ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIORGIO TALENTI

Un problema di Cauchy

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 18, nº 2 (1964), p. 165-186

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1964_3_18_2_165_0>

UN PROBLEMA DI CAUCHY

GIORGIO TALENTI (a Genova) (1)

Introduzione

Nel presente lavoro si considera un'equazione lineare a derivate parziali in $N+1$ variabili indipendenti, del tipo:

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = \sum_{i=0}^{n-1} P_{n-i}\left(x_1, \dots, x_N, t; \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N}\right) \frac{\partial^i u}{\partial t^i} + f(x_1, \dots, x_N, t)$$

dove P_{n-i} è una funzione di $x_1, \dots, x_N, t$ a valori polinomi in $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N}$. Per questa equazione si pone un problema di Cauchy, assegnando n condizioni iniziali in una regione dell'iperpiano $t=0$: si dimostra l'esistenza e l'unicità della soluzione in un intorno prefissato della regione portante i dati. I coefficienti di P_{n-i}, il termine noto f, i dati iniziali sono funzioni continue della variabile t ed appartengono, rispetto alle variabili $x_1, \dots, x_N$, a certe classi di Gevrey connesse all'ordine di P_{n-i}: se l'equazione è di tipo ipoellittico a coefficienti costanti, queste ipotesi sono anche necessarie per l'esistenza di una soluzione.

Il metodo seguito consiste nel ridurre il problema di Cauchy ad una equazione integrodifferenziale e nel risolvere questa equazione con un procedimento iterativo, simile a quello impiegato in [13], [15], § 2.

Il presente lavoro si collega alle ricerche di Holmgren [7], [8]; Block [1]; Friedlender [3], [4]; Pucci [11], [12]; de Giorgi [6]; Massimi [10]; Friedman [5]; Rosenbloom [14]; Hörmander [9]; Ehrenpreis [2].

Pervenuto alla Redazione il 17 Dicembre 1963.

(1) Questo lavoro ha avuto origine da una tesi di laurea, diretta dal prof. Carlo Pucci nell'anno accademico 1961-62, e fa parte dell'attività del gruppo di ricerca matematica n^0 23 del C. N. R..

Il lavoro si articola in tre parti. La prima parte richiama alcune questioni studiate in [15] ed alcune diseguaglianze per la funzione gamma. La seconda parte tratta delle equazioni a coefficienti costanti, la terza delle equazioni a coefficienti variabili; ciascuna di queste due parti consta di tre paragrafi, dedicati: il primo all'enunciato del problema di Cauchy e dei teoremi di esistenza-unicità; il secondo alla risoluzione di una equazione integrodifferenziale; il terzo alle osservazioni e agli esempi.

PARTE PRIMA

PRELIMINARI

Ricordiamo alcune notazioni di uso corrente ed alcune definizioni introdotte in [12], che sono usate in questo lavoro.

R_N è lo spazio vettoriale reale a $N \geq 1$ dimensioni; $x_1, \dots, x_N$ sono le componenti di un vettore x di R_N rispetto ad una base ortonormale di R_N.

Indichiamo con $m_1, \dots, m_N$ le componenti di una N-pla m di numeri reali; se h, k, sono due N-ple di numeri reali: $|h| = h_1 + \dots + h_N$, $\langle h, k \rangle = h_1 k_1 + \dots + h_N k_N$. Un N-indice è una N-pla di numeri interi non negativi; se n è un N-indice:

$$D^n = \frac{\partial^{|n|}}{\partial x_1^{n_1} \dots \partial x_N^{n_N}}.$$

E è la chiusura di un sottoinsieme aperto dello spazio R_N, T è un numero reale positivo.

Data una N-pla $p = (p_1, \dots, p_N)$ di numeri reali non negativi, si dice che una funzione g, appartenente a C^∞ nell'insieme E, è di classe G^p se:

$$\lim_{|m| \to \infty}'' \left(\max_{x \in E} \frac{|D^m g(x)|}{\Gamma(\langle m, p \rangle + 1)} \right)^{\frac{1}{|m|}} \quad \text{è finito;}$$

si dice invece che una funzione g, definita nel prodotto topologico $E \times [-T, +T]$ (2), è di classe G_x^p se si verificano queste due circostanze: 1) comunque si prenda lo N-indice m, la derivata $D^m g$ è continua in $E \times [-T, +T]$;

2) $$\lim_{|m| \to \infty}'' \left(\max_{\substack{x \in E \\ |t| \leq T}} \frac{|D^m g(x, t)|}{\Gamma(\langle m, p \rangle + 1)} \right)^{\frac{1}{|m|}} \quad \text{è finito.}$$

(2) $[-T, +T]$ rappresenta l'intervallo chiuso $\{t : |t| \leq T\}$.

Evidentemente, se g appartiene a G_x^p nell'insieme $E \times [-T, +T]$, preso comunque un numero l:

$$l > \lim_{|m| \to \infty}'' \left(\max_{\substack{x \in E \\ |t| \leq T}} \frac{|D^m g(x,t)|}{\Gamma(\langle m, p \rangle + 1)} \right)^{\frac{1}{|m|}},$$

$$H = \sup_m \max_{\substack{x \in E \\ |t| \leq T}} \frac{|D^m g(x,1)|}{l^{|m|} \Gamma(\langle m, p \rangle + 1)} \qquad \text{è finito,}$$

e si ha:

$$\max_{x \in E,\ |t| \leq T} |D^m g(x,t)| \leq H l^{|m|} \Gamma(\langle m, p \rangle + 1) \qquad \text{per ogni } m.$$

Dati due numeri positivi H, l e un numero non negativo h, si dice che una funzione g, appartenente a C^∞ in E, è di classe $G(p, l; H, h)$ se:

$$|D^m g(x)| \leq H l^{|m|} \Gamma(\langle m, p \rangle + h + 1)$$

comunque si prendano m e x in E. In [12] sono provati questi teoremi:

TEOREMA I. *Se* $g \in G(p, l; H, h)$ *allora* $D^m g \in G(p, l; H, l^{|m|}, h + \langle m, p \rangle)$.

