Sandro Faedo

Semicontinuità e quasi-regolarità per gli integrali di Fubini-Tonelli

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 18, nº 3 (1964), p. 361-383

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1964_3_18_3_361_0>

SEMICONTINUITÀ E QUASI-REGOLARITÀ PER GLI INTEGRALI DI FUBINI-TONELLI

di SANDRO FAEDO (Pisa)

Introduzione.

Nel mio primo lavoro [1] dedicato alla teoria degli integrali, che poi ho chiamato di FUBINI-TONELLI,

$$I(y_1, y_2) = \int_a^b \int_c^d f[x, z, y_1(x), y_2(z); y_1'(x), y_2'(z)]\, dx\, dz$$

ho dimostrato che condizione necessaria per la semicontinuità inferiore è che sia

$$f_{y_1' y_1'} \geq 0, \qquad f_{y_2' y_2'} \geq 0. \tag{1}$$

Successivamente E. MAGENES [2] e L. LOMBARDI [3] hanno dato delle condizioni sufficienti per la semicontinuità; fra queste e le (1) esiste ancora una notevole distanza, che in una sistemazione soddisfacente della teoria deve essere ridotta. Nelle condizioni sufficienti e nella definizione di integrale quasi-regolare positivo che ne consegue di E. MAGENES, si fa l'ipotesi che sussista, tra l'altro, per ogni punto P di coordinate (x, z, y_1, y_2), la disugua-

---

Pervenuto alla Redazione il 26 Marzo 1964.

(1) S. FAEDO: « *Condizioni necessarie per la semicontinuità di un nuovo tipo di funzionali* », Annali di Matematica, XXIII, 1944 pp. 69-121; « *Sulle condizioni di Legendre e Weierstrass per gli integrali di Fubini-Tonelli* », Annali Scuola Normale Superiore Pisa, S. II, Vol. XV, pp. 127-135.

(2) E. MAGENES: « *Intorno agli integrali di Fubini-Tonelli, mem. I* », Annali Scuola Normale Superiore Pisa, S. III, Vol. II (1948), pp. 1-38.

(3) L. LOMBARDI: « *Sulla semicontinuità degli integrali di Fubini-Tonelli* », Annali Scuola Normale Superiore Pisa, S. III, Vol. XII (1958) pp. 129-153).

glianza

$$f(P, y_1', y_2') \geq A(P) + B(P)y_1' + C(P)y_2' + D(P)y_1' y_2'; \tag{2}$$

viene cioè supposto che la figurativa stia tutta al di sopra di un assegnato paraboloide. Nelle corrispondenti condizioni date successivamente da L. LOMBARDI è ammesso addirittura che per ogni punto (P, y_1', y_2') esista un paraboloide che sta tutto al di sotto della figurativa e che nel punto (P, y_1', y_2') è ad essa tangente.

Mentre per gli integrali curvilinei e superficiali classici ciò corrisponde al fatto che la figurativa è in ogni punto al di sopra della tangente e del piano tangente, nel caso degli integrali di FUBINI-TONELLI tali paraboloidi non sono univocamente determinati e non si conosce quando essi esistano o no.

La esigenza di una condizione come la (2) è stata giustificata da E. MAGENES non solo per l'analogia con gli integrali classici del calcolo delle variazioni; ma anche perchè un suo ingegnoso esempio ([4]) indicava che le condizioni (1) da sole non erano sufficienti ad assicurare la semicontinuità inferiore di $I(y_1, y_2)$. Tale esempio ha inoltre indotto E. MAGENES a ricercare una ulteriore condizione necessaria. Egli infatti ha potuto dimostrare ([5]) che, nell'ipotesi che $f(P, y_1', y_2')$ sia continua rispetto a P, uniformemente rispetto a $y_1' y_2'$, allora (oltre alle (1)) è necessario per la semicontinuità inferiore che esista una funzione $L(P)$ per cui si abbia

$$\frac{f(P, y_1', y_2')}{\sqrt{1 + y_1'^2}\sqrt{1 + y_2'^2}} > L(P), \tag{3}$$

qualunque siano y_1' e y_2'. Tale condizione dà una disuguaglianza del tipo della (2).

Essendomi proposto di ridurre la distanza fra le condizioni necessarie e quelle sufficienti per la semicontinuità, ho ritenuto che il primo passo da compiere fosse quello di chiarire la validità della condizione (3), che avrebbe dovuto valere indipendentemente dall'ipotesi di continuità uniforme fatta.

Poichè la dimostrazione di E. MAGENES appariva strettamente legata a tale ipotesi, pensai di giungere al risultato per altre vie; senonchè queste nuove vie mi portarono a formulare la congettura che le (1) fossero *in sostanza* anche sufficienti per la semicontinuità e che la (3) non dovesse essere necessaria.

([4]) Loc. cit. in ([2]) pagg. 5-7.

([5]) E. MAGENES: « *Un'osservazione sulle condizioni necessarie per la semicontinuità per gli integrali di Fubini-Tonelli* », Rend. Seminario Mat. Università Padova, (1950) pp. 44-53.

Tanto l'esempio di MAGENES che la dimostrazione della necessità della (3) sono fondati sul fatto che, se la (3) non è verificata, manca la semicontinuità su una (y_1, y_2) che si riduce a un punto per cui cioè le $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono definite su intervalli-limite, che si riducono ciascuno a un punto.

Un ulteriore (e analiticamente più semplice) esempio (n. 3) mi ha confermato questo fatto; ciò mi ha indotto a pensare che la contraddizione fra la mia congettura e la (3) consistesse in ciò: che la (3) fosse necessaria per la semicontinuità sulle (y_1, y_2) riducentisi a punti e non lo fosse invece sulle (y_1, y_2) per cui ciascuna delle funzioni componenti è definita su un effettivo intervallo. E infatti potei dimostrare (n. 4) che, nell'esempio da me dato, la semicontinuità inferiore (nell'insieme delle (y_1, y_2) con componenti soltanto assolutamente continue nei rispettivi intervalli) ricompariva su ogni $(\overline{y}_1, \overline{y}_2)$ con $\overline{y}_1$ e $\overline{y}_2$ definite su *intervalli effettivi* e $\overline{y}_1$ e $\overline{y}_2$ sufficientemente regolari.

La dimostrazione di tale fatto è piuttosto complessa e si stacca nettamente dalle dimostrazioni classiche di TONELLI; infatti non si può far uso della disuguaglianza che si ricava dalla formula di TAYLOR, trascurando il complesso dei termini del secondo ordine, in quanto questi non costituiscono più una forma quadratica definita (6).

Si viene così a mettere in luce un ulteriore fatto *singolare,* che distingue gli integrali di FUBINI-TONELLI da quelli, semplici o multipli, ordinari del Calcolo delle Variazioni; infatti, contrariamente a quello che accade per questi ultimi integrali, negli integrali di FUBINI-TONELLI le condizioni sufficienti per la semicontinuità su curve effettive (non riducentisi a punti) sono diverse da quelle valide anche per curve che si riducono a punti.

L'impossibilità di utilizzare la formula di TAYLOR, e la mia congettura che le (1) fossero anche sufficienti, mi portarono alla convinzione che alla disuguaglianza ricavata dalla formula di TAYLOR fosse da sostituire quella, implicita nelle (1), che esprime che la f è positivamente convessa come funzione di y_1' e y_2' separatamente e cioè che sia per ogni numero positivo a_1, a_2, b_1, b_2

$$(4) \quad a_1 a_2 f(P, y_1', y_2') + a_2 b_1 f(P, \overline{y}_1', y_2') + a_1 b_2 f(P, y_1', \overline{y}_2') + b_1 b_2 f(P, \overline{y}_1', \overline{y}_2') \geq$$

$$\geq (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) f\left(P, \frac{a_1 y_1' + b_1 \overline{y}_1'}{a_1 + b_1}, \frac{a_2 y_2' + b_2 \overline{y}_2'}{a_2 + b_2}\right).$$

Qualora la $f(P, y_1', y_2')$ possieda le derivate $f_{y_1' y_1'}$ e $f_{y_2' y_2'}$ la (4) equivale alle (1).

