ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

J. L. LIONS
E. MAGENES

Sur certains aspects des problèmes aux limites non homogènes pour des opérateurs paraboliques

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 18, nº 3 (1964), p. 303-344

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1964_3_18_3_303_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR CERTAINS ASPECTS DES PROBLÈMES AUX LIMITES NON HOMOGÈNES POUR DES OPÉRATEURS PARABOLIQUES

par J. L. LIONS (Paris) et E. MAGENES (Pavie)

Introduction.

1) Soit Q un ouvert d'un espace Euclidien et P un opérateur différentiel linéaire donné dans Q (à coefficients variables); désignons par P^* l'adjoint (formel) de P.

On suppose que l'on a pu attacher à P^* un *problème aux limites différentiel* (i. e. avec conditions aux limites différentielles) *bien posé dans* Q.

De façon plus précise, on suppose que l'on a pu construire deux espaces E et F de fonctions ou de distributions sur Q tels que P^* *soit un isomorphisme de* E *sur* F.

Soit ensuite F_0 un *sous espace* de F, contenant $\mathcal{D}(Q)$ (= fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans Q); donc

$$\mathcal{D}(Q) \subset F_0 \subset F,$$

avec injections continues (¹). Définissons alors X comme suit:

$$X = \{v \mid v \in E,\ P^* v \in F_0\}.$$

On munit X de la topologie telle que $v \longrightarrow P^* v$ *soit un isomorphisme de* X *sur* F_0. Alors, par *transposition* (tout ceci est évident!) on a: *si* $v \longrightarrow L(v)$ *est une forme anti-linéaire* (²) *continue sur* X, *il existe un élement* u *et un seul*

Pervenuto alla Redazione il 18 Febbraio 1964.

(¹) F_0 est muni de sa propre topologie, *non* de la topologie induite par F.

(²) On prend L anti-linéaire parce que P^* est définie à partir de P par $\langle \varphi, \overline{P^* \psi} \rangle = \langle P\varphi, \overline{\psi} \rangle$.

de F_0' (*dual de* F_0) *tel que*

$$(*) \qquad \langle u, \overline{P^* v}\rangle = L(v) \qquad \forall\, v \in X,$$

le crochet dans (*) désignant la dualité entre F_0' et F_0.

Les questions qui se posent sont maintenant les suivantes :

(i) si l'on décide de s'intéresser uniquement à des solutions u qui soient des *distributions* sur Q (3), il faut *choisir* F_0 de sorte que $\mathcal{D}(Q)$ soit dense dans F_0 ; ce *choix* étant fait, il faut *expliciter* X au maximum ; cela est un *problème de régularité :* ayant des renseignements supplémentaires sur le second membre h, obtenir des renseignements supplémentaires sur la solution v de $P^* v = h$;

(ii) l'espace X ne sera pas en général un espace normal de distributions : $\mathcal{D}(Q)$ n'est pas dense dans X ; il conviendra alors d'interpréter la condition d'appartenance au dual de X ; on choisira, en général, certains éléments de ce dual de la forme $f + g$, où f est une *distribution convenable sur* Q et où g est une *fonctionnelle convenable sur* Σ (partie de la frontière de Q « portant » les données) : distribution sur Σ (supposant Σ variété C^∞), ou bien fonctionnelle analytique sur Σ (supposant Σ variété analytique) ou fonctionnelle plus compliquée (cf. le présent travail) ;

(iii) choisissant, dans (*),

$$L(v) = f(v) + g(v) \text{ (4)}$$

il faut enfin *interpréter* (*). Formellement, on arrive à

$$(**) \qquad Pu = f, \qquad Bu = g,$$

B étant un *opérateur frontière.* Il s'agit alors de *préciser le sens des conditions aux limites* $Bu = g$ (*théorèmes de traces*).

2) Dans une série de travaux (cfr. [13] travaux (I) à (VI)) nous avons développé les idées précédentes en prenant pour P (et P^*) un *opérateur elliptique* et pour E et F des espaces de Sobolev (qui sont en particulier des espaces de Banach).

Par exemple prenant $F_0 = H_0^k(Q)$ (où $H_0^k(Q)$ est l'adhèrence de $\mathcal{D}(Q)$ dans l'espace des fonctions $v \in L^2(Q)$ telles que toutes leurs dérivées jusqu'à

---

(3) Comme on a déja vu dans [13], (VII) et comme on verra dans le présent travail, ce choix — que nous ferons — ne s'impose pas absolument.

(4) Il faut evidemment préciser le sens de ces expressions ; cf. [13] et le présent travail.

l'ordre k soient dans $L^2(Q)$) et faisant augmenter k indéfiniment, (**) résoudra, entre autres, le problème de Dirichlet avec données frontières g *distributions quelconques* sur Σ.

Il n'y a pas de raison de se borner aux espaces de Banach pour F_0. Ainsi, dans [13], (VII), nous avons pris $F_0 = \mathcal{D}(Q)$ ce qui conduit à une large généralisation de résultats de [4]: on peut prendre, dans le deuxième membre g, pour le problème de Dirichlet, une *fonctionnelle analytique* (la frontière de Q étant supposée analytique). L'interprétation de (**) repose alors sur un théorème de trace dont un cas particulier est le suivant: si P est un opérateur elliptique dans $\bar{Q}$ à coefficients *analytiques dans* $\bar{Q}$ et si u est une distribution quelconque dans Q telle que $Pu = 0$ [5], alors on peut définir, entre autres, les valeurs sur Σ de u et de ses dérivées d'ordre $\leq m-1$ ($2m =$ ordre de P) et ce sont des fonctionnelles analytiques.

3) Il est clair *qu'il n'y a pas lieu*, dans le schéma général indiqué au 1), *de se borner aux opérateurs elliptiques.*

Nous avons d'ailleurs brièvement annoncé dans [14] quelques résultats *dans le cas hilbertien* pour certains *opérateurs paraboliques* à partie elliptique auto-adjointe (cf. aussi Baiocchi [19]).

Nous allons ici poursuivre dans ce sens pour des opérateurs paraboliques (non nécessairement à partie elliptique auto-adjointe), en nous plaçant dans l'analogue du cadre de [13] (VII). Précisons. Soit d'abord Q un *cylindre infini:* $Q = \Omega \times]-\infty, +\infty[$, et $P = A\left(x, t\,;\, \frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial t}$ un opérateur parabolique dans Q; A est supposé elliptique d'ordre $2m$, à coefficients indéfiniment différentiables en (x, t) dans $\bar{Q}$ et analytiques en x pour chaque t dans $\bar{\Omega}$, (non nécessairement auto-adjoint); notre objet essentiel est alors l'étude du *problème mixte :*

$$(***) \qquad Au + D_t u = f,$$

f étant une distribution donnée convenable (cf. N° 4 et N° 5), à *support limité à gauche* (i. e. nulle pour $t < t_f$, t_f dépendant de f) (à vrai dire on considère dans le texte un cas un peu plus général), la distribution u étant à *support limité à gauche* et u satisfaisant aux conditions aux limites :

$$(****) \qquad \frac{\partial^k u}{\partial \nu^k} = g_k \text{ sur } \Sigma \text{ (frontière de } Q) \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1 \ [6].$$

---

[5] Donc u est analytique dans Q, mais il n'est fait aucune hypothèse sur le comportement de u au voisinage de la frontière de Q.

[6] $\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k}$ = dérivée normale d'ordre k su Σ. On peut, par les mêmes méthodes, traiter une classe très générale de conditions aux limites donnant lieu à des problèmes bien posés.

Dans (****) les g_k sont des fonctionnelles (convenables) sur Σ, les conditions (****) *ayant un sens* d'après le théorème de traces du N⁰ 4.

Le dernier problème est alors une caractérisation aussi constructive que possible des fonctionnelles g_k dans (****). Quelques indications fragmentaires sur le problème général sont données dans le texte et au N⁰ 5 et des résultats précis sont donnés au N⁰ 8 dans le cas très particulier de l'équation de la chaleur à une dimension d'espace; on y fait essentiellement usage de résultats de Holmgren [10] et surtout de Gevrey [7]; il nous semble intéressant de noter qu'on obtient, entre autres, le résultat suivant: chaque solution de l'équation de la chaleur dans la bande $Q =]0, 1[\times]-\infty, +\infty[$ admet une trace sur les droites frontières, $x = 0$, $x = 1$, qui est une fonctionnelle du type de Gevrey.

4) De façon analogue par les mêmes méthodes on peut considérer le probleme mixte pour le même opérateur parabolique P dans un *cylindre fini* $Q = \Omega \times]0, T[$, Σ étant alors décomposé en $\Sigma = \Sigma' \cup \Sigma''$, $\Sigma' = \Gamma \times]0, T[$, $\Sigma'' = \{x \in \Omega \cup \Gamma,\ t = 0\}$ (Γ frontière de Ω), et les conditions aux limites étant alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^k u}{\partial \nu^k} = g_k & \text{sur} \quad \Sigma' \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \\ u = u_0 & \text{sur} \quad \Sigma'' \end{cases}$$

La principale difficulté réside, même dans ce cas, en la caractérisation « constructive » des fonctionnelles g_k et u_0; nous donnerons des résultats précis dans le cas de l'équation de la chaleur en une dimension d'espace.

De très nombreux et, pensons-nous, intéressants problèmes restent à résoudre dans la caractérisation des divers espaces de traces rencontrés dans ce travail.

5) Etant donnée le grande variété possible de choix de F_0 (avec les notations de 1) on obtiendra, à partir de (**), plusieurs théorèmes d'isomorphismes pour l'opérateur $\{P, B\}$; il est alors tout indiqué d'utiliser la théorie de l'*interpolation des opérateurs linéaires;* c'est ce que nous avons fait dans [13] (I) à (VI) et dans [14].

Nous n'utilisons pas ici cette théorie, puisque nous étudions des *choix* de F_0 qui sont des cas « limites ».

D'autres choix de F_0 seraient possible et, semble-t-il, intéressants:

i) $F_0 =$ espace de Sobolev convenable;

ii) $F_0 =$ espace de Gevrey an t à valeurs dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

De même d'autres classes d'opérateures (hyperboliques, Schroedinger etc.) semblent conduire dans le présent contexte, à des problèmes intéressants. Nous reviendrons sur ces sujets.

6) Le plan est le suivant

1. Le cas du cylindre infini, notations et hypothèses.

1.1. On désigne par Ω un ouvert borné de R^n (variable $x = (x_1, \dots, x_n)$) dont la frontière Γ est supposée *analytique réelle de dimension* $n-1$, orientée, Ω étant d'un seul coté de Γ.

Dans l'espace Euclidien $R_x^n \times R_t^1$ des variables $(x, t) = (x_1, \dots, x_n, t)$, on considère le cylindre

$$Q = \Omega \times R_t^1$$

de frontière

$$\Sigma = \Gamma \times R_t^1 .$$

On posera: $D_x^p = D_{x_1}^{p_1} \dots D_{x_n}^{p_n}$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, $D_{x_i} = \partial/\partial x_i$, $|p| = p_1 + \dots + p_n$, $D_t = \partial/\partial t$.

On considère dans Q l'opérateur différentiel [7] A donné par

$$Au = A\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D_x^p (a_{pq}(x, t) D_x^q u) \tag{1.1}$$

où les coefficients a_{pq} satisfont aux hypothèses suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{pq} \textit{ est indéfiniment différentiable dans } \bar{Q} = Q \cup \Sigma, \textit{ et, pour} \\ \textit{chaque } t, x \longrightarrow a_{pq}(x, t) \textit{ est analytique réelle dans } \bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma. \end{array} \right. \tag{1.2}$$

Nous alons étudier dans Q des problèmes aux limites non homogènes relatifs à l'opérateur $A\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial t}$.

---

(7) On pourrait aussi bien considérer des systèmes différentiels

Nous allons d'abord faire les hypothèses d'ellipticité sur A indispensables pour la suite.

1.2. On désigne, comme de coutume, par $H^m(\Omega)$ l'espace :

$$H^m(\Omega) = \{u \mid u \in L^2(\Omega),\ D^\alpha u \in L^2(\Omega), \mid \alpha \mid \leq m\},$$

qui est un espace de Hilbert pour la norme

$$\| u \|_{H^m(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \| D^\alpha u \|^2_{L^2(\Omega)} \Big)^{1/2} .$$

Si $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables dans Ω et à support compact, dont le dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω [16], on désigne par $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.

Pour $u, v \in H^m(\Omega)$, nous posons

$$a(t\,; u, v) = \sum_{|p|, |q| \leq m} \int_\Omega a_{pq}(x, t)\, D_x^q u \overline{D_x^p v}\, dx\,; \tag{1.3}$$

ce sont là les formes sesquilinéaires attachées à A ; nous allons uniquement considérer dans la suite les conditions aux limites de *Dirichlet* relatives à A ; nous ferons donc l'hypothèse suivante (de coercivité sur $H_0^m(\Omega)$)

$$\tag{1.4} \left\{ \begin{array}{l} \textit{il existe deux constantes } \lambda \textit{ et } \alpha,\ \alpha > 0, \textit{ telles que, pour tout} \\ t, \textit{ on ait} \\ \qquad \operatorname{Re} a(t\,; v, v) + \lambda \| v \|^2_{L^2(\Omega)} \geq \alpha \| v \|^2_{H^m(\Omega)}, \qquad \forall\, v \in H_0^m(\Omega). \end{array} \right.$$

D'après l'inégalité de Gärding, (1.4) a lieu si et seulement si

$$\operatorname{Re} \sum_{|p| = |q| = m} (-1)^{|p|} a_{pq}(x, t)\, \xi^{p+q} \geq \beta \mid \xi \mid^{2m}, \beta > 0,\ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n,$$

$$\mid \xi \mid = (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{1/2}.$$

Remarque 1.1.

On peut aussi supposer, au lieu de (1.4), que pour chaque $T < \infty$, il existe λ et α tels que (1.4) ait lieu, pour $\mid t \mid < T$. Les modifications à apporter à la suite dans ce cas sont faciles et non détaillées.

