ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MARIO MIRANDA

Distribuzioni aventi derivate misure insiemi di perimetro localmente finito

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 18, nº 1 (1964), p. 27-56

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1964_3_18_1_27_0>

DISTRIBUZIONI AVENTI DERIVATE MISURE INSIEMI DI PERIMETRO LOCALMENTE FINITO

Mario Miranda (Pisa)

In questo lavoro studio le distribuzioni aventi derivate misure ricollegandole agli insiemi di perimetro finito di Caccioppoli [1] e De Giorgi [2], [3], [4].

I principali risultati sono: i teoremi di compattezza in L^1_{loc}, vedi i Teoremi 1.6 e 1.7; lo studio delle tracce sulle superfici sferiche delle funzioni aventi derivate misure, vedi il Teorema 2.6; le due diseguaglianze isoperimetriche, vedi i Teoremi 4.1 e 4.3; ed infine i teoremi di regolarizzazione, vedi i Teoremi 5.6 e 5.8.

Ringrazio il professor Ennio De Giorgi che mi ha suggerito questa ricerca, che mi ha guidato e seguito in essa.

0. Introduzione.

Indichiamo con R^n lo spazio euclideo ad n dimensioni, con C_0^∞ o con $\mathcal{D}$ le funzioni reali definite su R^n, indefinitamente differenziabili a supporto compatto, con $\mathcal{D}'$ le distribuzioni su R^n (cfr. L. Schwartz [5]), con $\mathcal{D}^{(n)}$ le funzioni vettoriali definite su R^n ad n componenti appartenenti a C_0^∞. Per convergenza debole in $\mathcal{D}'$ di una successione di distribuzioni $\{T_h\} \subset \mathcal{D}'$ verso una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ intendiamo: $\langle T, g \rangle = \lim\limits_{h \to \infty} \langle T_h, g \rangle, \forall\, g \in C_0^\infty$ (cfr. [5]). Negli integrali estesi ad R^n sottointenderemo l'insieme di integrazione.

Con A indichiamo un aperto di R^n. Con $\mathcal{K}(A)$ indichiamo la famiglia degli aperti limitati contenuti in A colla loro chiusura (escluso l'insieme

Pervenuto in Redazione il 10 Agosto 1963.

Questo lavoro è stato fatto in seno al gruppo di ricerca n. 9 del C. N. R. nell'anno 1962-63.

vuoto). Con $\mathcal{D}'(A)$ intendiamo le distribuzioni su A (cfr. [5]). Per convergenza debole in $\mathcal{D}'(A)$ di una successione di distribuzioni $\{T_h\} \subset \mathcal{D}'(A)$ verso una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(A)$ intendiamo: $\langle T, g \rangle = \lim_{h\to\infty} \langle T_h, g \rangle$, $\forall g \in C_0^\infty$, con supporto contenuto in A. Per funzione localmente sommabile su A intendiamo una funzione definita su A, misurabile e sommabile su ogni $K \in \mathcal{K}(A)$. Con $L^1_{\text{loc}}(A)$ indichiamo l'insieme delle funzioni localmente sommabili su A.

0.1. DEFINIZIONE. « Per $T \in \mathcal{D}'(A)$ e $K \in \mathcal{K}(A)$ poniamo

$$\theta(T, K) = \sup\{\langle T, \operatorname{div} g \rangle;\ g \in \mathcal{D}^{(n)},\ \operatorname{supp} g \subset K,\ |g| \leq 1\} \text{ ».} \tag{0.1}$$

Come conseguenza del Teorema di Riesz si ha la seguente

0.2. PROPOSIZIONE. « $T \in \mathcal{D}'(A)$ ha derivate misure (cfr. [5]) se e solo se vale

$$\theta(T, K) < \infty, \quad \forall K \in \mathcal{K}(A) \text{ ».} \tag{0.2}$$

Dalla Proposizione 0.2 discende

0.3. PROPOSIZIONE. « Se $\{T_h\} \subset \mathcal{D}'(A)$ converge debolmente in $\mathcal{D}'(A)$ verso $T \in \mathcal{D}'(A)$, se le derivate delle T_h sono misure ed esiste una funzione reale γ definita su $\mathcal{K}(A)$ tale che

$$\theta(T_h, K) \leq \gamma(K), \quad \forall K \in \mathcal{K}(A), \quad \forall h, \tag{0.3}$$

allora T ha derivate misure e vale

$$\theta(T, K) \leq \gamma(K), \quad \forall K \in \mathcal{K}(A) \text{ ».} \tag{0.4}$$

DIMOSTRAZIONE. Se $K \in \mathcal{K}(A)$, $g \in \mathcal{D}^{(n)}$, $\operatorname{supp} g \subset K$, allora vale

$$\langle T, \operatorname{div} g \rangle = \lim_{h\to\infty} \langle T_h, \operatorname{div} g \rangle, \tag{0.5}$$

da cui segue, per la (0.1) e (0.3), la (0.4). c. v. d.

1. Funzioni aventi derivate misure.

Ad ogni funzione f di $L^1_{loc}(A)$ può associarsi una distribuzione T di $\mathcal{D}'(A)$ [cfr. [5]]. Possiamo allora parlare di derivate della f intendendo con ciò le derivate di T, e diremo che la f ha derivate misure se la T ha derivate misure. Indicheremo con $D_i f$ oppure con $D_i T$ la misura derivata i-ma della f, e con Df o con DT la misura vettoriale che ha come componenti le $D_i f$. Indicheremo con $|D_i f|$ o con $|D_i T|$ la misura variazione totale della $D_i f$, e con $|Df|$ o con $|DT|$ la misura variazione totale della Df. Se g è una funzione di Baire e B un insieme di Borel contenuto in A indicheremo con $\int_B g\, D_i f$, $\int_B g\,|D_i f|$, $\int_B g\,|Df|$ oppure con $\int_B g\, D_i T$, $\int_B g\,|D_i T|$, $\int_B g\,|DT|$ gli integrali estesi a B della g fatti rispetto alle misure $D_i f$, $|D_i f|$, $|Df|$. Osserviamo che se B è un aperto appartenente a $\mathcal{K}(A)$ si ha allora $\int_B |Df| = \theta(f, B)$, dove $\theta(f, B)$ sta per $\theta(T, B)$. Indicheremo inoltre, se g è una funzione vettoriale di componenti $g_1, \dots, g_n$ funzioni di Baire, e B ancora un insieme di Borel contenuto in A, con $\int_B \langle g, Df\rangle$ o con $\int_B \langle g, DT\rangle$ la $\sum_{i=1}^n \int_B g_i\, D_i f$.

Per a, b numeri reali indicheremo con $a \cup b$ il più grande dei due e con $a \cap b$ il più piccolo. Per f, g funzioni reali indicheremo con $f \cup g$ la funzione definita da $(f \cup g)(x) = f(x) \cup g(x)$ e con $f \cap g$ la funzione definita da $(f \cap g)(x) = f(x) \cap g(x)$.

1.1 Lemma. « Se g è una funzione reale definita su A continua colle derivate prime, allora $g \cup 0$ ha derivate misure su A e vale

$$\theta(g \cup 0, K) \leq \int_{K \cap \{x;\, g(x) > 0\}} |Dg(x)|\, dx, \quad \forall K \in \mathcal{K}(A) \text{ ».} \tag{1.1}$$

Dimostrazione. Se $K \in \mathcal{K}(A)$, $\varphi \in \mathcal{D}^{(n)}$ e supp $\varphi \subset K$ allora vale, essendo la $g \cup 0$ localmente lipschitziana su A

$$\int (g \cup 0)(x) \operatorname{div} \varphi(x)\, dx = -\int_K \sum_{i=1}^n D_i (g \cup 0)(x)\, \varphi_i(x)\, dx = \tag{1.2}$$

$$= -\int_{K \cap \{x;\, g(x) > 0\}} \sum_{i=1}^n D_i\, g(x) \cdot \varphi_i(x)\, dx$$

da cui segue la (1.1). c. v. d.

1.2. PROPOSIZIONE. « Se f, g appartengono a $L^1_{\mathrm{loc}}(A)$ ed hanno derivate misure, allora lo stesso vale per $f \cup g$ e $f \cap g$ ».

DIMOSTRAZIONE. Poichè vale

$$f \cup g = (f - g) \cup 0 + g, \qquad f \cap g = -(-f) \cup (-g), \tag{1.3}$$

basta provare che $f \cup 0$ ha derivate misure.

