ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

CALOGERO VINTI

Perimetro - Variazione

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 18, nº 2 (1964), p. 201-231
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1964_3_18_2_201_0>

PERIMETRO — VARIAZIONE

di Calogero Vinti (*)

Introduzione. Nel lavoro [2] (v. Bibliografia), nato con lo scopo di stabilire una interdipendenza tra i processi stocastici Markoviani e i processi di approssimazione in perimetro alla E. De Giorgi ([8], [9]), abbiamo preso in esame, in uno spazio di misura $\{R, \mathcal{B}, \mu\}$, la classe delle funzioni $f(r, x; s, y)$, detti nuclei o funzioni di densità di passaggio, definite per $0 \leq r < s < +\infty$, $x \in R_x$, $y \in R_y$, che godono delle proprietà:

I⁰) $f(r, x; s, y) \geq 0$;

II⁰) $f(r, x; s, y)$ risulti μ-integrabile rispetto ad y in R e si abbia:

$$\int_R f(r, x; s, y)\, d\mu_y = 1,$$

qualunque siano $0 \leq r < s < +\infty$, $x \in R_x$;

III⁰) il prodotto $f(r, x; \theta, y)\, f(\theta, y; s, z)$ risulti μ-integrabile rispetto ad y in R, qualunque siano r, $x \in R_x$, θ, s, $z \in R_y$, con $0 \leq r < \theta < s < +\infty$, e valga la relazione di passaggio di Kolmogorov:

$$\int_R f(r, x; \theta, y)\, f(\theta, y; s, z)\, d\mu_y = f(r, x; s, z).$$

A partire da questi nuclei, imponendo ad essi ulteriori condizioni, abbiamo dato due definizioni assiomatiche di perimetro di un insieme, una detta « progressiva » e l'altra « regressiva », e in ciascuna di queste definizioni la relazione Kolmogoroviana s'è sostituita con un'altra più generale che abbiamo chiamato relazione di Kolmogorov generalizzata.

Pervenuto in Redazione il 13 Febbraio 1964.

(*) Istituto di Matematica dell'Università di Modena.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca N. 18 del Comitato per la Matematica del C. N. R. (anno accademico 1963-64).

Queste definizioni di perimetro ci hanno indotto a generalizzare il concetto di funzione di densità di passaggio in quello di coppia di funzioni di densità di passaggio, la quale dà luogo a due diverse famiglie di spazi di probabilità che rappresentano due processi stocastici Markoviani, e, in un successivo stadio, con lo scopo di includere un maggior numero di metodi di approssimazione noti, l'assiomatizzazione del concetto di perimetro è stata ulteriormente perfezionata. Il problema di studiare la eventuale invarianza del perimetro rispetto alle classi di nuclei adoperati nei due stadi non è stato affrontato, ed è di questo problema che intendo occuparmi.

Mi limito al caso che lo spazio di misura $\{R, \mathcal{B}, \mu\}$ sia lo spazio $\{S_n, \mathcal{B}, \mu\}$, ove S_n è lo spazio euclideo ad n-dimensioni, $\mathcal{B}$ la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue, μ la misura di Lebesgue, e studio il problema dell'invarianza del perimetro globalmente, cioè non separatamente rispetto alle classi dei due stadi. Caratterizzo in tal modo una classe $\mathcal{K}$ di nuclei, rispetto ai quali il perimetro è invariante, classe che comprende nuclei per i quali è vera la relazione di Kolmogorov classica o generalizzata e nuclei per i quali non è vera nè l'una nè l'altra.

Ogni nucleo della classe $\mathcal{K}$ è una funzione $f(r, x; s, y)$, regolarizzante alla J. W. Calkin-C. B. Morrey, con opportune proprietà, tra le quali le I^0) e II^0), e tale che esista una funzione $h(r, s; t)$ per cui risulti:

$$\text{IV}^0) \qquad f(r, x; s, y) = h(r, s; y - x);$$

di questi fanno parte i più interessanti nuclei noti nella letteratura come ad es. oltre al gaussiano, adoperato da E. De Giorgi nel definire il perimetro di un insieme, quello delle medie integrali, dei polinomi di Landau-de La Vallée Poussin (modificati), di Fejér, di Poisson-Cauchy, di Weierstrass e di Ostrowski.

Nel § 1 caratterizzo la classe $\mathcal{K}$ di nuclei rispetto ai quali, come ho di già detto, il perimetro di un insieme $B \in \mathcal{B}$ è invariante e mostro che tale perimetro coincide con quello definito da E. De Giorgi; anzi caratterizzo due classi $\vec{\mathcal{K}}$, $\overleftarrow{\mathcal{K}}$, una chiamata « progressiva » e l'altra « regressiva » facendo vedere che il perimetro di un insieme $B \in \mathcal{B}$ può essere definito da un nucleo qualsiasi appartenente o all'una o all'altra classe.

Nel § 2 servendomi di un noto teorema di Frechét sul prolungamento dei funzionali semicontinui inferiormente faccio vedere che il perimetro di un insieme rappresenta, in S_1, la variazione generalizzata della sua funzione caratteristica, inquadrando in tal modo il perimetro in quell'ambiente a noi naturale rappresentato dall'estensione del concetto classico di variazione di una poligonale; questo risultato lo trasporto poi in S_n, $n > 1$.

Sempre nel § 2 caratterizzo poi una sottoclasse di nuclei di $\mathcal{K}$ mediante i quali si può dare un teorema di approssimazione in area ($n = 2$) e in lunghezza ($n = 1$) in senso generalizzato.

Nel § 3 infine prendo in esame alcuni tra i più interessanti nuclei appartenenti alla classe $\mathcal{K}$ mettendone in evidenza alcune proprietà.

§ 1

INVARIANZA DEL PERIMETRO IN UNA CLASSE DI NUCLEI

1. Notazioni (1).

Con una lettera, ad es. x, denoteremo le coordinate cartesiane $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ di un punto in uno spazio S_n, n-dimensionale; un intervallo chiuso $a_i \leq \leq x_i \leq b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ lo indicheremo con $[a, b]$. Quando ci interessa considerare il comportamento di $f(x)$ rispetto ad una particolare variabile x_h o alle $n-1$ variabili $(x_1, x_2, \dots, x_{h-1}, x_{h+1}, \dots, x_n)$, scriveremo x'_h per $(x_1, \dots, x_{h-1}, x_{h+1}, \dots, x_n)$, (x'_h, x_h) per x ed $f(x'_h, x_h)$ per $f(x)$.

Se le coordinate x'_h sono fissate, ad es. $x'_h = a'_h$, con $f(a'_h, x_h)$ denoteremo la funzione $f(a_1, a_2, \dots, a_{h-1}, x_h, a_{h+1}, \dots, a_n)$ della sola variabile x_h; se invece è fissato x_h, ad es. $x_h = a_h$, con $f(x'_h, a_h)$ denoteremo la funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_{h-1}, a_h, x_{h+1}, \dots, x_n)$ delle $n-1$ variabili $(x_1, x_2, \dots, x_{h-1}, x_{h+1}, \dots, x_n)$. Infine la proiezione dell'intervallo chiuso $[a, b]$ su $x_h = 0$ la denoteremo $[a'_h, b'_h]$.

2. Le classi B_λ, B'_λ, $\lambda \geq 1$, di J. W. Calkin e C. B. Morrey (2).

Una funzione $f(x)$, $x \in [a, b]$, è detta di classe B_λ su $[a, b]$ se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

α) $f(x)$ sia di classe L^λ su $[a, b]$;

β) esistono n funzioni $p_h(x)$, $h = 1, 2, \dots, n$, di classe L^λ su $[a, b]$ e una successione $\{f_m(x)\}$ di funzioni di classe $C^{(1)}$ su $[a, b]$ in modo da risultare:

$$\lim_{m \to \infty} f_m(x) = f(x), \quad \lim_{m \to \infty} \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_h} = p_h(x), \quad h = 1, 2, \dots, n,$$

in senso forte in L^λ su $[a, b]$.

---

(1) Le notazioni introdotte sono quelle adoperate da J. W. Calkin e C. B. Morrey in [6], [19].

(2) Queste classi sono state introdotte e studiate da J. W. Calkin e C. B. Morrey in [6], [19].

Se $f(x)$ è di classe B_λ su $[a, b]$ si chiama derivata prima generalizzata di $f(x)$ rispetto alla variabile x_h la derivata della funzione d'insieme $\int_E p_h(x)\,dx$.

Una funzione $f(x)$, $x \in [a, b]$, è detta di classe B'_λ su $[a, b]$ se sono soddisfatte le proprietà:

i) $f(x)$ sia di classe L^λ su $[a, b]$;

ii) $f(x)$ sia assolutamente continua in x_h su $[a_h, b_h]$ per quasi tutti i punti $x'_h \in [a'_h, b'_h]$, $h = 1, 2, \dots, n$;

iii) le derivate parziali $\dfrac{\partial f}{\partial x_h}$, $h = 1, 2, \dots, n$, che per la *ii*) esistono quasi dappertutto e sono misurabili, siano di classe L^λ su $[a, b]$.

Sussiste la seguente

Proprietà A: Ogni funzione $f(x)$ di classe B_λ su $[a, b]$ è equivalente a una funzione $f_0(x)$ di classe B'_λ su $[a, b]$ e le derivate parziali di $f_0(x)$ coincidono quasi dappertutto con le derivate generalizzate di $f(x)$.

3. La classe $\mathcal{K}$.

Con $\mathcal{K}$ denotiamo la classe delle funzioni $h(r, s; t)$, detti nuclei, definiti per $0 \leq r < s < +\infty$, $t \in S_n$, e soddisfacenti le seguenti proprietà:

1.° $h(r, s; t) \geq 0$;

2.° $h(r, s; t)$, comunque si fissino r, s, risulti misurabile e integrabile in S_n e si abbia:

$$\int_{S_n} h(r, s; t)\,dt = 1 \tag{1}$$

3.° per ogni $s \in (0, +\infty)$, comunque si fissi un $\delta > 0$, risulti:

$$\lim_{r \to s-0} \int_{|t| \geq \delta} h(r, s; t)\,dt = 0, \tag{2}$$

avendo posto $|t| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2}$;

4.° l'operatore $\nu_{r,s}[\cdot]$, definito nella classe delle funzioni $f(x)$, $x \in S_n$, misurabili e limitate, con la legge:

$$\nu_{r,s}[f]_{(x)} = \int_{S_n} f(x+t)\,h(r, s; t)\,dt, \tag{3}$$

sia regolarizzante, cioè $\nu_{r,s}[f]_{(x)}$ sia una funzione localmente di classe B_1 comunque si fissino r, s.