TEOREMA II. *Se* $f \in G(p, l; H, h)$, $g \in G(p, l; K, k)$, $p_1 \geq 1, \ldots, p_N \geq 1$, *allora*

$$fg \in G\left(p, l; \frac{HK}{h+k+1}, h+k+1\right).$$

Osserviamo infine alcune diseguaglianze sulla funzione gamma:

$$(1) \qquad \Gamma(u+v+1) \leq \Gamma(pu+1)^{\frac{1}{p}} \Gamma(qv+1)^{\frac{1}{q}} \qquad \left(p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

$$(2) \qquad \Gamma(u+1) \leq \Gamma(pu+1)^{1/p} \qquad (p \geq 1)$$

$$(3) \qquad \Gamma(cz+1) \leq \Gamma(z+1)^c \qquad (0 \leq c \leq 1)$$

$$(4) \qquad \Gamma(u+v+1) \leq \frac{\Gamma(u+1)\Gamma(v+1)}{\varepsilon^u (1-\varepsilon)^v} \qquad (0 < \varepsilon < 1)$$

$$(u \geq 0, v \geq 0, z \geq 0)$$

(1) è conseguenza immediata della diseguaglianza di Hölder:

$$\Gamma(u+v+1)=\int_0^{+\infty} t^u e^{-t/p} t^v e^{-t/q}\,dt \leq \left(\int_0^{+\infty} t^{pu} e^{-t}\,dt\right)^{1/p} \left(\int_0^{+\infty} t^{qv} e^{-t}\,dt\right)^{1/q}$$

(2) si deduce da (1) facendo $v=0$. (3) si deduce da (2) facendo $c=1/p$, $u=cz$. Quanto a (4), si ricorre alla funzione beta, per osservare:

$$B(u+1, v+1)=\int_0^{\varepsilon} t^u (1-t)^v\,dt+\int_{\varepsilon}^{1} t^u (1-t)^v\,dt \geq$$

$$\geq (1-\varepsilon)^v \int_0^{\varepsilon} t^u\,dt+\varepsilon^u \int_{\varepsilon}^{1} (1-t)^v\,dt=(1-\varepsilon)^v \frac{\varepsilon^{u+1}}{u+1}+\varepsilon^u \frac{(1-\varepsilon)^{v+1}}{v+1},$$

dunque:

$$\frac{\Gamma(u+1)\,\Gamma(v+1)}{\Gamma(u+v+1)}=(u+v+1)\,B(u+1, v+1) \geq$$

$$\geq (1-\varepsilon)^v \varepsilon^{u+1}+\varepsilon^u (1-\varepsilon)^{v+1}=\varepsilon^u (1-\varepsilon)^v \text{ }(^3).$$

PARTE SECONDA

EQUAZIONI A COEFFICIENTI COSTANTI

§ 1. Posizione del problema, risultati generali.

1. *L'operatore differenziale.* — È il seguente:

$$\sum_{\langle p, h\rangle+i \leq n} a_{hi}\, D^h \frac{\partial^i}{\partial t^i}$$

ove:

n numero intero ≥ 1;

p N-pla di numeri reali positivi;

a_{hi} numero complesso; $a_{0\ldots 0,n}=-1$.

Evidentemente l'ordine dell'operatore non differisce da n se $p_1 \geq 1, \ldots$ $\ldots p_N \geq 1$; è invece $\geq n$ se qualcuno dei numeri $p_1, \ldots, p_N$ è <1.

(3) questa dimostrazione di (4) è stata suggerita da Wayne Ford.

2. *Il problema.* — Assegnata in E una funzione u_r di classe C^{n-r} ($r = 0, \ldots$ $\ldots, n-1$); assegnata in $E \times [-T, +T]$ una funzione continua f; definire in $E \times [-T, +T]$ una funzione che goda delle tre proprietà:

(5) u è continua in $E \times [-T, +T]$ assieme alla derivata

$$D^h \frac{\partial^i u}{\partial t^i}, \ \langle p, h \rangle + i \leq n;$$

(6) $$\sum_{<p, h> + i \leq n} a_{hi} D^h \frac{\partial^i u}{\partial t^i} + f(x, t) = 0 \qquad \text{in } E \times [-T, +T];$$

(7) $$\frac{\partial^r u}{\partial t^r}(x, 0) = u_r(x), \ (r = 0, \ldots, n-1), \text{ in } E.$$

Appresso si adopera la posizione:

$$g(x, t) = f(x, t) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{<p, h> \leq n-i} \sum_{r=i}^{n-1} a_{hi} D^h u_r(x) \frac{t^{r-i}}{(r-i)!}.$$

3. *Teoremi di esistenza e unicità.* — I teoremi III, IV, V di questo numero 3 sono immediato corollario dei teoremi sulle equazioni integrodifferenziali che verranno considerate nel paragrafo 2.

Si ha dapprima il

TEOREMA III (*esistenza*). *Ipotesi*

1) *g appartiene a* G_x^p;

2) *esiste un numero positivo l tale che:*

$$l > \lim_{|m| \to \infty} \left(\max \frac{|D^m g(x, t)|}{\Gamma(\langle m, p \rangle + 1)} \right)^{\frac{1}{|m|}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{<p,h> \leq i} |a_{h, n-i}| \, l^{|h|} T^i < 1 \ (^4)$$

---

(4) Può essere interessante osservare che questa diseguaglianza si può scrivere:

$$P'(1, \ldots, 1, 1/T) < 0,$$

pur di indicare con $P'(x_1, \ldots, x_N, t)$ il polinomio che si costruisce a partire dal polinomio caratteristico:

Conclusione: esiste una soluzione del problema: questa soluzione gode della proprietà

$$u(x,t) - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{u_r(x)}{r!} t^r \quad \textit{appartiene a } G^p_\infty . \text{ (5)}$$

L'ipotesi 2) del teorema III può essere soppressa sostituendo la ipotesi 1) con un'altra più restrittiva; si ha ad esempio il

TEOREMA IV (*esistenza*). *Ipotesi: g appartiene a G^q_∞; $0 \leq q_1 < p_1, \dots, 0 \leq q_N < p_N$. Conclusione: esiste una soluzione del problema; questa soluzione gode della proprietà:*

$$u(x,t) - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{u_r(x)}{r!} t^r \quad \textit{appartiene a } G^q_\infty .$$

TEOREMA V (*unicità*). *Siano u_1, u_2 due soluzioni del problema.* Se u_1, u_2 *appartengono a G^p_∞, allora $u_1 = u_2$.*

§ 2. Equazioni integrodifferenziali.

