup' [\alpha_s, \beta_s]$. Dunque E^* è una unione finita di intervalli, e si ha

$$E^* \subset [\alpha_1, \beta_1] \cup [\alpha_N, \beta_N] \cup [(a_0, b_0) - B],$$

$$\text{mis } E^* \leq \tau + \tau + \tau = 3\tau \leq 3\eta.$$

Si noti che

$$S_0 \equiv \Sigma'' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r(t_s, \eta) + b(t_s, \eta) \cdot x'_0(t)] \, dt$$

$$= \int_{\alpha_1}^{a_0} r(t_1, \eta) \, dt + \int_{a_0}^{\beta_1} [r(t_1, \eta) + b(t_1, \eta) \cdot x'_0(t)] \, dt$$

$$+ \int_{b_0}^{\beta_N} r(t_N, \eta) \, dt + \int_{\alpha_N}^{b_0} [r(t_N, \eta) + b(t_N, \eta) \cdot x'_0(t)] \, dt$$

$$+ \sum_{s \neq 1, N}'' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r(t_s, \eta) + b(t_s, \eta) \cdot x'_0(t)] \, dt$$

$$\leq (a_0 - \alpha_1) \mid r(t_1, \eta) \mid + (\beta_N - b) \mid r(t_N, \eta) \mid$$

$$+ [\max \mid r(t_s, \eta) \mid + M \max \mid b(t_s, \eta) \mid] (\text{mis } E^*)$$

$$\leq [(a_0 - \alpha_1) + (\beta_N - b) + (\text{mis } E^*)] (M_2 + 1 + 4l^{-1} M)$$

$$\leq 5\eta (M_2 + 1 + 4l^{-1} M).$$

La relazione (30), aggiungendo e sottraendo S_0 e maggiorando, diventa ora

$$I[C_0] \leq (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r(t_s, \eta) + b(t_s, \eta) \cdot x_0'(t)] \, dt$$
$$+ [5 + b_0 - a_0 + 5(M_2 + 1 + 4l^{-1} M)] \eta,$$

e ricordando la (28), anche

$$I[C_0] \leq (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r(t_s, \eta) + b(t_s, \eta) \cdot x_0'(t)] \, dt + \sigma. \tag{34}$$

Dobbiamo ora valutare Δ_1 e Δ_2. Si ha

$$\mid \Delta_1 \mid \leq (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} \mid c(t_s) - c(t) \mid \mid x'(t) - x_0'(t) \mid^2 dt,$$

ove in ogni integrale si ha $\mid t - t_s \mid \leq l''$ e quindi $\mid c(t_s) - c(t) \mid \leq \eta$. D'altra parte, $\mid x_0'(t) \mid \leq M$ e, dalla formula (25), anche

$$\mid x'(t) - x_0'(t) \mid \leq 2M + 2^{\frac{1}{2}} \nu^{-\frac{1}{2}} [f(t, x(t), x'(t)) + M_2 + 1 + 2\nu^{-1} l^{-2}]^{\frac{1}{2}}$$

per ogni $\alpha_s \leq t \leq \beta_s$. Essendo $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, otteniamo

$$\mid x'(t) - x_0'(t) \mid^2 \leq 8M^2 + 4\nu^{-1} [f(t, x(t), x'(t)) + M_2 + 1 + 2\nu^{-1} l^{-2}]$$
$$\leq P + 4\nu^{-1} f(t, x(t), x'(t)),$$

essendo P definito dalla (27). Infine

$$\mid \Delta_1 \mid \leq \eta (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [P + 4\nu^{-1} f(t, x(t), x'(t))] \, dt$$

$$\leq \eta\,(b_0 - a_0 + 1)\,P + 4\eta\,\nu^{-1}\left|\int_a^b + \int_{a''}^{a} + \int_{b}^{b''}\right| f\,(t,\,x\,(t),\,x'\,(t))\,dt$$

$$\leq \eta\,(b_0 - a_0 + 1)\,P + 4\eta\,\nu^{-1}\int_a^b f\,(t,\,x\,(t),\,x'\,(t))\,dt + 4\eta^2\,\nu^{-1}\,M_2\,.$$