La classe $\mathcal{K}$ la diremo costituita da nuclei « progressivi »; la diremo invece costituita da nuclei « regressivi » quando l'assioma 3^0 è sostituito dal seguente:

$3.^{00}$ per ogni $r \in [0, +\infty]$, comunque si fissi un $\delta > 0$, risulti:

$$\lim_{s \to r+0} \int_{|t| \geq \delta} h(r, s; t)\, dt = 0. \tag{2'}$$

Quando vorremo distinguere i nuclei « progressivi » dai « regressivi » indicheremo la classe dei primi con $\overrightarrow{\mathcal{K}}$ e quella dei secondi con $\overleftarrow{\mathcal{K}}$; un nucleo progressivo lo denoteremo con $\overrightarrow{h}(r, s; t)$ e la trasformata di una $f(x)$, $x \in S_n$, misurabile e limitata, tramite esso, data dalla (3), con $\overrightarrow{\nu}_{r,s}[f]_{(x)}$, mentre un nucleo regressivo lo indicheremo con $\overleftarrow{h}(r, s; t)$ e la trasformata di una $f(x)$, $x \in S_n$, misurabile e limitata, tramite esso, con $\overleftarrow{\nu}_{r,s}[f]_{(x)}$.

4. In questo numero mostreremo che l'operatore $\nu_{r,s}[\cdot]$ è un operatore di approssimazione nella classe $\mathcal{L}_L$ delle funzioni $f(x)$, $x \in S_n$, misurabili e limitate. Premettiamo il seguente

LEMMA 1. *Se $f(x) \in \mathcal{L}_L$ e $h(r, s; t)$ soddisfa gli assiomi* 1^0, 2^0, 3^0, *risulta:*

$$\lim_{r \to s-0} \int_a^b |\nu_{r,s}[f]_{(x)} - f(x)|\, dx = 0, \tag{4}$$

comunque si fissino un intervallo $[a, b]$ e un $s \in (0, +\infty)$ [3].

Tenendo infatti presente l'espressione (3) della trasformata di $f(x)$ secondo $h(r, s; t)$ e gli assiomi 1^0, 2^0, si ha:

$$|\nu_{r,s}[f]_{(x)} - f(x)| \leq \int_{S_n} |f(x+t) - f(x)|\, h(r, s; t)\, dt \tag{5}$$

E poichè le funzioni $|f(x)|\, h(r, s; t)$, $|f(x+t)|\, h(r, s; t)$, manifestamente misurabili in S_{2n}, sono, in virtù di un noto teorema di Fubini-Tonelli sul-

---

[3] Questo lemma è un miglioramento di uno di L. M. Graves [15]; un lemma analogo, con condizioni su $h(r, s; t)$ diverse dalla 3^0, è stato dato da L. Butzer [5].

l'invertibilità dell'ordine dell'integrazione, integrabili nella striscia:

$$S^*: \qquad a \leq x \leq b; \qquad t \in S_n,$$

appunto perchè esistono gli integrali ripetuti:

$$\int_{S_n} \left\{ \int_a^b |f(x)|\, h(r, s; t)\, dx \right\} dt, \qquad \int_{S_n} \left\{ \int_a^b |f(x+t)|\, h(r, s; t)\, dx \right\} dt$$

(si tenga presente che $f(x)$ è limitata), ne segue che la funzione $|f(x+t) - f(x)|\, h(r, s; t)$ è integrabile in S^* e per essa vale la formula di riduzione sull'invertibilità dell'ordine dell'integrazione.

Il primo membro della (5), che è manifestamente misurabile, risulta allora integrabile in $[a, b]$ e si ha:

$$(6) \qquad \int_a^b |\nu_{r,s}[f]_{(x)} - f(x)|\, dx \leq \int_{S_n} h(r, s; t)\, dt \int_a^b |f(x+t) - f(x)|\, dx.$$

Ma è noto che:

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^b |f(x+t) - f(x)|\, dx = 0,$$

e quindi in corrispondenza ad $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che:

$$\int_a^b |f(x+t) - f(x)|\, dx < \varepsilon, \qquad \text{per } |t| > \delta.$$

Dalla (6), tenendo presente quest'ultima limitazione, segue:

$$(7) \qquad \int_a^b |\nu_{r,s}[f]_{(x)} - f(x)|\, dx \leq \varepsilon \int_{|t| < \delta} h(r, s; t)\, dt + 2N \cdot \text{mis}\,[a, b] \int_{|t| \geq \delta} h(r, s; t)\, dt,$$

con $|f(x)| < N$ per $x \in S_n$, e da questa, in virtù delle 2°, 3°, di deduce la (4).

Mostriamo ora, come conseguenza del Lemma 1 il seguente teorema di approssimazione:

TEOREMA 1. *Se* $f(x) \in \mathcal{L}_L$ *e* $h(r, s; t)$ *soddisfa gli assiomi* 1^0, 2^0, 3^0, *per ogni* $s \in (0, +\infty)$ *esiste una successione* $\{r_p\}$, $r_p \to s-0$, *tale che*:

$$\lim_{p\to\infty} \nu_{r_p, s}[f]_{(x)} = f(x) \tag{8}$$

quasi ovunque in S_n.

Infatti, dal Lemma 1, quando nella (4) l'intervallo d'integrazione è $[-1, 1]$, segue che esiste una successione $\{r_{1,q}\}$, con $r_{1,q} \to s-0$, con la proprietà:

$$\lim_{q\to\infty} \nu_{r_{1,q}, s}[f]_{(x)} = f(x) \text{ quasi ovunque in } [-1, 1].$$

Dallo stesso Lemma 1, quando nella (4) l'intervallo d'integrazione è $[-2, 2]$ e $\nu_{r,s}[f]_{(x)}$ si sostituisce con $\nu_{r_{1,q}, s}[f]_{(x)}$, segue che esiste una successione $\{r_{2,q}\}$, $r_{2,q} \to s-0$, $\{r_{2,q}\} \subset \{r_{1,q}\}$, con la proprietà:

$$\lim_{q\to\infty} \nu_{r_{2,q}, s}[f]_{(x)} = f(x), \text{ quasi ovunque in } [-2, 2].$$

Cosí proseguendo, quando nella (4) l'intervallo d'integrazione si sostituisce con $[-m, m]$ e $\nu_{r,s}[f]_{(x)}$ si sostituisce con $\nu_{r_{m-1,q}, s}[f]_{(x)}$, si deduce che esiste una successione $\{r_{m,q}\}$, $r_{m,q} \to s-0$, $\{r_{m,q}\} \subset \{r_{m-1,q}\}$, con la proprietà:

$$\lim_{q\to\infty} \nu_{r_{m,q}, s}[f]_{(x)} = f(x), \text{ quasi ovunque in } [-m, m].$$

Si ottiene allora con questo procedimento una infinità numerabile di successioni $\{r_{m,q}\}$, $m = 1, 2, \ldots$, con la proprietà: $\{r_{m,q}\} \subset \{r_{m-1,q}\}$, per $m = 2, 3, \ldots$, ed $r_{m,q} \to s-0$ per ogni $m = 1, 2, \ldots$, e quindi posto $r_p = r_{p,p}$ segue ovviamente la (8).

5. Ci sarà utile il seguente

LEMMA 2. *Se* $f(x)$, $x \in I = [a, b]$, *è di classe* B_1' *su* $[a, b]$, *detta* $\{{}^{(j)}I\}$, $j = 1, 2, 3, \ldots, m$, ${}^{(j)}I = [{}^{(j)}a, {}^{(j)}b]$, *una suddivisione di* I, *e posto*:

$$g_h(f, {}^{(j)}I) = \int_{{}^{(j)}a_h'}^{{}^{(j)}b_h'} V_{x_h}[f(x_h', x_h), {}^{(j)}a_h \le x_h \le {}^{(j)}b_h]\, dx_h', \qquad h = 1, 2, \ldots, n; \tag{9}$$

$$g(f, {}^{(j)}I) = \left\{ \sum_{h=1}^{n} g_h^2(f, {}^{(j)}I) \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{9'}$$

ove l'integrando della (9) *rappresenta la variazione* $f(x)$ *rispetto a* x_h *in* $[{}^{(j)}a_h, {}^{(j)}b_h]$, *risulta:*

$$\int_a^b |\operatorname{grad} f(x)|\, dx = \sup \sum_{j=1}^{m} g(f, {}^{(j)}I) \tag{10}$$

ove il sup *è preso rispetto a tutte le possibili suddivisioni* $\{{}^{(j)}I\}$ *dell'intervallo* I.

Osserviamo intanto che, in virtù del fatto che f è di classe B_1' su $[a, b]$, le funzioni $V_{x_h}[f(x_h', x_h), {}^{(j)}a_h \leq x_h \leq {}^{(j)}b_h]$, per la ii) del N. 2, sono definite per quasi tutti i punti $x_h' \in [a_h', b_h']$ e si ha:

$$V_{x_h}[f(x_h', x_h), {}^{(j)}a_h \leq x_h \leq {}^{(j)}b_h] = \int_{{}^{(j)}a_h}^{{}^{(j)}b_h} \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_h} \right| dx_h .$$

Le $V_{x_h}[f(x_h', x_h), {}^{(j)}a_h \leq x_h \leq {}^{(j)}b_h]$ sono poi, per la iii) del N. 2, integrabili in $[{}^{(j)}a_h', {}^{(j)}b_h']$ e le (9) si scrivono:

$$g_h(f, {}^{(j)}I) = \int_{{}^{(j)}a}^{{}^{(j)}b} \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_h} \right| dx, \qquad h = 1, 2, \dots n. \tag{9*}$$

Le funzioni d'intervallo $g_h(f, I)$, manifestamente non negative, sono quindi additive, e di conseguenza la funzione $g(f, I)$ è non decrescente per suddivisione, cioè risulta:

$$g(f, I) \leq \sum_{j=1}^{m} g(f, {}^{(j)}I).$$

Si ha infatti:

$$g(f, I) = g(f, \sum_{j=1}^{m} {}^{(j)}I) = \left\{ \sum_{h=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m} g_h(f, {}^{(j)}I) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

e da questa, per una disuguaglianza di Minkowski: (⁴)

$$g(f, I) \leq \sum_{j=1}^{m} \left\{ \sum_{h=1}^{n} g_h^2(f, {}^{(j)}I) \right\}^{\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^{m} g(f, {}^{(j)}I).$$

(⁴) Cfr. ad es. G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. POLYA [16].