Per questo sia τ una funzione non negativa appartenente a C_0^∞ tale che $\int \tau(x)\,dx = 1$, supp $\tau \subset \{x ; |x| \leq 1\}$ e verificante $\tau(-x) = \tau(x)$. Sia inoltre, per h intero, τ_h la funzione definita da $\tau_h(x) = h^n \tau(hx)$. Indichiamo con $\tau_h * f$ la funzione definita su $\{x;$ dist $(x, R^n - A) > h^{-1}\}$ da $(\tau_h * f)(x) = \int \tau_h(x-y) f(y)\,dy$. Avremo allora (cfr. [5]) che $\tau_h * f$ è indefinitamente differenziabile e la successione $\{\tau_h * f\}$ tende alla funzione f in $L^1_{\mathrm{loc}}(A)$. Se poi indichiamo con K_h l'insieme $\{x ;$ dist $(x, K) < h^{-1}\}$, si ha, se K_h appartiene a $\mathcal{K}(A)$,

$$\int_K |D(\tau_h * f)(x)|\,dx \leq \theta(f, K_h). \tag{1.4}$$

Dalla (1.4) si ricava, tenuto conto della (1.1) e del fatto che $(\tau_h * f) \cup 0$ converge verso $f \cup 0$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(A)$, per la Proposizione 0.3, l'asserto. c. v. d.

1.3 OSSERVAZIONE Per ogni f appartenente a $L^1_{\mathrm{loc}}(A)$ e avente derivate misure si ha

$$\int_Q |f - \alpha|\,dx \leq s \sum_{i=1}^n \int_Q |D_i f|, \tag{1.5}$$

dove Q è un quadrato di spigolo s, colle facce parallele agli iperpiani coordinati, appartenente a $\mathcal{K}(A)$, ed α è dato da

$$\alpha = (\mathrm{mis}\, Q)^{-1} \cdot \int_Q f(x)\,dx. \tag{1.6}$$

Per provare la (1.5) basta osservare che essa vale per le $\tau_h * f$ (cfr. De Giorgi [3] Lemma 1) e passare al limite per $h \to \infty$.

Osserviamo inoltre che dalla (1.5) si ricava immediatamente

$$\int_Q |f(x)|\,dx \leq \left|\int_Q f(x)\,dx\right| + s\sum_{i=1}^{n}\int_{\overline{Q}} |D_i f|\,. \tag{1.7}$$

Proviamo ora una diseguaglianza analoga alla (1.7):

1.4 Lemma. « Se f appartiene a $L^1_{loc}(A)$ ed ha derivate misure, se Q_1 e Q_2 sono due cubi contigui [1] di spigolo s e appartenenti a $\mathcal{K}(A)$, allora vale

$$\int_{Q_1} |f(x)|\,dx \leq \left|\int_{Q_2} f(x)\,dx\right| + 2s\sum_{i=1}^{n}\int_{\overline{Q}_1 \cup \overline{Q}_2} |D_i f| \text{ ».} \tag{1.8}$$

Dimostrazione. Nello stesso modo in cui si è provata la (1.5) si prova la

$$\int_{Q_1 \cup Q_2} |f - \alpha|\,dx \leq 2s\sum_{i=1}^{n}\int_{\overline{Q}_1 \cup \overline{Q}_2} |D_i f| \tag{1.9}$$

dove α è dato da

$$\alpha = (\text{mis } Q_1 \cup Q_2)^{-1} \cdot \int_{Q_1 \cup Q_2} f(x)\,dx. \tag{1.10}$$

D'altra parte si hanno le

$$\int_{Q_1} |f(x)|\,dx \leq \int_{Q_1} |f(x) - \alpha|\,dx + |\alpha|\,\text{mis } Q_1 \tag{1.11}$$

$$|\alpha| \cdot \text{mis } Q_2 \leq \int_{Q_2} |f(x) - \alpha|\,dx + \left|\int_{Q_2} f(x)\,dx\right|. \tag{1.12}$$

Sommando le (1.11) e (1.12), tenuto conto della (1.9) e del fatto che mis $Q_1 =$ mis Q_2 si ricava la (1.8). c. v. d.

1.5 Lemma. « Sia A aperto e connesso. Sia γ una funzione reale definita su $\mathcal{K}(A)$. Sia σ_0 un numero reale e K_0 un elemento di $\mathcal{K}(A)$. Allora

---

[1] Diciamo contigui due cubi colle facce parallele agli iperpiani coordinati, aventi lo stesso spigolo, privi di punti interni a comune ed aventi una faccia in comune.

la famiglia $\mathcal{F}$ delle funzioni f appartenenti ad $L^1_{\mathrm{loc}}(A)$ che verificano

$$\theta(f, K) \leq \gamma(K), \ \forall\, K \in \mathcal{K}(A), \tag{1.13}$$

$$\int_{K_0} |f(x)|\, dx \leq \sigma_0, \tag{1.14}$$

è limitata in $L^1_{\mathrm{loc}}(A)$, ovvero esiste una funzione reale σ definita su $\mathcal{K}(A)$ tale che

$$\int_K |f(x)|\, dx \leq \sigma(K), \ \forall\, K \in \mathcal{K}(A), \forall f \in \mathcal{F}. \text{»} \tag{1.15}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia K un elemento di $\mathcal{K}(A)$. Possiamo allora trovare un numero $\varepsilon > 0$ e una famiglia finita $\mathcal{C}$ di cubi di spigolo ε, contenuta in $\mathcal{K}(A)$, e tale che

$$Q_\varepsilon = \bigcup_{Q \in \mathcal{C}} Q \supset K, \tag{1.16}$$

ed esiste $Q_0 \in \mathcal{C}$ contenuto in K_0, e tale infine che per ogni Q appartenente alla $\mathcal{C}$ esiste una famiglia di cubi $\{Q_j\}_{1 \leq j \leq \nu}$ contenuta nella $\mathcal{C}$, con $Q_1 = Q_0$ e $Q_\nu = Q$ e Q_j, Q_{j+1} contigui per $j = 1, \dots, \nu - 1$.

Sia ora Q un elemento della $\mathcal{C}$ e sia $\{Q_j\}_{1 \leq j \leq \nu}$ la famiglia ad esso associata secondo quanto ora detto. Avremo, per la (1.8)

$$\int_{Q_{j+1}} |f(x)|\, dx \leq \left| \int_{Q_j} f(x)\, dx \right| + 2\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \int_{\overline{Q}_j \cup \overline{Q}_{j+1}} |D_i f|, \quad j = 1, \dots, \nu - 1. \tag{1.17}$$

Sommando le (1.17) ed eliminando dai due membri le quantità $\int_{Q_j} |f(x)|\, dx$ e $\left| \int_{Q_{j+1}} f(x)\, dx \right|$ per $j = 1, \dots, \nu - 1$, si ricava

$$\int_Q |f(x)|\, dx \leq \left| \int_{Q_0} f(x)\, dx \right| + 2\varepsilon \sum_{j=1}^{\nu-1} \sum_{i=1}^{n} \int_{\overline{Q}_j \cup \overline{Q}_{j+1}} |D_i f|, \tag{1.18}$$

da cui, ricordando che Q_0 è contenuto in K_0 e la (1.14) e la (1.16), si ha

$$\int_Q |f(x)|\,dx \leq \sigma_0 + 4\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \int_{Q_\varepsilon} |D_i f|, \tag{1.19}$$

da cui, detto ν_ε il numero degli elementi della famiglia $\mathcal{C}$

$$\int_{Q_\varepsilon} |f(x)|\,dx \leq \nu_\varepsilon \left(\sigma_0 + 4\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \int_{Q_\varepsilon} |D_i f|\right), \tag{1.20}$$

e quindi, per la (1.16), si ha che vale la (1.15) con $\sigma(K) = \nu_\varepsilon \Big(\sigma_0 +$
$+ 4\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \int_{Q_\varepsilon} |D_i f|\Big)$. c. v. d.

1.6 Teorema. « Sia A un aperto di R^n. Sia $\{A_j\}$ la successione, eventualmente finita, delle componenti connesse di A, sia $\{K_j\}$ una famiglia di aperti contenuta in $\mathcal{K}(A)$, con K_j appartenente a $\mathcal{K}(A_j)$. Sia $\{\sigma_j\}$ una successione di numeri reali, e γ una funzione reale definita su $\mathcal{K}(A)$.