Ricordando la (28) troviamo

$$(35) \qquad |\,\Delta_1\,| \leq \sigma + \sigma\,I\,[C].$$

Per a, b, c numeri reali si ha

$$(a - b)^2 - (a - c)^2 = (b - c)\,(b + c - 2a),$$

$$(a + b + c)^2 \leq 3\,(a^2 + b^2 + c^2).$$

Se ora $a = (a_1\,, \dots\,, a_n)$, $b = (b_1\,, \dots\,, b_n)$, $c = (c_1\,, \dots\,, c_n)$ sono vettori reali si ha

$$\big|\,|\,a - b\,|^2 - |\,a - c\,|^2\,\big| = \big|\,\Sigma_i\,[(a_i - b_i)^2 - (a_i - c_i)^2]\,\big|$$

$$\leq \Sigma_i\,|\,b_i - c_i\,|\,|\,b_i + c_i - 2a_i\,|$$

$$\leq 3^{\frac{1}{2}}\,\Sigma_i\,|\,b_i - c_i\,|\,(b_i^2 + c_i^2 + 4a_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq 3^{\frac{1}{2}}\,[\Sigma_i\,(b_i - c_i)^2]^{\frac{1}{2}}\,[\Sigma_i\,(b_i^2 + c_i^2 + 4a_i^2)]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 3^{\frac{1}{2}}\,|\,b - c\,|\,(\,|\,b\,|^2 + |\,c\,|^2 + 4\,|\,a\,|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq 3^{\frac{1}{2}}\,|\,b - c\,|\,(\,|\,b\,| + |\,c\,| + 2\,|\,a\,|).$$

Essendo $0 \leq c\,(t_s) \leq M_0$ abbiamo

$$|\,\Delta_2\,| \leq (\Sigma' + \Sigma'')\int_{\alpha_s}^{\beta_s} c\,(t_s)\,\big|\,|\,x'\,(t) - \bar{x}_0'\,(t_s)\,|^2 - |\,x'\,(t) - x_0'\,(t)\,|^2\,\big|\,dt$$

$$\leq M_0\,(\Sigma' + \Sigma'')\int_{\alpha_s}^{\beta_s}\big|\,|\,x'(t) - \bar{x}_0'\,(t_s)\,|^2 - |\,x'\,(t) - x_0'\,(t)\,|^2\,\big|\,dt.$$

Applicando la formula precedente con $a = x'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$, $b = \overline{x}_0'(t_s) = (\overline{x}_{01}'(t), \dots, \overline{x}_{0n}'(t))$, $c = x_0'(t) = (x_{01}'(t), \dots, x_{0n}'(t))$, otteniamo

$$|\Delta_2| \leq 3^{\frac{1}{2}} M_0 (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} | x_0'(t) - \overline{x}_0'(t_s) | \, [\, | \overline{x}_0'(t_s) | + | x_0'(t) | + 2 \, | x'(t) | \,] \, dt,$$

ove $|\overline{x}_0'(t_s)|$, $|x_0'(t)| \leq M$. Pertanto

$$(36) \quad |\Delta_2| \leq 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} M_0 (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} | x_0'(t) - \overline{x}_0'(t_s) | \, (M + | x'(t) |) \, dt = \Delta_2' + \Delta_2'' ,$$

indicando con Δ_2' e Δ_2'' i contributi relativi alle somme Σ' e Σ''.