Esiste poi finito il $\sup \sum_{j=1}^{m} g(f, {}^{(j)}I)$, sempre a causa della addittività delle funzioni $g_h(f, I)$, e la $g(f, I)$ è continua essendo continue le $g_h(f, I)$. La funzione $g(f, I)$ risulta allora integrabile in I secondo Burkill e si ha [5]:

$$\beta(I) \equiv \int_I g(f, I) = \sup \sum_{j=1}^{m} g(f, {}^{(j)}I) \tag{11}$$

Facilmente si vede, dalla (9*), che la derivata $D(x, g_h)$ di $g_h(f, I)$ è quasi ovunque uguale a $\dfrac{\partial f}{\partial x_h}$ e quindi dalla (9′) segue che $g(f, I)$ è derivabile quasi ovunque in $[a, b]$ e si ha:

$$D(x, g) = |\operatorname{grad} f(x)|.$$

Risulta [6] inoltre, quasi ovunque in $[a, b]$:

$$D(x, \beta) = D(x, g)$$

Essendo infine $g(f, I)$ assolutamente continua, appunto perchè lo sono le $g_h(f, I)$, lo è anche [7] $\beta(I)$, e per il fatto che $\beta(I)$ è non negativa, additiva e assolutamente continua si ha [8]:

$$\beta(I) = \int_a^b D(x, \beta)\, dx = \int_a^b |\operatorname{grad} f(x)|\, dx$$

e da questa e dalla (11) segue la (10).

OSSERVAZIONE 1. La (10) del Lemma 2 sussiste anche se si fa soltanto l'ipotesi che $f(x)$ sia di classe B_1 su $[a, b]$ purchè si ponga:

$$g_h(f, {}^{(j)}I) = \int_{{}^{(j)}a'_h}^{{}^{(j)}a'_h} V_{x_h}[f(x'_h, x_h), x_h \in [a_h, b_h] - E_0]\, dx'_h,$$

(5) Cfr. ad es. T. RADÓ [21], proposizioni III. 1.6, III. 1.23.

(6) Cfr. ad es. T. RADÓ [21] proposizione III. 1.27; S. SAKS [22] teorema 3.8.

(7) Cfr. ad es. T. RADÓ [21] proposizione III. 1.18.

(8) Cfr. ad es. T. RADÓ [21] proposizioni III. 1.28, III. 1.29, III. 1.34; S. SAKS [22] teorema 7.8.

essendo $E_0 \subset [a, b]$ quell'insieme di misura nulla all'infuori del quale $f(x)$ coincide con una sua funzione equivalente $f_0(x)$ di classe B_1' su $[a, b]$, esistente in virtù della Proprietà A del N. 2.

6. Sussiste il seguente

TEOREMA 2. *Per ogni* $f(x) \in \mathcal{L}_L$ *i massimi limiti:*

$$(12) \quad \overline{\lim_{r \to s-0}} \int_{S_n} |\operatorname{grad} \vec{\nu}_{r,s}[f]_{(x)}| \, dx ; \qquad (12') \quad \overline{\lim_{s \to r+0}} \int_{S_n} |\operatorname{grad} \overleftarrow{\nu}_{r,s}[f]_{(x)}| \, dx,$$

sono il primo indipendente da $\vec{h}(r, s; t) \in \vec{\mathcal{K}}$ *e da* $s \in (0, +\infty)$, *il secondo indipendente da* $\overleftarrow{h}(r, s; t) \in \overleftarrow{\mathcal{K}}$ *e da* $r \in [0, +\infty)$, *e risulta:*

$$(13) \qquad \overline{\lim_{r \to s-0}} \int_{S_n} |\operatorname{grad} \vec{\nu}_{r,s}[f]_{(x)}| \, dx = \overline{\lim_{s \to r+0}} \int_{S_n} |\operatorname{grad} \overleftarrow{\nu}_{r,s}[f]_{(x)}| \, dx.$$

Supporremo, solo per una maggiore semplificazione nelle notazioni, che nella 4^0 del N. 3 la classe B_1 sia sostituita dalla classe B_1'. L'Osservazione 1 del N. 5 farà vedere quali tipi di modifiche andrebbero fatte nella dimostrazione che daremo.

Ad ogni $f(x)$, $x \in S_n$, misurabile, associamo un numero $\psi_E(f)$, dipendente da E, con $E \subset S_n$ e misurabile, così definito:

Posto:

$$\Phi_h(f, I, E) = \int_{a_h'}^{b_h'} V_{x_h}[f(x_h', x_h), x_h \in E \cap [a_h, b_h]] \, dx_h',$$

ove è $I \equiv [a, b]$ e ove l'integrando è la variazione totale della $f(x)$ rispetto a x_h in $[a_h, b_h]$ relativamente a E, con la convenzione $V_{x_h} = 0$ quando $E \cap [a_h, b_h] = \emptyset$, sarà $\Phi_h \leq +\infty$.

Detta poi $\Phi_E(f, I)$ l'espressione:

$$\Phi_E(f, I) = \left\{ \sum_{h=1}^{n} \Phi_h^2(f, I, E) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

con la convenzione $\Phi_E(f, I) = +\infty$ se per qualche h è $\Phi_h(f, I, E) = +\infty$, il numero $\psi_E(f)$ associato alla $f(x)$ è dato da:

$$(14) \qquad \psi_E(f) = \sup \sum_{i=1}^{m} \Phi_E(f, {}^{(i)}I),$$

ove il sup è preso rispetto a tutti i possibili gruppi finiti di intervalli $\{^{(i)}I\}$ che rappresentano suddivisioni di arbitrari intervalli, con la convenzione di porre $\psi_E(f) = +\infty$ se per qualche i è $\Phi_E(f, {}^{(i)}I) = +\infty$.

Mostriamo che il massimo limite dato dalla (12) è indipendente da $\vec{h}(r, s; t) \in \mathcal{K}$ e da $s \in (0, +\infty)$.

Fissiamo un nucleo $\vec{h}(r, s; t) \in \mathcal{K}$ e un $s \in (0, +\infty)$; sia $\{r_p\}$, $r_p \to s - 0$, la successione, esistente in virtù del Teorema 1, relativamente alla quale si ha:

$$\lim_{p\to+\infty} \vec{\nu}_{r_p, s}[f]_{(x)} = f(x), \tag{8'}$$

quasi dappertutto in S_n, e facciamo prima vedere che risulta:

$$\overline{\lim_{r\to s-0}} \int_{S_n} |\operatorname{grad} \vec{\nu}_{r,s}[f]_{(x)}|\, dx = \psi_E(f), \tag{15}$$

essendo $E \subset S_n$ l'insieme ove è vera la (8').
Distinguiamo i due casi: $\psi_E(f) < +\infty$; $\psi_E(f) = +\infty$.

1° Caso: $\psi_E(f) < +\infty$.

Mostriamo la (15) facendo vedere che sussistono le due disuguaglianze:

$$\overline{\lim_{r\to s-0}} \int_{S_n} |\operatorname{grad} \vec{\nu}_{r,s}[f]_{(x)}|\, dx \leq \psi_E(f); \tag{16}$$

$$\overline{\lim_{r\to s-0}} \int_{S_n} |\operatorname{grad} \vec{\nu}_{r,s}[f]_{(x)}|\, dx \geq \psi_E(f). \tag{17}$$

Osserviamo che per l'assioma 4° del N. 3 la funzione $\nu_{r,s}[f]_{(x)}$ è di classe [9] B_1' in ogni intervallo $[a, b]$ e quindi, in virtù del Lemma 2, risulta:

$$\int_a^b |\operatorname{grad} \vec{\nu}_{r,s}[f]_{(x)}|\, dx = \sup \sum_{j=1}^{m} g(\vec{\nu}_{r,s}[f]_{(x)}, {}^{(j)}I), \tag{18}$$

ove il sup è preso rispetto a tutte le suddivisioni $\{^{(j)}I\}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, dell'intervallo $I = [a, b]$ e ove $g[\vec{\nu}_{r,s} f]_{(x)}, {}^{(j)}I)$ è data dalla (9') quando in essa e nella (9) si sostituisce $f(x)$ con $\vec{\nu}_{r,s}[f]_{(x)}$.

---

(9) Ricordiamo che subito dopo aver enunciato il Teorema 2 è stato detto che, solo per semplificare le notazioni, nell'assioma 4° la classe B_1 si può sostituire con la classe B_1'.

Fissato un $x'_h \in [{}^{(j)}a'_h, {}^{(j)}b'_h]$ e detta ${}^{(j)}a_h = x_h^{(0)} < x_h^{(1)} < \ldots < x_h^{(\tau)} = {}^{(j)}b_h$ una arbitraria suddivisione di $[{}^{(j)}a_h, {}^{(j)}b_h]$, tenendo presente l'espressione (3) della trasformata della f secondo il nucleo $\vec{h}(r, s; t)$ e l'assioma 1^0 del N. 3, si ha:

$$(19)\quad \sum_{q=1}^{\tau} \left| \vec{\nu}_{r,s}[f]_{(x'_h, x_h^{(q)})} - \vec{\nu}_{r,s}[f]_{(x'_h, x_h^{(q-1)})} \right| \leq$$

$$\leq \int_{S_n} \sum_{q=1}^{\tau} \left| f(x'_h + t'_h, x_h^{(q)} + t_h) - f(x'_h + t'_h, x_h^{(q-1)} + t_h) \right| \vec{h}(r, s; t)\, dt$$

$$\leq \int_{S_n} V_{x_h}[f(x'_h + t'_h, x_h + t_h), x_h + t_h \in E \cap [{}^{(j)}a_h + t_h, {}^{(j)}b_h + t_h]]\, \vec{h}(r, s; t)\, dt,$$

appunto perchè è mis $({}^{c}E) = 0$.