4. *Riduzione del problema di Cauchy ad una equazione integrodifferenziale.* La equazione (6) si scrive anche:

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\langle p, h \rangle \leq n-i} a_{hi} D^h \frac{\partial^i u}{\partial t^i} + f(x,t),$$

oppure:

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = \sum_{i=0}^{n-1} P_{n-i}(D) \frac{\partial^i u}{\partial t^i} + f(x,t), \tag{8}$$

$$P_{n-i}(D) = \sum_{\langle p, h \rangle \leq n-i} a_{hi} D^h \qquad (i = 0, 1, \dots, n-1) \tag{9}$$

(segue nota pag. 5)

$$P(x_1, \dots, x_N, t) = \sum_{\langle p, h \rangle + i \leq n} a_{h,i}\, x_1^{h_1} \dots x_N^{h_N} t^i$$

conservando al coefficiente di t^n il valore -1, e prendendo il valore assoluto di tutti gli altri coefficienti.

(5) Pertanto u appartiene a G^p_∞ se u_r $(r = 0, \dots, n-1)$ appartiene a G^p.

Consideriamo allora come incognita del problema di Cauchy non la funzione u, ma $v = \partial^n u / \partial t^n$. Si ha:

$$u(x, t) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{u_r(x)}{r!} t^r + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} v(x, \tau)\, d\tau, \tag{9'}$$

dunque, per (8):

$$v(x, t) = g(x, t) + \sum_{i=1}^{n} P_i(D) \int_0^t \frac{(t-\tau)^{i-1}}{(i-1)!} v(x, \tau)\, d\tau. \tag{10}$$

Sia v una soluzione di (10): questo vuol dire che v è funzione continua assieme alla derivata $D^h v$ ($\langle p, h \rangle \leq n$) e verifica (10); se definiamo con (9′) la funzione u, riesce:

$$\frac{\partial^i u}{\partial t^i} = \sum_{r=i}^{n-1} \frac{u_r(x)}{(r-i)!} t^{r-i} + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} v(x, \tau)\, d\tau \qquad (i = 0, \dots, n-1),$$

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = v;$$

pertanto u verifica non solo (7), ma anche:

$$\sum_{i=0}^{n-1} P_{n-i}(D) \frac{\partial^i u}{\partial t^i} = \sum_{i=0}^{n-1} P_{n-i}(D) \sum_{r=i}^{n-1} \frac{u_r(x)}{(r-i)!} t^{r-i} - g(x, t) + \frac{\partial^n u}{\partial t^n},$$

che è appunto (8). Dunque ricercare una soluzione di (10) (nel senso precisato sopra) equivale al problema di Cauchy.

5. *Teoremi di esistenza e unicità.* — Riguardo alla equazione integro-differenziale (10) sussistono i teoremi seguenti:

TEOREMA VIII. *Nelle medesime ipotesi del teorema III (del teorema IV), esiste una soluzione di* (10), *che appartiene a* G_x^p (a G_x^q) nell'insieme $E \times [-T, +T]$.

TEOREMA IX. *Siano* v_1, v_2 *due soluzioni di* (10), *definite in* $E \times [-T, +T]$. *Se* v_1, v_2 *appartengono a* G_x^p, *allora* $v_1 = v_2$.

Alla dimostrazione dei teoremi VIII e IX, che è esposta nei numeri 7, 8, occorre premettere un Lemma.

6. LEMMA. Notazioni:

$$A(t, l) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\langle p, h \rangle \leq i} | a_{h, n-i} | \, l^{|h|} t^i ; \tag{11}$$

r è un numero reale ($|r| \leq T$), L_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) è l'operatore integrodifferenziale definito così:

$$L_i h(x, t) = P_i(D) \int_r \frac{(t-\tau)^{i-1}}{(i-1)!} h(x, \tau) \, d\tau,$$

dove P_i è espresso da (9); $p' = (p_1', \ldots, p_N')$ è una N-pla di numeri reali, $0 \leq p_1' \leq p_1, \ldots, 0 \leq p_N' \leq p_N$; $c = \max(p_1'/p_1, \ldots, p_N'/p_N)$.

Ipotesi: $g(\cdot, t) \in G(p', l'; H, 0)$ *per ogni* $|t| \leq T$.

Tesi: quali che siano l'intero $k \geq 0$ *e il numero reale* ε, $0 < \varepsilon < 1$, $(L_1 + \ldots + L_n)^k g(\cdot, t)$ *appartiene per ogni* $|t| \leq T$ *alla classe*:

$$G\left(p', \frac{l'}{(1-\varepsilon)^{|p'|}} ; \frac{H}{k!^{1-c}} A(|t-r| \varepsilon^{-c}, l')^k, 0\right)$$

DIMOSTRAZIONE. Sia g^* una funzione appartenente a $G_x^{p'}$ nell'insieme $E \times [-T, +T]$, anzi:

$$g^*(\cdot, t) \in G\left(p', l'; H^* \frac{|t-r|^\lambda}{\lambda!}, c\lambda\right), \text{ (λ intero non negativo).}$$

Siccome:

$$\left| D^m \int_r^t \frac{(t-\tau)^{i-1}}{(i-1)!} g^*(x, \tau) \, d\tau \right| \leq |t-r|^i \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{i-1}}{(i-1)!} |D^m g^*(x, r + \tau(t-r))| \, d\tau \leq$$

$$\leq H^* |t-r|^{i+\lambda} l'^{|m|} \Gamma(\langle m, p' \rangle + c\lambda + 1) \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{i-1}}{(i-1)!} \frac{\tau^\lambda}{\lambda!} \, d\tau =$$

$$= H^* \frac{|t-r|^{i+\lambda}}{(i+\lambda)!} l'^{|m|} \Gamma(\langle m, p' \rangle + c\lambda + 1),$$

riesce:

$$\int_r^t \frac{(t-\tau)^{i-1}}{(i-1)!} g^*(\cdot, \tau) \, d\tau \in G\left(p', l'; H^* \frac{|t-r|^{i+\lambda}}{(i+\lambda)!}, c\lambda\right).$$

Allora per il teorema I:

$$a_{h,n-i}\, D^h \int_r^t \frac{(t-\tau)^{i-1}}{(i-1)!}\, g^*(\cdot,\tau)\, d\tau \in G\Big(p', l'; H^* \mid a_{h,n-i} \mid l^{|h|} \times$$

$$\times \frac{|t-r|^{i+\lambda}}{(i+\lambda)!},\, c\lambda + \langle p', h\rangle\Big),$$

sicchè, ponendo per brevità: $a_i = \sum_{<p,h> \leq i} \mid a_{h,n-i} \mid l^{|h|}$, risulta:

$$L_i\, g^*(\cdot, t) \in G\left(p', l';\ H^* a_i \frac{|t-r|^{i+\lambda}}{(i+\lambda)!},\ c(\lambda+i)\right).$$