---

(6) S. FAEDO, loc. cit. in (1), pag. 81-82.

Poichè ciò portava a una profonda modifica della struttura della teoria, si imponeva una revisione completa della sua impostazione, revisione che mi ha portato a dubitare che l'integrale di LEBESGUE fosse lo strumento più adatto per gli integrali di FUBINI-TONELLI e a ritenere che lo fosse invece l'integrale di WEIERSTRASS.

E infatti mentre con l'uso dell'integrale di LEBESGUE la dimostrazione della semicontinuità nell'esempio considerato nel n. 3 è assai complessa, con l'integrale di WEIERSTRASS ho potuto ottenere una dimostrazione più naturale e diretta in un caso assai più generale (n. 8). Più precisamente nel caso considerato da E. MAGENES per stabilire la (3), la sola disuguaglianza (4) è sufficiente ad assicurare la semicontinuità sulle (y_1, y_2) che siano definite su *intervalli.*

Ciò porta a dare una definizione di integrale quasi regolare positivo fondata solo sulla (4) e non sull'esistenza di paraboloidi limitanti la figurativa, come nella (2).

Ho avuto occasione di annunciare i risultati del presente lavoro in una relazione sulla teoria degli integrali di FUBINI-TONELLI, che ho tenuto nel recente simposio Lagrangiano organizzato dall'Accademia delle Scienze di Torino (7).

In tale relazione ho annunciato ulteriori risultati e delineate le linee della teoria degli integrali di FUBINI-TONELLI in forma parametrica (nel senso di WEIERSTRASS) che svilupperò in successivi lavori.

Generalità.

1. **Definizioni.** Diremo *campo* A_1 [*campo* A_2] un insieme chiuso di punti del piano (x, y_1) $[(z, y_2)]$ e *campo* A l'insieme dei punti dello spazio a 4 dimensioni $P \equiv (x, z, y_1, y_2)$ prodotto di A_1 ed A_2: $A = A_1 \times A_2$.

La funzione $f(x, z, y_1, y_2; y_1', y_2') \equiv f(P, y_1', y_2')$ è definita e continua per ogni punto P di A e ogni valore di y_1' e y_2'.

Diremo curva C ogni coppia di funzioni $y_1 = y_1(x)$ $(a \leq x \leq b)$, $y_2 = y_2(z)$ $(c \leq z \leq d)$ assolutamente continue rispettivamente in (a, b) e (c, d) e tali che il punto $(x, y_1(x))$ $[(z, y_2(x)]$ appartenga ad A_1 $[A_2]$.

Diremo che la curva C è *ordinaria* se esiste finito l'integrale nel senso del LEBESGUE

$$I(y_1, y_2) = \int_a^b \int_c^d f[x, z, y_1(x), y_2(z); y_1'(x), y_2'(z)]\, dx\, dz.$$

---

(7) S. FAEDO: « *Il calcolo delle Variazioni per gli integrali di Fubini-Tonelli* ».

Diremo che la curva $C(y_1(x), y_2(z), a \leq x \leq b, c \leq x \leq d)$ *appartiene all'intorno* (ϱ) di una curva $\overline{C}(\overline{y}_1(x), \overline{y}_2(z), \overline{a} \leq x \leq \overline{b}, \overline{c} \leq z \leq \overline{d})$ quando è

I) $a = \overline{a}$, $b = \overline{b}$, $c = \overline{c}$, $d = \overline{d}$ (8);

II) per ogni x di (a, b) e ogni z di (c, d) è

$$|y_1(x) - \overline{y}_1(x)| \leq \varrho; \quad |y_2(z) - \overline{y}_2(z)| \leq \varrho.$$

Si dirà che l'integrale $I(y_1, y_2)$ è *semicontinuo inferiormente* sulla curva ordinaria $\overline{C}(\overline{y}_1, \overline{y}_2)$ se preso ad arbitrio $\varepsilon > 0$, si può determinare $\varrho > 0$ in modo che per tutte le curve ordinarie $C(y_1, y_2)$ appartenenti all'intorno (ϱ) di $\overline{C}$ risulti

$$I(y_1, y_2) > I(\overline{y}_1, \overline{y}_2) - \varepsilon.$$

Se $I(y_1, y_2)$ è semicontinuo inferiormente su ogni curva ordinaria, si dirà *semicontinuo inferiormente*.

2. Richiamo di alcuni risultati.

Condizione necessaria per la semicontinuità inferiore: « Qualora la funzione $f(P, y_1', y_2')$ possieda $f_{y_1' y_1'}$ e $f_{y_2' y_2'}$, condizione necessaria affinchè $I(y_1, y_2)$ sia semicontinuo inferiormente è che sia

$$f_{y_1' y_1'}(P, y_1', y_2') \geq 0, \quad f_{y_2' y_2'}(P, y_1', y_2') \geq 0 \tag{1}$$

in ogni punto P interno ad A (o di accumulazione di punti interni) e per ogni valore di y_1' e y_2' ».

Condizione necessaria per la continuità: « Nelle ipotesi precedenti, condizione necessaria affinchè $I(y_1, y_2)$ sia una funzione continua è che sia

$$f_{y_1' y_1'}(P, y_1', y_2') = 0, \quad f_{y_2' y_2'}(P, y_1', y_2') = 0$$

e cioè che sia

$$f(P, y_1', y_2') \equiv A(P) + B(P) y_1' + C(P) y_2' + D(P) y_1' y_2' \text{ ».} \tag{2'}$$

---

(8) La condizione della coincidenza degli intervalli è qui adottata per ragioni di semplicità e potrebbe essere sostituita dalle condizioni più generali

$$|a - \overline{a}| \leq \varrho, \quad |b - \overline{b}| \leq \varrho, \quad |c - \overline{c}| \leq \varrho, \quad |d - \overline{d}| \leq \varrho.$$

Condizione sufficiente per la continuita (9): « Se le funzioni $A(P)$, $B(P)$, $C(P)$, $D(P)$ sono continue insieme a $\frac{\partial B}{\partial x}$, $\frac{\partial C}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 D}{\partial x\, \partial z}$, allora l'integrale

$$\int_a^b \int_d^c \{A[x, z, y_1(x), y_2(z)] + B[x, z, y_1(x), y_2(z)]\, y_1'(x) + C[x, z, y_1(x), y_2(z)]\, y_2'(z) +$$
$$+ D[x, z, y_1(x), y_2(z)]\, y_1'(x)\, y_2'(z)\}\, dx\, dz$$

è una funzione continua ».

Inoltre è stato dimostrato che per la continuità di tale integrale non è sufficiente che valga la (2'), ma occorrono ulteriori condizioni, quali ad es. quelle del teorema ora riportato.

Esempio di E. MAGENES: La funzione

$$f(y_1', y_2') = e^{2(y_1' - y_2')^2} + \frac{1}{2} y_1'^4 + \frac{1}{3} y_1'^3 y_2' - 2\, y_1'^2 y_2'^2 + \frac{1}{3} y_2'^3 y_1' + \frac{1}{2} y_2'^4 - 1$$

è continua con le sue derivate e verifica le (1). Sulla curva $\overline{C}$ costituita dai due punti origine dei piani (x, y_1) e (z, y_2) manca la semicontinuità. Infatti è $I(\overline{C}) = 0$ e sulla curva $C(y_1(x), y_2(z))$ con

$$y_1(x) = \frac{\sqrt{1 - b^2}}{b}\, x, \quad 0 \leq x \leq b^{3/2}, \quad y_2(z) = \frac{\sqrt{1 - b^2}}{b}\, z, \quad 0 \leq z \leq b^{3/2},$$

in cui è $b > 0$, risulta

$$I(y_1, y_2) = -\frac{(1 - b^2)^2}{3b} \rightarrow -\infty \quad \text{per} \quad b \rightarrow +0.$$

Condizione necessaria per la semicontinuità di E. MAGENES. « Se in ogni punto $\overline{P}$ interno ad A la funzione $f(P, y_1', y_2')$ è continua rispetto a P uniformemente rispetto a y_1' e y_2', condizione necessaria per la semicontinuità inferiore in tutto A di $I(y_1, y_2)$ è che per ogni punto P interno ad A esista un numero $L(P)$ tale che per ogni y_1' e y_2' sia

$$\frac{f(P, y_1', y_2')}{\sqrt{1 + y_1'^2}\, \sqrt{1 + y_2'^2}} > L(P) \text{ ».} \tag{3}$$

(9) S. FAEDO: « *Un nuovo tipo di funzionali continui* », Rend. di Mat. S. V. 1943 (pp. 223-249).