Si ha ora

$$\Delta_2' = 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} M_0 \, \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} | x_0'(t) - \overline{x}_0'(t_s) | \, (M + | x'(t) |) \, dt$$

$$(37) \qquad \leq 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} M_0 \, \Sigma' \left[\int_{\alpha_s}^{\beta_s} | x_0'(t) - \overline{x}_0'(t_s) |^2 \, dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\alpha_s}^{\beta_s} (M + | x'(t) |)^2 \, dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} M_0 \left[\Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} | x_0'(t) - \overline{x}_0'(t_s) |^2 \, dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} (M + | x'(t) |)^2 \, dt \right]^{\frac{1}{2}} .$$

La prima parentesi quadra è

$$= \Sigma' (B_s + E_s) \int | x_0'(t) - \overline{x}_0'(t_s) |^2 \, dt$$

$$\leq \eta \, \Sigma' (B_s) \int dt + 4M^2 \, \Sigma' (E_s) \int dt$$

$$\leq \eta \operatorname{mis} B + 4M^2 \operatorname{mis} E < \eta (b_0 - a_0) + 4M^2 \tau$$

$$\leq (b_0 - a_0 + 4M^2) \, \eta .$$

La seconda parentesi quadra è

$$= \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} (M + |x'(t)|)^2 \, dt < \int_a^b (M + |x'(t)|)^2 \, dt$$

$$\leq \int_a^b (8M^2 + 4\nu^{-1}[f(t, x(t), x'(t)) + M_2 + 1 + 2\nu^{-1} l^{-2}]) \, dt$$

$$= \int_a^b (P + 4\nu^{-1} f(t, x(t), x'(t))) \, dt$$

$$= (b - a) P + 4\nu^{-1} I[C].$$

Pertanto, la (37) diventa

$$|\Delta_2'| \leq 2\eta^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{2}} M_0 (b_0 - a_0 + 4M^2)^{\frac{1}{2}} [(b - a) P + 4\nu^{-1} I[C]]^{\frac{1}{2}}.$$

Mediante la relazione $(a + b)^{\frac{1}{2}} \leq a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$ per ogni $a, b \geq 0$ si ha ora

$$|\Delta_2'| \leq 2\eta^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{2}} M_0 (b_0 - a_0 + 4M^2)^{\frac{1}{2}} [(b - a)^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} + 2\nu^{-\frac{1}{2}} \{I[C]\}^{\frac{1}{2}}]$$

$$\leq 2\eta^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{2}} M_0 (b_0 - a_0 + 1 + 4M^2) P^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ 4\eta^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{2}} M_0 (b_0 - a_0 + 4M^2)^{\frac{1}{2}} \nu^{-\frac{1}{2}} \{I[C]\}^{\frac{1}{2}},$$

e ricordando la (28), anche

$$|\Delta_2'| \leq \sigma + \sigma \{I[C]\}^{\frac{1}{2}}. \tag{38}$$

Gli intervalli $[\alpha_s, \beta_s]$ relativi alla somma Σ'' sono tutti contenuti nell'insieme E^* con mis $E^* < 3\tau \leq 3\eta$. Pertanto, si ha

$$|\Delta_2''| \leq 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} M_0 \Sigma'' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} |x_0'(t) - \bar{x}_0'(t_s)| (M + |x'(t)|) \, dt$$

$$\leq 4 \cdot 3^{\frac{1}{2}} M_0 M \cdot (E^*) \int (M + |x'(t)|)\, dt$$

$$\leq 4 \cdot 3^{\frac{1}{2}} M_0 M \left[(E^*) \int dt\right]^{\frac{1}{2}} \left[(E^*) \int (M + |x'(t)|)^2\, dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq 4 \cdot 3^{\frac{1}{2}} M_0 M (3\eta)^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b (M + |x'(t)|)^2\, dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq 12\, M_0\, M \eta^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b (8M^2 + 4\nu^{-1}[f(t, x(t), x'(t)) + M_2 + 1 + 2\nu^{-1} l^{-2}])\, dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 12\, \eta^{\frac{1}{2}} M_0\, M \left[\int_a^b (P + 4\nu^{-1} f(t, x(t), x'(t)))\, dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq 12 \eta^{\frac{1}{2}} M_0\, M (b_0 - a_0 + 1)^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} + 24\, \eta^{\frac{1}{2}} M_0\, M \nu^{-\frac{1}{2}} \{I[C]\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ricordando la (28) si ha ora