E poichè quest'ultima è vera qualunque sia la suddivisione di $[{}^{(j)}a_h, {}^{(j)}b_h]$, risulta:

$$g_h(\vec{\nu}_{r,s}[f]_{(x)}, {}^{(j)}I) = \int_{{}^{(j)}a'_h}^{{}^{(j)}b'_h} V_{x_h}[f(x'_h, x_h), {}^{(j)}a_h \leq x_h \leq {}^{(j)}b_h]\, dx'_h \leq$$

$$\leq \int_{S_n} \vec{h}(r, s; t) \left\{ \int_{{}^{(j)}a'_h}^{{}^{(j)}b'_h} V_{x_h}[f(x'_h + t'_h, x_h + t_h), x_h + t_h \in E \cap [{}^{(j)}a_h + t_h, {}^{(j)}b_h + t_h]]\, dx'_h \right\} dt,$$

e di conseguenza la maggiorazione:

$$(20)\qquad g(\vec{\nu}_{r,s}[f]_{(x)}, {}^{(j)}I) = \left\{ \sum_{h=1}^{n} g_h^2(f, {}^{(j)}I) \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left\{ \sum_{h=1}^{n} \left[\int_{S_n} \vec{h}(r, s; t) \left(\int_{{}^{(j)}a'_h}^{{}^{(j)}b'_h} V_{x_h}[f(x'_h + t'_h, x_h + t_h), \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. x_h + t_h \in E \cap [{}^{(j)}a_h + t_h, {}^{(j)}b_h + t_h]]\, dx'_h \right) dt \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Adoperando ora una disuguaglianza di Minkowski la (20) si maggiora ulteriormente come segue:

$$g\,(\vec{\nu}_{r,s}[f]_{(x)}\,,{}^{(j)}I) \leq \int\limits_{S_n} \vec{h}\,(r, s; t) \left\{ \sum_{h=1}^{n} \left(\int\limits_{^{(j)}a'_h}^{^{(j)}b'_h} V_{x_h}[f(x'_h + t'_h\,, x_h + t_h),\right.\right.$$

$$\left.\left. x_h + t_h \in E \cap [{}^{(j)}a_h + t_h\,, {}^{(j)}b_h + t_h]]\, dx'_h \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dt,$$

e da questa si deduce:

$$g\,(\vec{\nu}_{r,s}[f]_{(x)}\,,{}^{(j)}I) \leq \int\limits_{S_n} \vec{h}\,(r, s; t)\, \Phi_E(f, {}^{(j)}I_t)\, dt,$$

avendo denotato con ${}^{(j)}I_t$ l'intervallo ottenuto da ${}^{(j)}I$ per traslazione del vettore $t = (t_1\,, t_2\,, \dots , t_n)$.

Risulta quindi:

$$\sum_{j=1}^{m} g\,(\vec{\nu}_{r,s}[f]_{(x)}\,,{}^{(j)}I) \leq \int\limits_{S_n} \vec{h}\,(r, s; t) \sum_{j=1}^{m} \Phi_E(f, {}^{(j)}I_t)\, dt,$$

e da questa e dalla (18), tenendo presente che per ogni t è:

$$\sum_{j=1}^{m} \Phi_E(f, {}^{(j)}I_t) \leq \psi_E(f)$$

si deduce la (16).

Mostriamo la (17).

Dalla definizione di $\psi_E(f)$ segue che in corrispondenza ad $\varepsilon > 0$ esiste un gruppo $\{{}^{(j)}I\}$ di m intervalli, con $\bigcup\limits_{j=1}^{m} {}^{(j)}I \equiv [\bar{a}, \bar{b}]$ e tale che:

$$\sum_{j=1}^{m} \Phi_E(f, {}^{(j)}I) > \psi_E(f) - \varepsilon\,. \tag{21}$$

Essendo poi mis $({}^cE) = 0$ risulta:

$$\text{mis}\,(E \cap [{}^{(j)}a_h\,, {}^{(j)}b_h]) = {}^{(j)}b_h - {}^{(j)}a_h\,, \tag{22}$$

per quasi tutti i punti $x'_h \in [{}^{(j)}a'_h\,, {}^{(j)}b'_h]$.

Fissato allora un $x_h' \in [{}^{(j)}a_h', {}^{(j)}b_h']$ con la condizione che sia vera la (22), dalla definizione di $V_{x_h}[f(x_h', x_h), x_h \in E \cap [{}^{(j)}a_h, {}^{(j)}b_h]$ segue che esiste un gruppo finito di punti: ${}^{(j)}a_h \leq x_h^{(0)} < x_h^{(1)} < \ldots < x_h^{(\tau)} \leq {}^{(j)}b_h$, con $x_h^{(q)} \in E \cap [{}^{(j)}a_h, {}^{(j)}b_h]$ per $q = 0, 1, 2, \ldots, \tau$, tale che si abbia:

$$(23) \qquad V_{x_h}[f(x_h', x_h), x_h \in E \cap [{}^{(j)}a_h, {}^{(j)}b_h]] - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{q=1}^{\tau} | f(x_h', x_h^{(q)}) - f(x_h', x_h^{(q-1)}) | ,$$

e in corrispondenza a tale gruppo $\{x_h^{(q)}\}$, poichè è in E:

$$\lim_{p \to \infty} \vec{\nu}_{r_p, s}[f]_{(x)} = f(x),$$

esiste un $\bar{p}$, tale che per $p > \bar{p}$ risulti:

$$(24) \qquad \sum_{q=1}^{\tau} | \vec{\nu}_{r_p, s}[f]_{(x_h', x_h^{(q)})} - \vec{\nu}_{r_p, s}[f]_{(x_h', x_h^{(q-1)})} | > \sum_{q=1}^{\tau} | f(x_h', x_h^{(q)}) - f(x_h', x_h^{(q-1)}) | - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dalle (23), (24), per $p > \bar{p}$, segue allora:

$$V_{x_h}[\vec{\nu}_{r_p, s}[f]_{(x_h', x_h)}, {}^{(j)}a_h \leq x_h \leq {}^{(j)}b_h] > V_{x_h}[f(x_h', x_h), x_h \in E \cap [{}^{(j)}a_h, {}^{(j)}b_h]] - \varepsilon$$

e da questa:

$$(25) \qquad \varliminf_{p \to \infty} V_{x_h}[\vec{\nu}_{r_p, s}[f]_{(x_h', x_h)}, {}^{(j)}a_h \leq x_h \leq {}^{(j)}b_h] \geq V_{x_h}[f(x_h', x_h), x_h \in E \cap [{}^{(j)}a_h, {}^{(j)}b_h]]$$

Poichè quest'ultima è vera per quasi tutti i punti $x_h' \in [{}^{(j)}a_h', {}^{(j)}b_h']$, per un lemma di Fatou ([10]) risulta:

$$(26) \qquad \varliminf_{p \to \infty} \int_{{}^{(j)}a_h'}^{{}^{(j)}b_h'} V_{x_h}[\vec{\nu}_{r_p, s}[f]_{(x_h', x_h)}, [{}^{(j)}a_h \leq x_h \leq {}^{(j)}b_h]]\, dx_h' \geq \int_{{}^{(j)}a_h'}^{{}^{(j)}b_h'} V_{x_h}[f(x_h', x_h), x_h \in E \cap [{}^{(j)}a_h, {}^{(j)}b_h]]\, dx_h'$$

([10]) Cfr. ad es; S. Saks [22] pag. 29.

e di conseguenza:

$$(27)\qquad \varliminf_{p\to\infty} \sum_{j=1}^{m} g\,(\vec{\nu}_{r_p,s}[f]_{(x)}, {}^{(j)}I) \geq \sum_{j=1}^{m} \Phi_E(f, {}^{(j)}I).$$

Ma per il Lemma 2 è:

$$\int_{\bar a}^{\bar b} |\operatorname{grad}\vec{\nu}_{r_p,s}[f]_{(x)}|\,dx \geq \sum_{j=1}^{m} g\,(\vec{\nu}_{r_p,s}[f]_{(x)}, {}^{(j)}I),$$

e da questa, in virtù delle (21), (27) segue:

$$(28)\qquad \varliminf_{p\to\infty} \int_{\bar a}^{\bar b} |\operatorname{grad}\vec{\nu}_{r_p,s}[f]_{(x)}|\,dx \geq \psi_E(f) - \varepsilon,$$

e quindi, ovviamente la (17).

2^0 Caso: $\psi_E(f) = +\infty$

In questo caso bisogna distinguere due sottocasi:

c_1) esiste qualche intervallo $I = [a, b]$ per il quale risulti $\Phi_E(f, I) = +\infty$;

c_2) qualunque sia l'intervallo I è $\Phi_E(f, I) < +\infty$.

Nella eventualità c_1) sarà per qualche h:

$$(29)\qquad \Phi_h(f, I, E) = \int_{a'_h}^{b'_h} V_{x_h}[f(x'_h, x_h), x_h \in E \cap [a_h, b_h]]\,dx'_h = +\infty$$

Ma con lo stesso ragionamento per dedurre la (26) risulta:

$$\varliminf_{p\to\infty} \int_{a'_h}^{b'_h} V_{x_h}[\vec{\nu}_{r_p,s}[f]_{(x'_h, x_h)}, a_h \leq x_h \leq b_h]\,dx'_h \geq$$

$$\geq \int_{a'_h}^{b'_h} V_{x_h}[f(x'_h, x_h), x_h \in E \cap [a_h, b_h]]\,dx'_h$$

e da questa, in virtù del Lemma 2 e della (29) segue la (15).

Nella eventualità c_2), dalla definizione di $\psi_E(f)$ segue che in corrispondenza ad $M > 0$ esiste un gruppo finito d'intervalli $\{{}^{(j)}I\}$, con $\bigcup_{j=1}^{m} {}^{(j)}I = [\bar a, \bar b]$ in modo da risultare:

$$\sum_{j=1}^{m} \Phi_E(f, {}^{(j)}I) > M.$$

Adoperando qui lo stesso ragionamento fatto a partire dalla (21) si deduce che:

$$\varlimsup_{p\to\infty}\int_{\bar a}^{\bar b} |\operatorname{grad}\vec{\nu}_{r_p,s}[f]_{(x)}|\,dx > M,$$

dalla quale segue, tenendo conto dell'arbitrarietà di M, la (15).

Lasciando ancora fisso il nucleo $\vec{h}(r, s; t)$ e il parametro s, denotiamo con F un insieme con le proprietà: $F \subset E$, mis $({}^cF) = 0$.

Con lo stesso ragionamento adoperato per mostrare la (15) risulta anche:

$$\varlimsup_{r\to s-0}\int_{S_n} |\operatorname{grad}\vec{\nu}_{r,s}[f]_{(x)}|\,dx = \psi_F(f). \tag{15'}$$

Infatti nel caso ad es. che sia $\psi_F(f) < +\infty$, la (19) continua ad essere vera quando in essa si sostituisce E con F, appunto perchè è mis $({}^cF) = 0$, e di conseguenza sussiste la (16) quando in essa si sostituisce E con F.

La (17), quando in essa si sostituisce E con F è pure vera perchè nei punti di F, essendo $F \subset E$, è soddisfatta la (8') e quindi valgono le limitazioni date dalle (23), (24), (25), (26), (27), (28) con la sola avvertenza di sostituire in esse E con F. Sussistendo allora le (16), (17), quando in queste E si sostituisce con F, risulta di conseguenza vera la (15').