Tale formula contiene anche questo risultato: quali che siano l'intero $k \geq 1$ e gli indici $i_1, \ldots, i_k$ $(1 \leq i_1 \leq n, \ldots, 1 \leq i_k \leq n)$, la funzione $L_{i_1} \ldots L_{i_k} g^*(\cdot, t)$ appartiene per ogni $|t| \leq T$ alla classe:

$$G\left(p', l';\ H^* a_{i_k} \ldots a_{i_k} \frac{|t-r|^{i_1+\ldots+i_k+\lambda}}{(i_1+\ldots+i_k+\lambda)!},\ c(\lambda+i_1+\ldots+i_k)\right).$$

In particolare dunque:

$$L_{i_1} \ldots L_{i_k}\, g(\cdot, t) \in G\left(p', l';\ H a_{i_1} \ldots a_{i_k} \frac{|t-r|^{i_1+\ldots+i_k}}{(i_1+\ldots+i_k)!},\ c(i_1+\ldots+i_k)\right).$$

Per via delle limitazioni (3), (4), si trova facilmente

$$L_{i_1} \ldots L_{i_k}\, g(\cdot, t) \in G\left(p', \frac{l'}{(1-\varepsilon)^{|p'|}};\ H a_{i_1} \ldots a_{i_k} \frac{(|t-r|\, \varepsilon^{-c})^{i_1+\ldots+i_k}}{(i_1+\ldots+i_k)!^{1-c}},\ 0\right);$$

pertanto, dall'essere $(i_1+\ldots+i_k)! \geq k!$, $1-c \geq 0$, si ha:

$$(L_1+\ldots+L_n)^k\, g(\cdot, t) \in G\left(p', \frac{l'}{(1-\varepsilon)^{|p'|}};\ \frac{H}{k!^{1-c}}\left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{|t-r|^i}{\varepsilon^c}\right)^k,\ 0\right)$$

che è appunto quanto si doveva dimostrare.

7. *Dimostrazione del teorema VIII.* — Posto:

$$Lv(x,t) = \sum_{i=1}^n P_i(D) \int_0^t \frac{(t-\tau)^{i-1}}{(i-1)!}\, v(x,\tau)\, d\tau,$$

(10) si scrive:

$$v = g + Lv.$$

Mettiamoci dapprima nelle ipotesi del teorema IV. Indichiamo con H una costante positiva tale che $g(\cdot, t)$ appartenga a $G(p, l; H, 0)$ per ogni $|t| \leq T$; indichiamo con $1/\varepsilon$ un numero > 1 tale che: $A(T/\varepsilon, 1) < 1$, dove A è espresso da (11). Per il lemma, quali che siano l'intero $k \geq 1$ e lo N-indice m:

$$| D^m L^k g(x, t) | \leq H A(T/\varepsilon, l)^k \frac{l^{|m|}}{(1-\varepsilon)^{|p|\cdot|m|}} \Gamma(\langle m, p \rangle + 1) \quad (|t| \leq T).$$

Allora la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} D^m L^k g(x, t)$ converge uniformemente per $|t| \leq T$, anzi

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} D^m L^k g(x, t) \right| \leq H (1 - A(T/\varepsilon, l))^{-1} \frac{l^{|m|}}{(1-\varepsilon)^{|p|\cdot|m|}} \Gamma(\langle m, p \rangle + 1).$$

La funzione $v(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} L^k g(x, t)$ è dunque di classe G_x^p nell'insieme $E \times [-T, +T]$; questa funzione è una soluzione di (10) perchè, derivando e integrando termine a termine:

$$v(x, t) = g(x, t) + L \sum_{k=0}^{+\infty} L^k g(x, t) = g(x, t) + Lv(x, t).$$

Mettiamo ora nelle ipotesi del teorema IV. Esistono due costanti positive H, l tali che $g(\cdot, t) \in G(q, l; H, 0)$ per ogni $|t| \leq T$. Posto $c = \max(q_1/p_1, \ldots, q_N/p_N) < 1$, a causa del lemma:

$$| D^m L^k g(x, t) | \leq H \frac{A(2^c T, l)^k}{k!^{1-c}} l^{|m|} 2^{|q|\cdot|m|} \Gamma(\langle m, p \rangle + 1) \quad (|t| \leq T);$$

poichè $\sum_{k=0}^{+\infty} t^k/k!^{1-c}$ è trascendente intera, la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} D^m L^k g(x, t)$ converge uniformemente per $|t| \leq T$, qualunque sia T e addirittura:

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} D^m L^k g(x, t) \right| \leq H \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A(2^c T, l)^k}{k!^{1-c}} l^{|m|} 2^{|q|\cdot|m|} \Gamma(\langle m, q \rangle + 1).$$

La funzione $v(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} L^k g(x, t)$ è questa volta di classe G_x^q nell'insieme $E \times [-T, +T]$, ed è ancora una soluzione di (10).

8. *Dimostrazione del Teorema IX.* Per ogni numero reale r, $0 \leq r \leq T$, indichiamo con L_r l'operatore integrodifferenziale così definito:

$$L_r h(x, t) \equiv \sum_{i=1}^{n} P_i(D) \int_r^t \frac{(t-\tau)^{i-1}}{(i-1)!} h(x, \tau)\, d\tau.$$

La funzione $v = v_1 - v_2$ appartiene a G_x^p in $E \times [-T, +T]$ e verifica l'equazione: $v = L_0 v$. Dobbiamo provare che $v = 0$; per questo dimostreremo che $v(x, t) = 0$ per $0 \leq t \leq T$, omettendo per brevità il seguito del procedimento.

Evidentemente $v(x, 0) = 0$.

Indichiamo con I il sottoinsieme dell'intervallo $[0, T]$ definito dalla seguente proprietà:

$$v(x, t) = 0 \qquad \text{per ogni} \qquad t,\ 0 \leq t \leq r.$$

L'insieme I contiene il valore $r = 0$ ed è chiuso. Per provare il nostro asserto basta provare che I è aperto relativamente all'intervallo $[0, T]$.

Sia r un numero di I. Si ha:

$$v(x, t) = \sum_{i=0}^{n} P_i(D) \int_0^r \frac{(t-\tau)^{i-1}}{(i-1)!} v(x, \tau)\, d\tau + L_r v(x, t) = L_r v(x, t)$$

dunque, qualunque sia l'intero $k \geq 1$:

$$v = L_r^k v.$$

Esistono due costanti positive H, l tali che $v(\cdot, t)$ appartiene a $G(p, l; H, 0)$ per ogni $|t| \leq T$. A causa del Lemma:

$$|v(x, t)| = |L_r^k v(x, t)| \leq H A(2|t - r|, l)^k \quad (|t| \leq T).$$

Allora, se si indica con r_0 un numero positivo tale che:

$$A(2r_0, l) = A_0 < 1,$$

si ha:

$$|v(x, t)| \leq H \lim_{k \to \infty} A_0^k = 0 \quad \text{se} \quad |t - r| \leq r_0, \quad |t| \leq T;$$

dunque $v(x, t) = 0$ se $0 \leq t \leq \min(r + r_0, T)$.