Allora la famiglia $\mathcal{F}$ delle funzioni f appartenenti a $L^1_{\text{loc}}(A)$ che verificano

$$\theta(f, K) \leq \gamma(K), \qquad \forall\, K \in \mathcal{K}(A), \tag{1.21}$$

$$\int_{K_j} |f(x)|\,dx \leq \sigma_j\,,\ \forall\, j, \tag{1.22}$$

è compatta in $L^1_{\text{loc}}(A)$. »

Dimostrazione. Poichè ogni elemento di $\mathcal{K}(A)$ è unione di un numero finito di elementi delle famiglie $\mathcal{K}(A_j)$, per provare il teorema basta far vedere che per ogni K appartenente ad una delle famiglie $\mathcal{K}(A_j)$ la famiglia $\mathcal{F}$ è compatta in $L^1(K)$. Per questo si osservi che, per il Lemma 1.5, gli $\int_K |f(x)|\,dx$ sono equilimitati per $f \in \mathcal{F}$. D'altra parte se $\varepsilon > 0$ è tale che $K_{2\varepsilon} = \{x\,;\, \text{dist}(x, K) < 2\varepsilon\} \in \mathcal{K}(A_j)$, ed $y \in R^n$ verifica $|y| < \varepsilon$, si ha (per $h^{-1} < \varepsilon$)

$$(1.23) \qquad \int_K |(\tau_h * f)(x+y) - (\tau_h * f)(x)|\, dx \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_{K_\varepsilon} |D_i(\tau_h * f)|\, dx \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_{K_{2\varepsilon}} |D_i f|, \quad (K_\varepsilon = \{x\,;\, \mathrm{dist}(x; K) < \varepsilon\})$$

e quindi passando al limite per $h \to \infty$

$$(1.24) \qquad \int_K |f(x+y) - f(x)|\, dx \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_{K_{2\varepsilon}} |D_i f| .$$

D'altra parte la (1.24) insieme alla equilimitatezza degli $\int_K |f(x)|\, dx$ assicura la compattezza in $L^1(K)$ (cfr. A. Weil [6], Ch. III, § 12) c. v. d.

1.7 TEOREMA. « Sia $A \subset R^n$ aperto. Sia $\{A_j\}$ la successione, eventualmente finita, delle componenti connesse di A. Sia γ una funzione reale definita su $\mathcal{K}(A)$. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia delle funzioni $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(A)$ che verificano

$$(1.25) \qquad \theta(f, K) \leq \gamma(K), \ \forall\, K \in \mathcal{K}(A).$$

Sia $\{Q_j\}$ una famiglia di cubi colle facce parallele agli iperpiani coordinati, con $Q_j \in \mathcal{K}(A_j)$. Sia $\tilde{\mathcal{F}}$ la famiglia di funzioni:

$$(1.26) \qquad \tilde{\mathcal{F}} = \left\{\tilde{f}\,;\, \exists\, f \in \mathcal{F}, \tilde{f}(x) = f(x) - (\mathrm{mis}\ Q_j)^{-1} \cdot \int_{Q_j} f(x)\, dx, \ \text{per } x \in A_j\right\}$$

allora la $\tilde{\mathcal{F}}$ è compatta in $L^1_{\mathrm{loc}}(A)$. » ([2])

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che detto s_j lo spigolo di Q_j si ha, per la (1.5),

$$(1.27) \qquad \int_{Q_j} |\tilde{f}(x)|\, dx \leq s_j \sum_{i=1}^n \int_{\overline{Q}_j} |D_i f|, \ \forall\, j$$

e quindi da (1.27) e (1.25) segue (1.22) e perciò, per il Teorema 1.6, segue l'asserto. c. v. d.

([2]) Cfr. W. H. FLEMING [7], pag. 454, n. 2.2.

Una conseguenza immediata del Teorema 1.7 è il teorema seguente, che è a sua volta contenuto, in forma lievemente diversa, nel Teorema di Kryloff (cfr. [5], vol. 2^0, Teor. XV).

1.8 Teorema. «Se $T \in \mathcal{D}'(A)$ ha derivate misure, allora esiste $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(A)$ tale che

$$(1.28) \qquad \langle T, g \rangle = \int f(x) g(x)\, dx, \ \forall\, g \in C_0^\infty, \ \mathrm{supp}\, g \subset A\,.»$$

Dimostrazione. Per l intero indichiamo con A_{-l} l'insieme $\{x;\ \mathrm{dist}(x, R^n - A) > l^{-1}\}$. Per h intero indichiamo con $\tau_h * T$ la funzione definita su A_{-h} da

$$(1.29) \qquad (\tau_h * T)(x) = < T(y), \tau_h(x - y) > .$$

La $\tau_h * T$ è indefinitamente differenziale su A_{-h} (cfr. [5]). Consideriamo ora sull'aperto A_{-l} la successione di funzioni $\{\tau_h * T\}_{h>l}$. Queste verificano

$$(1.30) \qquad \Theta(\tau_h * T, K) \leq \Theta(T, K_l), \ \forall\, K \in \mathcal{K}(A_{-l}), \ h > l\,.$$

Allora, per ogni componente connessa $A_j^{(l)}$ di A_{-l}, esiste, per il Teorema 1.7, una successione di costanti $\{c_h^{(j)}\}_{h>l}$ tale che la successione di funzioni $\{\tau_h * T - c_h^{(j)}\}_{h>l}$ è compatta in $L^1_{\mathrm{loc}}(A_j^{(l)})$. Ma poichè la successione di funzioni $\{\tau_h * T\}_{h>l}$ converge debolmente verso T in $\mathcal{D}'(A_{-l})$, (cfr. [5]), si ha che ciascuna delle successioni di costanti $\{c_h^{(j)}\}_{h>l}$ è limitata, e quindi la successione di funzioni $\{\tau_h * T\}_{h>l}$ è compatta in $L^1_{\mathrm{loc}}(A_{-l})$.

Se f_l è un elemento di compattezza di tale successione si ha allora che

$$(1.31) \qquad \langle T, g \rangle = \int f_l(x)\, g(x)\, dx, \ \forall\, g \in C_0^\infty, \ \mathrm{supp}\, g \subset A_{-l}\,.$$

Ma dalla (1.31) segue che, se $l' \geq l$, vale

$$(1.32) \qquad f_{l'}(x) = f_l(x), \text{ quasi ovunque su } A_{-l}\,.$$

Dalla (1.32) segue allora che esiste f, definita su A e appartenente a $L^1_{\mathrm{loc}}(A)$, tale che

$$(1.33) \qquad f(x) = f_l(x), \text{ quasi ovunque su } A_{-l}, \ \forall\, l\,.$$

E perciò, dalle (1.33) e (1.31) si ha che f verifica la (1.28) c. v. d.

2. Distribuzioni aventi derivate misure.

Indicheremo con H_{n-1} la misura di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale in R^n (cfr., ad esempio, W. Hurewicz-H. Wallmann [8], Def. VII-1), con $C_\varrho(\xi)$ la sfera aperta di centro ξ e raggio ϱ, con $\mathcal{F} C_\varrho(\xi)$ la frontiera di $C_\varrho(\xi)$. Quando $\xi = 0$ scriveremo C_ϱ e $\mathcal{F} C_\varrho$ in luogo di $C_\varrho(0)$ e $\mathcal{F} C_\varrho(0)$. Indichiamo con $\overline{C}_\varrho(\xi)$ la sfera chiusa di centro ξ e raggio ϱ. Indichiamo con $\nu(x)$, per $x \in \mathcal{F} C_\varrho(\xi)$, il versore della normale interna a $\mathcal{F} C_\varrho(\xi)$ nel punto x. Indicheremo con $\varphi(x, E)$ la funzione caratteristica dell'insieme E. Infine diremo rappresentante di una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(A)$, avente derivate misure, ogni funzione $f \in L^1_{loc}(A)$ per cui valga la (1.28).

2.1. LEMMA. « Sia $f \in L^1_{loc}(A)$ e $\xi \in A$, allora per quasi tutti i ϱ per cui $C_\varrho(\xi) \in \mathcal{K}(A)$ vale

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{1}{\eta} \int_0^\eta d\varepsilon \int_{\mathcal{F} C_\varrho(\xi)} |f(x) - f(x + \varepsilon(x - \xi))| \, dH_{n-1}(x) = 0 \text{ ».} \tag{2.1}$$

DIMOSTRAZIONE. Per comodità supponiamo $\xi = 0$. Osserviamo poi che la (2.1) è ovvia per le funzioni continue su A.