Sous l'hypothèse (1.4) le résultat suivant est connu ([12], théorème 8.1 p. 121 ; le résultat du théorème 8.1 est d'ailleurs plus précis que l'énoncé ci après); on désigne par $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ l'espace des fontions indéfiniment différentiables dans $\bar{\Omega}$, muni de la topologie d'*espace de Fréchet* de la convergence uniforme dans $\bar{\Omega}$ des fonctions et de chacune de leurs dérivées; ceci posé:

(1.5) *si f est donnée indéfiniment différentiable en t à valeurs dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$, nulle pour $t < t_0$, il existe une fonction u et une seule, indéfiniment différentiable en (x, t) dans $\bar{\Omega}$, nulle pour $t < t_0$, vérifiant:*

$$Au + D_t u = f,$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = \dots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}} = 0 \text{ sur } \Sigma.$$

(ν normale sur Σ intérieure à Q).

1.3. *Opérateur adjoint.*

On pose:

$$a^*(t; u, v) = \overline{a(t; v, u)} \qquad u, v \in H^m(\Omega), \tag{1.6}$$

formes qui définissent l'opérateur

$$A^*\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D_x^p (\overline{a_{qp}(x, t)} D_x^q). \tag{1.7}$$

Formule de Green.

Soient u et v deux fonctions de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ (espace des fonctions indéfiniment différentiables dans $\bar{\Omega}$ et à support compact); on a (cf. [1]):

$$\int_Q (Au + D_t u) \bar{v} \, dx \, dt - \int_Q u (\overline{A^* v} - \overline{D_t v}) \, dx \, dt = \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Sigma S_j u \, \overline{\gamma_j v} \, d\sigma - \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Sigma \gamma_j u \cdot \overline{T_j v} \, d\sigma, \tag{1.8}$$

où

$$d\sigma = \text{élément de surface de } \Sigma,$$

$$\gamma_j u = \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j},$$

$S_j, T_j =$ opérateurs différentiels linéaires d'ordre $2m - j - 1$ à coefficients indéfiniment différentiables en (x, t) sur Σ, analytiques en x sur Γ pour t fixé.

Les systèmes $\{\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}, S_{m-1}, \dots, S_0\}$, $\{\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}, T_{m-1}, \dots, T_0\}$ sont « normaux » et « de Dirichlet » au sens de [1].

1.4. *Remarque* 1.2

Les résultats ci après s'étendent à d'*autres* conditions aux limites que celles de Dirichlet. Si V est un sous-espace fermé de $H^m(\Omega)$, tel que $H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega)$, V étant défini par des relations différentielles à coefficients indéfiniment différentiables en (x, t) et analytiques en x, et si les formes $a(t; u, v)$ sont coercives sur V, les résultats ci après s'étendent aux conditions aux limites définies par $a(t; u, v)$ et V.

2. L'espace X.

2.1. Quelques notations générales tout d'abord. On désigne par $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}_+$, resp. $\mathcal{D}_-$) l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur R_t^1 à support compact (resp. limité à gauche, resp. limité à droite) muni de la topologie de limite inductive de Schwartz [16]. On désigne par $\mathcal{D}'$ (resp. $\mathcal{D}'_-$, resp. $\mathcal{D}'_+$), l'espace dual fort de $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}_+$, resp. $\mathcal{D}_-$), qui est l'espace des distributions sur R_t (resp. à support limité à droite, resp. à support limité à gauche).

Soit maintenant F un espace vectoriel topologique localement convexe séparé sur le corps complexe; on désigne par $\mathcal{D}(F)$ (resp. $\mathcal{D}_+(F)$, resp. $\mathcal{D}_-(F)$) l'espace des fonctions indéfiniment differentiables sur R_t^1 à *valeurs dans* F et à support compact (resp. limité à gauche, resp. limité à droite) muni encore de la topologie de limite inductive de Schwartz [18], [17].

Remarque 2.1.

La proposition (1.5) peut alors être précisée par: *si* $f \in \mathcal{D}_+(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))$, *alors* $u \in \mathcal{D}_+(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))$ *et* u *depend continûment de* f.

2.2 Revenons à notre situation dans le cylindre Q; nous définissons

$$(2.1) \qquad X = \left\{ v \mid v \in \mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\bar{\Omega})),\ A^* v - D_t v \in \mathcal{D}(Q),\right.$$
$$\left. v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \dots = \frac{\partial^{m-1} v}{\partial \nu^{m-1}} = 0 \text{ sur } \Sigma \right\}.$$

Nous munissons X de la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les applications $v \to v$ et $v \to A^* v - D_t v$ de X dans $\mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))$ et $\mathcal{D}(Q)$ respectivement.

On a le

THÉORÈME 2.1. *On suppose que* (1.2) et (1.4) *ont lieu. L'application*

$$v \longrightarrow (A^* - D_t)\, v \tag{2.2}$$

est un isomorphisme de X *sur* $\mathcal{D}(Q)$.

DÉMONSTRATION.

L'application (2.2) est continue, par définition; par passage à l'adjoint (et inversion du sens du temps) dans (1.5) on voit que l'application est surjective et biunivoque.

Reste à montrer que l'inverse de (2.2) est continue. Comme $\mathcal{D}(Q)$ est un $(\mathcal{LF})$ strict (c'est à dire au sens de Dieudonné-Schwartz [5]) il suffit ([5] prop. 6, p. 71) de montrer que si φ demeure dans un borné de $\mathcal{D}(Q)$, alors v, donné dans X par $A^* v - D_t v = \varphi$, demeure dans un borné de X. Or ceci résulte de la définition des bornés de X et de (1.5) et de la Remarque 2.1. D'où le résultat.

Notons que le Théoreme 2.1 implique que X *a une topologie d'espace* $(\mathcal{LF})$ strict. En fait, si l'on note que $\mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))$ est limite inductive de $\mathcal{D}_{-,\alpha}(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))$ (= fonctions de $\mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ nulles pour $t > \alpha$) et que $\mathcal{D}(Q)$ est limite inductive de $\mathcal{D}_{K_\beta}$ (= fonctions de $\mathcal{D}(Q)$ à support dans le compact K_β (les K_β étant une suite croissante de compacts $\subset Q$, de réunion Q)), alors X peut être considéré comme limite inductive des $X_{\alpha,\beta}$ où

$$X_{\alpha,\beta} = \left\{ v \mid v \in \mathcal{D}_{-,\alpha}(\mathcal{D}(\bar{\Omega})),\ A^* v - D_t v \in \mathcal{D}_{K_\beta}, \right.$$
$$\left. v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \dots = \frac{\partial^{m-1} v}{\partial \nu^{m-1}} = 0 \right\},$$

chaque $X_{\alpha,\beta}$ étant muni de sa topologie naturelle d'espace de Fréchet.

La topologie ainsi définie sur X est à priori plus fine que celle définie initialement; mais, appliquant le théorème du graphe fermé (étendu aux $(\mathcal{LF})$; [5], [8]), on voit que le Théorème 2.1 est encore vrai pour X muni de la nouvelle topologie, d'où résulte *que les deux topologies que nous avons définies sur* X *sont identiques.*

REMARQUE 2.2.

Nous allons d'abord définir un nouvel espace $\mathcal{D}_*(Q)$ de fonctions sur Q. Soit $\tilde{K}_\beta$ une suite croissante de compacts $\subset \Omega$, de réunion Ω; soit $(\mathcal{D})_{\alpha,\beta}$ l'espace des fonctions, indéfiniment différentiables dans Q, à support dans

$E_{\alpha,\beta} = \widetilde{K}_\beta \times]-\infty, \alpha]$, et en outre bornées ainsi que chacune de leurs dérivées (lorsque $t \longrightarrow -\infty$); on munit $(\mathcal{D})_{\alpha,\beta}$ de sa topologie naturelle d'espace de Fréchet; on pose ensuite

$$\mathcal{D}_*(Q) = \bigcup_{\alpha,\beta} (\mathcal{D})_{\alpha,\beta}$$

et l'on munit $\mathcal{D}_*(Q)$ de la topologie de $(\mathcal{L}\mathcal{F})$ correspondante.

On désigne par $\mathcal{D}'_*(Q)$ l'espace dual de $\mathcal{D}_*(Q)$; c'est un espace de distributions sur Q, « somme de distributions sommables lorsque $t \longrightarrow -\infty$ et de distributions dont le support tend vers la frontière Σ'' lorsque $t \longrightarrow -\infty$ ».

Nous posons maintenant

$$\text{(2.3)} \qquad X_* = \left\{ v \mid v \in \mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\overline{\Omega})),\ A^* v - D_t v \in \mathcal{D}_*(Q), \right.$$
$$\left. v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \dots = \frac{\partial^{m-1} v}{\partial \nu^{m-1}} = 0 \text{ sur } \Sigma \right\}.$$

Nous munissons X_* de la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les applications $v \longrightarrow v$ et $v \longrightarrow A^* v - D_t v$ de X_* dans $\mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\overline{\Omega}))$ et de X_* dans $\mathcal{D}_*(Q)$ respectivement.

Alors, comme pour le théorème 2.1, on a:

THÉORÈME 2.1 *bis. On suppose que* (1.2) *et* (1.4) *ont lieu. L'application* (2.2) *est un isomorphisme de* X_* *sur* $\mathcal{D}_*(Q)$.

REMARQUE 2.3

Aucune des hypothèses d'analyticité n'est intervenue jusqu' ici.

REMARQUE 2.4

Si $v \in X$, alors v a un comportement pour $t \longrightarrow -\infty$ qui ne dépend que des *coefficients* a_{pq} de A.

2.3. *Transposition*.

Du théorème 2.1 on déduit aussitôt par transposition:

THÉORÈME 2.2. *On suppose que* (1.2) *et* (1.4) *ont lieu. Soit* $v \longrightarrow L(v)$ *une forme antilinéaire continue sur* X*; il existe une distribution* $u \in \mathcal{D}'(Q)$ *et une seule telle que*

$$\text{(2.4)} \qquad \langle u, \overline{A^* v} - \overline{D_t v} \rangle = L(v) \qquad \forall\, v \in X,$$

(où le crochet désigne la dualité entre $\mathcal{D}'(Q)$ et $\mathcal{D}(Q)$); *l'application* $L \to u$ *est continue de* $\bar{X}'$ (anti-dual de X) dans $\mathcal{D}'(Q)$.

Naturellement, on a un résultat analogue en transposant le théorème 2.1 bis.

2.4 Le problème est maintenant d'*interpréter le Théorème* 2.2. Il faudra pour cela *choisir* L dans (2.4) et interpréter cette équation à l'aide du *théorème de traces* que nous établirons au N⁰ 4, le N⁰ 3 qui suit introduisant les espaces nécessaires à cet effet.

3. Espaces $G_-(\Sigma)$ et $G'_+(\Sigma)$.

3.1. Si $v \in X$, les fonctions $T_j v$ (les opérateurs T_j étant définis par (1.8)) sont dans $\mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\Gamma))$ (notations du point 2.1 avec $F = \mathcal{D}(\Gamma)$).

Posons:

$$\mathcal{T}v = \{T_0 v, \dots, T_{m-1} v\}; \tag{3.1}$$

on définit ainsi une application linéaire continue $v \to \mathcal{T}v$ de X dans $(\mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\Gamma)))^m$ (de façon générale $F^m = F \times \dots \times F$, m facteurs).

On définit (algébriquement) $G_-(\Sigma)$ *comme l'image de* X *dans l'application* $\mathcal{T}$.

Comme il est naturel, nous munissons $G_-(\Sigma)$ de la topologie « quotient » suivante: désignant par $N_{\mathcal{T}}$ le noyau de $\mathcal{T}$ (i. e. l'ensemble des $v \in X$ tels que $\mathcal{T}v = 0$), on considère l'*application quotient*

$$v^\cdot \to \mathcal{T}^\cdot v^\cdot \tag{3.2}$$

de

$$X^\cdot = X/N_{\mathcal{T}} \text{ sur } G_-(\Sigma)$$

et *on munit* $G_-(\Sigma)$ *de la topologie telle que* (3.2) *soit un isomorphisme topologique de* $X^\cdot$ *sur* $G_-(\Sigma)$.

Un quotient d'un espace $(\mathcal{LF})$ (au sens de Grothendieck [8]) étant encore du même type (cf. [8] chap. I, p. 13), on voit que $G_-(\Sigma)$ est un espace $(\mathcal{LF})$.

Toutefois $G_-(\Sigma)$ n'est *peut être* pas un espace $(\mathcal{LF})$ *strict*; en effet on sait (cf. [9] contre ex. 1⁰, p. 92) que le quotient d'un $(\mathcal{LF})$ strict peut n'être pas un $(\mathcal{LF})$ strict.

REMARQUE 3.1

On définit de même $G_*(\Sigma)$ image par $\mathcal{T}$ de X_*.

3.2. On définit

$$G'_{+}(\Sigma) = (G_{-}(\Sigma))', \qquad \text{dual fort de } G_{-}(\Sigma). \tag{3.3}$$

REMARQUE 3.2.

On définit de même

$$G'_{*}(\Sigma) = (G_{*}(\Sigma))'$$

De toutes façons, le problème pratique important sera de donner une caractérisation plus constructive de $G_{-}(\Sigma)$ (Cf. N^0 8).

4. L'espace Y. Théorème de Traces.

4.1. *Espace* $\Xi(\Omega)$.

On a besoin das la suite d'un espace $\Xi(\Omega)$ qui soit un espace normal de distribution sur Ω (donc $\mathcal{D}(\Omega)$ doit être *dense* dans $\Xi(\Omega)$), tel que $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \subset \Xi(\Omega)$ et tel que $\Xi(\Omega)$ soit « le plus petit possible ». Nous ignorons si un tel espace optimal existe (cf. déjà [13], (VII), N^0 5); mais nous utiliserons l'espace $\Xi(\Omega)$ construit comme suit; soit $d(x, \Gamma)$ la distance de $x \in \Omega$ à Γ et soit $\varrho(x)$ une fonction continue dans Ω telle que $\varrho(x) = d(x, \Gamma)$ si $d(x, \Gamma) \leq \varrho_0$, ϱ_0 assez petit, et telle que $\varrho(x) = \varrho_0$ si $d(x, \Gamma) > \varrho_0$; on définit alors $\Xi(\Omega)$ par:

$$\Xi(\Omega) = \{u \mid \quad \varrho^{|\alpha|} D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha\}; \tag{4.1}$$

On munit $\Xi(\Omega)$ de la famille de semi-normes

$$\| \varrho^{|\alpha|} D^\alpha u \|_{L^2(\Omega)};$$

on obtient ainsi un espace de Fréchet; c'est un espace normal de distributions sur Ω et $\Xi(\Omega)$ est réflexif. (Cfr. [13], (VII), N^0 5).