§ 3. Osservazioni.

9. *Sull'esistenza di soluzioni analitiche.* — Estendendo al campo complesso il medesimo procedimento che si impiega per provare i teoremi III, IV, si trovano facilmente i seguenti due teoremi di regolarizzazione che, per brevità, non dimostreremo.

TEOREMA VI. *Ipotesi:*

1) *g si prolunga con una funzione g^*, appartenente a G_x^p nell'insieme $E \times \{t_1 + i\,t_2 : |\,t_1 + i\,t_2\,| \le T\}$, olomorfa rispetto alla variabile complessa $t_1 + i\,t_2$;*

2) *esiste un numero positivo l tale che:*

$$l > \lim_{|m| \to \infty}'' \left(\max \frac{|\,D^m g^*(x, t_1 + i\,t_2)\,|}{\Gamma(\langle m, p \rangle + 1)} \right)^{\frac{1}{|m|}},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\langle p, h \rangle \le i} |\,a_{h,\,n-i}\,|\, l^{|h|}\, T^i < 1.$$

Conclusione: esiste una soluzione del problema; questa soluzione si prolunga in tutto l'insieme $E \times \{t_1 + i\,t_2 : \;|\,t_1 + i\,t_2\,| \le T\}$ con una funzione olomorfa di $t_1 + i\,t_2$ che gode di questa proprietà:

$$u(x, t_1 + i\,t_2) - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{u_r(x)}{r\,!}(t_1 + i\,t_2)^r \quad \textit{appartiene a } G_x^p.$$

TEOREMA VII. *Ipotesi: g si prolunga nell'insieme $E \times \{t_1 + i\,t_2 : |\,t_1 + i\,t_2\,| \le T\}$ con una funzione olomorfa della variabile complessa $t_1 + i\,t_2$, appartenente a G_x^q, $0 \le q_1 < p_1, \dots, 0 \le q_N < p_N$. Conclusione: esiste una soluzione del problema; questa soluzione si prolunga nell'insieme $E \times \times \{t_1 + i\,t_2 : \;|\,t_1 + i\,t_2\,| \le T\}$ con una funzione olomorfa di $t_1 + i\,t_2$ che gode di questa proprietà:*

$$u(x, t_1 + i\,t_2) - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{u_r(x)}{r\,!}(t_1 + i\,t_2)^r \quad \textit{appartiene a } G_x^q.$$

9'. *Applicazione ad un caso particolare.* — Consideriamo il problema di Cauchy in due variabili reali $x = x_1$, t:

$$e^{ih\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^m u}{\partial x^m} + \frac{\partial^n u}{\partial t^n} = 0 \qquad (a \le x \le b, \;|\,t\,| \le T) \tag{12}$$

$$u_{t^r}(x, 0) = u_r(x) \qquad (a \le x \le b\,;\; r = 0, \dots, n-1) \tag{13}$$

dove h, a, b sono numeri reali, $a < b$. Con le notazioni dei numeri 1, 2 risulta:

$$p_1 = n/m, \quad g(x,t) = -e^{ih\frac{\pi}{2}} \sum_{r=0}^{n-1} u_r^{(m)}(x) \frac{t^r}{r!}.$$

Si ha:

$$\left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{m}j+1\right)} \max\left|\frac{\partial^j g}{\partial x^j}\right|\right)^{1/j} \leq \left(\sum_{r=0}^{n-1} \frac{T^r}{r!} \frac{\max|u_r^{(m+j)}(x)|}{\Gamma\left(\frac{n}{m}j+1\right)}\right)^{1/j} \leq$$

$$\leq \sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{T^r}{r!}\right)^{1/j} \left(\frac{\max|u_r^{(m+j)}(x)|}{\Gamma\left(\frac{n}{m}j+1\right)}\right)^{1/j},$$

$$\left(\frac{\max|u_r^{(m+j)}(x)|}{\Gamma\left(\frac{n}{m}j+1\right)}\right)^{1/j} =$$

$$= \left(\frac{\Gamma\left(\frac{n}{m}j+n+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{m}j+1\right)}\right)^{1/j} \left(\max\frac{|u_r^{(m+j)}(x)|}{\Gamma\left(\frac{n}{m}(j+m)+1\right)}\right)^{\frac{1}{m+j}\left(1+\frac{m}{j}\right)},$$

dunque:

$$\lim_{j\to\infty}{}'' \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{m}j+1\right)} \max\left|\frac{\partial^j g}{\partial x^j}\right|\right)^{1/j} \leq \sum_{r=0}^{n-1} \lim_{j\to\infty}{}'' \left(\max\frac{|u_r^{(j)}(x)|}{\Gamma\left(\frac{n}{m}j+1\right)}\right)^{1/j}.$$

Allora il teorema VI si particolarizza nel seguente

TEOREMA X. *Le funzioni* u_r $(r = 0, \dots, n-1)$ *appartengano a* $G^{n/m}$ *nell'intervallo* $a \leq x \leq b$ *e sia:*

$$l > \sum_{r=0}^{n-1} \lim_{j\to\infty}{}'' \left(\max\frac{|u_r^{(j)}(x)|}{\Gamma\left(\frac{n}{m}j+1\right)}\right)^{1/j}.$$

Esiste una (ed una sola) soluzione di (12), (13), *appartenente a* $G_x^{n/m}$ *e analitica in* t, *purchè:*

$$T < l^{-m/n}.$$

Il teorema X è già noto ed è stato qui richiamato perchè su di esso si appoggiano le osservazioni dei numeri 10, 11. Ricordiamo anche che, a norma di [11], la soluzione di (12), (13), si può rappresentare con la serie:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j e^{ih\frac{1}{2}\pi j} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{t^{nj+r}}{(nj+r)!} u_r^{(mj)}(x).$$