Indichiamo con $\{g_h\}$ una successione di funzioni continue su A e verificante

$$\sum_{h=1}^{\infty} g_h(x) = f(x), \qquad \text{quasi ovunque su } A, \tag{2.2}$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} |g_h| \in L^1_{loc}(A). \tag{2.3}$$

Indichiamo con $\{\psi_\nu\}$ la successione di funzioni

$$\psi_\nu = \sum_{h=\nu}^{\infty} |g_h|. \tag{2.4}$$

Dalla (2.3) avremo allora

$$\psi_\nu \in L^1_{loc}(A), \quad \forall \nu, \tag{2.5}$$

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_K \psi_\nu(x) \, dx = 0, \quad \forall K \in \mathcal{K}(A). \tag{2.6}$$

Sia ϱ un numero reale positivo tale che $C_\varrho \in \mathcal{K}(A)$ e che

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{\mathcal{F} C_\varrho} \psi_\nu \, dH_{n-1} = 0, \tag{2.7}$$

$$\lim_{\eta\to 0} \frac{1}{\eta} \int_0^\eta d\varepsilon \int_{\mathcal{F} C_{\varrho+\varepsilon\varrho}} \psi_\nu \, dH_{n-1} = \int_{\mathcal{F} C_\varrho} \psi_\nu \, dH_{n-1}, \quad \forall\, \nu, \tag{2.8}$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} g_h(x) = f(x), \qquad H_{n-1}\text{-quasi ovunque su } \mathcal{F} C_\varrho . \tag{2.9}$$

La (2.7) vale grazie alla (2.6) e al Teorema di Fubini per quasi tutti i ϱ tali che $C_\varrho \in \mathcal{K}(A)$. Per quanto riguarda la (2.8) basta osservare che la quantità di cui si calcola il limite è il rapporto incrementale della funzione della ϱ, $\int_{C_\varrho} \psi_\nu \, dx$ (cfr. Teorema di Fubini), che tale funzione è non decrescente rispetto a ϱ essendo $\psi_\nu(x) \geq 0$, e che, sempre per il Teorema di Fubini il secondo membro della (2.8) è la sua derivata, quindi la (2.8) vale per quasi tutti i ϱ per cui $C_\varrho \in \mathcal{K}(A)$. Infine la (2.9) vale per quasi tutti i ϱ per cui $C_\varrho \in \mathcal{K}(A)$ grazie alla (2.2).

Dalla (2.9) e (2.4) segue che per H_{n-1}-quasi tutti gli $x \in \mathcal{F} C_\varrho$ si ha che: per quasi tutti gli ε, tali che $C_{\varrho+\varepsilon\varrho} \in \mathcal{K}(A)$, si ha

$$|f(x) - f(x+\varepsilon x)| \leq \psi_\nu(x) + \left| \sum_{h=1}^{\nu-1} g_h(x) - \sum_{h=1}^{\nu-1} g_h(x+\varepsilon x) \right| + \psi_\nu(x+\varepsilon x) \tag{2.10}$$

da cui integrando rispetto a ε su $(0, \eta)$, e rispetto a x su $\mathcal{F} C_\varrho$, e quindi scambiando l'ordine di integrazione

$$\frac{1}{\eta} \int_0^\eta d\varepsilon \int_{\mathcal{F} C_\varrho} |f(x) - f(x+\varepsilon x)| \, dH_{n-1} \leq \int_{\mathcal{F} C_\varrho} \psi_\nu \, dH_{n-1} + \tag{2.11}$$

$$+ \frac{1}{\eta} \int_0^\eta d\varepsilon \int_{\mathcal{F} C_\varrho} \left| \sum_{h=1}^{\nu-1} g_h(x) - \sum_{h=1}^{\nu-1} g_h(x+\varepsilon x) \right| dH_{n-1} + \frac{1}{\eta} \int_0^\eta d\varepsilon \int_{\mathcal{F} C_\varrho} \psi_\nu(x+\varepsilon x) \, dH_{n-1} .$$

D'altra parte si ha

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{\eta}\int_0^\eta d\varepsilon\int_{\mathcal{F}C_\varrho}\left|\sum_{h=1}^{\nu-1}g_h(x)-\sum_{h=1}^{\nu-1}g_h(x+\varepsilon x)\right|dH_{n-1}=0, \tag{2.12}$$

essendo le g_h continue. Si ha inoltre

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{\eta}\int_0^\eta d\varepsilon\int_{\mathcal{F}C_\varrho}\psi_\nu(x+\varepsilon x)\,dH_{n-1}=0, \tag{2.13}$$

per ogni $\eta \neq 0$ tale che $C_{\varrho+\eta\varrho}\in\mathcal{K}(A)$,

come risulta dalla (2.6). D'altra parte la funzione di η, $\frac{1}{\eta}\int_0^\eta d\varepsilon\int_{\mathcal{F}C_\varrho}\psi_\nu(x+\varepsilon x)dH_{n-1}$ si può definire con continuità, grazie alla (2.8), per $\eta=0$, ponendola eguale a $\int_{\mathcal{F}C_\varrho}\psi_\nu\,dH_{n-1}$. Ed essendo valida la (2.7) e la (2.13) si ha, poichè la successione $\{\psi_\nu\}$ è non crescente, che la (2.13) vale in maniera uniforme rispetto a η quando η varia in un intorno dell'origine. Si ricava allora dalla (2.13), (2.12), (2.7) e (2.11) la (2.1). c. v. d.

2.2. TEOREMA. « Sia $T\in\mathcal{D}'(A)$ con derivate misure. Sia $C_\varrho(\xi)\in\mathcal{K}(A)$. Se esiste una funzione $f\in L^1_{\text{loc}}(A)$, rappresentante di T, per la quale valga

$$\lim_{\eta\to 0+}\frac{1}{\eta}\int_0^\eta d\varepsilon\int_{\mathcal{F}C_\varrho(\xi)}|f(x)-f(x+\varepsilon(x-\xi))|\,dH_{n-1}=0, \tag{2.14}$$

allora $T\cdot\varphi(x, C_\varrho(\xi))$, che è una distribuzione definita su R^n a supporto compatto, ha derivate misure e vale

$$\langle T\cdot\varphi(x, C_\varrho(\xi)), \operatorname{div} g(x)\rangle = -\int_{\overline{C}_\varrho(\xi)}\langle g, Df\rangle - \tag{2.15}$$

$$-\int_{\mathcal{F}C_\varrho(\xi)}\langle g, f\nu\rangle\, dH_{n-1}\,,\ \forall\ g\in\mathcal{D}^{(n)}\ ».$$

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo coll'osservare che dalla (2.14) si ricava che la f è H_{n-1} - sommabile su $\mathcal{F} C_\varrho(\xi)$ e quindi il secondo membro della (2.15) ha senso. Si tratta allora di verificare la formula. Per questo si consideri la funzione φ_η definita da

$$\varphi_\eta(x) = \begin{cases} 1, \text{ per } |x-\xi| \leq \varrho \\ (\varrho + \eta\varrho - |x-\xi|)(\eta\varrho)^{-1}, \text{ per } \varrho < |x-\xi| < \varrho + \eta\varrho \\ 0, \text{ per } |x-\xi| \geq \varrho + \eta\varrho \end{cases} \tag{2.16}$$

La φ_η è lipschitziana, a supporto compatto contenuto in A se η è sufficientemente piccolo, quindi potremo scrivere

$$\int f \operatorname{div}(\varphi_\eta g)\, dx = -\int \varphi_\eta \langle g, Df\rangle, \quad \forall g \in \mathcal{D}^{(n)}, \tag{2.17}$$

da cui essendo

$$\int f \operatorname{div}(\varphi_\eta g)\, dx = \int f \varphi_\eta \operatorname{div} g\, dx - \tag{2.18}$$

$$-\int\limits_{C_{\varrho+\eta\varrho}(\xi) - C_\varrho(\xi)} f\langle g, (x-\xi)[|x-\xi|\eta\varrho]^{-1}\rangle\, dx = \int f\varphi_\eta \operatorname{div} g\, dx +$$

$$+\frac{1}{\eta}\int_0^\eta (1+\varepsilon)^{n-1}\, d\varepsilon \int\limits_{\mathcal{F}C_\varrho(\xi)} f(x+\varepsilon(x-\xi))\langle g(x+\varepsilon(x-\xi)), \nu(x)\rangle\, dH_{n-1}(x),$$

avremo

$$\int f\varphi_\eta \operatorname{div} g\, dx = \tag{2.19}$$

$$= -\frac{1}{\eta}\int_0^\eta (1+\varepsilon)^{n-1}\, d\varepsilon \int\limits_{\mathcal{F}C_\varrho(\xi)} f(x+\varepsilon(x-\xi))\langle g(x+\varepsilon(x-\xi)), \nu(x)\rangle\, dH_{n-1}(x) -$$

$$-\int \varphi_\eta\langle g, Df\rangle$$

da cui, passando al limite per $\eta \to 0^+$, avremo, tenuto conto della (2.14) la (2.15). c. v. d.