On désigne par $\Xi'(\Omega)$ l'espace dual fort de $\Xi(\Omega)$; cf. [13], (VII), N^0 5 pour la structure de cet espace.

4.2 On considère ensuite l'espace $\mathcal{D}_{-}(\Xi(\Omega))$ (notation du point 2.1) et son dual $(\mathcal{D}_{-}(\Xi(\Omega)))'$.

Considérons les espaces: $\mathcal{D}_{-,\alpha}$ (cf. 2.2) tels que $\mathcal{D}_{-}$ soit limite inductive des $\mathcal{D}_{-,\alpha}$ ($\varphi \in \mathcal{D}_{-,\alpha}$ si et seulement si $\varphi \in \mathcal{D}_{-}$ et $\varphi \equiv 0$ pour $t > \alpha$) et $\mathcal{D}_{-,\alpha}(\Xi(\Omega))$ ($\varphi \in \mathcal{D}_{-,\alpha}(\Xi(\Omega))$ si et seulement si $\varphi \in \mathcal{D}_{-}(\Xi(\Omega))$ et $\varphi \equiv 0$ pour $t > \alpha$) muni de sa topologie d'espace de Fréchet. On a $\mathcal{D}_{-,\alpha}(\Xi(\Omega)) = \mathcal{D}_{-,\alpha} \overline{\otimes}\, \Xi(\Omega)$, où $\overline{\otimes}$ désigne le produit tensoriel *inductif complété* (cf. [8], chap. I, p. 74, pour la définition de ce produit tensoriel; il correspond aux formes bilinéaires séparément continues sur $\mathcal{D}_{-,\alpha} \times \Xi(\Omega)$), l'identité ci dessus résultant de ce que $\mathcal{D}_{-,\alpha} \overline{\otimes}\, \Xi(\Omega) = \mathcal{D}_{-,\alpha} \hat{\otimes}\, \Xi(\Omega) = \mathcal{D}_{-,\alpha}(\Xi(\Omega))$ (cf. [8], chap. II, variante de l'exemple 1, pag. 80, 81). Alors ([8], Chap. I, Prop. 14, p. 76) $\mathcal{D}_{-}(\Xi(\Omega)) =$ lim inductive des $\mathcal{D}_{-,\alpha}(\Xi(\Omega)) = \mathcal{D}_{-} \overline{\otimes}\, \Xi(\Omega)$.

Définissons alors $\mathcal{D}'_{+}(\Xi'(\Omega))$ par : $\mathcal{D}'_{+}(\Xi'(\Omega)) = \mathcal{L}(\mathcal{D}_{-}; \Xi'(\Omega)) =$ espace des distributions à valeurs dans $\Xi'(\Omega)$ et *à support limité à gauche* (puisque $\Xi'(\Omega)$ est le dual d'un Fréchet — cf. [18], 1, p. 62 ; en général, $\mathcal{L}(\mathcal{D}_{-}; E)$ est l'espace des distributions à valeurs dans E et à support *scalairement* limité à gauche).

On a :

$$(\mathcal{D}_{-}(\Xi(\Omega)))' = \mathcal{D}'_{+}(\Xi'(\Omega)).$$

En effet la difficulté est de voir que si $T \in \mathcal{D}'_{+}(\Xi'(\Omega))$ alors $T \in (\mathcal{D}_{-}(\Xi(\Omega)))'$; mais T définit canoniquement une application bilinéaire *séparément continue* sur $\mathcal{D}_{-} \times \Xi(\Omega)$ et donc, par *définition* de $\overline{\otimes}$, une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}_{-} \overline{\otimes}\, \Xi(\Omega)$, d'où le résultat, puisque cet espace est identique à $\mathcal{D}_{-}(\Xi(\Omega))$.

Montrons maintenant que $\mathcal{D}_{-}(\Xi(\Omega))$ est réflexif.

Tout d'abord $\Xi(\Omega)$ est tonnelé ([3]) puisque Fréchet, et $\mathcal{D}_{-}$ est tonnelé (cf. [17] ou [8]), donc ([8], chap. I, p. 78) $\mathcal{D}_{-} \overline{\otimes}\, \Xi(\Omega)$ est tonnelé. Donc $\mathcal{D}_{-}(\Xi(\Omega))$ est tonnelé et complet ; il est donc réflexif (8) si son dual est réflexif. Or ce dual est $\mathcal{D}'_{+}(\Xi'(\Omega))$, qui n'est autre que $\mathcal{D}'_{+} \hat{\otimes}\, \Xi'(\Omega)$ (notation de [8]) ; $\mathcal{D}'_{+}$ étant nucléaire ([8]), il résulte de [8], Chap. II, Prop. 13, p. 76, que $\mathcal{D}'_{+} \hat{\otimes}\, \Xi'(\Omega)$ est réflexif, d'où notre assertion suit.

REMARQUE 4.1.

Dans la suite nous avons besoin que X soit contenu dans $\mathcal{D}_{-}(\Xi(\Omega))$ et que $\mathcal{D}_{-}(\mathcal{D}(\Omega))$ soit dense dans $\mathcal{D}_{-}(\Xi(\Omega))$. Nous n'avons pas tenu compte ici de ce que $v = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \dots = \dfrac{\partial^{m-1} v}{\partial \nu^{m-1}} = 0$ sur Σ, si $v \in X$, pour construire $\Xi(\Omega)$; l'espace $\Xi(\Omega)$ construit ici serait valable pour *toutes* les conditions aux limites qu'on peut considérer (cf. Remarque 1.1).

4.3. *Espace Y.*

$$Y = \{u \mid u \in \mathcal{D}'(Q),\ Au + D_t u \in \mathcal{D}'_{+}(\Xi'(\Omega))\}. \tag{4.2}$$

On munit cet espace de la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les applications $u \to u$ et $u \to Au + D_t u$ de Y dans

(8) On utilise le lemme suivant : Si E est tonnelé et complet et si E' (dual fort) est réflexif, alors E est réflexif.

$\mathcal{D}'(Q)$ et Y dans $\mathcal{D}'_+(\Xi'(\Omega))$ respectivement, l'espace $\mathcal{D}'_+(\Xi'(\Omega))$ étant muni de la topologie de dual fort de $\mathcal{D}_-(\Xi(\Omega))$.

Comme $\mathcal{D}_-(\Xi(\Omega))$ est réflexif (cf. § 4.2), si $u \longrightarrow M(u)$ est une forme anti-linéaire continue sur Y, il existe $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $g \in \mathcal{D}_-(\Xi(\Omega))$ tels que

$$M(u) = \langle f, \bar{u} \rangle + \langle g, \overline{Au} + \overline{D_t u} \rangle. \tag{4.3}$$

De là l'on déduit facilement que tout ensemble borné de Y est faiblement relativement compact, de sorte que (cf. [3] chap. IV) Y *est semi-réflexif* (autrement dit $Y'' = Y$ algébriquement). Nous ignorons si Y est tonnelé (ce qui impliquerait que Y soit réflexif).

Le résultat suivant est essentiel dans la suite:

PROPOSITION 4.1: *On suppose que* (1.2) *et* (1.4) *ont lieu. L'espace* $\mathcal{D}(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))$ *est dense dans* Y.

DÉMONSTRATION.

Soit $u \longrightarrow M(u)$ une forme anti-linéaire continue sur Y; elle est de la forme (4.3). Supposons que $M(\varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))$. Nous allons montrer que dans ces conditions $M = 0$, ce qui démontrera la Proposition.

Soient $\tilde{f}, \tilde{g}$ les prolongements de f et g à R^{n+1} par 0 hors de Q et soit $\mathcal{A}$ un prolongement de A à R^{n+1}, à coefficients indéfiniment différentiables en (x, t) et, pour chaque t fixé, analytiques en x dans un voisinage convenable $\mathcal{O}_t$ de $\bar{\Omega}$, $\mathcal{A}$ étant elliptique en x dans $\mathcal{O}_t$. Un tel prolongement est possible car (1.4) entraine l'ellipticité de A.

Soit Φ quelconque dans $\mathcal{D}(R^{n+1})$; l'on a:

$$\langle \tilde{f}, \bar{\Phi} \rangle + \langle \tilde{g}, \overline{\mathcal{A}\Phi} + \overline{D_t \Phi} \rangle = 0 \tag{4.4}$$

puisque cette expression vaut $M(\varphi)$, $\varphi =$ restriction de Φ à Q; or φ est dans $\mathcal{D}(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))$ et donc $M(\varphi) = 0$ par hypothèse.

On déduit de (4.4), $\mathcal{A}^*$ étant l'adjoint formel de $\mathcal{A}$:

$$\tilde{f} + \mathcal{A}^* \tilde{g} - D_t \tilde{g} = 0. \tag{4.5}$$

De résultats connus sur les équations paraboliques (cf. par ex. [6]) et de (4.5), il suit que $\tilde{g}$ est indéfiniment différentiable en (x, t) dans $\bigcup_{t \in R} \mathcal{O}_t$, et que, pour chaque t, $\tilde{g}$ est analytique en x dans $\mathcal{O}_t - K_t$, $K_t =$ support de $x \longrightarrow f(x, t)$; or, par définition, $\tilde{g}$ est nulle dans $\mathcal{O}_t - \Omega$, donc elle est nulle dans $\mathcal{O}_t - K_t$, donc nulle hors du support de f est par conséquent

$g \in \mathcal{D}(Q)$. Alors (4.5) implique (par restriction à Q) :

$$A^* g - D_t g + f = 0 \qquad \text{dans } Q. \tag{4.6}$$

Dans ces conditions, $\langle g, \overline{Au} + \overline{D_t u} \rangle = \langle A^* g - D_t g, \bar{u} \rangle \ \forall\, u \in Y$, et donc $M(u) = 0$, $\forall\, u \in Y$. c. q. f. d.

REMARQUE 4.2.

Les hypothèses d'analyticité sont intervenues ici pour la première fois.

REMARQUE 4.3.

On définit de même

$$Y_* = \{u \mid u \in \mathcal{D}'_*(Q),\ Au + D_t u \in \mathcal{D}'_+(\Xi'(\Omega))\}$$

muni d'une topologie analogue à celle de Y; Y_* est encore semi-réflexif (nous ignorons s'il est tonnelé) et on montre comme pour la Prop. 4.1 que $\mathcal{D}(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))$ est dense dans Y.

4.4. *Théorème de traces.*

Soit $\varphi = \{\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}\} \in \mathcal{D}(\mathcal{D}(\Gamma)^m)$; la forme

$$\psi \longrightarrow \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Sigma \varphi_j \psi_j \, d\sigma, \qquad \psi = \{\psi_0, \dots, \psi_{m-1}\}$$

est linéaire et continue sur $G_-(\Sigma)$, donc s'écrit $\langle L_\varphi, \psi \rangle$, $L_\varphi \in G'_+(\Sigma)$. On va dans le suite *identifier* φ et L_φ ce qui est légitime, car, comme nous allons voir, l'application $\varphi \longrightarrow L_\varphi$ est ***biunivoque*** de $\mathcal{D}(\mathcal{D}(\Gamma)^m)$ dans $G'_+(\Sigma)$; en effet, si $L_\varphi = 0$ alors

$$\sum_{j=0}^{m-1} \int_\Sigma \varphi_j \cdot \psi_j \, d\sigma = 0 \qquad \forall\, \psi \in G_-(\Sigma)$$

Soit $u \in \mathcal{D}_+(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))$ la solution de

$$Au + D_t u = 0, \qquad \gamma_j u = \varphi_j, \qquad j = 0, \dots, m-1$$

Alors, pour v quelconque dans X, on a, si on pose $(f, g) = \int_Q f g \, dx dt$:

$$(Au + D_t u, v) - (u, A^* v - D_t v) = -(u, A^* v - D_t v) = -\sum_{j=0}^{m-1} \int_\Sigma \varphi_j T_j v \, d\sigma = 0$$

et donc
$$(u, A^* v - D_t v) \equiv 0 \qquad \forall\, v \in X.$$

Mais, pour θ quelconque dans $\mathcal{D}(Q)$, il existe $v \in X$ avec $A^* v - Dv = \theta$, et donc $(u, \theta) = 0 \ \forall\, \theta \in \mathcal{D}(Q)$, donc $u = 0$ dans Q et donc $\varphi_j = 0$, ce qui démontre notre assertion.

Cette identification étant supposée effectuée, on peut énoncer le

THÉORÈME 4.1. *On suppose que* (1.2) *et* (1.4) *ont lieu — L'application linéaire*

$$u \longrightarrow \gamma u = \{\gamma_0 u, \dots, \gamma_{m-1} u\} \tag{4.7}$$

de $\mathcal{D}(\mathcal{D}(\overline{\Omega}))$ *dans* $(\mathcal{D}(\mathcal{D}(\Gamma)))^m$ *se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée* $u \longrightarrow \gamma u$, *de* Y *faible dans* $G'_+(\Sigma)$ *faible* (donc on considère ici Y muni de la topologie affaiblie $\sigma(Y, Y')$ et $G'_+(\Sigma)$ de la topologie faible $\sigma(G'_+(\Sigma), G_-(\Sigma))$, dans les notations de [3], chap. IV).

REMARQUE 4.4.

Par définition γu sera la *trace* de u sur Σ, $u \in Y$.

En particulier, si $u \in \mathcal{D}'(Q)$ *et si* $Au + D_t u = 0$, *alors on peut définir la trace de* u *sur* Σ, *au sens du théorème* 4.1.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.1.

1) Soit u donnée dans Y.

Pour ψ dans $G_-(\Sigma)$, posons :

$$v^{\cdot} = (\mathcal{T}^{\cdot})^{-1} \psi \qquad \text{(cf. 3.1)} \tag{4.8}$$

et pour v quelconque dans $v^{\cdot}$ ($v \in X$) posons

$$Z(\psi) = \langle u, \overline{A^* v} - \overline{D_t v} \rangle - \langle Au + D_t u, \overline{v} \rangle, \tag{4.9}$$

où le 1[er] crochet désigne la dualité entre $\mathcal{D}'(Q)$ et $\mathcal{D}(Q)$, et où le 2[ème] crochet désigne la dualité entre $\mathcal{D}'_+(\Xi'(\Omega))$ et $\mathcal{D}_-(\Xi(\Omega))$ (puisque $v \in \mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\overline{\Omega})) \subset \mathcal{D}_-(\Xi(\Omega))$).