10. *Sul campo di esistenza della soluzione.* — Facciamo in (12), (13)

$$m = n = 2, \quad h = 0, \quad u_0(x) = (x + i\, l^{-1})^{-1}, \quad u_1(x) = 0, \quad a = -\infty, \quad b = +\infty;$$

consideriamo insomma il problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 & (-\infty \leq x \leq +\infty, \ |t| \leq T) \\ u(x, 0) = (x + i\, l^{-1})^{-1}, \ u_t(x, 0) = 0 & (-\infty \leq x \leq +\infty) \end{cases}$$

poichè

$$\left| \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{x + i\, l^{-1}} \right| = \left| \frac{(-1)^n\, n!}{(x + i\, l^{-1})^{n+1}} \right| = \frac{n!}{|x + i\, l^{-1}|^{n+1}} \leq l^{n+1}\, n!,$$

a causa del teorema X, esiste una (sola) soluzione analitica nella striscia $|t| \leq T < l^{-1}$. Tale soluzione è evidentemente:

$$\frac{x + i\, l^{-1}}{(x + i\, l^{-1})^2 + t^2} = \frac{x + i\, l^{-1}}{x^2 + t^2 - l^{-2} + 2\, i\, l^{-1} x}$$

e non può prolungarsi in una striscia più ampia per via delle singolarità nei punti $x = 0$, $t = \pm\, l^{-1}$.

11. *Equazioni di tipo ipoellittico.* — In [12] è dimostrato il seguente teorema: (12) è di tipo ipoellittico in questi casi e in questi soltanto: 1) $m + h - n$ non è un numero pari; 2) m, n, $\frac{1}{2}(m - n + h)$ sono numeri pari. In entrambi i casi, posto $p_1 = \max(1, n/m)$, $p_2 = \max(1, m/n)$, le soluzioni di (12) appartengono a $G^{(p_1, p_2)}$.

Per effetto di questo teorema, se (12) è di tipo ipoellittico (cioè in ognuno dei due casi sopraddetti) e se $n \geq m$, le ipotesi del teorema X sono non solo sufficienti, ma anche necessarie per l'esistenza di una soluzione di (12), (13).

Naturalmente, le considerazioni di questo numero si applicano altrettanto bene, anche se meno esplicitamente, ad equazioni ipoellittiche affatto qualunque.

PARTE TERZA
EQUAZIONI A COEFFICIENTI VARIABILI

§ 4. Posizione del problema, risultati generali.

12. *L'operatore differenziale.* — Ha ancora l'aspetto:

$$\sum_{<p,h>+i\leq n} a_{hi}(x,t)\,D^h \frac{\partial^i}{\partial t^i} \qquad (a_{0\ldots 0,n}(x,t) = -1),$$

ma questa volta i coefficienti sono funzioni a valori complessi delle variabili x e t, definite nell'insieme $E \times [-T, +T]$.

13. *Il problema.* — Assegnata in E una funzione u_r di classe C^{n-r} $(r = 0, 1, \ldots, n-1)$; assegnata in $E \times [-T, +T]$ una funzione continua f; definire in $E \times [-T, +T]$ una funzione che possieda queste proprietà:

(1′) u è continua assieme alla derivata parziale

$$D^h\, \partial^i u/\partial t^i\,, \langle p, h\rangle + i \leq n\,;$$

$$(2') \qquad \sum_{<p,h>+i\leq n} a_{hi}(x,t)\,D^h \frac{\partial^i u}{\partial t^i} + f(x,t) = 0 \quad \text{in} \quad E \times [-T, +T]\,;$$

$$(3') \qquad \frac{\partial^r u}{\partial t^r}(x,0) = u_r(x), \quad (r = 0, 1, \ldots, n-1), \quad \text{in } E.$$

Appresso si adopera la posizione:

$$g(x,t) = f(x,t) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{<p,h>\leq n-i} \sum_{r=i}^{n-1} a_{hi}(x,t)\,D^h u_r(x) \frac{t^{r-i}}{(r-i)!}\,.$$

14. *Teoremi di esistenza e di unicità.* — I teoremi XI, XII, XIII di questo numero 14 sono corollario dei teoremi sulle equazioni integrodifferenziali che verranno considerate nel paragrafo 5.

Si ha dapprima il

TEOREMA XI (*esistenza*). *Ipotesi:*

1) g, a_{hi} *appartengono a* G_x^p; $p_1 \geq 1, \ldots, p_N \geq 1$ [6].

---

[6] Conviene osservare esplicitamente che l'ipotesi $p_1 \geq 1, \ldots, p_N \geq 1$ non compare nel teorema III.

2) *esistono un numero positivo l e un numero ε, $0 < \varepsilon < 1$, tali che:*

$$l > \lim_{|m| \to \infty}'' \left(\max \frac{| D^m g(x,t) |}{\Gamma(\langle m, p \rangle + 1)} \right)^{\frac{1}{|m|}},$$

$$l > \lim_{|m| \to \infty}'' \left(\max \frac{| D^m a_{hi}(x,t) |}{\Gamma(\langle m, p \rangle + 1)} \right)^{\frac{1}{|m|}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{<p,h> \leq i} A_{h\,n-i}\, l^{|h|} \frac{T^i}{\varepsilon^i} < 1 - \varepsilon$$

dove è posto:

$$A_{hi} = \sup_m \max \frac{| D^m a_{hi}(x,t) |}{l^{|m|}\, \Gamma(\langle m, p \rangle + 1)} .$$

Conclusione: esiste una soluzione del problema; questa soluzione gode della proprietà:

$$u(x,t) - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{u_r(x)}{r!}\, t^r \quad \textit{appartiene a} \quad G_x^p .$$

L'ipotesi 2) del teorema XI può essere soppressa sostituendo la ipotesi 1) con un'altra più restrittiva; si ha ad esempio il

TEOREMA XII (*esistenza*). *Ipotesi: g, a_{hi} appartengono a G_x^q; $1 \leq q_1 < p_1, \dots, 1 \leq q_N < p_N$. Conclusione: esiste una soluzione del problema: questa soluzione gode della proprietà:*

$$u(x,t) - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{u_r(x)}{r!}\, t^r \quad \textit{appartiene a} \quad G_x^q .$$

TEOREMA XIII (*unicità*). *Siano u_1, u_2 due soluzioni del problema. Se a_{hi}, u_1, u_2 appartengono a G_x^p, allora $u_1 = u_2$.*

§ 5. Equazioni integrodifferenziali.