2.3. TEOREMA. « Sia $T \in \mathcal{D}'(A)$ con derivate misure. Sia $C_\varrho(\xi) \in \mathcal{K}(A)$. Se esiste una funzione $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(A)$ rappresentante di T per la quale valga

$$\lim_{\eta \to 0-} \frac{1}{\eta} \int_0^\eta d\varepsilon \int_{\mathcal{F} C_\varrho(\xi)} | f(x) - f(x + \varepsilon(x - \xi)) | \, dH_{n-1} = 0, \tag{2.20}$$

allora $T \cdot \varphi(x, C_\varrho(\xi))$, che è una distribuzione a supporto compatto definita su R^n, ha derivate misure e vale

$$\langle T \cdot \varphi(x, C_\varrho(\xi)), \operatorname{div} g(x) \rangle = - \int_{C_\varrho(\xi)} \langle g, Df \rangle - \int_{\mathcal{F} C_\varrho(\xi)} \langle g, f \nu \rangle \, dH_{n-1}, \ \forall g \in \mathcal{D}^{(n)} \text{ ».} \tag{2.21}$$

DIMOSTRAZIONE. Anche in questo caso, poichè la (2.20) assicura la H_{n-1} sommabilità della f su $\mathcal{F} C_\varrho(\xi)$, si tratta semplicemente di verificare la (2.21). A questo proposito osserviamo che basta verificare la (2.21) per le $g \in \mathcal{D}^{(n)}$ aventi supporto contenuto in A.

Indichiamo con ψ_η $(\eta < 0)$ la funzione

$$\psi_\eta(x) = \begin{cases} 1, & | x - \xi | \geq \varrho \\ [\varrho + \eta\varrho - | x - \xi |] (\eta\varrho)^{-1}, & \varrho + \eta\varrho \leq | x - \xi | \leq \varrho \\ 0, & | x - \xi | \leq \varrho + \eta\varrho \end{cases} \tag{2.22}$$

Essendo la ψ_η lipschitziana ed avendo g supporto contenuto in A, possiamo ripetere il ragionamento del teorema precedente, ed arrivare, tenuto conto della (2.20) alla

$$\langle T \cdot \varphi(x, R^n - C_\varrho(\xi)), \operatorname{div} g(x) \rangle = - \int_{R^n - C_\varrho(\xi)} \langle g, Df \rangle + \int_{\mathcal{F} C_\varrho(\xi)} \langle f \nu, g \rangle \, dH_{n-1}, \tag{2.23}$$

sottraendo allora la (2.23) dalla seguente (2.24)

$$\langle T, \operatorname{div} g \rangle = - \langle g, Df \rangle \tag{2.24}$$

si ottiene la (2.21). c. v. d.

2.4. TEOREMA. « Se $f \in L^1_{\text{loc}}(A)$ è rappresentante di una $T \in \mathcal{D}'(A)$ che abbia derivate misure e $C_\varrho(\xi)$, $C_\tau(\xi) \in \mathcal{K}(A)$ $(\varrho > \tau)$ sono tali che

$$\langle T \cdot \varphi(x, C_\varrho(\xi)), \operatorname{div} g(x) \rangle = -\int_{\overline{C}_\varrho(\xi)} \langle g, Df \rangle - \int_{\mathcal{F}C_\varrho(\xi)} \langle g, f\nu \rangle \, dH_{n-1}, \ \forall\, g \in \mathcal{D}^{(n)} \tag{2.25}$$

$$\langle T \cdot \varphi(x, C_\tau(\xi)), \operatorname{div} g(x) \rangle = -\int_{\overline{C}_\tau(\xi)} \langle g, Df \rangle - \int_{\mathcal{F}C_\tau(\xi)} \langle g, f\nu \rangle \, dH_{n-1}, \ \forall\, g \in \mathcal{D}^{(n)} \tag{2.26}$$

allora si ha

$$\int_{\mathcal{F}C_1(\xi)} | f(\xi + \varrho(x - \xi)) - f(\xi + \tau(x - \xi)) | \, dH_{n-1} \leq \int_{\overline{C}_\varrho(\xi) - \overline{C}_\tau(\xi)} | \langle (x - \xi) \, | x - \xi |^{-n}, Df(x) \rangle |, \text{ (3) ».} \tag{2.27}$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per comodità $\xi = 0$. Indichiamo con g una funzione di $\mathcal{D}^{(n)}$ nulla in un intorno dell'origine, eguale a $x \cdot |x|^{-n}$ in $C_\varrho - C_\tau$. Sia α una funzione reale definita su $\mathcal{F}C_1$, indefinitamente differenziabile e sia $|\alpha(x)| \leq 1$. Allora la funzione $\alpha(x \cdot |x|^{-1}) \, g(x)$ appartiene a $\mathcal{D}^{(n)}$ e quindi, dalle (2.25) e (2.26) si ha

$$\int_{C_\varrho} f \operatorname{div}(\alpha g) \, dx = -\int_{\overline{C}_\varrho} \alpha \langle g, Df \rangle - \int_{\mathcal{F}C_\varrho} \alpha \langle g, f\nu \rangle \, dH_{n-1}, \tag{2.28}$$

$$\int_{C_\tau} f \operatorname{div}(\alpha g) \, dx = -\int_{\overline{C}_\tau} \alpha \langle g, Df \rangle - \int_{\mathcal{F}C_\tau} \alpha \langle g, f\nu \rangle \, dH_{n-1}, \tag{2.29}$$

---

(3) $\int_{\overline{C}_\varrho(\xi) - \overline{C}_\tau(\xi)} |\langle (x-\xi) \, |x-\xi|^{-n}, Df(x) \rangle|$ indica la variazione totale su $\overline{C}_\varrho(\xi) - \overline{C}_\tau(\xi)$ della misura $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i) \, | x - \xi |^{-n} D_i f$, dove la $(x_i - \xi_i) \, | x - \xi |^{-n} D_i f$ è la misura che ha nel punto x densità $(x_i - \xi_i) \, | x - \xi |^{-n}$ rispetto alla misura $D_i f$.

da cui segue, osservando che $\operatorname{div}(\alpha g) = 0$ su $C_\varrho - C_\tau$,

$$(2.30)\qquad \int\limits_{\overline{C}_\varrho - \overline{C}_\tau} \alpha \langle x \cdot |x|^{-n}, Df \rangle = \int\limits_{\mathcal{F} C_\tau} \alpha \langle x \cdot |x|^{-n}, f\nu \rangle \, dH_{n-1} -$$

$$- \int\limits_{\mathcal{F} C_\varrho} \alpha \langle x \cdot |x|^{-n}, f\nu \rangle \, dH_{n-1},$$

e quindi, cambiando le variabili nei due integrali al secondo membro

$$(2.31)\qquad \int\limits_{\overline{C}_\varrho - \overline{C}_\tau} \alpha \langle x \cdot |x|^{-n}, Df \rangle = \int\limits_{\mathcal{F} C_1} \alpha \, (f(\varrho x) - f(\tau x)) \, dH_{n-1}$$

da cui essendo

$$(2.32)\qquad \int\limits_{\overline{C}_\varrho - \overline{C}_\tau} \alpha \langle x \cdot |x|^{-n}, Df \rangle \leq \int\limits_{\overline{C}_\varrho - \overline{C}_\tau} |\langle x \cdot |x|^{-n}, Df \rangle|$$

e ricordando che

$$(2.33)\qquad \int\limits_{\mathcal{F} C_1} |f(\varrho x) - f(\tau x)| \, dH_{n-1} = \sup \left\{ \int\limits_{\mathcal{F} C_1} \alpha \, [f(\varrho x) - f(\tau x)] \, dH_{n-1} \, ; \, |\alpha| \leq 1 \right\}$$

segue l'asserto. c. v. d.

2.5. OSSERVAZIONE. Diseguaglianze analoghe alla (2.27) valgono se in luogo delle (2.25) e (2.26) valgono formule come la (2.21).