La dimostrazione di E. MAGENES è fondata sul fatto che se in un punto $\overline{P} \equiv (\overline{x}, \overline{z}, \overline{y}_1, \overline{y}_2)$ non vale la (3), allora manca la semicontinuità inferiore sulla curva $\overline{C}$ che si riduce ai due punti $(\overline{x}, \overline{y}_1)$ e $(\overline{z}, \overline{y}_2)$.

§ 1. STUDIO DI UN CASO PARTICOLARE.

3. Mostriamo un nuovo esempio di un funzionale $I(y_1, y_2)$ che verifica le condizioni necessarie (1) e per cui manca la semicontinuità inferiore su ogni curva che degeneri in una coppia di punti, analiticamente più semplice di quello riportato nel n. 2.

Poniamo

$$f^*(y_1', y_2') = 9\,y_1'^4 - 22\,y_1'^3\,y_2' + 24\,y_1'^2\,y_2'^2 - 22\,y_1'\,y_2'^3 + 9\,y_2'^4 .$$

Si ha

$$f^*(y_1', y_2') = f^*(y_2', y_1')$$

e

$$f^*_{y_1' y_1'} = 12\,(3\,y_1' - 2\,y_2')^2 \geq 0, \quad f^*_{y_2' y_2'} = 12\,(3\,y_2' - 2\,y_1')^2 \geq 0. \tag{5}$$

Sia $\overline{C}$ la coppia di punti $(x = \overline{x},\ y_1 = \overline{y}_1)$, $(z = \overline{z},\ y_2 = \overline{y}_2)$. Consideriamo la successione di curve

$$C_n = (y_{1,n} = \overline{y}_1 + n\,(x - \overline{x}),\ \overline{x} \leq x \leq \overline{x} + n^{-3/2};$$

$$y_{2,n} = \overline{y}_2 + n\,(z - \overline{z}),\ \overline{z} \leq z \leq \overline{z} + n^{-3/2}).$$

Le C_n convergono uniformemente a $\overline{C}$ per $n \to \infty$. Posto

$$I^*(C) = \int\!\!\int_C f^*(y_1', y_2')\,dx\,dz$$

si ha

$$I^*(\overline{C}) = 0$$

e

$$I^*(C_n) = -\,2\,n$$

che tende a $-\infty$ per $n \to \infty$. È così provato che su $\overline{C}$ manca la semicontinuità inferiore.

4. Consideriamo ancora il funzionale $I^*(C)$ e dimostriamo che esso è semicontinuo inferiormente su ogni curva $\overline{C}$ effettiva, per cui cioè le compo-

nenti non si riducano a punti. Supponiamo inoltre che le componenti $\overline{y}_1(x)$ e $\overline{y}_2(z)$ di $\overline{C}$ possiedano derivata seconda continua sui rispettivi intervalli ([10]). Sia dunque $\overline{C}$ costituita dalla coppia di funzioni

$$y_1 = \overline{y}_1(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y_2 = \overline{y}_2(z) \quad c \leq z \leq d$$

con $a < b$ e $c < d$.

Sviluppando $f^*(y_1', y_2')$ con la formula di TAYLOR rispetto al punto $\overline{y_1'}, \overline{y_2'}$ arrestandosi ai termini del 4^0 ordine, si ha

$$f^*(y_1', y_2') = f^*(\overline{y_1'}, \overline{y_2'}) + \sum_{1 \leq i+j \leq 4} a_{i,j}(y_1' - \overline{y_1'})^i (y_2' - \overline{y_2'})^j,$$

dove gli indici i, j assumono i valori $0, 1, \dots, 4$ e i coefficienti dipendono soltanto da $\overline{y_1'}$ e $\overline{y_2'}$.

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned}(6) \qquad f^*(y_1', y_2') = {} & f^*(\overline{y_1'}, \overline{y_2'}) + a_{1,0}(y_1' - \overline{y_1'}) + a_{0,1}(y_2 - \overline{y_2'}) + \\ & + a_{1,1}(y_1' - \overline{y_1'})(y_2' - \overline{y_2'}) + (y_1' - \overline{y_1'})^2 \{a_{2,0} + a_{3,0}(y_1' - \overline{y_1'}) + \\ & + a_{2,1}(y_2' - \overline{y_2'}) + a_{4,0}(y_1' - \overline{y_1'})^2 + a_{3,1}(y_1' - \overline{y_1'})(y_2' - \overline{y_2'})\} + \\ & + (y_2' - \overline{y_2'})^2 \{a_{0,2} + a_{0,3}(y_2' - \overline{y_2'}) + a_{1,2}(y_1' - \overline{y_1'}) + \\ & + a_{0,4}(y_2' - \overline{y_2'})^2 + a_{1,3}(y_1' - \overline{y_1'})(y_2' - \overline{y_2'})\} + a_{22}(y_1' - \overline{y_1'})^2 (y_2' - \overline{y_2'})^2.\end{aligned}$$

I termini

$$a_{1,0}(y_1' - \overline{y_1'}) + a_{0,1}(y_2' - \overline{y_2'}) + a_{1,1}(y_1' - \overline{y_1'})(y_2' - \overline{y_2'})$$

danno un integrale continuo (n. 2). Avendosi $a_{2,2} = 32$, ne segue che, fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si può determinare $\varrho > 0$ in modo che se $C \equiv (y_1(x), y_2(z))$, con $a \leq x \leq b$, $c \leq z \leq d$, appartiene all'intorno (ϱ) di $\overline{C}$ risulta

$$\begin{aligned} I^*(y_1, y_2) \geq {} & I^*(\overline{y}_1, \overline{y}_2) + \\ & + \int_a^b (y_1' - \overline{y_1'})^2 \, dx \int_c^d \{a_{2,0} + a_{3,0}(y_1' - \overline{y_1'}) + a_{2,1}(y_2' - \overline{y_2'}) + a_{4,0}(y_1' - \overline{y_1'})^2 + \end{aligned}$$

([10]) Con la stessa dimostrazione basterebbe supporre che $\overline{y_1'}(x)$ e $\overline{y_2'}(z)$ siano assolutamente continue.

$$+ a_{3,1}(y_1' - \overline{y}_1')(y_2' - \overline{y}_2')\}\, dz + \int_c^d (y_2' - \overline{y}_2')^2\, dz \int_a^b \{a_{0,2} + a_{0,3}(y_2' - \overline{y}_2') +$$

$$+ a_{1,2}(y_1' - \overline{y}_1') + a_{0,4}(y_2' - \overline{y}_2')^2 + a_{1,3}(y_1' - \overline{y}_1')(y_2' - \overline{y}_2')\}\, dx - \varepsilon.$$

Consideriamo l'integrale

$$\mathcal{I}_1 = \int_c^d \{a_{2,0} + a_{3,0}(y_1' - \overline{y}_1') + a_{2,1}(y_2' - \overline{y}_2') +$$

$$+ a_{4,0}(y_1' - \overline{y}_1')^2 + a_{3,1}(y_1' - \overline{y}_1')(y_2' - \overline{y}_2')\}\, dz.$$

Avendosi

$$a_{2,1} = 6(8\overline{y}_2' - 11\overline{y}_1'), \qquad a_{3,1} = -22$$

risulta, integrando per punti,

$$\int_c^d a_{2,1}(y_2' - \overline{y}_2')\, dz = 6\,[(8\overline{y}_2' - 11\overline{y}_1')(y_2 - \overline{y}_2)]_{z=c}^{z=d} - 48\int_c^d \overline{y}_2''(y_2 - \overline{y}_2)\, dz,$$

$$\int_c^d a_{3,1}(y_1' - \overline{y}_1')(y_2' - \overline{y}_2')\, dz = -22\,(y_1' - \overline{y}_1')\,[y_2 - \overline{y}_2]_{z=c}^{z=d}.$$