$$|\Delta_2''| \leq \sigma + \sigma \{I[C]\}^{\frac{1}{2}}. \tag{39}$$

La relazione (33), facendo uso delle (31), (35), (36), (38), (39), diventa

$$I[C] \geq (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r(t_s, \eta) + b(t_s, \eta) \cdot x'(t)]\, dt$$

$$+ (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} c(t)\, |x'(t) - x_0'(t)|^2\, dt$$

$$- 4\sigma - \sigma I[C] - 2\sigma \{I[C]\}^{\frac{1}{2}},$$

ove ora il secondo termine a secondo membro è esattamente μ. Confrontando con la (34) si trova

$$I[C] - I[C_0] \geq \mu + (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} b(t_s, \eta) \cdot [x'(t) - x_0'(t)]\, dt$$

$$- 5\sigma - \sigma I[C] - 2\sigma \{I[C]\}^{\frac{1}{2}},$$

ove il secondo termine a secondo membro è uguale a

$$(\Sigma' + \Sigma'')\, b(t_s, \eta) \cdot [x(\beta_s) - x_0(\beta_s) - x(\alpha_s) + x_0(\alpha_s)],$$

e quindi, in valore assoluto,

$$\leq (\Sigma' + \Sigma'')(2l^{-1})(2\varrho) = 4l^{-1} N\varrho \leq \sigma.$$

Dunque, si ha

$$I[C] - I[C_0] \geq \mu - 6\sigma - \sigma I[C] - 2\sigma \{I[C]\}^{\frac{1}{2}},$$

ossia

$$(1 + \sigma) I[C] + 2\sigma \{I[C]\}^{\frac{1}{2}} - I[C_0] \geq \mu - 6\sigma.$$

Se $0 \leq I[C] \leq 1$, allora si ha

$$I[C] - I[C_0] =$$

$$= \{(1 + \sigma) I[C] + 2\sigma \{I[C]\}^{\frac{1}{2}} - I[C_0]\} - \{2\sigma \{I[C]\}^{\frac{1}{2}} + \sigma I[C]\}$$

$$\geq \mu - 6\sigma - 2\sigma - \sigma = \mu - 9\sigma > \varphi\mu - \varepsilon.$$

Se $I[C] \geq 1$, allora si ha

$$I[C] - I[C_0] = (1 + 2\gamma)^{-1} \{(1 + 2\gamma) I[C] - (1 + 2\gamma) I[C_0]\}$$

$$= (1 + 2\gamma)^{-1} \{(1 + \gamma) I[C] + \gamma \{I[C]\}^{\frac{1}{2}} \{I[C]\}^{\frac{1}{2}} - I[C_0] - 2\gamma I[C_0]\}$$

$$\geq (1 + 2\gamma)^{-1} \{(1 + \gamma) I[C] + \gamma \{I[C]\}^{\frac{1}{2}} - I[C_0] - 2\gamma I[C_0]\}.$$

Essendo $\gamma \geq 2\sigma > \sigma$, $2\gamma I[C_0] \leq \varepsilon/2$, risulta

$$I[C] - I[C_0] \geq (1 + 2\gamma)^{-1} \{(1 + \sigma) I[C] + 2\sigma \{I[C]\}^{\frac{1}{2}} - I[C_0] - 2\gamma I[C_0]\}$$

$$\geq (1 + 2\gamma)^{-1} (\mu - 6\sigma - \varepsilon/2),$$

ed essendo $1 > (1 + 2\gamma)^{-1} \geq \varphi$, si ha infine

$$I[C] - I[C_0] \geq \varphi\mu - 6\sigma - \varepsilon/2 > \varphi\mu - \varepsilon/2 - \varepsilon/2 = \varphi\mu - \varepsilon.$$