Nessuna difficoltà offre il caso $\psi_F(f) = +\infty$, basta rifare lo stesso ragionamento fatto nel caso $\psi_E(f) = +\infty$, e tenere presente che nei punti di F sussiste la (8').

Queste considerazioni ci mostrano che per ogni insieme $F \subset E$, con mis $({}^cF) = 0$, risulta:

$$\psi_E(f) = \psi_F(f). \tag{30}$$

Tenendo fisso $\vec{h}(r, s; t)$, facciamo variare s e consideriamo un valore $\bar{s}$ di s diverso da quel valore precedentemente fissato. In virtù del Teorema 1 esiste una successione $\{\bar{r}_p\}$, $\bar{r}_p \to \bar{s} - 0$, tale che si abbia quasi ovunque in S_n:

$$\lim_{p\to\infty}\vec{\nu}_{\bar{r}_p,\bar{s}}[f]_{(x)} = f(x). \tag{8''}$$

Detto allora $E_{\bar{s}}$ l'insieme dei punti nei quali è vera la (8''), con lo stesso metodo adoperato per mostrare la (15) risulta:

$$\varlimsup_{r\to \bar{s}-0}\int_{S_n} |\operatorname{grad}\vec{\nu}_{r,\bar{s}}[f]_{(x)}|\,dx = \psi_{E_{\bar{s}}}(f), \tag{15''}$$

e con le stesse considerazioni per mostrare la (30):

$$(30') \qquad \psi_F(f) = \psi_{E_s^-}(f),$$

per ogni $F \subset E_s^-$, con mis $({}^cF) = 0$.

Se quindi F è l'insieme $F = E_s^- \cap E$, essendo ${}^cE_s^- \cup {}^cE = {}^c(E_s^- \cap E)$, risulta mis $({}^cF) = 0$ e quindi, in virtù delle (30), (30′), si ha:

$$\psi_E(f) = \psi_{E_s^-}(f).$$

Questa uguaglianza, tenendo presente le (15), (15″) ci dice che per ogni $f \in \mathcal{L}_L$, fissato un nucleo $\vec{h}(r, s; t) \in \vec{\mathcal{K}}$, il massimo limite dato dalla (12) è indipendente da $s \in (0, +\infty)$.

Facciamo ora variare il nucleo; consideriamo un nucleo $\vec{h}^*(r, s; t) \in \vec{\mathcal{K}}$ diverso da quello precedentemente fissato e denotiamo con $\vec{\nu}^*_{r,s}[f]_{(x)}$ la trasformata di f, data dalla (3) del N. 3, tramite tale nucleo.

Dalle considerazioni fatte segue che il massimo limite:

$$\overline{\lim_{r \to s - 0}} \int_{S_n} |\operatorname{grad} \vec{\nu}^*_{r,s}[f]_{(x)}|\, dx,$$

finito o no, non dipende da s, e se s^* è un valore fissato per s risulta:

$$(15) \qquad \overline{\lim_{r \to s^* - 0}} \int_{S_n} |\operatorname{grad} \vec{\nu}^*_{r,s^*}[f]_{(x)}|\, dx = \psi_{E_{s^*}}(f),$$

ove E_{s^*} è l'insieme dei punti nei quali, in virtù del Teorema 1, si ha:

$$\lim_{p \to \infty} \vec{\nu}^*_{r^*_p, s^*}[f]_{(x)} = f(x).$$

Risulta anche:

$$(30^*) \qquad \psi_{E_{s^*}}(f) = \psi_F(f)$$

per ogni $F \subset E_{s^*}$, con mis $({}^cF) = 0$.

Detto allora F l'insieme $F = E \cap E_{s^*}$, essendo mis $({}^cF) = 0$, in virtù della (30), (30*), si ha:

$$\psi_E(f) = \psi_F(f) = \psi_{E_{s^*}}(f)$$

e quest'ultima, tenendo presente le (15), (15″), ci mostra che il massimo limite (12), finito o no, non dipende nè da $\vec{h}(r, s; t) \in \vec{\mathcal{K}}$ nè da $s \in (0, +\infty)$.

Le stesse considerazioni fatte per i nuclei progressivi valgono per i regressivi, cioè anche il massimo limite (12′), finito o no, non dipende nè da $\overleftarrow{h}(r, s; t) \in \overleftarrow{\mathcal{K}}$ nè da $r \in [0, +\infty)$; la (13) è poi immediata conseguenza dei ragionamenti adoperati.

6. Definizioni «progressiva» e «regressiva» di perimetro di un insieme.

Se $\overrightarrow{h}(r, s; t) \in \overrightarrow{\mathcal{K}}$ e $B \in \mathcal{B}$, detta $\varphi(x, B)$ la funzione caratteristica di B, chiameremo perimetro «progressivo» di B il numero:

$$A_P(B) = \overline{\lim_{r \to s - 0}} \int_{S_n} |\operatorname{grad} \overrightarrow{\nu}_{r, s}[\varphi]_{(x)}| \, dx, \tag{31}$$

essendo $\overrightarrow{\nu}_{r, s}[\varphi]_{(x)}$ la trasformata di $\varphi(x, B)$ secondo $\overrightarrow{h}(r, s; t)$ data dalla (3). Analogamente, se $\overleftarrow{h}(r, s; t) \in \overleftarrow{\mathcal{K}}$, chiameremo perimetro «regressivo» di B il numero:

$$A_R(B) = \overline{\lim_{s \to r + 0}} \int_{S_n} |\operatorname{grad} \overleftarrow{\nu}_{r, s}[\varphi]_{(x)}| \, dx. \tag{32}$$

Il Teorema 2 caratterizza allora due classi di nuclei, $\overrightarrow{\mathcal{K}}$, $\overleftarrow{\mathcal{K}}$, rispetto alle quali le due definizioni di perimetro sono invariantive e coincidono.

Il numero $A_P(B) = A_R(B)$ coincide poi con il perimetro introdotto da E. De Giorgi ([8], [9]), il quale adopera per definire il perimetro la (31) con $\overrightarrow{h}(r, s; t) = [\pi(s - r)]^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|t|^2}{s-r}}$ che appartiene alla classe $\overrightarrow{\mathcal{K}}$.

OSSERVAZIONE 2. Quando un nucleo $\overrightarrow{h}(r, s; t) \in \overrightarrow{\mathcal{K}}$ gode della proprietà che per ogni $f \in \mathcal{L}_L$ risulta quasi ovunque in S_n:

$$\lim_{r \to s - 0} \overrightarrow{\nu}_{r, s}[f]_{(x)} = f(x),$$

il massimo limite che compare nelle (12), (12′), (31), (32), si può sostituire con l'operazione di limite.

In tal caso infatti la (28) diventa:

$$\lim_{r \to s - 0} \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} |\operatorname{grad} \overrightarrow{\nu}_{r, s}[f]_{(x)}| \, dx \geq \psi_E(f) - \varepsilon,$$

e da questa e dalla (16) segue quanto affermato.

§ 2

VARIAZIONE — AREA — LUNGHEZZA

1. Abbiamo visto che per ogni $f \in \mathcal{L}_L$ il massimo limite (13) del Teorema 2, che possiamo chiamare perimetro della f, coincide con $\psi_E(f)$, essendo E l'insieme dei punti ove è vera, in virtù del Teorema 1, la:

$$\lim_{p \to \infty} \nu_{r_p, s}[f]_{(x)} = f(x) \tag{8}$$

per un $h(r, s; t) \in \mathcal{K}$ e un $s \in (0, +\infty)$ prefissati.

È facile far vedere che se f è sommabile il suo perimetro coincide con il valore che ha in f il prolungamento (di Fréchet) del funzionale variazione alle funzioni sommabili, funzionale (prolungato) che è semicontinuo inferiormente rispetto a una opportuna metrica, la quale è poi la stessa di quella introdotta da E. De Giorgi [9] per mostrare la semicontinuità inferiore del perimetro.

Premettiamo il teorema di Fréchet [12] sul prolungamento dei funzionali semicontinui inferiormente.

Sia S uno spazio metrico, $\delta(x, y)$ la funzione metrica, $f(x)$ una funzione definita su S, non negativa, semicontinua inferiormente e con la proprietà:

A) per ogni $x \in S$ esiste una successione $\{x_n\}$, $x_n \in S$, $x_n \neq x$, tale che:

$$\lim_{n \to \infty} \delta(x, x_n) = 0, \qquad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x).$$

Si denoti con T il completamento di S rispetto alla metrica δ (gli elementi di T sono le classi di equivalenza delle successioni di S che convergono alla Cauchy) e si estenda $f(x)$ a una funzione $F(\xi)$ su T ponendo:

$$F(\xi) = \underset{\{x_k\} \in \xi}{\text{estr} \cdot \inf} \cdot [\lim_{n \to \infty} (\underset{k > n}{\text{estr} \cdot \inf} \cdot f(x_k))].$$

$F(\xi)$ è una semicontinua estensione di $f(x)$ a T con la seguente proprietà:

B) per ogni $\xi \in T$ c'è una successione di elementi di S, distinti da ξ, tale che:

$$\lim_{n \to \infty} \delta(\xi, x_n) = 0, \qquad F(\xi) = \lim_{n \to \infty} f(x_n).$$

M. Fréchet dimostra che $F(\xi)$ è l'unico prolungamento semicontinuo inferiormente di f a T che goda della proprietà *B*).

Esaminiamo prima il caso 1-dimensionale.

In analogia a quanto fa C. Goffmann in [13], supponendo che ogni funzione sia definita su tutto l'asse reale, denotiamo con S lo spazio delle poligonali (continue) a supporto compatto con la metrica:

$$\delta(p, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} |p(x) - q(x)|\, dx, \quad \text{con} \quad p(x); q(x) \in S. \tag{33}$$

Se $V(p)$ è la variazione totale del generico elemento $p(x) \in S$, $V(p)$ è semicontinuo inferiormente ed ha la proprietà $A)$; $V(p)$ ha quindi un'unica estensione a un funzionale $\Phi(f)$, sullo spazio delle classi di equivalenza delle funzioni sommabili, che sia semicontinuo inferiormente e con la proprietà $B)$ (11). $\Phi(f)$ è chiamata da Goffman variazione generalizzata della f e si dimostra che per ogni f sommabile esiste un insieme H, con mis $({}^cH) = 0$ e con la proprietà:

$$\Phi(f) = \psi_F(f),$$

per ogni $F \subset H$, con mis $({}^cF) = 0$

Fissati allora un nucleo $h(r, s; t) \in \mathcal{K}$ e un $s \in (0, +\infty)$, detto E l'insieme dei punti nei quali è vera la (8), posto $F = E \cap H$, risulta mis $({}^cF) = 0$ e quindi dalla (15), dalla (34) e dal Teorema 2 segue:

$$\overline{\lim_{r \to s - 0}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d}{dx} \nu_{r,s}[f]_{(x)} \right| dx = \Phi(f),$$

qualunque siano $h(r, s; t) \in \mathcal{K}$ ed $s \in (0, +\infty)$.