16. *Teoremi di esistenza e unicità.* — Come nel N^0 4, si riconosce che per mezzo della posizione:

$$u(x,t) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{u_r(x)}{r!}\, t^r + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\, v(x,\tau)\, d\tau,$$

il problema di Cauchy è ricondotta alla ricerca di una funzione v, continua assieme alle derivate $D^h v$, $\langle h, p \rangle \leq n$, soluzione della equazione integrodifferenziale :

$$v(x,t) = g(x,t) + \sum_{i=1}^{n} P_i(x,t,D) \int_0^t \frac{(t-\tau)^{i-1}}{(i-1)!} v(x,\tau)\, d\tau, \tag{14}$$

dove :

$$P_i(x,t,D) = \sum_{\langle p, h\rangle \leq i} a_{h,\, n-i}(x,t)\, D^h \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

TEOREMA XVI. *Nelle medesime ipotesi del teorema XI (del teorema XII), esiste una soluzione di* (14) *appartenente a* G_x^p *(a* G_x^q*) nell'insieme* $E \times \times [-T, +T]$.

TEOREMA XVII. *Siano* v_1, v_2 *due soluzioni di* (14), *definite in* $E \times \times [-T, +T]$. *Se* a_{hi}, v_1, v_2 *appartengono a* G_x^p, *allora* $v_1 = v_2$.

Omettiamo la dimostrazione del teorema XVII e diamo solo qualche cenno su quella del teorema XVI perchè tali dimostrazioni diventano analoghe a quelle dei teoremi VIII, IX, non appena sia stabilito il lemma del numero 17.

17. LEMMA : Notazioni : r è un numero reale, $|r| \leq T$; $L_i (i = 1, 2, \dots, n)$ è l'operatore integrodifferenziale così definito :

$$L_i h(x,t) = P_i(x,t,D) \int_r^t \frac{(t-\tau)^{i-1}}{(i-1)!} h(x,\tau)\, d\tau ;$$

$p' = (p'_1, \dots, p'_N)$ è una N-pla di numeri reali, $1 \leq p'_1 \leq p_1, \dots, 1 \leq p'_N \leq p_N$; $c = \max(p'_1/p_1, \dots, p'_N/p_N)$.

Ipotesi :

$$a_{h,\, n-i}(\cdot, t) \in G(p', l'; A_{h,\, n-i}, c\, i - \langle p', h\rangle)$$

$$g(\cdot, t) \in G(p', l'; H, 0) \qquad (|t| \leq T).$$

Tesi : Quali che siano l'intero k, $k \geq 0$, *e il numero* ε, $0 < \varepsilon < 1$, $(L_1 + \dots + L_n)^k\, g(\cdot, t)$ *appartiene per ogni* $|t| \leq T$ *alla classe :*

$$G\left(p', l(1-\varepsilon)^{-|p'|}; \frac{H}{k!^{2-c}} \frac{A(|t-r|\, \varepsilon^{-c})^k}{(1-\varepsilon)^k}, k\right),$$

dove :

$$A(t) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{\langle p, h\rangle \leq i} A_{h,\, n-i}\, l^{|h|} \Big) t^i.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia g^* una funzione appartenente a $G_x^{p'}$ nell'insieme $E \times [-T, +T]$, anzi:

$$g^*(\cdot, t) \in G\left(p', l'; H^* \frac{|t-r|^\lambda}{\lambda!\,\mu!}, c\lambda + \mu\right)$$

(λ, μ interi, non negativi).

Siccome:

$$\left| D^m \int_r^t \frac{(t-\tau)^{i-1}}{(i-1)!} g^*(x, \tau)\, d\tau \right| \leq$$

$$\leq |t-r|^i \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{i-1}}{(i-1)!} \,|\, D^m g^*(x, r + \tau(t-r)) \,|\, dt \leq$$

$$\leq H^* |t-r|^{i+\lambda} l'^{|m|} \frac{\Gamma(\langle p', m\rangle + c\lambda + \mu + 1)}{\mu!} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{i-1}}{(i-1)!} \frac{\tau^\lambda}{\lambda!} d\tau =$$

$$= H^* \frac{|t-r|^{i+\lambda}}{(i+\lambda)!\,\mu!} l'^{|m|} \Gamma(\langle p', m\rangle + c\lambda + \mu + 1),$$

riesce

$$\int_r^t \frac{(t-\tau)^{i-1}}{(i-1)!} g^*(\cdot, \tau)\, d\tau \in G\left(p', l'; H^* \frac{|t-r|^{i+\lambda}}{(i+\lambda)!\,\mu!}, c\lambda + \mu\right).$$

Allora, se $|t| \leq T$ in base al teorema II, la funzione:

$$a_{h,\,n-i}(\cdot, t)\, D^h \int_r^t \frac{(t-\tau)^{i-1}}{(i-1)!} g^*(\cdot, \tau)\, d\tau$$

appartiene alla classe:

$$G\left(p', l'; H^* A_{h,\,n-i}\, l'^{|h|} \frac{|t-r|^{i+\lambda}}{(i+\lambda)!\,(\mu+1)!}, c(i+\lambda) + \mu + 1\right).$$

Ponendo per brevità $A_i = \sum_{\langle p, h\rangle \leq i} A_{h,\,n-i}\, l'^{|h|}$, risulta quindi

$$L_i g^*(\cdot, t)\, G\left(p', l'; H^* A_i \frac{|t-r|^{i+\lambda}}{(i+\lambda)!\,(\mu+1)!}, c(i+\lambda) + \mu + 1\right).$$

Tale formula contiene anche questo risultato: quali che siano l'intero k e gli indici $i_1, \ldots, i_k$ $(1 \leq i_1 \leq n, \ldots, 1 \leq i_k \leq n)$, la funzione $L_{i_1} \ldots L_{i_k} g(\cdot, t)$ appartiene alla classe

$$G\left(v', l'; H^* A_{i_1} \ldots A_{i_k} \frac{|t-r|^{i_1+\ldots+i_k+\lambda}}{(i_1+\ldots+i_k+\lambda)!\,(\mu+k)!},\right.$$
$$\left. c(\lambda+i_1+\ldots+i_k)+\mu+k\right).$$

In particolare dunque:

$$L_{i_1} \ldots L_{i_k} g(\cdot, t) \in$$
$$G\left(p', l'; HA_{i_1} \ldots A_{i_k} \frac{|t-r|^{i_1+\ldots+i_k}}{(i_1+\ldots+i_k)!\,k!}, c(i_1+\ldots+i_k)+k\right).$$

A causa delle limitazioni (3), (4), si ha pure

$$L_{i_1} \ldots L_{i_k} g(\cdot, t) \in$$
$$G\left(p', l'(1-\varepsilon)^{-|p'|}; HA_{i_1} \ldots A_{i_k} \frac{(\varepsilon^{-c}|t-r|)^{i_1+\ldots+i_k}}{k!^{2-c}(1-\varepsilon)^k}, k\right).$$

Pertanto:

$$(L_1+\ldots+L_n)^k g(\cdot, t)$$
$$G\left(p', l'(1-\varepsilon)^{-|p'|}; \frac{H}{k!^{2-c}}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i \frac{|t-r|^i}{\varepsilon^{ci}(1-\varepsilon)}\right)^k, k\right)$$

che è appunto quanto si doveva dimostrare.