Pertanto, in ogni caso, abbiamo

$$I[C] > I[C_0] + \varphi\mu - \varepsilon,$$

per ogni curva della classe K appartenente all'intorno (ϱ) di C_0. Il teorema III è con ciò dimostrato nell'ipotesi che sia $f(t, x, d) \geq 0$ per ogni $d \in E_n$ e per ogni $(t, x) \in A$ di un intorno di $[C_0]$. La dimostrazione, nel caso generale, può ora farsi come per il teorema II. Il teorema III è così completamente dimostrato.

§ 5. Discussione dei risultati.

La condizione $|x'(t)|, |x_0'(t)| \leq \eta(t)$ dei teoremi I e II, ove $\eta(t)$ è una funzione fissa a quadrato integrabile, è certo restrittiva. Una condizione analoga (cioè $|x'(t)|, |x_0'(t)| \leq N$, N un numero fisso) si trovava già nell'iniziale teorema di Lindeberg e fu eliminata dal Tonelli nel dimostrare i teoremi A e B che abbiamo riportato nella § 2. Tuttavia, l'enunciato dei teoremi I e II cade certamente in difetto se si sopprime la condizione $|x'(t)|$, $|x_0'(t)| \leq \eta(t)$. Ciò è dimostrato dagli esempi 1 e 2 seguenti. Gli esempi, 2, 3, 4 mostrano poi che lo stesso fenomeno può accadere persino con $c(t) \equiv 1$. L'esempio 3 mostra altresì che, senza alcuna ipotesi, $x_0'(t)$ non è necessariamente a quadrato integrabile, e l'esempio 4 mostra lo stesso fenomeno in modo ancora più semplice quando $c(t) \equiv 1$, $x_0'(t)$ è a quadrato integrabile ma non limitato, e $x'(t)$ è anche a quadrato integrabile ma non inferiore a nessuna funzione fissa a quadrato integrabile. Gli esempi 3, 4 mostrano anche che le conclusioni del teorema III possono cadere in difetto se non si assume che $x_0'(t)$ è limitato.

Esempio 1. Sia $n = 1$ e consideriamo l'integrale $I[C] = \int_0^1 |x - t|\, x'^2\, dt$. Per $x_0(t) \equiv 0$, $0 \leq t \leq 1$, si ha $I[x_0] = 0$. Prendiamo ora $m = 7/6$, e

$x_k(t) = t + k^m(t - (i-1)/k^3)$ se $(i-1)/k^3 \leq t \leq (i-1)k^3 + 1/2k^3$, $i = 1, \dots, k^2$,

$x_k(t) = t + k^m(i/k^3 - t)$ se $(i-1)/k^3 + 1/2k^3 \leq t \leq i/k^3$, $i = 1, \dots, k^2$,

$x_k(t) = 1/k$ se $1/k \leq t \leq 1$,

ove $k = 2, 3, \ldots$. Dunque $x_k'(t) = 1 + k^m$, $1 - k^m$, 0, secondochè t è in ciascuno degli intervalli indicati sopra. D'altra parte, $0 \leq x_k(t) - t \leq k^m/2k^3 = 2^{-1} k^{-3+m} = 2^{-1} k^{-11/6}$ per ogni $0 \leq t \leq 1/k$, e quindi $x_k(t) \longrightarrow x_0(t)$ uniformemente in $[0, 1]$ quando $k \longrightarrow \infty$. Essendo poi $k^m + 1 \leq 2k^m$ si ha

$$I[x_k] = \int_0^1 (x_k(t) - t)\, x_k'^2(t)\, dt,$$

$$0 \leq I[x_k] \leq 2^{-1} k^{-3+m} k^{-1} (1 + k^m)^2 \leq 2^{-1} k^{-4+m} \cdot 4k^{2m} = 2k^{3m-4} = 2k^{-1/6},$$