Il valore quindi del massimo limite dato dalla (13) (Teorema 2) coincide, quando f è sommabile, con la variazione generalizzata secondo Goffman della f. In particolare se $B \in \mathcal{B}$ e la sua funzione caratteristica è sommabile, risulta:

$$A_P(B) = A_R(B) = \Phi(\varphi(x, B)).$$

Osserviamo che se $B \in \mathcal{B}$ e $\{B_n\}$, $B_n \in \mathcal{B}$, è una successione d'insiemi che converge a B secondo la metrica introdotta da E. De Giorgi in [9] pag. 205 ($\delta(\overline{B}, B^*) = \text{mis}(\overline{B} \cup B^* - \overline{B} \cap B^*)$), risulta manifestamente:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x, B_n) - \varphi(x, B)|\, dx = 0$$

---

(11) Il teorema di Fréchet è stato riportato nella forma data da C. Goffman [13] pp. 204-205.

e quindi se le $\varphi(x, B)$, $\varphi(x, B_n)$ sono sommabili, in virtù della semicontinuità inferiore di $\Phi(f)$, si ha:

$$A_R(B) = A_P(B) \leq \varliminf_{n \to \infty} A_P(B_n).$$

Mettiamo infine in evidenza la seguente proposizione che è conseguenza della proprietà B) del prolungamento del funzionale variazione.

Se $B \in \mathcal{B}$ e la sua funzione caratteristica è sommabile, esiste una successione $\{p_n(x)\}$ di poligonali tale che:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} | p_n(x) - \varphi(x, B) | \, dx = 0, \qquad \lim_{n \to \infty} V(p_n) = A_P(B) = A_R(B).$$

La generalizzazione di questi risultati al caso n-dimensionale, $n > 1$, si ha sostituendo le poligonali $p(x)$ a supporto compatto con le funzioni $p(x)$ quasi lineari (poliedrali) a supporto compatto e il numero $V(p)$ con il numero $\psi_{S_n}(p)$ definito dalla (14).

2. In questo numero, nel caso 2-dimensionale, ci proponiamo di caratterizzare una classe $\mathcal{K}^*$ di nuclei, sottoclasse della classe $\mathcal{K}$ del N. 3, § 1, mediante i quali si può dare un teorema di approssimazione in area (in senso generalizzato alla L. Cesari [7]) per le superficie $z = f(x, y)$, $(x, y) \in$ $\in R = [a, b] \times [c, d]$, con $f(x, y)$ sommabile in R.

La classe $\mathcal{K}^*$.

Con $\mathcal{K}^*$ denotiamo la famiglia delle funzioni $h(r, s; \eta, t)$, definite per $0 \leq r < s < +\infty$, $(\eta, t) \in S_2$ e soddisfacenti le proprietà:

1°) $h(r, s; \eta, t) \geq 0$;

2°) $h(r, s; \eta, t)$, comunque si fissino r, s, risulti misurabile e integrabile in S_2 e si abbia:

$$\int_{S_2} h(r, s; \eta, t) \, d\eta \, dt = 1; \tag{1'}$$

3°) per ogni $h(r, s; \eta, t)$ esista una funzione positiva $\alpha(r, s)$, $0 \leq r < s < +\infty$, con $\lim_{r \to s-0} \alpha(r, s) = 0$, e tale che si abbia:

$$h(r, s; \eta, t) = 0 \qquad \text{per} \qquad (\eta, t) \notin (-\alpha, \alpha) \times (-\alpha, \alpha);$$

4⁰) per ogni $h(r, s; \eta, t)$ abbia senso definire l'operatore $\nu_{r,s}[\cdot]$ nella classe L delle funzioni $f(x, y)$ sommabili in ogni intervallo finito, con la legge:

$$\nu_{r,s}[f]_{(x,y)} = \int_{S_2} f(x+\eta, y+t)\, h(r, s; \eta, t)\, d\eta\, dt =$$

$$= \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} f(x+\eta, y+t)\, h(r, s, \eta, t)\, d\eta\, dt,$$

e tale operatore sia regolarizzante, cioè la funzione $\nu_{r,s}[f]_{(x,y)}$, comunque si fissino r, s, sia localmente di classe B_1.

Questa classe si potrebbe chiamare progressiva mentre se nell'assioma 3⁰) si avesse $\lim_{s \to r+0} \alpha(r, s) = 0$ la classe si direbbe regressiva.

Questa distinzione non verrà fatta perchè lo stesso teorema di approssimazione in area che sussiste per i nuclei progressivi sussiste per i regressivi. Con riferimento poi alla Osservazione 1 del N. 4 § 1 e a quanto detto subito dopo l'enunciato del Teorema 2, supporremo, per una semplificazione nelle notazioni, che nell'assioma 4⁰) la classe B_1 sia sostituita dalla classe B_1'. Sussistono i seguenti:

LEMMA 3. *Se $h(r, s; \eta, t) \in \mathcal{K}^*$ e $f(x, y)$ è sommabile in S_2 risulta:*

$$\lim_{r \to s-0} \int_{S_2} |\nu_{r,s}[f]_{(x,y)} - f(x, y)|\, dx\, dy = 0$$

per ogni $s \in (0, +\infty)$ [12].

LEMMA 4. *Se $f(x, y)$ è di classe B_1' su $R = [a, b] \times [c, d]$, detta $\{R_j\}$, $R_j = [a_j, b_j] \times [c_j, d_j]$ $j = 1, 2, \ldots, m$, una suddivisione di R, e posto:*

$$g_1(f, R_j) = \int_{c_j}^{d_j} V_x[f(x, y), a_j \leq x \leq b_j]\, dy,$$

$$g_2(f, R) = \int_{a_j}^{b_j} V_y[f(x, y), c_j \leq y \leq b_j]\, dx,$$

$$g(f, R_j) = \{g_1^2(f, R_j) + g_2^2(f, R_j) + |R_j|^2\}^{\frac{1}{2}},$$

---

[12] Tale Lemma sussiste anche se la $h(r, s; \eta, t)$ soddisfa soltanto le 1⁰, 2⁰, 3⁰ del N. 3, § 1, purchè abbia senso $\nu_{r,s}[f]_{(x,y)}$ con f sommabile in S_2.

risulta:

$$\int_R (f_x'^2 + f_y'^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \, dx \, dy = \sup \sum_{j=1}^{m} g(f, R_j)$$

ove il sup è preso rispetto a tutte le possibili suddivisioni $\{R_j\}$ *di* R.

La dimostrazione del Lemma 3 è analoga a quella del Lemma 1 mentre quella del Lemma 4 è analoga a quella del Lemma 2.

Mostriamo ora il seguente teorema di approssimazione in area:

TEOREMA 3. *Se* $f(x, y)$, $(x, y) \in R = [a, b] \times [c, d]$, *è sommabile in* R, *le superficie regolarizzate* $f_{r,s} = \nu_{r,s}[f]_{(x,y)}$, $(x, y) \in [a + \alpha, b - \alpha] \times [c + \alpha, d - \alpha]$, *godono della proprietà:*

$$\overline{\lim_{r \to s - 0}} \, A^{(c)}_{fr,s} = A^{(c)}_f,$$

ove i simboli $A^{(c)}_{fr,s}$, $A^{(c)}_f$ *denotano l'area generalizzata secondo Cesari* [7].

Basta dimostrare che il massimo limite a primo membro non dipende nè da $h(r, s; \eta, t) \in \mathcal{K}^*$, nè da $s \in (0, +\infty)$ e ciò perchè tra i nuclei $h(r, s; \eta, t)$ rientra il nucleo dedotto dalla media integrale della f e per esso sussiste [13] il teorema.

Poniamo $f(x, y) = 0$ per $(x, y) \notin R$ e mostriamo prima che fissato un $h(r, s; \eta, t) \in \mathcal{K}^*$ e un $s \in (0, +\infty)$ risulta:

$$\overline{\lim_{r \to s - 0}} \, A^{(c)}_{fr,s} = A_E(f), \tag{35}$$

essendo: E, $\text{mis}(R - E) = 0$, l'insieme dei punti di R nei quali si ha:

$$\lim_{p \to \infty} \nu_{r,s}[f]_{(x,y)} = f(x, y),$$

per una opportuna successione $\{r_P\}$, $r_P \to s - 0$, esistente in virtù del Lemma 2;

$$A_E(f) = \sup \sum_{j=1}^{m} \{\Phi_1^2(f, R_j, E) + \Phi_2^2(f, R_j, E) + |R_j|^2\}^{\frac{1}{2}}$$

ove il sup è preso rispetto a tutti i possibili gruppi finiti di rettangoli $\{R_j\}$, ogni gruppo rappresentando una suddivisione di un arbitrario rettangolo completamente immerso in R [14].

---

(13) C. GOFFMAN [14].

(14) Le funzioni $\Phi_h(f, R_j, E)$ sono state definite al N. 6 del § 1.

Distinguiamo i due casi: $\Lambda_E(f) < +\infty$, $\Lambda_E(f) = +\infty$.

1° Caso: $\Lambda_E(f) < +\infty$.