18. *Cenni sulla dimostrazione del teorema XVI.* — Mettiamoci ad es. nelle ipotesi del teorema XI. Poniamo:

$$Lv(x, t) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x, t, D) \int_0^t \frac{(t-\tau)^{i-1}}{(i-1)!} v(x, \tau)\, d\tau$$

per scrivere (14) nella forma:

$$v = g + Lv.$$

Indichiamo con H una costante positiva tale che $g(\cdot, t)$ appartenga a $G(p, l; H, 0)$ per ogni $|t| \leq T$.

Per il lemma, quali che siano lo N-indice m e l'intero $k \geq 0$:

$$| D^m L^k g(x, t) | \leq H \frac{l^{|m|}}{(1-\varepsilon)^{|p|\cdot|m|}} \frac{A(T/\varepsilon)^k}{(1-\varepsilon)^k} \frac{\Gamma(\langle m, p\rangle + k + 1)}{k!}$$

Siccome:

$$A(T/\varepsilon) < 1 - \varepsilon,$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(a+k+1)}{k!} z^k = \frac{\Gamma(a+1)}{(1-z)^{a+1}} \qquad (a \geq 0, |z| < 1),$$

la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} D^m L^k g(x, t)$ converge uniformemente per $|t| \leq T$, anzi:

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} D^m L^k g(x, t) \right| \leq$$

$$\leq H \frac{l^{|m|}}{(1-\varepsilon)^{|p||m|}} \left(1 - \frac{A(T/\varepsilon)}{1-\varepsilon}\right)^{-|m|\cdot|p|-1} \Gamma(\langle m, p\rangle + 1)$$

La funzione $v(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} L^k g(x, t)$ è dunque di classe G_x^p nello insieme $E \times [-T, +T]$; essa risolve (10) perchè:

$$v = g + L(g + Lg + L^2 g + \ldots) = g + Lv.$$

§ 6. Osservazioni.

19. *Sull'esistenza di soluzioni analitiche.* — Il problema di Cauchy enunciato nel numero 14 può non ammettere soluzioni analitiche in t se viene meno l'ipotesi: $p_1 \geq 1, \ldots, p_N \geq 1$. Consideriamo infatti il seguente problema in due variabili $x = x_1$, t:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^n u}{\partial t^n} = x^{2m} \dfrac{\partial^m u}{\partial x^m} & (a \leq x \leq b, \ |t| \leq T) \\ u(x, 0) = x^m, \ u_t(x, 0) = \ldots = u_{t^{n-1}}(x, 0) = 0 & (a \leq x \leq b). \end{cases}$$

La serie di potenze in t della (eventuale) soluzione analitica è, come si trova facilmente:

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{t^{nh}}{(nh)!} \left(x^{2m} \frac{\partial^m}{\partial x^m}\right)^h x^m = x^m \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(mh)!}{(nh)!} (x^m t^n)^h$$

Questa serie non converge se $m > n$: si ha appunto $p_1 = n/m$.

20. *Sull'unicità della soluzione.* — Il problema di Cauchy enunciato nel numero 14 può avere più di una soluzione se viene meno l'ipotesi $p_1 \geq 1, \dots$ $\dots, p_N \geq 1$. Consideriamo infatti il problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = x^4 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \left(\dfrac{1}{2} \leq x \leq 2, \ | t | \leq T\right) \\ u(x, 0) = x^2 & \left(\dfrac{1}{2} \leq x \leq 2\right) \end{cases}$$

che per la osservazione 19 non ha soluzioni analitiche in t. Se si fa $u(x, t) = xv(1/x, t)$, $v(y, t)$ è soluzione del problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} & \left(\dfrac{1}{2} \leq y \leq 2, \ | t | \leq T\right) \\ v(y, 0) = 1/y & \left(\dfrac{1}{2} \leq y \leq 2\right) \end{cases}$$

il quale, notoriamente, non ammette soluzioni analitiche in t ed ammette infinite soluzioni non analitiche in t.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. BLOCK - *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles à caracteristiques multiples* (Arkiv for Mat. Astr. Fys., 1911).

[2] L. EHRENPREIS - *Conditionally convergent functional integrals and partial differential equations* (Congresso internazionale di Stoccolma, 1962).

[3] V. R FRIEDLENDER - *Sul problema di Cauchy-Kowalewski per alcune equazioni differenziali* (Uspekhi Mat. Nauk, vol. 12, 1957).

[4] V. R. FRIEDLENDER, G. S. SALEHOV - *Sul problema inverso del problema di Cauchy-Kowalewski* (Uspekhi Mat. Nauk, vol. 7, 1952).

[5] A. FRIEDMAN - *A new proof and generalizations of the Cauchy-Kowalewski theorem* (Trans. Am. Math. Soc., vol, 98; 1961).

[6] E. DE GIORGI - *Un teorema di unicità per il problema di Cauchy* (Ann. Mat. 1955).

[7] E. HOLMGREN - *Sur l'équation de la propagation de la chaleur* (Arkiv for Mat. Astr. Fys. 1908).

[8] E. HOLMGREN - *Sur les solutions quasi analytiques de l'équation de la chaleur* (Arkiv for Mat. Astr. Fys. 1924).

[9] L. HORMANDER - *Linear partial differential operators* (Berlino, 1963).

[10] R. MASSIMI - *Un teorema di esistenza per il problema di Cauchy* (Rend. Mat. Roma, 1954).

[11] C. PUCCI - *Teoremi di esistenza e unicità per il problema di Cauchy* (Rend. Acc. Naz. Lincei, 1952).

[12] C. PUCCI - *Nuove ricerche sul problema di Cauchy* (Mem. Acc. Sci. Torino, 1955).

[13] C. PUCCI - *An integrodifferential equation* (Symposium, Provisional International Computation Centre, 1960).

[14] P. C. ROSENBLOOM - *The majorant method* (Proceedings of Symposia in pure Mathematics, vol. IV, 1961).

[15] G. TALENTI - *Intorno alle classi funzionali di Gevrey* (Ann. Mat., 1963).