2.6. TEOREMA. « Sia $T \in \mathcal{D}'(A)$ con derivate misure. Sia $\xi \in A$ fissato. Allora esistono due rappresentanti f^+ ed f^- di T per cui

$$(2.34)\qquad \langle T \cdot \varphi(x, C_\varrho(\xi)), \operatorname{div} g(x) \rangle = - \int\limits_{\overline{C}_\varrho(\xi)} \langle g, DT \rangle - \int\limits_{\mathcal{F} C_\varrho(\xi)} \langle g, \nu f^+ \rangle \, dH_{n-1}, \ \forall\, g \in \mathcal{D}^{(n)},$$

$$(2.35)\qquad \langle T \cdot \varphi(x, C_\varrho(\xi)), \operatorname{div} g(x) \rangle = - \int\limits_{C_\varrho(\xi)} \langle g, DT \rangle - \int\limits_{\mathcal{F} C_\varrho(\xi)} \langle g, \nu f^- \rangle \, dH_{n-1}, \ \forall\, g \in \mathcal{D}^{(n)},$$

per ogni ϱ per cui $C_\varrho(\xi) \in \mathcal{K}(A)$, ed inoltre si ha

$$\int_{\mathcal{F} C_\varrho(\xi)} |f^+ - f^-| \, dH_{n-1} = \int_{\mathcal{F} C_\varrho(\xi)} |DT| \text{»}. \tag{2.36}$$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo soltanto la esistenza della f^+. Per questo indichiamo con f una qualunque rappresentante di T. Poniamo allora la f^+ eguale ad f in tutti i punti $x \in A$ che non appartengono a nessuna delle sfere $C_\varrho(\xi) \in \mathcal{K}(A)$. Poniamo ancora f^+ eguale ad f sull'insieme delle $\mathcal{F} C_\varrho(\xi)$ per i valori di ϱ per cui vale la (2.15). La f^+ viene così ad essere definita quasi ovunque su A (cfr. Lemma 2.1 e Teorema 2.2). Pertanto comunque venga ora definita sui punti restanti essa risulterà una rappresentante di T. Si consideri ora un eventuale ϱ_0 tale che per $C_{\varrho_0}(\xi)$ e per la f non valga la (2.15). Per ogni $\varrho > \varrho_0$ per cui la (2.15) vale si consideri su $\mathcal{F} C_{\varrho_0}(\xi)$ la funzione f_ϱ definita da

$$f_\varrho(x) = f(\varrho \cdot \varrho_0^{-1} x). \tag{2.37}$$

Per $\varrho \to \varrho_0$ da destra esiste il limite in $L^1(\mathcal{F} C_{\varrho_0}(\xi))$ delle f_ϱ (cfr. (2.27)). Definiremo allora su $\mathcal{F} C_{\varrho_0}(\xi)$ la f^+ eguale a tale limite. La f^+ così definita verifica per ogni $C_\varrho(\xi) \in \mathcal{K}(A)$ la

$$\lim_{\eta \to 0+} \frac{1}{\eta} \int_0^\eta d\varepsilon \int_{\mathcal{F} C_\varrho(\xi)} |f^+(x) - f^+(x + \varepsilon(x - \xi))| \, dH_{n-1} = 0 \tag{2.38}$$

e quindi, grazie al Teorema 2.2, per essa vale la (2.34).

Alla stessa maniera si prova la esistenza della f^-. Per quanto riguarda la (2.36) essa discende immediatamente dalle (2.34) e (2.35) quando si osservi che valgono le

$$\int_{\mathcal{F} C_\varrho(\xi)} |DT| = \sup \left\{ \int_{\mathcal{F} C_\varrho(\xi)} \langle g, DT \rangle ; \; g \in \mathcal{D}^{(n)}, \; |g| \leq 1 \right\}, \tag{2.39}$$

$$\int_{\mathcal{F} C_\varrho(\xi)} |f^+ - f^-| \, dH_{n-1} = \sup \left\{ \int_{\mathcal{F} C_\varrho(\xi)} \langle g, \nu(f^+ - f^-) \rangle \, dH_{n-1} ; \; g \in \mathcal{D}^{(n)}, |g| \leq 1 \right\}. \tag{2.40}$$

c. v. d.

2.7. OSSERVAZIONE. La funzione f^+ può essere considerata come la traccia esterna della distribuzione T sulle superfici sferiche $\mathcal{F} C_\varrho(\xi)$, la funzione f^- come la traccia interna.

2.8. TEOREMA. « Sia T appartenente a $\mathcal{D}'(A)$ con derivate misure. Allora per ogni sfera C appartenente a $\mathcal{K}(A)$ si ha che la distribuzione $T \cdot \varphi(x, C)$, la quale è definita su R^n ed ha supporto compatto, ha derivate misure ».

DIMOSTRAZIONE. È una conseguenza immediata del Teorema 2.6.

c. v. d.

3. Insiemi di perimetro localmente finito.

Indicheremo con E un insieme misurabile di R^n e con $\mathcal{F}E$ la sua frontiera. Diremo equivalenti due insiemi misurabili E, E' se vale: $\text{mis}\,[(E - E') \cup (E' - E)] = 0$.

Utile per quanto diremo nel prossimo capitolo è la seguente

3.1 DEFINIZIONE. « Dicesi frontiera essenziale dell'insieme E l'insieme $\mathcal{F}_e E$ dei punti $x \in R^n$ per i quali vale

$$0 < \text{mis}\,(E \cap C_\varrho(x)) < \text{mis}\, C_\varrho(x), \quad \forall\, \varrho > 0. \text{ »} \tag{3.1}$$

Valgono ovviamente le seguenti proposizioni

3.2 PROPOSIZIONE. « Se E ed E' sono equivalenti allora è $\mathcal{F}_e E = \mathcal{F}_e E'$ ».

3.3 PROPOSIZIONE. « Per ogni E vale $\mathcal{F}_e E \subset \mathcal{F}E$. »

Vale la seguente proposizione

3.4 PROPOSIZIONE. « Per ogni E esiste un equivalente E' per cui vale

$$\mathcal{F}_e E' = \mathcal{F}E'. \text{ »} \tag{3.2}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $E_i = \{x\,;\, \exists\, \varrho > 0 \text{ con } \text{mis}\,(E \cap C_\varrho(x)) = \text{mis}\, C_\varrho(x)\}$ ed $E_e = \{x\,;\, \exists\, \varrho > 0 \text{ con } \text{mis}\,(E \cap C_\varrho(x)) = 0\}$. Gli insiemi E_i ed E_e sono ovviamente aperti e si ha $\text{mis}\,(E_i - E) = \text{mis}\,(E_e \cap E) = 0$. Quindi l'insieme $E' = E \cup E_i - E_e$ è equivalente ad E, e se $x \in \mathcal{F}E'$ allora si ha $x \notin E_i \cup E_e$, e quindi $x \in \mathcal{F}_e E = \mathcal{F}_e E'$, poichè vale $E_i \cup E_e \cup \mathcal{F}_e E = R^n$. Perciò $\mathcal{F}E' \subset \mathcal{F}_e E'$ e quindi, per la Proposizione 3.3 si ha $\mathcal{F}_e E' = \mathcal{F}E'$. c. v. d.

Caccioppoli [1] e De Giorgi [2] hanno introdotto una nozione di perimetro per gli insiemi misurabili, e precisamente il perimetro, che indichiamo con $P(E)$, di un insieme E è dato da

$$(3.3) \qquad P(E) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} g(x)\, dx \; ; \; g \in \mathcal{D}^{(n)}, |g| \leq 1 \right\}.$$

Noi poniamo la seguente

3.5 DEFINIZIONE. « Diremo che un insieme E ha perimetro localmente finito sull'aperto A se per ogni sfera $C \in \mathcal{K}(A)$ l'insieme $E \cap C$ ha perimetro finito.

Nel caso $A = R^n$ diremo semplicemente E di perimetro localmente finito. »

3.6 OSSERVAZIONE. Essendo E misurabile la sua funzione caratteristica, che è misurabile e limitata, è localmente sommabile su R^n e perciò potremo parlare per essa di derivate, e si ha, come facilmente si verifica: $P(E) = \sup \{\theta(\varphi(x, E), K) \; ; \; K \in \mathcal{K}(R^n)\}$.

3.7 PROPOSIZIONE. « E ha perimetro localmente finito su A se e solo se $\varphi(x, E)$ ha derivate misure su A. »

DIMOSTRAZIONE. *a)* E abbia perimetro localmente finito su A. Sia $K \in \mathcal{K}(A)$, sia $\{C_j\} \subset \mathcal{K}(A)$ una famiglia finita di sfere tale che $\bigcup_j C_j \supset K$. Avremo allora

$$(3.4) \qquad \theta(\varphi(x, E), K) \leq \sum_j \theta(\varphi(x, E), C_j) \leq \sum_j P(E \cap C_j) < \infty.$$

b) $\varphi(x, E)$ abbia derivate misure su A. Allora, se C è una sfera di $\mathcal{K}(A)$, per il Teorema 2.8, $\varphi(x, E) \cdot \varphi(x, C) = \varphi(x, E \cap C)$ ha derivate misure su R^n, ed essendo $E \cap C$ limitato, questo implica per la Osservaziane 3.6, che $P(E \cap C) < \infty$. c. v. d.