Vérifions que $Z(\psi)$ ne dépend que de ψ. Soient donc v_1 et v_2 deux éléments de la classe $v^{\cdot}$; alors, posant $w = v_1 - v_2$, on a :

$$A^* w - D_t w = \varphi, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(Q), \qquad w \in \mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\overline{\Omega})), \tag{4.10}$$

$$\gamma_j w = 0 \qquad T_j w = 0, \qquad j = 0, 1, \dots, m-1. \tag{4.11}$$

Comme le système $\{\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}, T_{m-1}, \dots, T_0\}$ est un système normal et de Dirichlet d'ordre $2m$, il résulte de l'unicité dans le problème de

Cauchy que w est nulle au voisinage de Σ. Comme déjà vu, w est analytique en x, t fixé, hors du support de φ, donc $w \in \mathcal{D}(Q)$. Mais alors $\langle u, \overline{A^* w - D_t w} \rangle = \langle Au + D_t u, \overline{w} \rangle$ de sorte que

$$\langle u, \overline{A^* v_1 - D_t v_1} \rangle - \langle Au + D_t u, \overline{v_1} \rangle = \langle u, \overline{A^* v_2 - D_t v_2} \rangle - \langle Au + D_t u, \overline{v_2} \rangle,$$

d'où le résultat désiré.

2) On a donc défini une forme anti-linéaire $\psi \to Z(\psi)$ sur $G_-(\Sigma)$ (qui, évidemment, dépend de u). *Montrons qu'elle est continue.* Posons

$$\Phi(v) = \langle u, \overline{A^* v - D_t v} \rangle - \langle Au + D_t u, \overline{v} \rangle;$$

la forme $v \to \Phi(v)$ est continue sur X, et nulle sur $N_{\mathfrak{T}}$ (cf. 1)); donc la forme $v^\cdot \to \Phi^\cdot(v^\cdot) = \Phi(v)$, $v \in v^\cdot$, est continue sur $X^\cdot$ et donc $\psi \to Z(\psi) = \Phi^\cdot((\mathcal{T}^\cdot)^{-1}\psi)$ est continue sur $G_-(\Sigma)$.

3) Par conséquent

$$Z(\psi) = \langle \tau u, \overline{\psi} \rangle, \quad \tau u \in G'_+(\Sigma), \tag{4.12}$$

et on a ainsi défini une application linéaire

$$u \to \tau u \tag{4.13}$$

de Y dans $G'_+(\Sigma)$. On va montrer qu'elle est continue pour les topologies $\sigma(Y, Y')$ et $\sigma(G'_+(\Sigma), G_-(\Sigma))$; donc que $u \to \langle \tau u, \overline{\psi} \rangle$, $\psi \in G_-(\Sigma)$ est faiblement continue sur Y. Or

$$\langle \tau u, \overline{\psi} \rangle = \langle u, \overline{A^* v - D_t v} \rangle - \langle Au + D_t u, \overline{v} \rangle \qquad v \in X \text{ fixé} \tag{4.14}$$

et si $u \to 0$ dans Y faible, alors $u \to 0$ faiblement dans $\mathcal{D}'(Q)$ et $Au + D_t u \to 0$ faiblement dans $\mathcal{D}'_+(\Xi'(\Omega))$, d'où le résultat.

4) Le théorème sera alors démontré (grâce à la Proposition 4.1 et la remarque précédant l'énoncé du Théorème) si l'on vérifie que, pour $u \in \mathcal{D}(\mathcal{D}(\overline{\Omega}))$ on a

$$\tau u = \gamma u. \tag{4.15}$$

Or cela résulte de la formule de Green; si $v \in X$, $u \in \mathcal{D}(\mathcal{D}(\overline{\Omega}))$, on a

$$\langle \tau u, \overline{\psi} \rangle = \langle u, \overline{A^* v - D_t v} \rangle - \langle Au + D_t u, \overline{v} \rangle = \\ = \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Sigma \gamma_j u \overline{T_j v} \, d\sigma$$

ce qui achève la démonstration du Théorème.

REMARQUE 4.5.

Nous avons, chemin faisant, démontré la *formule da Green*

$$(4.16)\qquad \begin{cases} \langle u, \overline{A^* v - D_t v} \rangle - \langle A u + D_t u, \overline{v} \rangle = \langle \gamma u, \overline{\mathcal{T} v} \rangle, \\ u \in Y, v \in X. \end{cases}$$

Dans (4.16) le 1[er] (resp. 2[ème], resp. 3[ème]) crochet désigne la dualité entre $\mathcal{D}'(Q)$ (resp. $\mathcal{D}'_+(\Xi'(\Omega))$, resp. $G'_+(\Sigma)$) et $\mathcal{D}(Q)$ (resp. $\mathcal{D}_-(\Xi(\Omega))$, (resp. $G_-(\Sigma)$).

REMARQUE 4.6.

Il nous semble probable que l'application $u \longrightarrow \gamma u$ est également continue de Y dans $G'_+(\Sigma)$ pour les topologies fortes, mais ce point n'est pas encore démontré.

On peut l'obtenir facilement si Y est tonnelé (et donc réflexif), par la même démonstration, en utilisant en plus la Proposition 6, chap. IV, § 4 de [3]. De même on peut l'obtenir si l'on connait un « relèvement » continu de l'application $v \longrightarrow \mathcal{T} v$ de X dans $G_-(\Sigma)$, c'est à dire si l'on peut démontrer qu'il existe pour chaque $\psi \in G_-(\Sigma)$ une fonction $v(\psi) \in X$ telle que $\mathcal{T} v(\psi) = \psi$, de façon que l'application $\psi \longrightarrow v(\psi)$ soit linéaire et continue de $G_-(\Sigma)$ dans X; on utilise alors cette application au lieu de (4.8) dans la démonstration donnée. Une généralisation de cette dernière situation sera utilisée dans le cas particulier que nous étudierons au n. 7 (cf. Remarque 7.1).

REMARQUE 4.7.

On démontrera, comme au Théorème 4. 1, avec une identification du même type que celle effectuée pour le Th. 4.1, le

THÉORÈME 4.1 bis : *On suppose que* (1.2) *et* (1.4) *ont lieu. L'application linéaire* $u \longrightarrow \gamma u$ *de* $\mathcal{D}(\mathcal{D}(\overline{\Omega}))$ *dans* $(\mathcal{D}(\mathcal{D}(\Gamma)))^m$ *se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée* $u \longrightarrow \gamma u$, *de* Y_* *faible* (*i. e. muni de la topologie* $\sigma(Y_*, Y_*'))$ *dans* $G_*'(\Sigma)$ *faible* (*i. e. muni de la topologie* $\sigma(G'_*(\Sigma), G_*(\Sigma))$.

On notera d'ailleurs que l'on peut construire sans peine d'autres espaces que $\mathcal{D}_*(Q)$ mais de même type, à partir desquels on peut construire les espaces analogues à $X, X_*, Y, Y_*, \ldots$ et pour lesquels on aboutit à des résultats analogues aux précedénts.

5. Problème aux limites non homogène.

Nous pouvons maintenant revenir au Théorème 2.2

Choix de L:

Soient f, g donnés avec

$$f \in \mathcal{D}'_+ (\Xi' (\Omega)) \tag{5.1}$$

$$g \in G'_+ (\Sigma). \tag{5.2}$$

On choisit alors:

$$L(v) = \langle f, \bar{v} \rangle + \langle g, \overline{\mathcal{T} v} \rangle, \tag{5.3}$$

le 1[er] (resp. 2[eme]) crochet désignant la dualité entre $\mathcal{D}'_+ (\Xi' (\Omega))$ (resp. $G'_+ (\Sigma)$) et $\mathcal{D}_- (\Xi (\Omega))$ resp. $G_- (\Sigma)$); (5.3) définit bien une forme antilinéaire continue sur X.

Le Théorème 2.2 donne alors l'existence et l'unicité de $u \in \mathcal{D}' (Q)$ tel que

$$\langle u, \overline{A^* v} - \overline{D_t v} \rangle = \langle f, \bar{v} \rangle + \langle g, \overline{\mathcal{T} v} \rangle \qquad \forall\, v \in X. \tag{5.4}$$

Donc (prenant $v \in \mathcal{D} (Q)$)

$$Au + D_t u = f \tag{5.5}$$

de sorte que $u \in Y$ et utilisant (4.16):

$$\gamma u = g. \tag{5.6}$$

En outre, toujours à cause du théorème 2.2, u dépend continûment de f et g; donc

THÉORÈME 5.1. *On suppose que* (1.2) *et* (1.4) *on lieu. Etant donnés* $f \in \mathcal{D}'_+ (\Xi' (\Omega))$ *et* $g \in G'_+ (\Sigma)$, *il existe* $u \in Y$ *unique satisfaisant à* (5.5) *et* (5.6). *En outre l'application* $\{f, g\} \to u$ *est continue, pour les topologies fortes, de* $\mathcal{D}'_+ (\Xi' (\Omega)) \times G'_+ (\Sigma)$ *sur* Y.

Naturellement la condition (5.6) contient les diverses conditions:

$$\gamma_j u = g_j ,$$

$j = 0, 1, \ldots, m - 1$.

REMARQUE 5.1.

Notons que dans le problème mixte (5.5)-(5.6) la solution u est une distribution de $\mathcal{D}'(Q) = \mathcal{D}'(\mathcal{D}'(\Omega))$, donc une distribution en t *à valeurs dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$) (théorème des noyaux de *L. Schwartz*)*;* ce genre de situation généralise considérablement les résultats sur ce sujet existants dans la littérature.

REMARQUE 5.2.

Donnons ici une autre interprétation de l'espace $G_-(\Sigma)$ introduit au N⁰ 3. Pour $f \in \mathcal{D}(Q)$ soit $v = \mathcal{S} f$ la solution dans $\mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))$ de

$$\begin{cases} A^* v - D_t v = f, \\ v = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \dots = \dfrac{\partial^{m-1} v}{\partial \nu^{m-1}} = 0 \qquad \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$

L'application $f \longrightarrow \mathcal{C}\mathcal{S} f = \tilde{\mathcal{C}} f$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}(Q)/N_{\tilde{\mathcal{C}}}$ sur $G_-(\Sigma)$, où $N_{\tilde{\mathcal{C}}}$ est le noyau de $\tilde{\mathcal{C}}$.

Soit donc $f \in N_{\tilde{\mathcal{C}}}$, et *supposons* que les coefficients de $A\left(x, t, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ soient *analytiques* en x et t. Il semble extrêmement plausible [9] que $v = \mathcal{S} f$ est alors analytique en x et t pour $x \in \bar{\Omega}$, $t < t_f$, $t_f =$ borne inférieure en t du support de f. Or, si $f \in N_{\tilde{\mathcal{C}}}$, les données de Cauchy de v sont nulles sur Σ, donc $v = 0$ pour $t < t_f$ et donc $v \in \mathcal{D}(Q)$. Donc (si la conjecture ci dessus est vérifiée):

$$N_{\tilde{\mathcal{C}}} = (A^* - D_t)\,\mathcal{D}(Q) \qquad (\text{image de } \mathcal{D}(Q) \text{ par } A^* - D_t),$$

et par conséquent:

$$f \longrightarrow \tilde{\mathcal{C}} f$$

est un isomorphisme de $\mathcal{D}(Q)/_{(A^* - D_t)\mathcal{D}(Q)}$ sur $G_-(\Sigma)$.

Alors, par transposition, $\tilde{\mathcal{C}}^*$ est un isomorphisme de $G'_+(\Sigma)$ sur

$$(\mathcal{D}(Q)/_{(A^* - D_t)\mathcal{D}(Q)})' = \{u \in \mathcal{D}'(Q),\ Au + D_t u = 0\}.$$

---

[9] Mais ceci ne semble pas démontré. La remarque relative à l'analycité dans [12], pag. 123, est probablement correcte mais non démontrée.

Si $g \in G'_+(\Sigma)$, $\tilde{\mathcal{C}}^* g$ est définie par

$$\langle \tilde{\mathcal{C}}^* g, \bar{\varphi^\cdot} \rangle = \langle g, \overline{\tilde{\mathcal{C}} \varphi} \rangle, \qquad \varphi \in \varphi^\cdot, \qquad \varphi^\cdot \in \mathcal{D}(Q)/_{(A^* - D_t)\mathcal{D}(Q)} .$$

Or, soit u la solution dans $\mathcal{D}'(Q)$ de

$$(5.7) \qquad \begin{aligned} Au + D_t u &= 0 \\ \gamma u &= g, \end{aligned}$$

et soit $v \in \mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))$, avec $A^* v - D_t v = \varphi$, $\gamma v = 0$.

D'après la formule de Green (4.16), on a:

$$\langle u, \bar{\varphi} \rangle = \langle \gamma u, \overline{\mathcal{C} v} \rangle = \langle g, \overline{\tilde{\mathcal{C}} \varphi} \rangle$$

donc $\langle u, \bar{\varphi} \rangle = \langle \tilde{\mathcal{C}}^* g, \bar{\varphi^\cdot} \rangle$ d'où $u = \tilde{\mathcal{C}}^* g$.

Donc (toujours moyennant la véracité de la conjecture ci dessus), l'application $g \longrightarrow u$ ($=$ solution de (5.7)) est un isomorphisme de $G'_+(\Sigma)$ sur l'espace des $u \in \mathcal{D}'(Q)$, tels que $Au + D_t u = 0$ (ceci pour les topologies *fortes*).

REMARQUE 5.3.

Il suit de la définition de $G_-(\Sigma)$ que

$$(5.8) \qquad G_-(\Sigma) \subset (\mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\Gamma)))^m .$$

Par conséquent, si $g = \{g_0, \dots, g_{m-1}\}$ est donné avec

$$(5.9) \qquad \begin{cases} g_j \in (\mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\Gamma)))' = \mathcal{D}'_+(\mathcal{D}'(\Gamma)), & \textit{espace des distributions en } t \textit{ à} \\ \textit{valeurs dans } \mathcal{D}'(\Gamma) \textit{ et à support limité à gauche } (^{10}) \end{cases}$$

g définit en particulier un élément de $G'_+(\Sigma)$, qui peut être utilisé dans le théorème 5.1.