Ne segue

$$\mathcal{I}_1 = \int_c^d [a_{2,0} - 48\,\overline{y}_2''(y_2 - \overline{y}_2)]\, dz + 6\,[(8\overline{y}_2' - 11\,y_1')(y_2 - \overline{y}_2)]_{z=c}^{z=d} +$$

$$+ (y_1' - \overline{y}_1')\left\{\int_c^d a_{3,0}\, dz - 22\,[y_2 - \overline{y}_2]_{z=c}^{z=d}\right\} + (y_1' - \overline{y}_1')^2 \int_c^d a_{4,0}\, dz.$$

Avendosi

$$a_{2,0} = 6(9\overline{y}_1'^2 - 11\overline{y}_1'\overline{y}_2' + 4\overline{y}_2'^2), \quad a_{3,0} = 2(18\overline{y}_1' - 11\overline{y}_2'), \quad a_{4,0} = 9,$$

sostituendo si ottiene

$$\mathcal{I}_1 = 6\int_c^d [9\overline{y}_1'^2 - 11\overline{y}_1'\overline{y}_2' + 4\overline{y}_2'^2 - 8\,\overline{y}_2''(y_2 - \overline{y}_2)]\, dz +$$

$$+ 6\,[(8\overline{y}_2' - 11\overline{y}_1')(y_1 - \overline{y}_2)]_{z=c}^{z=d} +$$

$$+ (y_1' - \overline{y}_1')\left\{2\int_c^d (18\overline{y}_1' - 11\overline{y}_2')\, dz - 22\,[y_2 - \overline{y}_2]_{z=c}^{z=d}\right\} + 9(d - c)(y_1' - \overline{y}_1')^2.$$

Essendo l'integrando una forma quadratica definita positiva in y_1' e y_2' si ha

$$\int_c^d [9\,y_1'^2 - 11\,y_1'\,y_2' + 4\,\overline{y_2'^2}]\,dz \geq 0\,; \tag{7}$$

inoltre, se per un certo valore $\overline{x}$ di x tale integrale si annulla, risulta

$$\overline{y_1'}(z) = 0 \text{ e } \overline{y_2'}(z) \equiv 0 \quad \text{per } c \leq z \leq d.$$

Pertanto se l'integrale (7) è nullo per $x = \overline{x}$ risulta $\overline{y_2''}(z) \equiv 0$ ed è

$$\int_c^d \overline{y_2''}\,(y_2 - \overline{y_2})\,dz = 0, \qquad [(8\,y_2' - 11\,\overline{y_1'})\,(y_2 - \overline{y_2})]_{z=c}^{z=d} = 0$$

e per $x = \overline{x}$ si ha

$$(y_1' - \overline{y_1'})^2\,\mathcal{J}_1 = (y_1' - \overline{y_1'})^3\,\{-22\,[y_2 - \overline{y_2}]_{z=c}^{z=d} + 9\,(d-c)\,(y_1' - \overline{y_1'})\}\,.$$

Qualunque sia v risulta

$$v^3\,[A + 9\,(d-c)\,v] \geq -\frac{1}{4}\,\frac{A^4}{[12\,(d-c)]^3}$$

e pertanto è per $x = \overline{x}$ qualunque sia $y_1'(x)$

$$[y_1'(\overline{x}) - \overline{y_1'}(\overline{x})]^2\,\mathcal{J}_1 \geq -\frac{1}{4}\,\frac{\{-22\,[y_2 - \overline{y_2}]_{z=c}^{z=d}\}^4}{[12\,(d-c)]^3}\,.$$

Distinguiamo ora due casi, a seconda che $\overline{y_2'}(z)$ sia oppure no identicamente nulla in (c, d).

I) Sia $\overline{y_2'}(z) \equiv 0$ in (c, d). Consideriamo dapprima gli x di (a, b) per cui risulta

$$|\,y_1'(x)\,| \leq \eta = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{18\,(d-c)}}\,. \tag{8}$$

Risulta in tale caso

$$\mathcal{J}_1 = 54\,\overline{y_1'}^2\,(d-c) - 66\,\overline{y_1'}\,[y_2 - \overline{y_2}]_{z=c}^{z=d} +$$

$$+ (y_1' - \overline{y_1'})\,\{36\,\overline{y_1'}\,(d-c) - 22\,[y_2 - \overline{y_2}]_{z=c}^{z=d}\} + 9\,(d-c)\,(y_1' - \overline{y_1'})^2$$

Posto

$$- 22 \frac{[y_2 - \bar{y}_2]_{z=c}^{z=d}}{d - c} = A, \quad y_1 - \bar{y}_1 = v$$

si ha

$$\frac{\mathcal{J}_1}{d - c} = 54 \bar{y}_1'^2 + 3A \bar{y}_1' + (36 \bar{y}_1' + A) v + 9v^2. \tag{9}$$

La funzione di v al secondo membro è minima per

$$v = - \frac{36 \bar{y}_1' + A}{18}$$

ed è per ogni v

$$\frac{\mathcal{J}_1}{d - c} \geq 54 \bar{y}_1'^2 + 3A\bar{y}_1' - \frac{1}{36} [36 \bar{y}_1' + A]^2 = 18 \bar{y}_1'^2 + A \bar{y}_1' - \frac{A^2}{36} \geq -|A| \eta - \frac{A^2}{36}.$$

Le radici di $\mathcal{J}_1 = 0$ sono date da

$$\left.\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}\right\} = \frac{- 36\bar{y}_1' - A \pm \sqrt{- 18 \cdot 36 \bar{y}_1'^2 - 36 A\bar{y}_1' + A^2}}{18}$$

e pertanto v_1 e v_2 sono maggiorate in valore assoluto da

$$\frac{36\eta + |A| + \sqrt{A^2 + 36 |A| \eta}}{18}.$$

Al variare di v è quindi sempre

$$\frac{v^2 \mathcal{J}_1}{d - c} \geq - \left[\frac{36 \eta + |A| + \sqrt{A^2 + 3 |A| \eta}}{18}\right]^2 \left[|A| \eta + \frac{A^2}{36}\right] \geq$$

$$\geq - \frac{4}{18^2} [(36\eta + |A|)^2 + A^2 + 3 |A| \eta] \left[\frac{A^2}{36} + 9\eta^2\right] =$$

$$= - \frac{1}{9^2} [36 \eta^2 + 2A^2 + 75 |A| \eta] \left[\frac{A^2}{36} + 9\eta^2\right] \geq$$

$$\geq - \frac{2}{9^2} [2A^2 + 36\eta^2] \left[\frac{A^2}{36} + 9\eta^2\right] = - \frac{2}{9^2} \left[\frac{A^4}{18} + 36 \cdot 9\eta^4 + 19 A^2 \eta^2\right] \geq$$

$$\geq - \frac{2}{9^2} \left[\frac{A^4}{18} + 36 \cdot 9\eta^4 + 10 (A^4 + \eta^4)\right] \geq - [A^4 + 9\eta^4].$$

Avendosi

$$|A| = \frac{|-22\,[y_2 - \bar{y}_2]_{z=c}^{z=d}|}{d-c} \leq \frac{44}{d-c}\,\varrho,$$

se si sceglie $\varrho > 0$ in modo che sia

$$\frac{(44\,\varrho)^4}{d-c} \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{10}$$

risulta per la (8)

$$v^2\, \mathcal{I}_1 \geq -\varepsilon,$$

per ogni valore di v e quindi

$$(y_1'(x) - \bar{y}_1'(x))^2\, \mathcal{I}_1 > -\varepsilon \tag{11}$$

qualunque sia $y_1'(x)$.