3.8 OSSERVAZIONE. Se Ω è un aperto di R^{n-1} ed f è una funzione continua colle derivate prime su Ω, allora l'insieme E di R^n dato da

$$(3.5) \qquad E = \{(y, z) \; ; \; y \in \Omega, z > f(y)\},$$

ha perimetro localmente finito su $\Omega \times R$. Basta per questo osservare che, se $g \in C_0^\infty$ ed ha supporto contenuto in $\Omega \times R$, allora si hanno le,

$$\int_E \frac{\partial g(x)}{\partial x_h} dx = \int_\Omega g(y, f(y)) \frac{\partial f(y)}{\partial y_h} dy, \qquad h = 1, \ldots, n-1; \tag{3.6}$$

$$\int_E \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} dx = \int_\Omega g(y, f(y))\, dy. \tag{3.7}$$

Osserviamo inoltre che poiché le (3.6) e (3.7) valgono anche nel caso in cui la f sia localmente lipschitziana su Ω, si ha che anche in questo caso l'insieme E definito dalla (3.5) ha perimetro localmente finito su $\Omega \times R$.

Riscriviamo ora per gli insiemi di perimetro localmente finito il teorema di compattezza in L^1_{loc} e il teorema relativo alla traccia sulle superfici sferiche di centro fissato.

3.9. TEOREMA. « Sia A un aperto di R^n e γ una funzione reale definita su $\mathcal{K}(A)$. Se indichiamo con $\mathcal{E}$ la famiglia degli insiemi di perimetro localmente finito su A che verificano

$$\theta(\varphi(x, E), K) \leq \gamma(K), \quad \forall\, K \in \mathcal{K}(A), \tag{3.8}$$

si ha che la $\mathcal{E}$ è compatta in $L^1_{\text{loc}}(A)$, ovvero da ogni successione $\{E_h\}$ di insiemi di $\mathcal{E}$ si può estrarre una successione $\{E_j'\}$ per la quale esiste un insieme E di $\mathcal{E}$ tale che

$$\lim_{j \to \infty} \text{mis}\, \{[(E_j' - E) \cup (E - E_j')] \cap K\} = 0, \quad \forall\, K \in \mathcal{K}(A) \text{ ».} \tag{3.9}$$

DIMOSTRAZIONE. Basta rifarsi al Teorema 1.6. c. v. d.

3.10. OSSERVAZIONE. Il risultato stabilito nel Teorema 3.9 contiene quello stabilito da De Giorgi nel Teorema 1 [3].

3.11. TEOREMA. « Sia A un aperto di R^n e sia E un insieme di perimetro localmente finito su A. Allora per ogni $\xi \in A$ esistono due insiemi E^+ ed E^- equivalenti ad E, per i quali valgono

$$\int_{E \cap C_\varrho(\xi)} \text{div}\, g(x) = - \int_{\bar{C}_\varrho(\xi)} \langle g, D\varphi(x, E) \rangle - \int_{\mathcal{F} C_\varrho(\xi) \cap E^+} \langle g, \nu \rangle\, dH_{n-1}, \quad \forall\, g \in \mathcal{D}^{(n)} \tag{3.10}$$

$$\int_{E \cap C_\varrho(\xi)} \text{div}\, g(x) = - \int_{C_\varrho(\xi)} \langle g, D\varphi(x, E) \rangle - \int_{\mathcal{F} C_\varrho(\xi) \cap E^-} \langle g, \nu \rangle\, dH_{n-1}, \quad \forall\, g \in \mathcal{D}^{(n)} \tag{3.11}$$

per qualunque $C_\varrho(\xi) \in \mathcal{K}(A)$, ed inoltre vale la

$$(3.12) \qquad \int_{\mathcal{F} C_\varrho(\xi)} |\, \varphi(x, E^+) - \varphi(x, E^-) \,|\, dH_{n-1} = \int_{\mathcal{F} C_\varrho(\xi)} |\, D\varphi(x, E) \,| \text{ »}.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta rifarsi al Teorema 2.6. c. v. d.

3.12. OSSERVAZIONE. Il risultato stabilito nel Teorema 3.11 contiene quello stabilito da De Giorgi nel Lemma 3, [3].

4. Diseguaglianze isoperimetriche.

Ricordiamo che De Giorgi ha stabilito, vedi i lavori [2] e [4], per gli insiemi di perimetro finito la diseguaglianza isoperimetrica seguente

$$(4.1) \qquad \inf_{\lambda \in R} \int |\, \varphi(x, E) - \lambda \,|\, dx \leq \gamma_n [P(E)]^{n/n-1}$$

dove γ_n è la costante isoperimetrica della sfera n-dimensionale, e cioè è data da

$$(4.2) \qquad \int_{\{x;\, |x| \leq 1\}} dx = \gamma_n \Big(\int_{\{x;\, |x| = 1\}} dH_{n-1} \Big)^{n/n-1}.$$

In questo capitolo stabiliamo, a partire dalla (4.1), due diseguaglianze isoperimetriche per gli insiemi di perimetro localmente finito.

4.1. TEOREMA. « Sia E un insieme di perimetro localmente finito su A, e sia $C \in \mathcal{K}(A)$ una sfera tale che valga

$$(4.3) \qquad \int_{E \cap C} \operatorname{div} g(x)\, dx = - \int_C \langle g, D\varphi(x, E) \rangle - \int_{\mathcal{F} C \cap E} \langle g, \nu \rangle\, dH_{n-1}, \quad \forall\, g \in \mathcal{D}^{(n)};$$

allora vale

$$(4.4) \qquad \inf_{\lambda \in R} \int_{\mathcal{F} C} |\, \varphi(x, E) - \lambda \,|\, dH_{n-1} \leq [2^{1/n} - 1]^{-1} \cdot \int_C |\, D\varphi(x, E) \,| \text{ »}.$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo innanzitutto che vale

$$(4.5)\qquad \inf_{\lambda\in R}\int_{\mathcal{F}C} |\varphi(x,E)-\lambda|\, dH_{n-1} = \left\{\int_{\mathcal{F}C}\varphi(x,E)\, dH_{n-1}\right\} \cap \left\{\int_{\mathcal{F}C}\varphi(x,R^n-E)\, dH_{n-1}\right\}$$

d'altra parte, poichè vale

$$(4.6)\qquad D\varphi(x, R^n - E) = - D\varphi(x, E),$$

si ha che la (4.3) vale anche per $R^n - E$ e quindi per provare la (4.4) possiamo supporre che sia

$$(4.7)\qquad \int_{\mathcal{F}C}\varphi(x,E)\, dH_{n-1} \le \frac{1}{2}\cdot\int_{\mathcal{F}C} dH_{n-1},$$

e provare che in tal caso vale

$$(4.8)\qquad \int_{\mathcal{F}C}\varphi(x,E)\, dH_{n-1} \le [2^{1/n}-1]^{-1}\cdot\int_C |D\varphi(x,E)|\,.$$

Applicando agli insiemi $E\cap C$ ed $(R^n - E)\cap C$ la (4.1) si ha

$$(4.9)\qquad \text{mis}\,(E\cap C) \le \gamma_n\,[P(E\cap C)]^{n/n-1}$$

$$(4.10)\qquad \text{mis}\,\{(R^n-E)\cap C\} \le \gamma_n\,[P\{R^n - E)\cap C\}]^{n/n-1}\,.$$

Se indichiamo allora con p, η, ε le quantità

$$\int_{\mathcal{F}C} dH_{n-1}\,,\ \int_{\mathcal{F}C}\varphi(x,E)\, dH_{n-1}\,,\ \int_C |D\varphi(x,E)|$$

avremo, per la (4.3), che ricordiamo vale anche per $R^n - E$, e per la (4.6), la

$$(4.11)\qquad P(E\cap C) = \varepsilon + \eta$$

$$(4.12)\qquad P[(R^n - E)\cap C] = \varepsilon + p - \eta\,;$$

avremo allora, sommando le (4.9) e (4.10), confrontando con la (4.2) e tenuto conto delle (4.11), (4.12)

$$(4.13)\qquad p^{\frac{n}{n-1}} \le (\varepsilon+\eta)^{\frac{n}{n-1}} + (\varepsilon + p - \eta)^{\frac{n}{n-1}}.$$

Osserviamo che per la (4.13) si ha che se $\varepsilon = 0$ allora deve essere $\eta = 0$. Possiamo allora supporre, per provare la (4.8) che $\varepsilon > 0$. Poniamo allora

$$x = p \cdot \varepsilon^{-1}, \; y = \eta \cdot \varepsilon^{-1}, \tag{4.14}$$

con tali posizioni le (4.7) e (4.13) si scrivono

$$2y \leq x, \tag{4.15}$$

$$x^{\frac{n}{n-1}} \leq (1 + y)^{\frac{n}{n-1}} + (1 + x - y)^{\frac{n}{n-1}} . \tag{4.16}$$

Essendo il secondo membro della (4.16) funzione decrescente di y, per $y \leq \frac{x}{2}$, avremo che per $x \leq 2\,(2^{1/n} - 1)^{-1}$ la (4.16) è conseguenza della (4.15) e quindi per tali x si ha, dalla (4.15), $y \leq (2^{1/n} - 1)^{-1}$ come volevamo provare. Resta perciò da considerare l'intervallo: $x > 2\,(2^{1/n} - 1)^{-1}$. Per ogni x di tale intervallo esiste uno ed un solo $y = y\,(x)$ per cui si ha

$$x^{\frac{n}{n-1}} = (1 + y\,(x))^{\frac{n}{n-1}} + (1 + x - y\,(x))^{\frac{n}{n-1}} , \tag{4.17}$$

pertanto, in tal caso, la (4.15) equivale a

$$y \leq y\,(x). \tag{4.18}$$

Non ci resta quindi che valutare $y\,(x)$. Per questo si osservi che

$$y'\,(x) < 0, \tag{4.19}$$

per cui si ha

$$y\,(x) \leq \lim_{x \to 2\,[2^{1/n} - 1]^{-1}} y\,(x) = (2^{1/n} - 1)^{-1}, \tag{4.20}$$

e quindi l'asserto. c. v. d.