Mais en fait on a perdu beaucoup en utilisant *seulement* (5.8). Des résultats plus précis ne peuvent évidemment être obtenus qu'en caractérisant $G_-(\Sigma)$ de façon constructive. On reviendra sur ce point au n. 8.

---

[10] On démontre que $(\mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\Gamma)))' = \mathcal{D}'_+(\mathcal{D}'(\Gamma))$ par les mêmes raisonnements utilisés au n. 4.2 pour démontrer que $(\mathcal{D}_-(\Xi(\Omega)))' = \mathcal{D}'_+(\Xi'(\Omega))$.

REMARQUE 5.4.

On a, de façon analogue au théorème 5.1, le

THÉORÈME 5.1. *bis - On suppose que* (1.2) *et* (1.4) *ont lieu. Étant données* $f \in \mathcal{D}'_+(\Xi'(\Omega))$ *et* $g \in G'_*(\Sigma)$, *il existe* $u \in Y_*$ *unique satisfaisant à* (5.5) *et* (5.6). *En outre l'application* $\{f, g\} \rightarrow u$ *est continue, pour les topologies fortes, de* $\mathcal{D}'_+(\Xi'(\Omega)) \times G'_*(\Sigma)$ *sur* Y_*.

6. Le cas du cylindre fini.

6.1. D'après ce qui précède et d'après les remarques de l'introduction, il est clair que l'on pourra étendre les résultats des N⁰ 1 à 5 au cas d'un opérateur parabolique $A\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial t}$ dans un cylindre fini :

$$Q = \Omega \times]\,0, T\,[\,, \qquad T < \infty. \tag{6.1}$$

Désignons par $\mathcal{D}_-(F)$ l'espace des fonctions indéfiniment differentiables dans $]\,0, T\,[$, à valeurs dans un espace F et « à support limité à droite », c'est à dire nulles dans un voisinage (variable) de T. On définit alors X comme suit:

$$X = \{v \mid v \in \mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\bar{\Omega})),\ v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \dots = \frac{\partial^{m-1} v}{\partial \nu^{m-1}} = 0 \text{ sur } \Sigma' = \Gamma \times]\,0, T\,[\,, \quad A^* v - D_t v \in \mathcal{D}(Q)\}, \tag{6.2}$$

muni de la topologie localement convexe la moins fine rendant continue les applications $v \rightarrow v$ et $v \rightarrow A^* v - D_t v$ de X dans $\mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\bar{\Omega}))$ et $\mathcal{D}(Q)$ respectivement. Notons qu'il résùlte de la définition (6.2) que si $v \in X$, alors $v \in \mathcal{D}(\bar{Q})$.

La formule da Green va maintenant faire intervenir la « base » $\Sigma'' = \{(x, t) \mid x \in \bar{\Omega},\ t = 0\}$ du cylindre Q défini par (6.1); plus précisément, soient $u \in \mathcal{D}(\bar{Q})$, $v \in \mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\bar{\Omega})) \cap \mathcal{D}(\bar{Q})$; alors (cf. aussi (1.8) pour les notations):

$$\begin{aligned} \int_Q (Au + D_t u)\,\bar{v}\,dx\,dt - \int_Q u\,(\overline{A^* v} - \overline{D_t v})\,dx\,dt = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Sigma'} S_j u\,\overline{\gamma_j v}\,d\sigma\ - \\ - \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Sigma'} \gamma_j u\,\overline{T_j v}\,d\sigma - \int_{\Sigma''} u\,(x, 0)\,\overline{v\,(x, 0)}\,dx. \end{aligned} \tag{6.3}$$

L'opérateur $\mathcal{T}$ (N⁰ 3) doit maintenant contenir non seulement les opérateurs T_j, sur Σ', mais l'opérateur « trace sur $t = 0$ ». On pose donc, pour

$v \in X$,

(6.4) $$\mathcal{T} v = \{v(x, 0),\ T_0 v, \ldots, T_{m-1} v\}$$

ce qui définit une application de X dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \times (\mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\Gamma)))^m$; on désigne par $G_-(\Sigma)$ $(\Sigma = \Sigma' \cup \Sigma'')$ *l'image de X dans cette application* (muni de la topologie « quotient » de façon analogue au n. 3.1), et par $G'_+(\Sigma)$ *son dual fort.*

Les méthodes des N^0 précédents étendues à la situation actuelle — ce que l'on peut faire tout de suite — permettent de résoudre le problème mixte

(6.5) $$\begin{cases} Au + D_t u = f & \text{dans } Q \\ u = g_{\Sigma''} & \text{sur } \Sigma'' \\ \gamma u = g_{\Sigma'} & \text{sur } \Sigma' \end{cases}$$

Plus précisément, on définit l'espace Y des $u \in \mathcal{D}'(Q)$ telles que $Au + D_t u$ soit dans $\mathcal{D}'_+(\Xi'(\Omega)) = (\mathcal{D}_-(\Xi(\Omega)))'$ (définitions et résultats analogues à ceux du n. 4.1), muni de la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les applications $u \to u$ et $u \to Au + D_t u$ de Y dans $\mathcal{D}'(Q)$ et de Y dans $\mathcal{D}'_+(\Xi'(\Omega))$ respectivement. On démontre alors, par les mêmes méthodes qu'à la Proposition 4.1 et qu'au Théorème 4.1 et sous des hypothèses analogues, que *l'espace $\mathcal{D}(\bar{Q})$ est dense dans Y* et que *l'application*

$$u \to \tilde{\gamma} u = \{u(x, 0), \gamma_0 u, \ldots, \gamma_{m-1} u\},$$

linéaire de $\mathcal{D}(\bar{Q})$ dans l'espace $\mathcal{D}(\Sigma'') \times (\mathcal{D}(\bar{\Sigma'}))^m$ (11)*, se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée $u \to \tilde{\gamma} u$, de Y faible (muni de la topologie $\sigma(Y, Y')$ dans $G'_+(\Sigma)$ faible (muni de la topologie $\sigma(G'_+(\Sigma), G_-(\Sigma))$).* Et enfin on obtient le théorème principal, qui résout le problème mixte (6.5) :

THÉORÈME 6.1 : *On suppose que* (1.2) *et* (1.4) *ont lieu dans le cas du cylindre fini Q. Étant donné $f \in \mathcal{D}'_+(\Xi'(\Omega))$ et $g \in G'_+(\Sigma)$, il existe $u \in Y$ unique satisfaisant à*

(6.6) $$Au + D_t u = f$$

(6.7) $$\tilde{\gamma} u = g,$$

(11) $\mathcal{D}(\Sigma'')$ et $\mathcal{D}(\bar{\Sigma'})$ sont les espaces des fonctions indéfiniment différentiables respectivement sur Σ'' (qui est fermé) et sur $\bar{\Sigma'} = \Gamma \times [0, T]$.

u dépendant continûment de f et g (pour les topologies fortes respectivement de Y, $\mathcal{D}'_+(\Xi'(\Omega))$ et $G'_+(\Sigma)$).

On peut aussi faire des remarques analogues aux remarques 4.1, 4.2, 4.4, 4.5 (en s'appuyant sur (6.3)), 4.6, 5.1, 5.2.

7. Le cas de l'équation de la chaleur dans le rectangle.

7.1. Dans les N⁰ précédents, aussi bien dans le cas du cylindre infini que dans le cas du cylindre fini, on n'a pas donné une caractérisation intrinsèque de l'espace $G_-(\Sigma)$ (et donc de $G'_+(\Sigma)$) c'est à dire une définition de cet espace comme espace de fonctions définies sur Σ, indépendamment de l'opérateur A. Une telle question se pose évidemment et dépend d'un certain nombre de résultats sur les solutions classiques du problème aux limites étudié et du problème de Cauchy.

Nous conjecturons que, sous les hypothèses de ces travail et si *les coefficients a_{pq} appartiennent à des classes de Gevrey* (cf. [7]) *en t et sont analytiques en x alors $G_-(\Sigma)$ consiste aussi en des fonctions de Gevrey en t et analytiques en x.*

Mais nous vérifions seulement cette conjecture dans le cas très particulier de l'équation de la chaleur en une seule variable d'espace.

Nous considérons d'abord le cas du « cylindre fini » : $Q = \Omega \times]0, T[$ avec $\Omega =]0, 1[$ et $A = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$.

7.2. *Espace* $G_-(0, T)$.

On définit $G_-(0, T)$ comme l'espace des fonctions $t \to \varphi(t)$ indéfiniment différentiables sur $[0, T]$, nulles au voisinage de T, analytiques au voisinage de 0, telles qu'il existe deux constantes L et M (dépendants de φ) telles que

$$\sup_{t \in [0, T]} |\varphi^{(k)}(t)| \leq LM^{2k}(2k)! \qquad \forall k \tag{7.1}$$

On munit $G_-(0, T)$ de la topologie suivante : on désigne par $G_-^{(M)}(0, T)$ M fixé, l'espace des φ de $G_-(0, T)$ telles que :

i) $\varphi = 0$ si $t \geq T - \dfrac{1}{M}$ ($M > 1$, T est supposé ≥ 1 pour fixer les idées).

ii) (7.1) ait lieu

iii) $\sup\limits_{t \in \left[0, \frac{1}{M}\right]} |\varphi^{(k)}(t)| \leq LM^k k! \qquad \forall k.$

On munit $G_{-}^{(M)}(0, T)$ de la norme

$$\| \varphi \|_{G_{-}^{(M)}(0,T)} = \sup_k \sup_{t \in [0,T]} \frac{1}{(2k)!\, M^{2k}} | \varphi^{(k)}(t) | + \sup_k \sup_{t \in \left[0, \frac{1}{M}\right]} \frac{1}{k!\, M^k} | \varphi^{(k)}(t) |$$

qui en fait un espace de Banach.

On a alors $G_{-}(0, T) = \bigcup_{M=1,2,\ldots} G_{-}^{(M)}(0, T)$; et on munit $G_{-}(0, T)$ de la topologie de limite inductive qui en fait un $(\mathcal{LF})$.

7.3. *Espace* G_0.

On définit G_0 comme l'espace des fonctions $x \longrightarrow \psi(x)$ indéfiniment différentiables dans $[0, 1]$ telles qu'il existe deux constantes L et M (dépendants de ψ) telles que

$$(7.2) \qquad \begin{cases} | \psi^{(2k)}(0) | \leq L M^k \dfrac{(2k)!}{k!} \\ | \psi^{(2k+1)}(0) | \leq L M^k \dfrac{(2k+1)!}{k!} \end{cases} \qquad k = 0, 1, \ldots$$

ce qui implique, en particulier, que chaque ψ est la restriction à $[0, 1]$ d'une fonction entière ([12]).

On munit G_0 de la topologie suivante. On peut considérer l'espace $G_0^{(M)}$, M fixé, des ψ de G_0 telles que (7.2) ait lieu avec cet M fixé et L dépendant de ψ. On munit $G_0^{(M)}$ de la norme

$$\| \psi \|_{G_0^{(M)}} = \sup_k \left\{ \frac{k!}{M^k (2k)!} | \psi^{(2k)}(0) | + \frac{k!}{(2k+1)!\, M^k} | \psi^{(2k+1)}(0) | \right\}$$

qui en fait un espace de Banach.

On a alors $G_0 = \bigcup_{M=1,2,\ldots} G_0^{(M)}$: et on munit G_0 de la topologie de limite inductive qui en fait un $(\mathcal{LF})$.

7.4. *Espace* $G_{-}(\Sigma)$.

Rappelons que dans le cas actuel X est l'espace des v tels que $v \in \mathcal{D}_{-}(\mathcal{D}([0, 1]))$, $v(0, t) = v(1, t) = 0$, $-D_x^2 v - D_t v \in \mathcal{D}(Q)$; nous allons démontrer la

---

([12]) On dit parfois qu'une telle fonction admet une « majorante » au sens de Cauchy pe la forme $L(1 + x)\, e^{Mx^2}$.

PROPOSITION 7.1 : *Si* $v \in X$ *alors*

$$\frac{\partial v}{\partial x}(i, t) \in G_{-}(0, T), \qquad i = 0, 1 ; \tag{7.3}$$

$$v(x, 0) \in G_0 ; \tag{7.4}$$

on a les relations, pour $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\begin{gathered} D_x^{2k} v(x, 0)|_{x=0} = 0, \qquad D_x^{2k} v(x, 0)|_{x=1} = 0 \\ D_x^{2k+1} v(x, 0)|_{x=0} = (-1)^k D_t^k (D_x v(0, t))|_{t=0} \\ D_x^{2k+1} v(x, 0)|_{x=1} = (-1)^k D_t^k (D_x v(1, t)|_{t=0} . \end{gathered} \tag{7.5}$$

DÉMONSTRATION.

1) Si $v \in X$ alors

$$-D_x^2 v - D_t v = f, \qquad f \in \mathcal{D}(Q) \tag{7.6}$$

et, comme v est nulle au voisinage de T,

$$v(x, T) = 0. \tag{7.7}$$

Enfin on a aussi

$$v(0, t) = 0, \qquad v(1, t) = 0. \tag{7.8}$$

Définissons $\tilde{f}$ dans la bande : $-\infty < x < +\infty$, $0 < t < T$, par

$$\begin{cases} \tilde{f}(x, t) = -f(-x, t), & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ \tilde{f}(x, t) \text{ périodique en } x \text{ de période } 2. \end{cases}$$

Soit alors w la solution du *problème de Cauchy* :

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial t} = \tilde{f} \tag{7.9}$$

$$w(x, T) = 0 \qquad -\infty < x < +\infty \tag{7.10}$$

et telle que, par exemple, w soit à croissance lente pour chaque t fixé $< T$.

La fonction w est [13] anti-symétrique en x, par rapport à $x=0$ et par rapport à $x=1$: $w(x,t)=-w(-x,t)$, $w(1+x,t)=-w(1-x,t)$; donc

$$w(0,t)=w(1,t)=0$$

ce qui montre d'après l'unicité de la solution du problème mixte (7.6), (7.7) et (7.8) que :

$$w(x,t)=v(x,t) \quad \text{dans } Q \tag{7.11}$$

2) Maintenant il est facile de vérifier (7.3), (7.4) et (7.5) en utilisant la fonction w.

D'abord $\dfrac{\partial w}{\partial x}(i,t)\in G_-(0,T)$, $i=0,1$ à cause des résultats de [7] et [10] ; donc on a vérifié (7.3).