Mostriamo la (35) facendo vedere che sussistono le due disuguaglianze:

$$(36) \qquad \overline{\lim_{r \to s-0}}\, A^{(c)}_{fr,s} \leq \Lambda_E(f); \qquad\qquad (37) \qquad \underline{\lim_{r \to s-0}}\, A^{(c)}_{fr,s} \geq \Lambda_E(f).$$

Per ogni r, $0 \leq r < s$, poichè $\nu_{r,s}[f]_{(x,y)}$ è di classe B_1' su $R^* = [a+\alpha, b-\alpha] \times [c+\alpha, d-\alpha]$, in virtù di un risultato di C. Goffman [15] e del Lemma 4, risulta:

$$(38) \qquad A^{(c)}_{fr,s} = \int\limits_{a+\alpha}^{b-\alpha} \int\limits_{c+\alpha}^{d-\alpha} \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\nu_{r,s}[f]_{(x,y)}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\nu_{r,s}[f]_{(x,y)}\right)^2 + 1\right\}^{\frac{1}{2}} dx\, dy =$$

$$= \sup \sum_{j=1}^{m} g\,(\nu_{r,s}[f]_{(x,y)}, R_j^*),$$

ove il sup è preso rispetto a tutte le possibili suddivisioni $\{R_j^*\}$ di R^*, e da quest'ultima, con un ragionamento analogo a quello fatto nel § 1 a partire dalla (18), tenendo presente gli assiomi 1°), 2°), 3°), segue:

$$A^{(c)}_{fr,s} \leq \sup \sum_{j=1}^{m} \left\{\left[\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} h(r,s;\eta,t)\left(\int\limits_{c_j^*}^{d_j^*} V_x[f(x+\eta,y+t), x \in E \cap [a_j^*, b_j^*]]\, dy\right) d\eta\, dt\right]^2 + \right.$$

$$+ \left[\int\limits_{-\alpha}^{-\alpha} \int\limits_{-\alpha}^{-\alpha} h(r,s;\eta,t)\left(\int\limits_{a_j^*}^{b_j^*} V_y[f(x+\eta,y+t), y \in E \cap [c_j^*, d_j^*]]\, dx\right) d\eta\, dt\right]^2 +$$

$$\left. + \left[\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} h(r,s;\eta,t)\, |R_j^*|\, d\eta\, dt\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Adoperando ora una disuguaglianza di Minkowski si ha:

$$(39) \qquad A^{(c)}_{fr,s} \leq \sup \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} h(r,s;\eta,t)\, \{\Phi_1^2(f, R_j^{*(\xi)}, E) +$$

$$+ \Phi_2^2(f, R_j^{*(\xi)}, E) + |R_j^{*(\xi)}|^2\}^{\frac{1}{2}}\, d\xi,$$

[15] C. GOFFMAN [14] pp. 230-231.

ove con $R_j^{*(\xi)}$ s'è denotato il rettangolo ottenuto da R_j^* per traslazione di vettore $\xi = (\eta, t)$.

E poichè per quasi tutti i punti $\xi \in [-\alpha, \alpha] \times [-\alpha, \alpha]$ è:

$$\sum_{j=1}^{m} \{\Phi_1^2(f, R_j^{*(\xi)}, E) + \Phi_2^2(f, R_j^{*(\xi)}, E) + |R_j^{*(\xi)}|^2\}^{\frac{1}{2}} \leq \Lambda_E(f),$$

dalla (39), tenendo presente gli assiomi 2^0), 3^0), segue la (36).

Per mostrare la (37) osserviamo che dalla definizione di $\Lambda_E(f)$ segue che in corrispondenza ad $\varepsilon > 0$ esiste un gruppo $\{R_j\}$ di m rettangoli, con $\bigcup_{j=1}^{m} R_j = \overline{R}$ e con $\overline{R}$ completamente immerso in R, tale che:

$$\sum_{j=1}^{m} \{\Phi_1^2(f, R_j, E) + \Phi_2^2(f, R_j, E) + |R_j|^2\}^{\frac{1}{2}} > \Lambda_E(f) - \varepsilon$$

e con un ragionamento analogo a quello fatto a partire dalla (21) del § 1 risulta:

$$\lim_{\overline{p \to \infty}} \sum_{j=1}^{m} g(\nu_{r_p, s}[f]_{(x, y)}, R_j) > \Lambda_E(f) - \varepsilon.$$

Ma la $\nu_{r, s}[f]_{(x, y)}$ è localmente di classe B_1' e quindi dal Lemma 4 e da quest'ultima segue:

$$(40) \qquad \lim_{\overline{p \to \infty}} \int_{\overline{R}} \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} \nu_{r_p, s}[f]_{(x, y)}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \nu_{r_p, s}[f]_{(x, y)}\right)^2 + 1\right\}^{\frac{1}{2}} dx\, dy > \Lambda_E(f) - \varepsilon.$$

La (37) è conseguenza immediata dalla (40) se si tiene conto dell'espressione di $A_{fr, s}^{(c)}$ data dalla (38) e del fatto che $\overline{R}$ è completamente immerso in R e che $\lim_{r \to s - 0} \alpha(r, s) = 0$.

2^0 Caso: $\Lambda_E(f) = +\infty$.

La (35), in questo caso si dimostra analogamente al caso $\psi_E(f) = +\infty$ del Teorema 2.

Osserviamo infine che con un ragionamento analogo a quello adoperato nel Teorema 2, per dimostrare che il massimo limite dato dalla (12) non dipende nè da $\vec{h}(r, s; t) \in \mathcal{K}$ nè da $s \in (0, +\infty)$, si dimostra che il massimo limite dato dal primo membro della (35) non dipende nè da $h(r, s; \eta, t) \in \mathcal{K}^*$ nè da $s \in (0, +\infty)$.

3. Con i nuclei della classe $\mathcal{K}^*$, nel caso 1-dimensionale, si dà, con un ragionamento analogo a quello per dimostrare il Teorema 3, un Teorema di approssimazione in lunghezza, in senso generalizzato alla Goffmann [13], per le curve $\mathcal{C}: x = x(t),\ y = y(t),\ a \leq t \leq b,$ con $x(t), y(t)$ sommabili in $[a, b]$.

La dimostrazione si potrebbe anche dare direttamente tenendo presente che la lunghezza $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ della $\mathcal{C}$, prolungamento secondo Fréchet del funzionale lunghezza (delle poligonali) alle curve sommabili, è data da (16) :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}} = \sup \sum_{i=1}^{n} \{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2\}^{\frac{1}{2}}$$

ove il sup è preso rispetto a tutti i possibili gruppi $a < t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < b$, con la condizione che i punti t_i siano di approssimata continuità sia per $x(t)$ che per $y(t)$.

§ 3

ESEMPI DI NUCLEI — PROPRIETÀ

1. Limitiamoci, per semplicità, al caso 1-dimensionale, e osserviamo che la equazione di Kolmogorov (v. Introduzione) quando $f(r, x; s, y)$ è stazionaria (cioè esiste una $F(\lambda, x, y)$ con la proprietà: $f(r, x; s, y) = F(s - r, x, y)$) si scrive :

$$\text{III}^*) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda_1, x, y)\, F(\lambda_2, y, z)\, dy = F(\lambda_1 + \lambda_2, x, z)$$

qualunque siano λ_1, λ_2, con $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

2. Il nucleo di Gauss (17).

Tale nucleo è :

$$f(r, x; s, y) = [\pi(s - r)]^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{s-r}} \qquad , 0 \leq r < s < +\infty.$$

È stazionario, appartiene alla classe $\mathcal{K}$ ma non alla $\mathcal{K}^*$ e soddisfa la *III**) ; da questo se ne può ottenere una classe abbastanza ampia ponendo (18) :

$$(41) \qquad f(r, x; s, y) = (\pi\varphi(r, s))^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{\varphi(r,s)}} \qquad , 0 \leq r < s < +\infty,$$

(16) C. GOFFMAN [13].

(17) Cfr. ad. es. S. BOCHNER [3], J. L. DOOB [11].

(18) Cfr. E. BAIADA - M. LOREFICE [1].

ove $\varphi(r, s)$, $0 \leq r < s < +\infty$, è una funzione positiva con la proprietà:

$$\lim_{r \to s-0} \varphi(r, s) = 0 \qquad \text{per ogni } s \in (0, +\infty)$$

I nuclei (41), in generale non stazionari, appartengono alla classe $\mathcal{K}$ ma non alla $\mathcal{K}^*$; essi soddisfano la equazione di Kolmogorov (v. Introduzione) se vale la:

$$\varphi(r, \vartheta) + \varphi(\vartheta, s) = \varphi(r, s), \qquad \text{per } 0 \leq r < \vartheta < s < +\infty.$$

3. Il nucleo media integrale.

Questo nucleo è definito dalla:

$$(42) \qquad f(r, x; s, y) = \begin{cases} 1/2\,(s-r) & \text{per } |y-x| \leq s-r \\ 0 & \text{per } |y-x| > s-r \end{cases} \qquad 0 \leq r < s < +\infty$$

o più in generale dalla:

$$(43) \qquad f(r, x; s, y) = \begin{cases} 1/2\,\varphi(r, s) & \text{per } |y-x| \leq \varphi(r, s) \\ 0 & \text{per } |y-x| > \varphi(r, s) \end{cases}, \qquad 0 \leq r < s < +\infty$$

ove $\varphi(r, s)$, $0 \leq r < s < +\infty$, è una funzione positiva con la proprietà:

$$\lim_{r \to s-0} \varphi(r, s) = 0 \quad \text{per ogni } s \in (0, +\infty)$$

Questi nuclei, che appartengono sia alla classe $\mathcal{K}$ che alla $\mathcal{K}^*$, non soddisfano alla equazione di Kolmogorov; ciò si vede immediatamente per quello dato dalla (42), che è stazionario, perchè per $|y - x| \leq \lambda_1$, $|z - y| \leq \lambda_2$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, il primo membro della III*) diventa $1/2\,\lambda_2$ mentre il secondo membro è $1/2\,(\lambda_1 + \lambda_2)$.

4. Il nucleo di Landau-de La Vallée Poussin (19).

Questo nucleo va opportunamente modificato in modo che sia soddisfatta la 1° del N. 3, § 1, e non appena si opera tale modifica la trasformata di una $f(x)$ non è più un polinomio ma una funzione che la chiameremo « l'approssimante di Landau-de la Vallée Poussin » della f.

(19) Per i polinomi di Landau - de La Vallée - Poussin cfr. ad es. de La Vallée Poussin [10], G. Vitali - G. Sansone [25].