e pertanto $I[x_k] \longrightarrow 0$ quando $k \longrightarrow \infty$. Si noti che $f(t, x, d) = | x - t |\, d^2$, $f(t, 0, d) = td^2$ e si può prendere $c(t) = t$. Essendo ora

$$\mu_k = \int_0^1 c(t)\, [x_k'(t) - x_0'(t)]^2\, dt = \int_0^{1/k} t\, (1 \pm k^m)^2\, dt,$$

e notando che $k \geq 2$, $m \geq 1$, $k^m \geq 2$, onde $k^m/2 \geq 1$, $k^m - 1 \geq k^m/2$, si ha

$$\mu_k > 2^{-2} k^{2m} (2^{-1} k^{-2}) = 2^{-2-1} k^{2m-2} = 2^{-3} k^{1/3},$$

e quindi $\mu_k \longrightarrow +\infty$ quando $k \longrightarrow \infty$. Dunque $\mu_k \longrightarrow \infty$, $I[x_k] \longrightarrow 0$, $I[x_0] = 0$, e la relazione (3) non vale. In questo esempio il teorema I non si applica perchè $| x'(t) |$ non si mantiene inferiore ad alcuna funzione fissa a quadrato integrabile. Il teorema III non si applica perchè $c(t)$ è zero in un punto. Anche le conclusioni del teorema III non valgono in questo esempio.

ESEMPIO 2. Sia $n = 1$ e consideriamo l'integrale $I[C] = \int_0^{1/\pi} (1 + x't \operatorname{sen}(1/t) + x'^2)\, dt$, ove si sostituisce zero a $t \operatorname{sen}(1/t)$ per $t = 0$. Essendo $0 \leq t \leq 1/\pi$, risulta anche $| t \operatorname{sen}(1/t) | \leq 1/\pi$. Finalmente, se notiamo che $u^2 + au \geq -a^2/4$ per ogni u reale, risulta

$$f(t, d) = 1 + dt \operatorname{sen}(1/t) + d^2 \geq 1 - t^2 \operatorname{sen}^2(1/t)/4 \geq 1 - (4\pi^2)^{-1} > 0.$$

Dunque $f(t, d) > 0$ per ogni $0 \leq t \leq 1/\pi$ e per ogni d. Prenderemo $x_0(t) \equiv 0$, $0 \leq t < 1/\pi$, onde $I[x_0] = \pi^{-1}$. Prendiamo ora

$$x_k(t) = 0 \text{ se } 0 \leq t \leq (h_k + 1/2)^{-1} \pi^{-1},$$

$$x_k(t) = -k^{-1} \cos(1/t) \text{ se } (h_k + 1/2)^{-1} \pi^{-1} \leq t \leq \pi^{-1},$$

ove h_k denota il più piccolo intero tale che $2^{-1}+3^{-1}+\ldots+h_k^{-1}>4k^2$, e $k=2,3,\ldots$. Ovviamente $x_k(t)\to x_0(t)$ uniformemente in $[0,1/\pi]$. Si ha poi $x_k'(t)=0$, oppure $x_k'(t)=-k^{-1}t^{-2}\operatorname{sen}(1/t)$, secondochè t è in uno o l'altro degli intervalli indicati sopra, e pertanto

$$I[x_k]-\int_0^1 x_k'^2(t)\,dt-\pi^{-1}=\int_0^{1/\pi} t\operatorname{sen}(1/t)\,x_k'(t)\,dt=$$

$$=-k^{-1}\int_{(h_k+1/2)^{-1}\pi^{-1}}^{\pi^{-1}} t^{-1}\operatorname{sen}^2(1/t)\,dt.$$