En suite, puisque $f\in\mathcal{D}(Q)$, il existe $\eta>0$ telle que le support de $\tilde{f}$ soit dans la bande : $\eta<t<T$, $-\infty<x<+\infty$; alors $w(x,t)$, solution du problème de Cauchy (7.9) (7.10) est analytique en (x,t) dans la bande : $0<t<\eta$, $-\infty<x<+\infty$; donc par un résultat classique sur les solutions analytiques de l'équation de la chaleur (cf. par ex. E. Goursat — Cours d'Analyse Mathématique — Paris (1927), t. III, p. 293) $w(x,0)$ vérifie (7.2), ce qui démontre (7.4).

Enfin on vérifie tout de suite (7.5), parce que w satisfait à $D_x^2 w=-D_t w$ au voisinage des points $(0,0)$ et $(1,0)$; c. q. f. d.

On définit maintenant G_- comme le sous espace (algébrique) de $G_0\times G_-(0,T)\times G_-(0,T)$, formé par les triplets de fonctions $(\psi,\varphi_0,\varphi_1)$ tels que

$$\begin{cases} \psi^{(2k)}(0)=0, & \psi^{(2k+1)}(0)=(-1)^k\varphi_0^{(k)}(0) \\ \psi^{(2k)}(1)=0, & \psi^{(2k+1)}(1)=(-1)^{k+1}\varphi_1^{(k)}(0) \\ k=0,1,\ldots. & \end{cases} \tag{7.12}$$

---

(13) La fonction w admet la représentation suivante bien connue :

$$w(x,t)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_t^T\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(\tau-t)}}}{\sqrt{\tau-t}}\tilde{f}(\xi,\tau)\,d\tau\,d\xi\,.$$

On munit G_- d'une topologie (*peut être*) plus fine que la topologie induite par $G_0 \times G_-(0, T) \times G_-(0, T)$. Soit $G_-^{(M)}$ l'espace des fonctions $(\psi, \varphi_0, \varphi_1)$ satisfaisant à (7.12) et appartenant à $G_0^{(M)} \times G_-^{(M)}(0, T) \times G_-^{(M)}(0, T)$: c'est un sous espace fermé, donc un espace de Banach et $G_- = \bigcup_{M=1,2,\ldots} G_-^{(M)}$; *on munit G_- de la topologie de limite inductive correspondante.*

On a alors la

PROPOSITION 7.2 : *L'application $v \longrightarrow \mathcal{T}v = \{v(x, 0), D_x v(0, t), - D_x v(1, t)\}$ est linéaire et continue de X dans G_-.*

En fait d'après la Proposition 7.1 il reste seulement à montrer que $v \longrightarrow \mathcal{T}v$ est *continue.* Comme X et G_- sont des espaces $(\mathcal{L}\mathcal{F})$ il résulte de [8] chap. I, th. B, p. 17, que le théorème du graphe fermé est valable; or l'application $v \longrightarrow \mathcal{T}v$ est par exemple continue de X dans l'espace $C^0([0, 1]) \times \times C^0([0, T]) \times C^0([0, T])$, d'où le résultat suit.

Montrons maintenant que l'application $v \longrightarrow \mathcal{T}v$ est surjective:

PROPOSITION 7.3: *Si $(\psi, \varphi_0, \varphi_1)$ est donné dans G_-, il existe $v \in X$ telle que:*

$$\text{(7.13)} \qquad \begin{cases} v(x, 0) = \psi(x) \\ D_x v(0, t) = \varphi_0(t) \qquad - D_x v(1, t) = \varphi_1(t) \end{cases}$$

DÉMONSTRATION.

Si $\varphi_0(t) \in G_0^{(M_0)}(0, T)$, on construit (cf. [10]) la fonction

$$w_0(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \varphi_0^{(k)}(t)\, x^{k+1}, \qquad 0 \leq x < \varrho_0 = \frac{1}{M_0}, \ 0 \leq t \leq T$$

qui est solution de

$$\text{(7.14)} \qquad - D_x^2 u - D_t u = 0 \qquad \text{dans } 0 < x < \varrho_0, \ 0 < t < T$$

avec les conditions (de Cauchy).

$$\text{(7.15)} \qquad w_0(0, t) = 0 \qquad D_x w_0(0, t) = \varphi_0(t)$$

A cause des (7.12) on obtient aussi que

$$\text{(7.16)} \qquad w_0(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \psi(x) \qquad 0 \leq x < \varrho_0$$

En outre $w_0(x, t)$ est analytique en (x, t) au voisinage du point (0, 0), parce que $\varphi_0(t)$ est analytique en t au voisinage de 0 ; et $w_0(x, t)$ est nulle dans un voisinage de $t = T$ puisque φ_0 a la même propriété

Par un procédé analogue on introduit à partir de φ_1 (échangeant les rôles de 0 et 1) une fonction $w_1(x,t)$ dans le rectangle $\varrho_1 < x \leq 1, 0 \leq t \leq T$ (on peut toujours supposer $0 < \varrho_0 < \varrho_1 < 1$), solution de (7.14) avec les conditions

$$w_1(1, t) = 0 \qquad - D_x w_1(1, t) = \varphi_1(t) \tag{7.17}$$

et telle que

$$w_1(x, 0) = \psi(x) \qquad \varrho_1 < x \leq 1 \tag{7.18}$$

et qui est analytique en (x, t) au voisinage du point $(1, 0)$ et nulle au voisinage de $t = T$.

Maintenant, puisque la fonction $\psi \in G_0$, on sait, par le résultat classique déjà mentionné dans la démonstration de la Proposition 7.1 (cf. Goursat l. c.), qu'il existe une fonction $w(x, t)$ solution analytique de (7.14) dans un voisinage de Σ'', c'est à dire dans un rectangle $\{0 \leq x \leq 1, -\varepsilon < t < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ convenable, telle que

$$w(x, 0) = \psi(x) \qquad 0 \leq x \leq 1$$

Mais alors dans un voisinage du point (0, 0) on a $w(x, t) = w_0(x, t)$ et dans un voisinage du point (1, 0) on a $w(x, t) = w_1(x, t)$; et on peut toujours supposer sans restriction que l'on a

$$w(x, t) = w_0(x, t) \quad \text{si} \quad 0 \leq x < \varrho_0, \quad 0 \leq t < \varepsilon$$

$$w(x, t) = w_1(x, t) \quad \text{si} \quad \varrho_1 < x \leq 1 \quad 0 \leq t < \varepsilon.$$

On considère maintenant une fonction $\alpha(x, t)$ indéfinimment différentiable dans $\overline{Q}$, égale à 0 dans le rectangle $[\varrho_0 \leq x \leq \varrho_1, \varepsilon \leq t \leq T]$ et égale à 1 si

$$0 \leq x \leq \varrho_0/2, \qquad 0 \leq t \leq T$$

$$0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq t \leq \varepsilon/2$$

$$\frac{\varrho_1}{2} \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Enfin on définit la fonction $v(x, t)$ par

$$
\begin{array}{llll}
v = \alpha w & \text{si} & 0 \leq x \leq 1, & 0 \leq t < \varepsilon \\
v = \alpha w_0 & \text{si} & 0 \leq x < \varrho_0, & 0 \leq t \leq T \\
v = \alpha w_1 & \text{si} & \varrho_1 < x \leq 1, & 0 \leq t \leq T \\
v = 0 & \text{ailleurs dans } \overline{Q}. & &
\end{array}
$$

On vérifie tout de suite que $v \in X$ et que v satisfait à (7.13) c. q. f. d.
Le résultat final est alors, avec les notations du n. 6 :

Théorème 7.1. *Dans le cas* $Q =]\,0, 1\,[\times]\,0, T\,[$, $A = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ *l'espace* $G_-(\Sigma)$ *du* n. 6 *est isomorphe à l'espace* G_-.

Démonstration.

L'application $v \longrightarrow \mathcal{T}v$ est linéaire et continue de X dans G_- (Proposition 7.2) et surjective (Prop. 7.3). Comme X et G_- sont des espaces $(\mathcal{L}\mathcal{F})$ au sens de [8] le résultat suit de la généralisation de [8] du théorème de Banach sur les homomorphismes.

Par application des théorèmes 6.1 et 7.1 on peut donc résoudre le problème mixte

$$
\begin{cases}
D_x^2 u - D_t u = f & \text{dans } Q =]\,0, 1\,[\times]\,0, T\,[\\
u = g & \text{sur } \Sigma = \{x=0,\ t \in [0, T]\} \cup \{x \in [0, 1],\ t=0\} \cup \{x=1,\ t \in [0, T]\}
\end{cases}
$$

lorsque f est donné dans $\mathcal{D}'_+(\Xi'(0, 1))$ et g est donné dans $G'_+(\Sigma) =$ dual de G_-.

Remarque 7.1.

Par les mêmes procédés qu'à la Prop. 7.3 et qu'au théorème 7.1 on démontre le lemme suivant :

Soit $(\psi, \varphi_0, \varphi_1)$ donné dans $G_-^{(M)}$, M fixé ; il existe alors $v \in X$ tel que

$$
v(x, 0) = \psi(x), \qquad D_x v(0, t) = \varphi_0(t) \qquad - D_x v(1, t) = \varphi_1(t)
$$

et tel que l'application $(\psi, \varphi_0, \varphi_1) \longrightarrow v$ soit linéaire et continue de $G_-^{(M)}$ dans X.

En utilisant ce « relèvement » $(\psi, \varphi_0, \varphi_1) \longrightarrow v$ et en modifiant légèrement la démonstration du théor. 6.1 (de façon analogue à celle du théor. 8.1

de [13] (VII)), on démontre que, dans le cas particulier de l'équation de la chaleur ici considéré, *l'application* $u \longrightarrow \gamma u$ *du théor.* 6.1 *est continue pour les topologies fortes de* Y *et de* $G'_+(\Sigma)$ (cf. Remarque 4.6); et alors le théor. 6.1 peut être précisé, dans ce cas, de la façon suivante: *l'application* $u \longrightarrow \left\{ -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t}, \tilde{\gamma} u = \text{trace de } u \text{ sur } \Sigma \right\}$ *est un isomorphisme de* Y *sur* $\mathcal{D}'_+(\Xi'(\Omega)) \times G'_+(\Sigma)$.

7.5. ESPACE $G'_+(\Sigma)$.

Il serait intéressant de donner une représentatiou explicite de l'espace $G'_+(\Sigma)$; mais la caractérisation des formes linéaires continues sur G_- semble compliquée. Il est pourtant facile de donner une représentation de fonctionnelles dejà générales et qui sont dans $(G_-)' = G'_+(\Sigma)$; soient g_k, h_k, $k = 0$, 1, 2, ... des *mesures* sur $[0, 1]$ (g_k, $h_k \in \mathcal{M}(0, 1)$), telles que

$$\| g_k \|_{\mathcal{M}(0,1)} = O\left(\frac{k!}{M^k (2k)!}\right) \text{ pour tout } M,$$

$$\| h_k \|_{\mathcal{M}(0,1)} = O\left(\frac{k!}{M^k (2k+1)!}\right) \text{ pour tout } M;$$

soient ensuite g_k^0, g_k^1 des mesures sur $[0, T]$ ($\in \mathcal{M}(0, T)$) telles que

$$\| g_k^i \|_{\mathcal{M}(0,T)} = O\left(\frac{1}{M^{2k} (2k)!}\right) \text{ pour tout } M; \qquad i = 0, 1;$$

soit enfin $\{t_{0k}\}$, $\{t_{1k}\}$ deux suites de nombres complexes telles que les fonctions $\sum_{k=0}^{\infty} t_{ik} z^k$, $(i = 0, 1)$ soient *entières*.

Alors soit $(\psi, \varphi_0, \varphi_1) \longrightarrow L(\psi, \varphi_0, \varphi_1)$ défini par

$$L(\psi, \varphi_0, \varphi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle g_k, \psi^{(2k)} \rangle + \sum_{k=0}^{\infty} \langle h_k, \psi^{(2k+1)} \rangle + \sum_{k=0}^{\infty} \langle g_k^0, \varphi_0^{(k)} \rangle +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \langle g_k^1, \varphi_1^{(k)} \rangle + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_{0k} \varphi_0^{(k)}(0)}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_{1k} \varphi_1^{(k)}(0)}{k!}$$

(où le premier et 2em), (resp. 3em et 4em) crochet désignent la dualité entre $\mathcal{M}(0, 1)$ et l'espace $C^0(0, 1)$ des fonctions continues dans $[0, 1]$, (resp. $\mathcal{M}(0, T)$ et $C^0(0, T)$); *dans ces conditions* $L(\psi, \varphi_0, \varphi_1)$ *est continue sur* G_-

Nous n'avons pas tenu compte du fait que φ_0 et φ_1 sont nulles dans un voisinage (variable) de T. On peut en tenir compte et expliciter une classe plus générale de formes linéaires continues sur G_- de la façon suivante: on considère deux familles de mesures f_{qk}^i ($i = 0, 1$), $q, k = 0, 1, \ldots, f_{qk}^i \in \mathcal{M}(0, T)$, telles que

$$\| f_{qk}^i \|_{\mathcal{M}(0,T)} = O\left(\frac{1}{M^{2k}(2k)!\, e^{(T-1/M)q}}\right) \text{ pour tout } M;$$

alors (les g_k, h_k, t_{ik} étant comme ci dessus), *la forme* τ *suivante est encore continue sur* G_- :

$$\tau(\psi, \varphi_0, \varphi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle g_k, \psi^{(2k)} \rangle + \sum_{k=0}^{\infty} \langle h_k, \psi^{(2k+1)} \rangle + \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \langle f_{qk}^0, e^{qt} \varphi_0^{(k)} \rangle +$$

$$+ \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \langle f_{qk}^1, e^{qt} \varphi_1^{(k)} \rangle + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_{0k}}{k!} \varphi_0^{(k)}(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_{1k}}{k!} \varphi_1^{(k)}(0)$$

8. Le cas de l'équation de la chaleur dans une bande.

8.1. *L'espace* $G_-(R)$.

Nous étudions dans ce numéro le cas de l'équation de la chaleur dans la bande $Q =]0, 1[\times]-\infty, +\infty[$. Avec les notations du n. 1 on a alors $\Omega =]0, 1[$, $\Sigma = \{x = 0,\ t \in R\} \cup \{x = 1,\ t \in R\}$ $(R =]-\infty, +\infty[)$, $A = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, $X = \{v \mid v \in \mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\bar{\Omega})),\ -D_x^2 v - D_t v \in \mathcal{D}(Q),\ v(0, t) = v(1, t) = 0\}$, $\mathcal{T} v = \{D_x v(0, t), -D_x v(1, t)\}$.