Per gli x per cui è invece $|\bar{y}_1'(x)| > \eta$ si ha, per ogni v

$$\mathcal{I}_1 \geq 0,$$

purchè ϱ sia sufficientemente piccolo. Infatti per la (9) basta che sia

$$\Delta = -18 \cdot 36\, \bar{y}_1'^2 - 36\, A\, \bar{y}_1' + A^2 \leq 0$$

per $|y_1'| > \eta$. I valori di y_1', che annullano Δ sono dati da

$$\bar{\bar{y}}_1' = A\,\frac{\sqrt{3} \pm 1}{36};$$

pertanto se è

$$\varrho < \frac{9\,(d-c)}{11\,(1+\sqrt{3})}\,\eta = \frac{9\,(d-c)}{11\,(1+\sqrt{3})} \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{18\,(d-c)}}, \tag{10'}$$

risulta

$$|\bar{\bar{y}}_1| \leq |A|\,\frac{1+\sqrt{3}}{36} \leq \frac{44}{d-c}\,\frac{1+\sqrt{3}}{36}\,\varrho < \eta$$

ed è quindi $\Delta \leq 0$ per $|\bar{y}_1'| > \eta$.

Pertanto se $\varrho > 0$ soddisfa alla (10) e alla (10′), la (11) vale per ogni x di (a, b).

II) Supponiamo ora che $\bar{y}_2'(z)$ non sia identicamente nulla in (c, d). Si ha

$$\left| -8\,\bar{y}_2''(y_2 - \bar{y}_2) + 6\,[(8\bar{y}_2' - 11\,\bar{y}_1')(y_2 - \bar{y}_2)]_{z=c}^{z=d}\,\frac{1}{d-c} \right| \leq K\varrho,$$

dove K è una opportuna costante, essendo $\bar{y}_2'(z)$, $\bar{y}_2''(z)$ e $\bar{y}_1'(x)$ limitate nei rispettivi intervalli e poichè è $|y_2 - \bar{y}_2| \leq \varrho$.

Pertanto è

$$\mathcal{I}_1 \geq \int_c^d 6\,\{9\bar{y}_1'^2 - 11\,\bar{y}_1'\bar{y}_2' + 4\,\bar{y}_2'^2 - K\varrho\}\,dz + 2\int_c^d [18\,\bar{y}_1' - 11\,\bar{y}_2' + A]\,dz \cdot v +$$
$$+ 9\,(d-c)\,v^2.$$

Essendo

$$6\,[9\,\bar{y}_1'^2 - 11\,\bar{y}_1'\,\bar{y}_2' + 4\,\bar{y}_2'^2] \geq \frac{23}{6}\,\bar{y}_2'^2,$$

risulta

$$\int_c^d 6\,\{9\,\bar{y}_1'^2 - 11\,\bar{y}_1'\,\bar{y}_2' + 4\,\bar{y}_2'^2 - K\,\varrho\}\,dz \geq \frac{23}{6}\int_c^d \bar{y}_2'^2\,dz - 6\,K\,(d-c)\,\varrho > 0$$

purchè sia

$$\varrho < \frac{23}{36\,K\,(d-c)}\int_c^d \bar{y}_2'^2\,dz.$$

Il discriminante dell'espressione quadratica in v che è maggiorata da $\mathcal{I}_1$ è

$$\Delta = \left[\int_c^d (18\,\bar{y}_1' - 11\,\bar{y}_2' + A)\,dz\right]^2 - 54\,(d-c)\int_c^d \{9\,\bar{y}_1'^2 - 11\,\bar{y}_1'\,\bar{y}_2' + 4\,\bar{y}_2'^2 - K\varrho\}\,dz;$$

per la disuguaglianza di SCHWARZ segue

$$\Delta \leq (d-c)\int_c^d \{(18\,\bar{y}_1' - 11\,\bar{y}_2' + A)^2 - 54\,(9\,\bar{y}_1'^2 - 11\,\bar{y}_1'\,\bar{y}_2' + 4\,\bar{y}_2'^2 - K\,\varrho\}\,dz =$$
$$= (d-c)\int_c^d \{-\,2\cdot 9^2\,\bar{y}_1'^2 - 95\,\bar{y}_2'^2 + 18\cdot 11\cdot \bar{y}_1'\,\bar{y}_2' +$$
$$+ 2\,A\,(18\,\bar{y}_1' - 11\,\bar{y}_2') + A^2 + 54\,K\,\varrho\}\,dz.$$

Avendosi, qualunque sia $\bar{y}_1'$,

$$-\,2\cdot 9^2\,\bar{y}_1'^2 - 95\,\bar{y}_1'^2 + 18\cdot 11\cdot \bar{y}_2'\,\bar{y}_2' \leq -\frac{69}{2}\,\bar{y}_2'^2$$

e inoltre

$$| 2\, A\, (\overline{y}_1' - 11\, \overline{y}_2') + A^2 + 54\, K \varrho \,| \leq 2\, H \,|\, A \,| + A^2 + 54\, K \varrho \leq$$

$$\leq \varrho \left[H \frac{88}{d-c} + \left(\frac{44}{d-c} \right)^2 \varrho + 54\, K \right],$$

dove H è una opportuna costante, se si prende ϱ con $0 < \varrho \leq 1$ e tale che sia

$$\varrho \left[H \frac{88}{d-c} + \left(\frac{44}{d-c} \right)^2 + 54\, K \right] \leq \frac{69}{2} \int_c^d \overline{y}_2'^2\, dz,$$

risulta $\Delta \leq 0$. Pertanto è $\mathcal{I}_1 \geq 0$ per ogni v.

Si conclude così che si può in ogni caso determinare $\varrho > 0$ in modo che se $C \equiv (y_1, y_2)$ appartiene all'intorno (ϱ) di $\overline{C}$ risulti

$$[y_1'(x) - \overline{y}_1'(x)]^2\, \mathcal{I}_1 \geq -\varepsilon.$$

In modo analogo si dimostra che è anche, per ϱ abbastanza piccolo,

$$[y_2'(z) - \overline{y}_2'(z)]^2\, \mathcal{I}_2 =$$

$$[y_2'(z) - \overline{y}_2'(z)]^2 \int_a^b \{ a_{0,2} + a_{0,3}(y_2' - \overline{y}_2') + a_{12}(y_1' - \overline{y}_1') + a_{0,4}(y_2' - \overline{y}_2')^2 +$$

$$+ a_{1,3}(y_1' - \overline{y}_1')(y_2' - \overline{y}_2') \}\, dx \geq -\varepsilon;$$

si può quindi determinare $\varrho > 0$ in modo che per ogni $C \equiv (y_1, y_2)$ appartenente all'intorno (ϱ) di $\overline{C}$ risulti

$$I^*(y_1, y_2) > I^*(\overline{y}_1, \overline{y}_2) - \varepsilon(1 + b - a + d - c),$$

che prova la semicontinuità inferiore di $I^*(y_1, y_2)$ su $\overline{C} \equiv (\overline{y}_1, \overline{y}_2)$.

§ 2. L'INTEGRALE DI FUBINI-TONELLI NEL SENSO DI WEIERSTRASS E SUA SEMICONTINUITÀ.

5. Definizione di integrale nel senso di Weierstrass.

La dimostrazione della semicontinuità dell'integrale $I^*(C)$ (n. 4) è fondata sullo sviluppo di TAYLOR (6), non però arrestato ai termini del 2^0

ordine, come si fa nelle analoghe dimostrazioni per gli integrali classici. L'esempio dato suggerisce inoltre che le condizioni necessarie (1) siano anche sufficienti per la semicontinuità inferiore sulle curve effettive, cioè su quelle le cui componenti non si riducono ciascuna ad un punto. Le (1) esprimono che la figurativa, cioè (per ogni P fissato) la superficie di equazione $t = f(P, y_1', y_2')$ nello spazio (y_1', y_2', t) è positivamente convessa sia come funzione della sola y_1' sia della sola y_2'; ciò non equivale (come nel caso degli integrali doppi classici) alla positività della forma quadratica dei termini del secondo ordine nella formula di TAYLOR, che corrisponde alla positiva convessità della figurativa nel complesso delle due variabili y_1' e y_2'.

Per giungere a una dimostrazione generale che le condizioni (1) sono anche sufficienti per la semicontinuità inferiore conviene abbandonare la tecnica fondata sull'uso della formula di TAYLOR (arrestata ai termini del 2^0 ordine) e insieme anche l'uso dell'integrale di LEBESGUE.