Essendo $\operatorname{sen}^2(1/t)\geq 1/2$ per ogni $1/t$ compreso tra $(h+1/4)\pi$ e $(h+3/4)\pi$, $h=1,2,\ldots,h_k-1$, risulta

$$I[x_k]-\int_0^1 x_k'^2\,dt-1<-(2k)^{-1}\sum_{h=1}^{h_k-1}(h+1/4)\left[(h+1/4)^{-1}-(h+3/4)^{-1}\right]$$

$$<-(4k)^{-1}\sum_{h=1}^{h_k}(h+3/4)^{-1}<-(4k)^{-1}\sum_{h=1}^{h_k-1}(h+1)^{-1}<-(4k)^{-1}(4k^2)=-k.$$

In altre parole, abbiamo

$$I[x_k]-\pi^{-1}\leq\int_0^1 x_k'^2\,dt-k,\qquad k=2,3,\ldots.$$

Essendo $f_{x'x'}=2$ possiamo prendere $c(t)=1$, $0<t\leq 1/\pi$, e pertanto l'ultima relazione può essere scritta nella forma

$$I[x_k]-I[x_0]\leq -k+\int_0^1 c(t)\left[x_k'(t)-x_0'(t)\right]^2 dt.$$

È facile vedere che entrambi i membri di questa disuguaglianza tendono a $+\infty$ quando $k\to\infty$. La relazione (3) non vale. In questo esempio $x_k'(t)$ non si mantiene minore di alcuna funzione fissa a quadrato integrabile, e $c(t)$ è una costante.

ESEMPIO 3. Sia $n = 1$ e consideriamo l'integrale $I[C] = \int_0^1 f dt$ con $f = f(t, d)$ definita da

$$f(t, d) = 0 \text{ se } t = 0, \text{ oppure se } 0 < t \leq 1, \ 0 \leq d \leq 2^{-1} t^{-\frac{1}{2}},$$

$$f(t, d) = d\,(d - 2^{-1} t^{-\frac{1}{2}}) \text{ se } 0 \leq t \leq 1, d \leq 0, \text{ oppure se } 0 < t \leq 1, d \geq 2^{-1} t^{-\frac{1}{2}}.$$

Sia poi $x_0(t) = t^{\frac{1}{2}}$, $0 \leq t \leq 1$. Allora $x_0'(t) = 2^{-1} t^{-\frac{1}{2}}$ per ogni $0 < t \leq 1$, e si ha $I[x_0] = 0$. Si noti che $f(t, d)$ è una funzione continua di (t, d) per $0 \leq t \leq 1$, $-\infty < d < +\infty$. Anche si ha sempre $f \geq 0$, e per ogni $0 < t \leq 1$,

$$f(t, d) \geq 2^{-1} t^{-\frac{1}{2}} (d - 2^{-1} t^{-\frac{1}{2}}) + (d - 2^{-1} t^{-\frac{1}{2}})^2,$$

ossia

$$f(t, d) - f(t, x_0'(t)) \geq 2^{-1} t^{-\frac{1}{2}} (d - x_0'(t)) + (d - x_0'(t))^2,$$

e quindi possiamo prendere $c(t) = 1$, $0 < t \leq 1$. Definiamo ora $x_k(t)$, $0 \leq t \leq 1$, prendendo $x_k(t) = t^{\frac{1}{2}}$ se $k^{-1} \leq t \leq 1$, $x_k(t) = k^{-\frac{1}{2}}$ se $0 \leq t \leq k^{-1}$, e ove $k = 2, 3, \ldots$. Ovviamente $x_k(t) \to x_0(t)$ uniformemente in $[0, 1]$ quando $k \to \infty$, e si ha $x_k'(t) = x_0'(t)$ se $k^{-1} \leq t \leq 1$, $x_k'(t) = 0$ se $0 \leq t < k^{-1}$, $I[x_k] = 0$ per ogni $k = 2, 3, \ldots$. D'altra parte

$$\mu_k = \int_0^1 c(t)\, |x_k'(t) - x_0'(t)|^2\, dt = \int_0^{k^{-1}} 2\,(0 - 2^{-1} t^{-\frac{1}{2}})^2\, dt = +\infty.$$

Si vede dunque che la relazione (3) non vale, che $x_0'(t)$ non è a quadrato integrabile, che $x_k'(t)$ non si mantiene inferiore ad una funzione fissa a quadrato integrabile, mentre $c(t) \equiv 1$.