Désignons par $G_-(R)$ l'espace des fonctions $t \to \varphi(t)$ indéfiniment différentiables dans R telles qu'il existe 4 constantes t_1, t_2, L et M (dépendants de φ) telles que

i) $\varphi(t) = 0$ pour $t \geq t_2$

ii) $\varphi^{(k)}(t) \to 0$ pour $t \to -\infty$, $\quad \forall k$.

iii) $\sup\limits_{t \in R} |\varphi^{(k)}(t)| \leq L M^{2k} (2k)!$ $\quad \forall k$.

iv) $\sup\limits_{t \leq t_1} |\varphi^{(k)}(t)| \leq L M^k k!$ $\quad \forall k$.

Il s'agit donc de fonctions qui sont dans une classe de Gevrey dans R et analytiques pour $t \leq t_1$.

On munit $G_-(R)$ de la topologie suivante. On désigne par $G_-^{(M)}(R)$, M fixé, l'espace des $\varphi \in G_-(R)$ telles que i), ii), iii), iv) sont valables pour cet M et pour $t_1 = -M$, $t_2 = M$; $G_-^{(M)}(R)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\| \varphi \|_{G_-^{(M)}(R)} = \sup_k \sup_{t \in R} \frac{|\varphi^{(k)}(t)|}{(2k)!\, M^{2k}} + \sup_k \sup_{t \leq -M} \frac{|\varphi^{(k)}(t)|}{k!\, M^k}.$$

On a alors $G_-(R) = \bigcup_{M=1,2,\ldots} G_-^{(M)}(R)$; et on munit $G_-(R)$ de la topologie correspondante de limite inductive qui en fait un espace $(\mathcal{LF})$.

8.2. *L'espace* $G_-(\Sigma)$.

On définit maintenant G_- comme le sous espace de l'espace $G_-(R) \times G_-(R)$ formé par les couples (φ_0, φ_1), $\varphi_i \in G_-(R)$ tels que

$$(8.1) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varphi_0(t)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varphi_1^{(k)}(t) \frac{(1-x)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$0 \leq x \leq 1, \; t < \min(t_1(\varphi_0), t_1(\varphi_1))$$

où $t_1(\varphi_i)$ est le nombre t_1 par rapport à φ_i qui apparait dans la condition iv).

Désignons par $G_-^{(M)}$ le sous espace de $G_-^{(M)}(R) \times G_-^{(M)}(R)$ formé des couples (φ_0, φ_1) vérifiant (8.1); c'est un sous espace *fermé* de $G_-^{(M)}(R) \times G^{(M)}(R)$ (en effet si $(\varphi_{0,\nu}, \varphi_{1,\nu}) \to (\varphi_0, \varphi_1)$ dans $G_-^{(M)}(R) \times G_-^{(M)}(R)$, on a:

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varphi_{0,\nu}^{(k)}(t) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varphi_0^{(k)}(t) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq$$

$$\leq \| \varphi_{0,\nu} - \varphi_0 \|_{G_-^{(M)}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{(k+1)\ldots(2k+1)}$$

de sorte que $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varphi_{0,\nu}^{(k)}(t) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \to \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varphi_0^{(k)}(t) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ uniformément pour $x \in [0,1]$, $t \in R$; de même $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varphi_{1,\nu}^{(k)}(t) \frac{(1-x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \to$ $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varphi_1^{(k)}(t) \frac{(1-x)^{2k+1}}{(2k+1)!}$ au même sens et donc (8.1) est conservé par passage à la limite). Donc $G_-^{(M)}$ est un espace de Banach. *On munit maintenant* $G_- = \bigcup_{M=1,2,\ldots} G_-^{(M)}$ *de la topologie* $(\mathcal{LF})$ *de limite inductive des* $G_-^{(M)}$, qui en fait un espace $(\mathcal{LF})$.

Nous allons démontrer la

PROPOSITION 8.1. *Si* $v \in X$ *alors* $\mathcal{T} v \in G_-$ *et l'application* $v \to \mathcal{T} v$ *est linéaire et continue de* X *dans* G_-.

DÉMONSTRATION.

Si $-D_x^2 v - D_t v = f, f \in \mathcal{D}(Q)$; on peut donc prolonger f dans tout l'espace $R_x \times R_t$ de façon analogue à ce qu'on a fait au n. 7.4, c'est à dire qu'on définit

$$\begin{cases} \tilde{f}(x,t) = -f(x,t), & -1 \leq x \leq 0 \\ \tilde{f}(x,t) \text{ périodique en } x \text{ de période } 2. \end{cases}$$

Alors $v(x,t)$ admet le prolongement suivant dans tout l'espace $R_x \times R_t$:

$$w(x,t) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } t > T_f = \text{borne supérieure en } t \text{ du support de } f \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_t^{T_f} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4(\tau - t)}}}{\sqrt{\tau - t}} \tilde{f}(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau \quad \text{si } t \leq T_f \end{cases} \tag{8.2}$$

$w(x,t) = v(x,t)$ si $(x,t) \in Q$ (considérations tout à fait analogues à celles du n. 7.4).

En utilisant (8.2) on voit tout de suite que $v(x,t)$ tend vers zéro ainsi que chacune de ses dérivées lorsque $t \to -\infty$, uniformément dans $[0,1]$ par rapport à x.

Si on pose $\varphi_0(t) = D_x v(0,t)$, $\varphi_1(t) = -D_x v(1,t)$, on voit alors que $\varphi_0(t)$ et $\varphi_1(t)$ satisfont à i) et ii).

Puisque $\tilde{f}(x,t)$ est nulle au voisinage des deux droites $x = 0$ et $x = 1$, et $w(x,t)$ est borné, il en résulte d'après [7], pag. 165-167, qu'il existe L et M tels que iii) soit valable pour φ_0 et φ_1. Toujours d'après (8.2), le support de $\tilde{f}$ étant borné par rapport à t, on voit, par des considérations analogues à celles du n. 7.4 (démonstration de la Proposition 7.1, 2)) que $w(x,t)$ est analytique en (x,t) pour $x \in R_x$ et $t \leq t_1$ (t dépendant du support de f); donc puisqu'on a déjà signalé que $v(x,t)$ tend vers zéro ainsi que chacune de ses dérivées lorsque $t \to -\infty$, uniformément dans $[0,1]$ par rapport à x, on en déduit qu'il existe L et M tels que iv) soit valable pour φ_0 et φ_1.

En outre on a

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varphi_0^{(k)}(t) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varphi_1^{(k)}(t) \frac{(1-x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ 0 \leq x \leq 1, \qquad\qquad t \leq t_1 . \end{cases} \tag{8.3}$$

En fait la fonction

$$w_0(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varphi_0^{(k)}(t) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{8.4}$$

est dans la bande $-\frac{1}{M} < x < \frac{1}{M}$, $-\infty < t < +\infty$ solution de $-D_x^2 w - D_t w = 0$ et satisfait aux conditions $w_0(0,t) = 0$, $D_x w_0(0,t) = \varphi_0(t)$; donc par l'unicité du problème de Cauchy, $w_0(x,t)$ coincide dans une bande $-\sigma < x < \sigma$, $-\infty < t < +\infty$ avec $w(x,t)$.

Mais $w(x,t)$ est pour $t \leq t_1$ analytique en (x,t) et alors pour $t \leq t_1$ la série de puissances en x qui définit $w_0(x,t)$ au deuxième membre de (8.4) est une fonction entière en x et coincide avec $w(x,t)$.

On raisonne de façon analogue avec la fonction

$$w_1(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varphi_1^{(k)}(t) \frac{(1-x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{8.5}$$

et on en déduit (8.3); donc $\mathcal{T}v \in G_-$.

Il reste seulement à montrer que $v \to \mathcal{T}v$ est continue, ce qu'on obtient par la même démonstration qu'à la Proposition 7.2.

Montrons maintenant que l'application $v \to \mathcal{T}v$ est surjective.

PROPOSITION 8.2: *Si (φ_0, φ_1) est donné dans G_-, il existe $v \in X$ telle que $D_x v(0,t) = \varphi_0(t)$, $-D_x v(1,t) = \varphi_1(t)$.*

DÉMONSTRATION.

Si (φ_0, φ_1) est donné dans G_-, alors φ_0 et φ_1 doivent vérifier (8.1) c'est à dire (8.3) pour t_1 convenable. Donc si l'on considère les fonctions $w_0(x,t)$ et $w_1(x,t)$ données par les formules (8.4) et (8.5), on a

$$w_0(x,t) = w_1(x,t) \qquad \text{pour } 0 \leq x \leq 1, t \leq t_1 .$$

Nous définissons alors $v(x,t)$ dans la demi bande $0 \leq x \leq 1$, $t \leq t_1 - \varepsilon$ en posant

$$v(x,t) = w_0(x,t) = w_1(x,t) \qquad 0 \leq x \leq 1, \quad t \leq t_1 - \varepsilon \ (\varepsilon > 0 \text{ fixé}) \tag{8.6}$$

Evidemment $v(x,t)$ est dans cette bande analytique en (x,t) et satisfait à l'équation

$$-D_x^2 v(x,t) - D_t v = 0 \tag{8.7}$$

et aux conditions $v(0,t) = v(1,t) = 0$, $D_x v(0,t) = \varphi_0(t)$, $-D_x v(1,t) = \varphi_1(t)$. Ensuite soit t_2 tel que $\varphi_i(t) = 0$ pour $t \geq t_2$ (condition i)). Alors on pose

$$v(x,t) = 0 \qquad \text{pour } 0 \leq x \leq 1,\ t \geq t_2 \tag{8.8}$$

Il reste seulement à définir $v(x,t)$ dans le rectangle $0 \leq x \leq 1$, $t_1 - \varepsilon < < t < t_2$. On peut faire cela de façon analogue à celle utilisée dans la Proposition 7.3. En fait la fonction $w_0(x,t)$ donné par (8.4) est encore solution de (8.7) dans le bande $0 < x < \frac{1}{M_0}$, $-\infty < t < +\infty$ (M_0 dépendant de φ_0 selon les conditions iii)), et satisfait aux conditions de Cauchy

$$w_0(0,t) = 0 \qquad D_x w_0(0,t) = \varphi_0(t).$$

De même $w_1(x,t)$ donné par (8.5) est solution de (8.7) dans la bande $1 - \frac{1}{M_1} < x < 1, -\infty < t < +\infty$ (M_1 dépendant de φ_1) et satisfait aux conditions de Cauchy

$$w_1(1,t) = 0 \qquad -D_x w_1(1,t) = \varphi_1(t).$$

On considère maintenant une fonction $\alpha(x,t)$ indéfiniment différentiable dans $[0,1] \times [t_1 - \varepsilon, t_2]$, égale à zero si $\frac{1}{M_0} \leq x \leq 1 - \frac{1}{M_1}$, $t_1 \leq t \leq t_2$ et égale à 1 si $0 \leq x \leq \frac{1}{2M_0}$, $t_1 - \varepsilon \leq t \leq t_2$ et $0 \leq x \leq 1$, $t_1 - \varepsilon \leq t \leq t_1 - \varepsilon/2$ et $1 - \frac{1}{2M_1} \leq x \leq 1$, $t_1 - \varepsilon \leq t \leq t_2$.

Enfin on définit $v(x,t)$ dans $[0,1] \times [t_1 - \varepsilon, t_2]$ par

$$v(x,t) = \begin{cases} \alpha w_0 = \alpha w_1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t_1 - \varepsilon \leq t \leq t_1 \\ \alpha w_0 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{M_0},\ t_1 - \varepsilon \leq t \leq t_2 \\ \alpha w_1 & \text{si } 1 - \frac{1}{M_1} \leq x \leq 1,\ t_1 - \varepsilon \leq t \leq t_2 \\ 0 & \text{ailleurs dans } [0,1] \times [t_1 - \varepsilon, t_2] \end{cases}$$

Et la Proposition 8.2. est démontrée.

Par la même démonstration qu'au Théorème 7.1 on alors le :

THÉORÈME 8.1. *L'espace $G_-(\Sigma)$ est isomorphe à l'espace G_-.*

On peut donc résoudre le problème

$$\begin{cases} D_x^2 u - D_t u = f & \text{dans } Q =]\,0,1\,[\times R \\ u = g & \text{sur } \quad \Sigma = \{x = 0, \ t \in R\} \cup \{x = 1, \ t \in R\} \end{cases}$$

lorsque f est donné dans $\mathcal{D}'_+(\Xi'(0,1))$ et g est dans le dual de G_-.

REMARQUE 8.1.

On peut faire une remarque analogue à la remarque 7.1 : *l'application $u \longrightarrow \gamma_0 u$ du théorème* 6.1 *est dans ce cas continue pour les topologies fortes de Y et de $G'_+(\Sigma)$; et l'application $u \longrightarrow \{-D_x^2 u + D_t u, \gamma_0 u\}$ est un isomorphisme de Y sur $\mathcal{D}'_+(\Xi'(\Omega)) \times G'_+(\Sigma)$.*

Il serait intéressant de donner une représentation explicite de l'espace $G'_+(\Sigma) = G'_-$. Mais cela doit être compliqué; on pourrait, ici encore, donner une représentation de certaines fonctionnelles générales, comme on a fait dans le cas du rectangle (cf. n. 7.5).

En outre nous avons vu dans la théorie des n. 1-5 qu'on peut modifier l'espace X en introduisant d'autres espaces analogues, par ex. l'espace X_*, pour lesquels la théorie générale peut être aussi développée; on peut alors trouver des espaces, tels que $G'_*(\Sigma)$ (cf. remarque 3.2), qui sont plus simples que $G'_+(\Sigma)$ et pour lesquels on peut donner facilement des théorèmes de représentation. En fait on va maintenant étudier ce cas de l'espace X_*, dans le cas de la équation de la chaleur considérée dans ce numéro.