A tale scopo introduciamo ora l'integrale di FUBINI-TONELLI nel senso di WEIERSTRASS.

Sia $C \equiv (y_1 = y_1(x),\ a \le x \le b,\ y_2 = y_2(z),\ c \le z \le d)$ una curva con $y_1(x)$ e $y_2(z)$ continue sui rispettivi intervalli; consideriamo una partizione degli intervalli (a, b) e (c, d) in un numero finito qualsiasi di intervalli parziali mediante i punti di divisione

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

$$c = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_m = d.$$

La massima delle lunghezze degli intervalli parziali così ottenuti si dirà la norma della partizione. Indicato con $\delta_{i,j}$ l'intervallo a due dimensioni prodotto degli intervalli $x_i \le x \le x_{i+1}$ e $z_j \le z \le z_{j+1}$, consideriamo la funzione di intervallo

$$\Phi(\delta_{i,j}) = f\left[x_i, z_j, y_1(x_i), y_2(z_j), \frac{y_1(x_{i+1}) - y_1(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \right.$$

$$\left. \frac{y_2(z_{j+1}) - y_2(z_j)}{z_{j+1} - z_j}\right] \cdot (x_{i+1} - x_i)(z_{j+1} - z_j).$$

Se tale funzione è integrabile sull'intervallo prodotto di $a \le x \le b$ e $c \le z \le d$, cioè se esiste finito il limite della somma

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \Phi(\delta_{i,j})$$

nella classe di tutte le possibili partizioni di (a, b) e (c, d), al tendere allo zero della loro norma, tale limite si dirà *l'integrale di Fubini-Tonelli nel senso di Weierstrass* e si indicherà con

$$I_W(y_1, y_2) = \int_a^b \int_c^d f\left[x, z, y_1(x), y_2(z), \frac{\Delta y_1}{\Delta x}, \frac{\Delta y_2}{\Delta z}\right] \Delta x \, \Delta z.$$

Riservandoci di dedicare uno studio particolare alle condizioni per l'esistenza di questo integrale e per la sua equivalenza a quello di FUBINI-TONELLI nel senso di LEBESGUE, dimostreremo in questo lavoro le sole proprietà utili a stabilire il teorema di semicontinuità.

Diremo *curva ordinaria* ogni (y_1, y_2) per cui $I_W(y_1, y_2)$ esiste e per cui è quindi implicito che tanto $y_1(x)$ che $y_2(z)$ sono definite su intervalli non riducentisi a punti.

6. Integrali quasi-regolari positivi.

Supponiamo che per ogni punto P di A la $f(P, y_1', y_2')$ *sia positivamente convessa rispetto a* y_1' *e* y_2' *separatamente.* Ciò significa che per ogni $a_1 > 0$ e $b_1 > 0$ è

$$\frac{a_1 f(P, y_1', y_2') + b_1 f(P, \overline{y_1'}, y_2')}{a_1 + b_1} \geq f\left(P, \frac{a_1 y_1' + b_1 \overline{y_1'}}{a_1 + b_1}, y_2'\right)$$

e, per ogni

$$a_2 > 0 \quad \text{e} \quad b_2 > 0$$

$$\frac{a_2 f(P, y_1', y_2') + b_2 f(P, y_1', \overline{y_2'})}{a_2 + b_2} \geq f\left(P, y_1', \frac{a_2 y_2' + b_2 \overline{y_2'}}{a_2 + b_2}\right).$$

Ne segue che è

$$a_2 [a_1 f(P, y_1', y_2') + b_1 f(P, \overline{y_1'}, y_2')] + b_2 [a_1 f(P, y_1', \overline{y_2'}) + b_1 f(P, \overline{y_1'}, \overline{y_2'})] \geq$$

$$\geq a_2 (a_1 + b_1) f\left(P, \frac{a_1 y_1' + b_1 \overline{y_1'}}{a_1 + b_1}, y_2'\right) + b_2 (a_1 + b_1) f\left(P, \frac{a_1 y_1' + b_1 \overline{y_1'}}{a_1 + b_1}, \overline{y_2'}\right)$$

$$\geq (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) f\left(P, \frac{a_1 y_1' + b_1 \overline{y_1'}}{a_1 + b_1}, \frac{a_2 y_2' + b_2 \overline{y_2'}}{a_2 + b_2}\right),$$

ossia la (4).

Se la $f(P, y_1', y_2')$ possiede le $f_{y_1' y_1'}$ e $f_{y_2' y_2'}$, la condizione necessaria e sufficiente affinchè essa sia positivamente convessa rispetto a y_1' e y_2' separatamente è che sussistano le (1).

DEFINIZIONE: « L'integrale $I_W(y_1, y_2)$ si dirà *quasi-regolare positivo* se in ogni punto P di A la $f(P, y_1', y_2')$ è positivamente convessa rispetto a y_1' e y_2' separatamente ».

Per ogni punto P di A consideriamo la funzione di intervallo $\Phi(P, \delta_{i,j})$ definita nella stessa famiglia di intervalli $\delta_{i,j}$ di $\Phi(\delta_{i,j})$

$$\Phi(P, \delta_{i,j}) = f\left[P, \frac{y_1(x_{i+1}) - y_1(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \frac{y_2(z_{j+1}) - y_2(z_j)}{z_{j+1} - z_j}\right](x_{i+1} - x_i)(z_{j+1} - z_j),$$

dove P è indipendente dall'intervallo $\delta_{i,j}$.

TEOREMA: « *Se $I_W(y_1, y_2)$ è quasi-regolare positivo, la funzione $\Phi(P, \delta_{ij})$ è, per ogni P, una funzione di intervallo subadditiva* ».

Per ciò è sufficiente dimostrare che se si dividono gli intervalli (x_i, x_{i+1}) e (z_j, z_{j+1}) ciascuno in due parti, rispettivamente con il nuovo punto di divisione x' e z' $[x_i < x' < x_{i+1}, z_j < z' < z_{j+1}]$ e si considerano i quattro intervalli prodotto di (x_i, x') e (x', x_{i+1}) con (z_j, z') e (z', z_{j+1}) e che indicheremo con $\delta_{i,j}^{(k)}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, si ha

$$\Phi(P, \delta_{i,j}) \leq \sum_{k=1}^{4} \Phi(P, \delta_{i,j}^{(k)}). \tag{12}$$

Posto infatti

$$a_1 + b_1 = x_{i+1} - x_i,$$

$$a_1 y_1' + b_1 \overline{y_1'} = y_1(x_{i+1}) - y_1(x_i),$$

$$y_1' = \frac{y_1(x_{i+1}) - y_1(x_i)}{x_{i+1} - x_i},$$

$$\overline{y_1'} = \frac{y_1(x') - y_1(x_i)}{x' - x_i},$$

si ricava

$$a_1 = x_{i+1} - x', \qquad b_1 = x' - x_i;$$

analogamente si ha

$$a_2 + b_2 = z_{j+1} - z_j,$$

$$a_2 y_2' + b_2 \overline{y_2'} = y_2(z_{j+1}) - y_2(z_j)$$

$$y_2' = \frac{y_2(z_{j+1}) - y_2(z')}{z_{j+1} - z'},$$

$$\overline{y}_2' = \frac{y_2(z') - y_2(z_j)}{z' - z_j},$$

$$a_2 = z_{j+1} - z', \quad b_2 = z' - z_j .$$

Sostituendo queste espressioni nella (4) si ottiene la (12).

7. Condizione necessaria per la semicontinuità.

TEOREMA: « *Condizione necessaria perchè* $I_W(y_1, y_2)$ *sia semicontinuo inferiormente è che esso sia quasi regolare positivo* ».

Diamo un breve cenno della dimostrazione, in quanto si tratta di adottare un noto procedimento di L. TONELLI.