Esso è definito dalla

$$(44)\quad f(r,x;s,y)=\begin{cases}[1-(y-x)^2]^{\frac{1}{s-r}}\Big/ 2\int\limits_0^{\beta(s-r)}(1-t^2)^{\frac{1}{s-r}}dt & \text{per}\,|y-x|\leq\beta(s-r)\\[2ex] 0 & \text{per}\,|y-x|>\beta(s-r)\end{cases}$$

$0\leq r<s<+\infty$, con $\beta(\lambda)$, $\lambda\in(0,+\infty)$, positiva e con la proprietà: $0<\beta(\lambda)<1$; o più in generale dalla:

$$(45)\quad f(r,x;s,y)=\begin{cases}[1-(y-x)^2]^{\gamma(r,s)}\Big/ 2\int\limits_0^{\alpha(r,s)}(1-t^2)^{\gamma(r,s)}\,dt & \text{per}\ |y-x|\leq\alpha(r,s)\\[2ex] 0 & \text{per}\ |y-x|>\alpha(r,s)\end{cases}$$

$0\leq r<s<+\infty$, essendo $\alpha(r,s)$ e $\gamma(r,s)$, $0\leq r<s<+\infty$, funzioni positive e con le proprietà:

$$0<\alpha(r,s)<1;\qquad \lim_{r\to s-0}\gamma(r,s)=+\infty\qquad \text{per ogni } s\in(0,+\infty).$$

Questi nuclei, che appartengono alla classe $\mathcal{K}$, appartengono anche alla classe $\mathcal{K}^*$ quando per la (44) e la (45) è rispettivamente:

$$\lim_{\lambda\to 0+0}\beta(\lambda)=0;\qquad \lim_{r\to s-0}\alpha(r,s)=0\qquad \text{per ogni } s\in(0,+\infty).$$

Mostriamo che tali nuclei non soddisfano alla equazione di Kolmogorov e, per semplicità nei calcoli, ci limitiamo a quello dato dalla (44) che è stazionario.

Il primo membro della III*) per $|y-x|<\beta(\lambda_1)$, $|z-y|<\beta(\lambda_2)$, ci dà, con facili calcoli, la maggiorazione:

$$(46)\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda_1,x,y)\ F(\lambda_2,y,z)\,dy\geq$$

$$\geq 2\beta(\lambda_1)\,[1-\beta^2(\lambda_1)]^{\frac{1}{\lambda_1}}\cdot[1-\beta^2(\lambda_2)]^{\frac{1}{\lambda_2}}\Big/ 4\int\limits_0^{\beta(\lambda_1)}(1-t^2)^{\frac{1}{\lambda_1}}dt\cdot\int\limits_0^{\beta(\lambda_2)}(1-t^2)^{\frac{1}{\lambda_2}}\,dt.$$

Limitandoci a coppie λ_1,λ_2 per le quali è $\beta(\lambda_1+\lambda_2)<\beta(\lambda_1)+\beta(\lambda_2)$ (ne esistono quante se ne vogliono perchè è $0<\beta(\lambda)<1$), la (46) sussiste anche per $z \in [x - \beta(\lambda_1) - \beta(\lambda_2), x - \beta(\lambda_1 + \lambda_2)]$ e poichè in tal caso è: $F(\lambda_1 + \lambda_2, x, z) = 0$, ne segue che se fosse vera la III*) dovrebbe risultare:

$$2\beta(\lambda_1)[1 - \beta^2(\lambda_1)]^{\frac{1}{\lambda_1}} \cdot [1 - \beta^2(\lambda_2)]^{\frac{1}{\lambda_2}} = 0,$$

e ciò è impossibile per il fatto che $0 < \beta(\lambda) < 1$ per $\lambda \in (0, +\infty)$.

Osserviamo che se $f(x)$ è sommabile in ogni intervallo finito, la trasformata di f secondo il nucleo (44) è data da:

$$\nu_\lambda[f]_x = \int_{-\beta(\lambda)}^{\beta(\lambda)} (1 - t^2)^{\frac{1}{\lambda}} f(x+t)\, dt \Big/ 2\int_0^{\beta(\lambda)} (1 - t^2)^{\frac{1}{\lambda}}\, dt$$

e si può dimostrare che per $\lambda = \dfrac{1}{n}$ risulta:

$$\lim_{n \to \infty} \nu_{\frac{1}{n}}[f]_x = f(x)$$

quasi ovunque in $(-\infty, +\infty)$.

Questo risultato si può ottenere seguendo un procedimento alquanto analogo a quello di de La Vallée Poussin [10] nel dimostrare la stessa proprietà per i polinomi di Landau-de La Vallée Poussin e nel caso n-dimensionale, $n > 1$, seguendone uno analogo a quello di L. Tonelli in [23].

5. Il nucleo di Fejér (20).

È definito dalla:

$$f(r, x; s, y) = \begin{cases} \dfrac{s-r}{2\pi}\left[\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{y-x}{2(s-r)}}{\dfrac{y-x}{2}}\right]^2 & \text{per} \quad x \neq y \\ \dfrac{1}{2\pi(s-r)} & \text{per} \quad x = y \end{cases}, \qquad 0 \leq r < s < +\infty$$

È stazionario e appartiene alla classe $\mathcal{K}$ senza appartenere alla $\mathcal{K}^*$; esso non soddisfa alla *III**) perchè, per $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ e $z = x$, il primo membro della *III**) dà $1/3\, \lambda\pi$, mentre il secondo membro dà $1/2\, \lambda\pi$.

(20) Cfr. ad es. P. L. Butzer ([4], [5]).

6. Il nucleo di Poisson-Cauchy ([21]).

È definito dalla:

$$f(r, x; s, y) = \frac{s-r}{\pi[(y-x)^2 + (s-r)^2]}, \qquad 0 \leq r < s < +\infty,$$

e appartiene alla classe $\mathcal{K}$ senza appartenere alla $\mathcal{K}^*$; esso è stazionario e non soddisfa la III^*) perchè, per $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ e $z = x$, il primo membro della III^*) dà $\lambda^2/2\pi$ mentre il secondo dà $1/\lambda\pi$.

7. Il nucleo di Weierstrass ([22]).

È definito dalla

$$f(r, x; s, y) = e^{-\frac{|y-x|^p}{s-r}} \Big/ 2\,\Gamma\left(\frac{p+1}{p}\right)(s-r)^{\frac{1}{p}}, \qquad 0 \leq r < s < +\infty,$$

con p intero positivo ed essendo $\Gamma(\alpha)$ la Gamma euleriana di seconda specie.

Per $p = 2$ si ottiene il nucleo di Gauss definito al N. 2.

Questo nucleo, stazionario, appartiene alla classe $\mathcal{K}$ ma non alla $\mathcal{K}^*$ e soddisfa la III^*).

8. Il nucleo di Ostrowski ([23]).

È definito dalla:

$$f(r, x; s, y) = e^{-\left(\frac{|y-x|}{s-r}\right)^{\frac{1}{s-r}}} \Big/ 2\,(s-r)^2\,\Gamma(s-r), \qquad 0 \leq r < s < +\infty.$$

È stazionario, appartiene alla classe $\mathcal{K}$ ma non alla $\mathcal{K}^*$ e soddisfa la III^*).

OSSERVAZIONE 3. I nuclei definiti nei numeri 2, 7, 8, in virtù del fatto che soddisfano la III^*) definiscono delle trasformazioni lineari che godono della proprietà di semi-gruppo ([24]).

([21]) Cfr. ad es. P. L. BUTZER ([4], [5]).
([22]) Cfr. ad es. P. L. BUTZER [4].
([23]) A. OSTROWSKI [20].
([24]) Cfr. E. HILLE-R. S. PHILLIPS [17]; P. L. BUTZER [5].

BIBLIOGRAFIA

[1] E. BAIADA-M. LOREFICE, *Generalizzazioni Markoviane non stazionarie della definizione di perimetro*. Celebrazioni Archimedee del secolo XX, Siracusa 1961.

[2] E. BAIADA-C. VINTI, *Generalizzazioni non Markoviane della definizione di perimetro*. Annali di Mat. Pura e Appl. (IV), vol. LXII, 1963, pp. 1-58.

[3] S. BOCHNER, *Harmonic analysis and the theory of probability*. Berkeley and Los Angeles, 1955.

[4] P. L. BUTZER, *Zur Frage der Saturationsklassen singulärer Integraloperatoren*. Math. Zeitschrift, 70, 1959, pp. 93-112.

[5] P. L. BUTZER, *Fourier-transform methods in the theory of approximation*. Archive Rat. Mech. and Analysis, 5, 1960, pp. 390-415.

[6] J. W. CALKIN, *Functions of several variables and absolute continuity, I*. Duke Math. Journal, 6, 1940, pp. 170-186.

[7] L. CESARI, *Sulle funzioni a variazione limitata*. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, serie 2, 5, 1936, pp. 299-313.

[8] E. DE GIORGI, *Definizione e espressione analitica di perimetro di un insieme*. Rend. Accad. Lincei, Cl. Fis. Mat. Nat., (VII), vol. XIV, fasc. 3, 1953, pp. 390-393.

[9] E. DE GIORGI, *Su una teoria generale della misura* $(r-1)$ *dimensionale in uno spazio ad* r *dimensioni*. Annali di Mat. Pura e Appl. (IV), vol. XXXVI, 1954, pp. 191-213.

[10] C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynomes et des suites limitées de Fourier*. Bull. Sc. Ac. Belgique, 1908, pp. 193-254.

[11] J. L. DOOB, *Stochastic processes*. Wiley London 1953.

[12] M. FRÉCHET, *Sur le prolongement des fonctionnelles et sur l'aire des surfaces courbes*. Fund. Math. 7, 1925, pp. 210-224.

[13] C. GOFFMAN, *Lower semi-continuity and area functionals, I. The non parametric case*. Rend. Circolo Mat. Palermo, serie II, 2, 1953, pp. 203-235.

[14] C. GOFFMAN. *Convergence in area of integral means*. Amer. Journal Math. vol. LXXVII, 1955, pp. 563-574.

[15] L. M. GRAVES, *Some general approximation theorems*. Annals Math. 42, 1941, pp. 281-292.

[16] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. POLYA, *Inequalities*. Cambridge University Press 1952.

[17] E. HILLE-R. S. PHILLIPS, *Functional analysis and semi-groups*. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. XXXI, 1957.

[18] H. MILICER GRUZEWSKA, *Le propriétés probabilistes de la solution d'un systéme parabolique d'equation à coefficients höldériens*. Rend. Circolo Mat. Palermo, serie 2, IX, 1960, pp. 1-38.

[19] C. B. MORREY, *Functions of several variables and absolute continuity, II*. Duke Math. Journal, 6, 1940, pp. 187-215.

[20] A. OSTROWSKI, *Sur les conditions de validité d'un classe de relations entre les expressions différentielles linéaires*. Comm. Math. Helv. 15, 1943, pp. 265-286.

[21] T. RADÒ, *Length and area*. Amer. Math. Soc. Coll. XXX, 1948.

[22] S. SAKS, *Theory of the integral*. Hafner Publishing Company. New York, 1937.

[23] L. TONELLI, *Serie trigonometriche*. Bologna 1928.

[24] L. TONELLI, *Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali*. Rend. Circolo Mat. Palermo, XXIX, 1910, pp. 1-36.

[25] G. VITALI-G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*. vol. II, Bologna 1946.