8.3. *Les espaces $G_*(\Sigma)$ et $G'_*(\Sigma)$.*

Avec les notations des n. 1-5 nous aurons donc encore $\Omega =]\,0,1\,[$, $Q = \Omega \times R$, $\Sigma = \{x = 0, \ t \in R\} \cup \{x = 1, t \in R\}$, $A = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ et $X_* = \{v \mid v \in \mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\bar{\Omega})), \ v(0,t) = v(1,t), \ -D_x^2 v - D_t v \in \mathcal{D}_*(Q)\}$ ($\mathcal{D}_*(Q)$ défini à la Remarque 2.2).

Nous allons démontrer que l'*espace $G_*(\Sigma)$* (définition à la Remarque 3.1) *s'identifie dans ce cas à un produit d'espaces de Gevrey sur l'axe réel.*

Définissons d'abord cet espace de Gevrey. Désignons par $G_*(R)$ l'espace des fonctions $t \longrightarrow \varphi(t)$ indéfiniment différentiables dans R telles qu'il existe trois constantes t_2, L et M (dépendants de φ) telles que

j) $\varphi(t) = 0$ pour $t \geq t_2$

jj) $\varphi^{(k)}(t)$ est borné dans R, $k = 0, 1, 2, \dots$

jjj) $\sup_{t \in R} |\varphi^{(k)}(t)| \leq LM^{2k}(2k)!$, $k = 0, 1, 2, \dots$

On munit $G_*(R)$ de la topologie suivante. On désigne par $G_*^{(M)}(R)$, M fixé, l'espace des $\varphi \in G_*(R)$ telles que j) jj) jjj) aient lieu pour cet M et pour $t_2 = M$, muni de la norme

$$\| \varphi \|_{G_*^{(M)}(R)} = \sup_k \sup_{t \in R} \frac{|\varphi^{(k)}(t)|}{(2k)!\, M^{2k}}.$$

On a alors $G_*(R) = \bigcup_{M=1,2,\dots} G_*^{(M)}(R)$ et on munit $G_*(R)$ de la topologie correspondante de limite inductive qui en fait un espace $(\mathcal{LF})$.

On va donner quelques précisions sur la topologie de $G_*(R)$, d'où suivra, à l'aide de résultats de Köthe et Roumieu, la structure des éléments de $G'_*(R)$, dual de $G_*(R)$.

Désignons par $\mathcal{B}$ l'espace des fonctions $t \to f(t)$ continues et bornées sur R, muni de la norme

$$\| f \|_{\mathcal{B}} = \sup_{t \in R} |f(t)|$$

qui en fait un espace de Banach.

On considère ensuite l'espace E des *suites* $\{f_{qk}\}$; $q, k = 0, 1, 2, \dots$ telles que

$$f_{qk} \in \mathcal{B} \qquad \forall\, q, k, \tag{8.9}$$

et telles que

$$\begin{cases} \text{il existe } L \text{ et des entiers } m_1 \text{ et } m_2 \text{ tels que} \\ |f_{qk}(t)| \leq L\, m_1^{2k}(2k)!\ \exp(q m_2) \qquad \forall\, q, k. \end{cases} \tag{8.10}$$

Désignons par E_{m_1, m_2} le sous espace des suites $\{f_{qk}\}$ telles que (8.9) ait lieu et que (8.10) ait lieu avec m_1, et m_2 *fixés* ; munissons E_{m_1, m_2} de la norme (qui en fait un Banach):

$$\| \{f_{qk}\} \|_{E_{m_1 m_2}} = \sup_{t, q, k} \frac{|f_{qk}(t)|}{m_1^{2k}(2k)!\exp(q m_2)} \tag{8.11}$$

On a : $E_{m_1, m_2} \subset E_{m_1+n_1, m_2+n_2}$ avec injection continue, si $n_i \geq 0$; alors

$$E = \bigcup_{m_1, m_2} E_{m_1, m_2}, \text{ avec la topologie de limite inductive.} \tag{8.12}$$

L'espace E entre dans la famille des espace de Köthe (cf. Köthe [11], Roumieu [15]).

Considérons maintenant $\varphi \in G_*(R)$ et associons lui la suite:

$$S(\varphi) = \{f_{qk}\}, \quad f_{qk}(t) = \exp(qt)\,\varphi^{(k)}(t) \tag{8.13}$$

Vérifions que $S(\varphi) \in E$. En effet, si $\varphi \in G_*(R)$, alors $\varphi(t) = 0$ pour $t \geq m_2$, m_2 convenable et alors

$$\exp(-qm_2)\,|f_{qk}(t)| \leq (\exp q\,(t - m_2))\,|\varphi^{(k)}(t)| \leq |\varphi^{(k)}(t)|,$$

de sorte que (8.10) a lieu et (8.9) a lieu puisque $\varphi^{(k)}(t)$ est borné.

Réciproquement soit φ donnée indéfiniment différentiable, telle que $S(\varphi) \in E$. Alors $\varphi \in G_*(R)$. En effet, d'abord $f_{0k} \in \mathcal{B}$ de sorte que $\varphi^{(k)}(t)$ est borné. Ensuite, il existe m_1 et m_2 tels que

$$|\varphi^{(k)}(t)| \leq L m_1^{2k}(2k)!\,\exp q\,(m_2 - t) \tag{8.14}$$

et donc, $\varphi^{(k)}(t) = 0$ si $t > m_2$ (faire $q \to \infty$ dans (8.14)). Pour $t \leq m_2$, (8.14) donne:

$$|\varphi^{(k)}(t)| \leq \inf_{q \geq 0} L m_1^{2k}(2k)!\,\exp q\,(m_2 - t) = L m_1^{2k}(2k)!$$

d'où le résultat.

L'application $\varphi \to S(\varphi)$ est donc un isomorphisme algébrique de $G_*(R)$ dans un sous-espace de E. Mais on vérifie directement et facilement que si des $\varphi_\nu \to 0$ dans $G_*(R)$ alors $S(\varphi_\nu) \to 0$ dans E et viceversa; donc $\varphi \to S(\varphi)$, est un isomorphisme topologique.

Espace dual $G'_*(R)$.

Soit $\varphi \to L(\varphi)$ une forme linéaire continue sur $G_*(R)$. Alors

$$\psi \to L(S^{-1}(\psi))$$

est linéaire continue sur $S(G_*(R)) \subset E$; d'après le théorème de Hahn-Banach et le théorème de Köthe (cf. aussi Roumieu [14], p. 45) donnant la structure des formes linéaires continues sur E, il existe des éléments (mesures) $\mu_{qk} \in \mathcal{B}'$, dual de $\mathcal{B}$, tels que

$$\|\mu_{qk}\|_{\mathcal{B}'} = O\left(\frac{1}{m_1^{2k}(2k)!\,\exp(qm_2)}\right) \quad \forall\, m_1, m_2 \tag{8.15}$$

et que

$$
(8.16) \qquad \begin{cases} L(\varphi) = \sum\limits_{q,k} \langle \exp(qt)\, \varphi^{(k)}(t), \mu_{qk} \rangle = \\ \qquad = \sum\limits_{q,k} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(qt)\, \varphi^{(k)}(t)\, d\mu_{qk}. \end{cases}
$$

Les formules (8.15) *et* (8.16) *donnent la représentation de tout élément* L *de* $G'_+(R)$.

Ceci posé, on a la

PROPOSITION 8.1. bis: *Si* $v \in X_*$, *alors* $D_x v(i,t)$, $i = 0, 1$ *appartient à* $G_*(R)$ *et l'application* $v \longrightarrow D_x v(i,t)$ *est linéaire continue de* X_* *dans* $G_*(R)$.

La démonstration est la même qu'à la première partie de la démonstration de la Proposition 8.1; il faut seulement noter que $f = -D_x^2 v - D_t v$, étant dans $\mathcal{D}_*(Q)$, doit appartenir à $(\mathcal{D})_{\alpha,\beta}$ pour α et β convenable (cf. Remarque 2.2): donc il existe α et β tels que $f(x,t) = 0$ si $t > \alpha$ ou bien si $x < \dfrac{1}{\beta}$ ou bien si $x > 1 - \dfrac{1}{\beta}$.

Et aussi il faut noter que la fonction $w(x,t)$ définie par (8.2) est bornée ainsi que chacune des ses dérivées, puisque f est bornée; donc $v(x,t)$ est bornée ainsi que chacune de ses dérivées dans $\overline{Q}$ et $D_x v(i,t)$, $i = 0, 1$, vérifient *jj*).

On a aussi la

PROPOSITION 8.2. bis: *Si* (φ_0, φ_1) *est donné dans* $G_*(R) \times G_*(R)$ *il existe* $v \in X_*$ *telle que* $D_x v(0,t) = \varphi_0(t)$, $-D_x v(1,t) = \varphi_1(t)$.

DÉMONSTRATION.

On définit $w_0(x,t)$ et $w_1(x,t)$ par (8.4) et (8.5) de façon que $w_0(x,t)$ soit solution de (8.7) dans la bande $0 < x < \dfrac{1}{M_0}$, $-\infty < t < +\infty$ (M_0 dépendant de φ_0) et $w_1(x,t)$ soit solution de (8.7) dans $1 - \dfrac{1}{M_1} < x < 1$, $-\infty < t < +\infty$ (M_1 dépendant de φ_1). Si $\alpha(x)$ est une fonction indéfiniment différentiable dans $[0,1]$, nulle dans $\left[\dfrac{1}{M_0}, 1 - \dfrac{1}{M_1}\right]$ et égale à 1 au voisinage de 0 et de 1, on définit $v(x, t)$ par

$$v(x,t)=\begin{cases}\alpha(x)\,w_0(x,t) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{M_0}, \qquad t \in R\\[2mm] 0 & \text{si} \quad \dfrac{1}{M_0} \leq x \leq 1-\dfrac{1}{M_1}, \qquad t \in R\\[2mm] \alpha(x)\,w_1(x,t) & \text{si} \quad 1-\dfrac{1}{M_1} \leq x \leq 1, \qquad t \in R;\end{cases}$$

$v(x, t)$ satisfait aux conditions de la Proposition.

Enfin par la même démonstration qu'aux théorèmes 7.1 et 8.1 on a

THÉORÈME 8.1. bis: *L'espace $G_*(\Sigma)$ est isomorphe au produit $G_*(R) \times G_*(R)$.*

Donc on peut résoudre le problème

$$\begin{cases} D_x^2 u - D_t u = f & \text{dans } Q\\ u(0,1) = g_0 \\ u(1,t) = g_1\end{cases}$$

lorsque f est donné dans $\mathcal{D}'_+(\Xi'(\Omega))$ et g_i sont des fonctionnelles données par (8.16).

REMARQUE 8.2.

On peut faire une remarque analogue aux Remarques 7.2 et 8.1.

REMARQUE 8.3.

Comme on a déjà signalé à la fin de la Remarque 4.7 on peut construire beaucoup d'espaces différents mais de même type que X et X_*; par exemple il parait assez naturel de considérer

$$\begin{aligned}\widetilde{X} = \{v \mid v \in \mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\bar{\Omega})), \qquad & A^*v - D_t v \in \mathcal{D}_-(\mathcal{D}(\Omega)),\\ \gamma_i v = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma, \qquad & i = 0, \dots, m-1\}\end{aligned}$$

pour lequel on peut développer une théorie analogue.

Soit $\widetilde{G}(\Sigma)$ l'espace parcouru par $\mathcal{T}v$, $v \in \widetilde{X}$. Dans le cas particulier de l'équation de la chaleur de ce numéro, on voit que si $\{\varphi_0, \varphi_1\} \in \widetilde{G}(\Sigma)$, alors φ_i est dans un espace de Gevrey sur *tout compact*, nous ignorons si ces propriétés sont caractéristiques.

BIBLIOGRAPHIE

1. N. ARONSZAJN-A. N. MILGRAM, *Differential operators on Riemannian manifolds*. Rend. Circ. Mat. Palermo, 2 (1952), p. 1-61.
2. N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*. Chap. I et II. Paris, Hermann, 1953.
3. N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*. Chap. III et IV. Paris Hermann, 1955.
4. G. CIMMINO, *Su alcuni esempi notevoli di dualità fra spazi lineari topologici*. Rend. Sem. Mat. Fis. Milano XXXIII (1963), 102-113.
5. J. DIEUDONNÉ-L. SCHWARTZ, *La dualité dans les espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{LF}$*. Annales Institut Fourier t. 1 (1950), p. 61-101.
6. S. D. EIDELMAN, *Sur la solution fondamentale des systèmes paraboliques*. Mat. Sbornik 38 (1956), p. 51-92.
7. M. GEVREY, *Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles*, Ann. Ecole Norm. Sup. Paris, 35 (1918), 129-190.
8. A. GROTHENDIECK, *Produits tensoriels topologiques*. Memoirs of the Amer. Math. Soc., 1955.
9. A. GROTHENDIECK, *Sur les espaces ($\mathcal{F}$) et ($\mathcal{DF}$)*, Summa Brasiliensis Math., 3 (1954), 57-123.
10. E. HOLMGREN, *Sur l'équation de la propagation de la chaleur*. Arkiv for Math. Ast. och. Fysik, t. 4, n^0 18, (1909), p. 1-28.
11. G. KÖTHE, *Topologische Lineare Raüme*. Springer, Berlin, 1960.
12. J. L. LIONS, *Equations différentielles opérationnelles*, Springer, Grundlehren der Math. Wiss., t. 111, 1961.
13. J. L. LIONS-E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes*, (I)...(VII); (I) (III) (IV) (V) Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, t. XIV (1960), p. 259-308; t. XV (1961), 39-101; 311-326; t. XVI, (1962), p. 1-44; (II) Annales Institut Fourier, t. 11 (1961), p. 137-178; (VI) Journal d'Analyse Math., XI (1963), 165-188; (VII) Annali di Mat. pura appl. t. 63 (1963), 201-224.
14. J. L. LIONS-E. MAGENES, *Remarques sur les problèmes aux limites pour opérateurs paraboliques*. C. R. Acad. Sc., Paris, 251 (1960), 2118-2120.
15. C. ROUMIEU, *Ultra distributions...* Journal d'Analyse Math. vol. X (1962/63), p. 153-192.
16. L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, I et II, Hermann, Paris, 1950-51.
17. L. SCHWARTZ, *Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles*. Journal d'Analyse Math. vol. IV, 1954-55, 88-148.
18. L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions à valeurs vectorielles*. I, II. Annales Institut Fourier. t. VII (1957), 1-141; t. VIII (1958) p. 1-209.
19. C. BAIOCCHI, *Sui problemi ai limiti per le equazioni paraboliche del tipo del calore* (à paraître).