Supposto che in un punto $\overline{P}$ non valga la (4), per la continuità di $f(P, y_1', y_2')$ si può determinare un $\sigma > 0$ e un intorno E di $\overline{P}$ tale che in tutti i punti P di E risulti per certi valori positivi a_1, a_2, b_1, b_2 e per $y_1', \overline{y}_1', y_2', \overline{y}_2'$ fissati

$$(13) \quad a_1 a_2 f(P, y_1', y_2') + a_2 b_1 f(P, \overline{y}_1', y_2') + a_1 b_2 f(P, y_1', \overline{y}_2') + b_1 b_2 f(P, \overline{y}_1', \overline{y}_2') <$$

$$< (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) f\left(P, \frac{a_1 y_1' + a_2 y_2'}{a_1 + b_1}, \frac{a_2 y_2' + b_2 \overline{y}_2'}{a_2 + b_2}\right) - \sigma.$$

Posto $P \equiv (\overline{x}, \overline{z}, \overline{y}_1, \overline{y}_2)$, si consideri la curva $\overline{C} \equiv (\overline{C}_1, \overline{C}_2)$ costituita dal segmento $\overline{C}_1$, uscente da $(\overline{x}, \overline{y}_1)$ e con coefficiente angolare

$$\frac{a_1 y_1' + b_1 \overline{y}_1'}{a_1 + b_1}$$

e dal segmento $\overline{C}_2$, uscente da $(z, \overline{y}_2)$ e con coefficiente angolare

$$\frac{a_2 y_2' + b_2 \overline{y}_2'}{a_2 + b_2};$$

inoltre ogni punto di $\overline{C}$ appartenga ad E.

Si consideri poi la famiglia di curve $C \equiv (C_1, C_2)$ appartenenti ad E e così costituite: C_1 è una spezzata di un numero pari di lati, che ha gli estremi coincidenti con quelli di $\overline{C}_1$, i lati aventi coefficienti angolari alternativamente y_1' e $\overline{y_1'}$ e i vertici situati alternativamente su $\overline{C}_1$; C_2 è una spezzata situata in modo analogo rispetto a $\overline{C}_2$ e con lati di coefficienti angolari alternativamente y_2' e $\overline{y_2'}$.

La famiglia C ha $\overline{C}$ come curva di accumulazione. Se

$$\overline{y}_1(x) = \frac{a_1 y_1' + b_1 \overline{y_1'}}{a_1 + b_1}(x - \overline{x}) + \overline{y}_1 \qquad (a \leq x \leq b)$$

e

$$\overline{y}_2(z) = \frac{a_2 y_2' + b_2 \overline{y_2'}}{a_2 + b_2}(z - \overline{z}) + \overline{y}_2 \qquad (c \leq z \leq d)$$

sono le funzioni che rappresentano $\overline{C}_1$ e $\overline{C}_2$, l'integrale $I_W(\overline{C})$ è dato dall'integrale

$$(14) \quad I_W(\overline{C}) = \int_a^b \int_c^d f\left[x, z, \overline{y}_1(x), \overline{y}_2(z), \frac{a_1 y_1' + b_1 \overline{y_1'}}{a_1 + b_1}, \frac{a_2 y_2' + b_2 \overline{y_2'}}{a_2 + b_2}\right] dx\, dz,$$

dove la funzione integranda è una funzione continua di x e z.

Considerata una qualunque curva $C \equiv (y_1(x), y_2(z))$ della famiglia suddetta e calcolato su essa l'integrale $I_W(C)$, questo diviene la somma di 4 integrali, come (14); ciascuno di questi integrali è esteso a un complesso di intervalli del piano xz e su essi $y_1'(x)$ e $y_2'(z)$ sono costanti. Tenuto conto delle aree su cui si integra e applicando il teorema della media per gli integrali di funzioni continue, si trova che esiste in E un punto P^* per cui è

$$\begin{aligned} I_W(C) - I_W(\overline{C}) = {} & \frac{(b-a)(d-c)}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)} \{a_1 a_2 f(P^*, y_1', y_2') + a_2 b_1 f(P^*, \overline{y_1'}, y_2') + \\ & + a_1 b_2 f(P^*, y_1', \overline{y_2'}) + b_1 b_2 f(P^*, \overline{y_1'}, \overline{y_2'}) - \\ & - f\left(P^*, \frac{a_1 y_1' + b_1 \overline{y_1'}}{a_1 + b_1}, \frac{a_2 y_2' + b_2 \overline{y_2'}}{a_2 + b_2}\right)\Bigg\} < - \frac{(b-a)(d-c)}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}\sigma, \end{aligned}$$

per la (13); è così provato che su $\overline{C}$ manca la semicontinuità inferiore, essendo $\overline{C}$ di accumulazione per le curve C.

8. Condizione sufficiente per la semicontinuità.

TEOREMA : « *Se $I_W(y_1, y_2)$ è quasi-regolare positivo ed inoltre la $f(P, y_1', y_2')$ è continua in A rispetto a P, uniformemente rispetto a y_1' e y_2', allora $I_W(y_1, y_2)$ è semicontinuo inferiormente* ».

Sia $y_1 = \overline{y}_1(x)$ $(a \leq x \leq b)$, $y_2 = \overline{y}_2(z)$ $(c \leq z \leq d)$ una curva ordinaria. Fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si determini $\delta > 0$ in modo che se $P = (x, z, y_1, y_2)$ e $\overline{P} \equiv (\overline{x}, \overline{z}, \overline{y}_1, \overline{y}_2)$ sono punti di A con

$$| x - \overline{x} | < \delta, \qquad | z - \overline{z} | < \delta, \qquad | y_1 - \overline{y}_1 | < \delta, \qquad | y_1 - \overline{y}_2 | < \delta,$$

risulti

$$| f(P, y'_1, y'_2) - f(\overline{P}, y'_1, y'_2) | < \varepsilon, \tag{15}$$

qualunque siano y'_1 e y'_2.

Si determini poi una partizione di (a, b) e (c, d) con norma minore di δ, e sia essa data da

$$\begin{cases} a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, \\ c = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_m = d, \end{cases} \tag{16}$$

in modo che, detta $\overline{S}(y_1, y_2)$ la somma di WEIERSTRASS ad essa relativa, risulti

$$\overline{S}(\overline{y}_1, \overline{y}_2) > I_W(\overline{y}_1, \overline{y}_2) - \varepsilon. \tag{17}$$

Fissato un insieme chiuso e limitato $\overline{A}$ di A contenente i punti $(x, z, \overline{y}_1(x), \overline{y}_2(z))$ nel suo interno, si determini un numero $N > 0$ tale che sia

$$\left| \frac{\overline{y}_1(x_{i+1}) - \overline{y}_1(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right| < N \qquad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

$$\left| \frac{\overline{y}_2(z_{j+1}) - \overline{y}_2(z_j)}{z_{j+1} - z_j} \right| < N \qquad (j = 0, 1, \dots, m-1).$$

Poichè la funzione $f(P, y'_1, y'_2)$ è uniformemente continua nel complesso delle sue variabili per P in $\overline{A}$ e $| y'_1 | < N$, $| y'_2 | < N$, si può determinare $\delta_1 > 0$ con $0 < \delta_1 \leq \delta$, in modo che se

$$\overline{PP} < \delta_1 \qquad | y'_1 - \overline{y}'_1 | < \delta_1, \qquad | y'_2 - \overline{y}'_2 | < \delta_1,$$

risulti

$$| f(P, y'_1, y'_2) - f(P, \overline{y}'_1, \overline{y}'_2) | < \frac{\varepsilon}{nm}.$$

Si determini il numero positivo ϱ in modo che sia $\varrho < \delta_1$, e inoltre

$$\varrho < \delta_1 \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \qquad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

$$\varrho < \delta_1 \frac{z_{j+1} - z_j}{2} \qquad (j = 0, 1, \dots, m-1).$$

Sia $C \equiv (y_1(x), y_2(z))$ una qualunque curva ordinaria appartenente all'interno (ϱ) di $\overline{C}$. Avendosi

$$| y_1(x) - \overline{y}_1(x) | \leq \varrho \qquad a \leq x \leq b$$

$$| y_2(z) - \overline{y}_2(z) | \leq \varrho \qquad c \leq z \leq d,$$

ne segue

$$\left| \frac{y_1(x_{i+1}) - y_1(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{\overline{y}_1(x_{i+1}) - \overline{y}_1(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right| \leq \frac{2\varrho}{x_{i+1} - x_i} < \delta_1,$$

$$\left| \frac{y_2(z_{j+1}) - y_2(z_j)}{z_{j+1} - z_j} - \frac{\overline{y}_2(z_{j+1}) - \overline{y}_2(z_j)}{z_{j+1} - z_j} \right| \leq \frac{2\varrho}{z_{j+1} - z_j} < \delta_1.$$