ESEMPIO 4. Sia $n = 1$ e consideriamo l'integrale $I[C] = \int_0^1 f\, dt$ con $f(t, d)$ definita da

$$f(t, d) = 0 \text{ se } t = 0, \text{ oppure se } 0 < t \leq 1, -2^{-1} t^{-\frac{1}{2}} \leq d \leq 2 \cdot 3^{-1} d^{-1/3},$$

$$f(t, d) = (d + 2^{-1} t^{-\frac{1}{2}})(d - 2 \cdot 3^{-1} d^{-1/3}) \text{ se } 0 < t \leq 1 \text{ e se } d \leq -2^{-1} t^{-\frac{1}{2}},$$

oppure

$$d \geq 2 \cdot 3^{-1} t^{-1/3}.$$

Assumiamo $x_0(t) = t^{2/3}$, $0 \leq t \leq 1$, e definiamo $x_k(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $k = 2, 3, \dots$, prendendo $x_k(t) = t^{2/3}$ se $k^{-1} \leq t \leq 1$, $x_k(t) = -t^{\frac{1}{2}} + k^{-\frac{1}{2}} + k^{-2/3}$ se $k^{-2} \leq t \leq k^{-1}$, $x_k(t) = -k^{-1} + k^{-\frac{1}{2}} + k^{-2/3}$ se $0 \leq t \leq k^{-2}$. Ovviamente $x_k(t) \to x_0(t)$ uniformemente in $[0, 1]$ quando $k \to \infty$. Inoltre $I[x_k] = I[x_0] = 0$, $k = 2, 3, \dots$. Per ogni $0 < t \leq 1$ si ha ora

$$f(t, d) \geq (2 \cdot 3^{-1} t^{-1/3} + 2^{-1} t^{-\frac{1}{2}})(d - 2 \cdot 3^{-1} t^{-2/3}) + (d - 2 \cdot 3^{-1} t^{-1/3})^2,$$

ossia

$$f(t, d) - f(t, x_0'(t)) \geq (2 \cdot 3^{-1} t^{-1/3} + 2^{-1} t^{-\frac{1}{2}})(d - x_0'(t)) + (d - x_0'(t))^2,$$

e perciò possiamo prendere $c(t) = 1$, $0 < t \leq 1$. Finalmente, si ha

$$\mu_k = \int_0^1 c(t) [x_k'(t) - x_0'(t)]^2 \, dt$$

$$= \int_0^{k^{-2}} 2 (0 - 2 \cdot 3^{-1} t^{-1/3})^2 \, dt + \int_{k^{-2}}^{k^{-1}} 2 (-2^{-1} t^{-\frac{1}{2}} - 2 \cdot 3^{-1} t^{-1/3})^2 \, dt,$$

e ora $\mu_k \to +\infty$ quando $k \to \infty$. Si vede che la relazione (3) non vale nonostante che tutte le funzioni $x_0'(t)$, $x_k'(t)$ siano a quadrato integrabile mentre $c(t) = 1$, $0 < t \leq 1$. Di nuovo, le funzioni $|x_k'(t)|$ non si mantengono minori di alcuna funzione fissa a quadrato integrabile. Si noti che neppure l'asserzione del teorema III vale nella presente situazione. Qui la funzione $x_0'(t)$ non si mantiene inferiore ad alcun numero fisso.

Ann Arbor, Gennaio 1964