Pertanto è

$$\left| f\left[x_i, z_j, y_1(x_i), y_2(z_j), \frac{y_1(x_{i+1}) - y_1(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \frac{y_2(z_{j+1}) - y_2(z_j)}{z_{j+1} - z_j}\right] - \right.$$

$$\left. - f\left[x_i, z_j, \overline{y}_1(x_i), \overline{y}_2(z_j), \frac{\overline{y}_1(x_{i+1}) - \overline{y}_1(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \frac{\overline{y}_2(z_{j+1}) - \overline{y}_2(z_j)}{z_{j+1} - z_j}\right] \right| \leq \frac{\varepsilon}{nm}$$

e detta $\overline{S}(y_1, y_2)$ la somma di WEIERSTRASS di $I_W(y_1, y_2)$ relative alla partizione (16), risulta

$$| \overline{S}(y_1, y_2) - \overline{S}(\overline{y}_1, \overline{y}_2) | < \varepsilon (b - a)(d - c). \tag{18}$$

Relativamente a $I_W(y_1, y_2)$ consideriamo una somma di WEIERSTRASS $S(y_1, y_2)$ successiva a $\overline{S}(y_1, y_2)$ cioè relativa a una partizione ottenuta dalla (16) intercalando in ogni intervallo (x_i, x_{i+1}), (z_j, z_{j+1}) nuovi punti di divisione. Siano essi

$$x_i = x_0^i < x_1^i < \dots < x_{s_i}^i = x_{i+1}, \quad z_j = z_0^j < z_1^j < \dots < z_{t_j}^j = z_{j+1}.$$

La parte di $S(y_1, y_2)$ corrispondente a questa partizione (x_i, x_{i+1}) (z_j, z_{j+1}) è data da

$$S_{i,j}(y_1, y_2) = \sum_{k=0}^{s_i-1} \sum_{h=0}^{t_j-1} \left\{ f\left[x_k^i, z_h^j, y_1(x_k^i), y_2(z_h^j), \frac{y_1(x_{k+1}^i) - y_1(x_k^i)}{x_{k+1}^i - x_k^i}, \frac{y_2(z_{h+1}^j) - y_2(z_h^j)}{z_{h+1}^j - z_h^j}\right\} \cdot [x_{k+1}^i - x_k^i][z_{h+1}^j - z_h].$$

Si ha

$$S_{i,j}(y_1, y_2) - f\left[x_i, z_j, y_1(x_i), y_2(z_j), \frac{y_1(x_{i+1}) - y_1(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \frac{y_2(z_{j+1}) - y_2(z_i)}{z_{j+1} - z_i}\right](x_{i+1} - x_i)(z_{j+1} - z_j) =$$

$$= \sum_{k=0}^{s_i-1} \sum_{h=0}^{t_j-1} \left\{ f\left[x_k^i, z_h^j, y_1(x_k^i), y_2(z_h^j), \frac{y_1(x_{k+1}^i) - y_1(x_k^i)}{x_{k+1}^i - x_k^i}, \frac{y_2(z_{h+1}^j) - y_2(z_h^j)}{z_{h+1}^j - z_h^j}\right] - \right.$$

$$\left. - f\left[x_i, z_j, y_1(x_i), y_2(z_j), \frac{y_1(x_{k+1}^i) - y_1(x_k^i)}{x_{k+1}^i - x_k^i}, \frac{y_2(z_{h+1}^j) - y_2(z_h^j)}{z_{h+1}^j - z_h^j}\right]\right\} \cdot$$

$$\cdot (x_{k+1}^i - x_k^i)(z_{h+1}^j - z_h^j) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{s_i-1} \sum_{h=0}^{t_j-1} f\left[x_i, z_j, y_1(x_i), y_2(z_j), \frac{y_1(x_{k+1}^i) - y_1(x_k^i)}{x_{k+1}^i - x_k^i}, \frac{y_2(z_{h+1}^j) - y_2(z_h^j)}{z_{h+1}^j - z_h^j}\right](x_{k+1}^i - x_k^i)(z_{h+1}^j - z_h^j) -$$

$$- f\left(x_i, z_i, y_1(x_i)\, y_2(z_j), \frac{y_1(x_{i+1}) - y_1(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \frac{y_2(z_{j+1}) - y_2(z_i)}{z_{j+1} - z_j}\right)(x_{i+1} - x_i)(z_{j+1} - z_j) =$$

$$= S_{i,j}^{(1)}(y_1, y_2) + S_{i,j}^{(2)}(y_1, y_2).$$

Per la (15) risulta

$$|S_{i,j}^{(1)}(y_1, y_2)| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{s_i-1} \sum_{h=0}^{t_j-1} (x_{k+1}^i - x_k^i)(z_{h+1}^j - z_h^j) = \varepsilon (x_{i+1} - x_i)(z_{j+1} - z_j).$$

Essendo $I_W(y_1, y_2)$ quasi-regolare positivo, per il teorema del n. 6 è

$$S_{i,j}^{(2)}(y_1, y_2) \geq 0.$$

Pertanto è (n. 5)

$$S_{i,j}(y_1, y_2) - \Phi(\delta_{i,j}) = S_{i,j}^{(1)}(y_1, y_2) + S_{i,j}^{(2)}(y_1, y_2) \geq -\varepsilon(x_{i+1} - x_i)(z_{j+1} - z_j)$$

e sommando, rispetto agli indici i ed j

$$S(y_1, y_2) - \overline{S}(y_1, y_2) \geq -\varepsilon(b-a)(d-c). \tag{19}$$

Poichè $C \equiv (y_1, y_2)$ è una curva ordinaria, esiste l'integrale $I_W(y_1, y_2)$ e si può pertanto trovare una $S(y_1, y_2)$ con

$$S(y_1, y_2) < I_W(y_1, y_2) + \varepsilon,$$

Ne segue che è per le (19), (18) e (17)

$$I_W(y_1, y_2) > S(y_1, y_2) - \varepsilon > \overline{S}(y_1, y_2) - \varepsilon(b-a)(d-c) - \varepsilon > \overline{S}(y_1, y_2) -$$
$$-2\varepsilon(b-a)(d-c) - \varepsilon > I_W(\overline{y}_1, \overline{y}_2) - 2[(b-a)(d-c)+1]\,\varepsilon,$$

che prova la semicontinuità inferiore di $I_W(y_1, y_2)$.

9. Conclusione.

Il teorema del n. 8 giustifica sia l'introduzione dell'integrale di FUBINI-TONELLI nel senso di WEIERSTRASS, sia la definizione data di integrale quasi-regolare positivo. È ben noto infatti che, per l'integrale curvilineo classico in forma ordinaria, la quasi regolarità da sola non è sufficiente ad assicurare la semicontinuità, ma occorrono ulteriori proprietà (normalità o seminormalità dell'integrale oppure ipotesi qualitative, come l'esistenza di opportune derivate della funzione integranda).

Ciò sussiste anche per gli integrali di FUBINI-TONELLI e infatti, nel caso della continuità, non basta che $I_W(C)$ sia quasi-regolare nei due sensi, cioè che sia

$$f(P, y_1', y_1') \equiv A(P) + B(P)\,y_1' + C(P)\,y_2' + D(P)\,y_1'\,y_2' \tag{2'}$$

perchè l'integrale sia continuo. (v. n. 2).

In lavori successivi, i cui risultati sono stati in parte annunciati nella relazione citata in (7), verranno date condizioni di altro tipo che, insieme alla quasi-regolarità, portano alla semicontinuità dell'integrale di FUBINI-TONELLI nel senso di WEIERSTRASS.