4.2. Osservazione. Nella stessa maniera si prova che se vale

$$\int\limits_{E \cap C} \operatorname{div} g\,(x)\, dx = - \int\limits_{C} \langle g, D\varphi\,(x, E) \rangle - \int\limits_{\mathscr{F}C \cap E} \langle g, \nu \rangle \, dH_{n-1} , \; \forall\, g \in \mathcal{D}^{(n)} \tag{4.21}$$

allora vale

$$\inf_{\lambda \in R} \int_{\mathcal{F}C} | \varphi(x, E) - \lambda | \, dH_{n-1} \leq (2^{1/n} - 1)^{-1} \cdot \int_{C} | D\varphi(x, E) | . \tag{4.22}$$

4.3 TEOREMA. « *Se E ha perimetro localmente finito su A e se $C \in \mathcal{K}(A$ è una sfera allora si ha*

$$\inf_{\lambda \in R} \int_C |\varphi(x,E) - \lambda| \, dx \leq \gamma_n \cdot 2^{1/(n-1)} (2^{1/n} - 1)^{-\frac{n}{n-1}} \left\{ \int_C |D\varphi(x, E)| \right\}^{\frac{n}{n-1}} ». \tag{4.23}$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo innanzitutto che per il Teorema 2.6 possiamo supporre che valga la (4.3), d'altra parte avendosi

$$\inf_{\lambda \in R} \int_C | \varphi(x, E) - \lambda | \, dx = \left\{ \int_C \varphi(x, E) \, dx \right\} \cap \left\{ \int_C \varphi(x, R^n - E) \, dx \right\} \tag{4.24}$$

possiamo supporre che valga la (4.7). In tal caso dalla (4.8) e (4.9) e (4.11) si ha

$$\int_C \varphi(x, E) \, dx \leq \gamma_n \, 2^{1/(n-1)} (2^{1/n} - 1)^{-\frac{n}{n-1}} \left\{ \int_C | D\varphi(x, E) | \right\}^{\frac{n}{n-1}} \tag{4.25}$$

che, per la (4.24), implica la (4.23). c. v. d.

5. Regolarizzazione delle frontiere degli insiemi di perimetro localmente finito.

Indicheremo con $\dfrac{D_i\varphi(x, E)}{|D\varphi(x, E)|}$ $(i = 1, \dots, n)$ la derivata della misura $D_i\varphi(x, E)$ rispetto alla misura $|D\varphi(x, E)|$ nel punto x. Indicheremo con $\dfrac{D\varphi(x, E)}{|D\varphi(x, E)|}$ il vettore che ha come componenti le $\dfrac{D_i\varphi(x, E)}{|D\varphi(x, E)|}$. Ricordiamo (cfr. Teorema di Radon-Nikodym) che $\dfrac{D\varphi(x, E)}{|D\varphi(x, E)|}$ è definito $|D\varphi(x, E)|$-quasi ovunque e verifica $\left| \dfrac{D\varphi(x, E)}{|D\varphi(x, E)|} \right| = 1$. Sottintenderemo che $\mathcal{F}E = \mathcal{F}_e E$.

Diremo ipersuperficie di classe C^1 un insieme W di R^n tale che per ogni $\bar{x} \in W$ esiste un intorno $\mathcal{J}$ di $\bar{x}$ ed un indice i compreso fra 1 e n, tale che: $\mathcal{J} \cap W = \{x; x_i = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in B\}$, dove B è un aperto di R^{n-1} ed f è una funzione continua colle derivate prime su B.

5.1. LEMMA. « Se E ha perimetro localmente finito su A e se ξ è un punto di $\mathcal{F}E \cap A$, se vale per quasi tutti i $C_\varrho(\xi) \in \mathcal{K}(A)$ la

$$\left| \int_{\bar{C}_\varrho(\xi)} D\varphi(x, E) \right| \geq p \int_{\bar{C}_\varrho(\xi)} | D\varphi(x, E) | \tag{5.1}$$

con p numero reale positivo, allora valgono, per ogni $C_\varrho(\xi) \in \mathcal{K}(A)$, le

$$\int_{C_\varrho(\xi)} \varphi(x, E)\, dx \geq \gamma_n^{1-n} (1 - 2^{-1/n})^n \cdot n^{-n} \cdot p^n \cdot \varrho^n \tag{5.2}$$

$$\int_{\bar{C}_\varrho(\xi)} | D\varphi(x, E) | \geq \gamma_n^{1-n} (1 - 2^{-1/n})^n \cdot n^{-n+1} \cdot p^{n-1} \cdot \varrho^{n-1} \text{ ».} \tag{5.3}$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo innanzitutto che vale, per quasi tutti i $C_\varrho(\xi) \in \mathcal{K}(A)$

$$\int_{\mathcal{F}C_\varrho(\xi)} \nu(x)\, \varphi(x, E)\, dH_{n-1} = - \int_{\bar{C}_\varrho(\xi)} D\varphi(x, E). \tag{5.4}$$

Infatti se φ_η è la funzione definita da (2.16) si ha

$$\int_{\bar{C}_\varrho(\xi)} D\varphi(x, E) = \lim_{\eta \to 0+} \int \varphi_\eta(x)\, D\varphi(x, E) \tag{5.5}$$

d'altra parte è

$$\begin{aligned} \int \varphi_\eta D\varphi(x, E) &= - \int \varphi(x, E)\, D\varphi_\eta(x) = \\ &= \int_{C_{\varrho+\eta\varrho}(\xi) - C_\varrho(\xi)} \varphi(x, E)(x - \xi)\, [\,|x - \xi|\, \eta\varrho]^{-1}\, dx = \\ &= -\frac{1}{\eta} \int_0^\eta (1 + \varepsilon)^{n-1}\, d\varepsilon \int_{\mathcal{F}C_\varrho(\xi)} \varphi(x + \varepsilon(x - \xi), E)\, \nu(x)\, dH_{n-1} \end{aligned} \tag{5.6}$$

e, per il Lemma 2.1, si ha per quasi tutti i $C_\varrho(\xi) \in \mathcal{K}(A)$

$$(5.7)\quad \lim_{\eta\to 0+} \frac{1}{\eta} \int_0^\eta (1+\varepsilon)^{n-1} d\varepsilon \int_{\mathcal{F}C_\varrho(\xi)} \varphi(x+\varepsilon(x-\xi), E)\, \nu(x)\, dH_{n-1} =$$

$$= \int_{\mathcal{F}C_\varrho(\xi)} \varphi(x, E)\, \nu(x)\, dH_{n-1}$$

e quindi ovviamente da (5.7), (5.6) e (5.5) segue (5.4).

Se ora poniamo $g(\varrho) = \int_{C_\varrho(\xi)} \varphi(x, E)\, dx$, si ha, per quasi tutti i ϱ

$$(5.8)\qquad g'(\varrho) = \int_{\mathcal{F}C_\varrho(\xi)} \varphi(x, E)\, dH_{n-1},$$

e quindi da (5.8), (5.4) e (5.1) si ha, per quasi tutti i $C_\varrho(\xi) \in \mathcal{K}(A)$

$$(5.9)\qquad g'(\varrho) \geq p \int_{\overline{C}_\varrho(\xi)} |D\varphi(x, E)|.$$

Quindi se vale

$$(5.10)\qquad \int_{\mathcal{F}C_\varrho(\xi)} \varphi(x, E)\, dH_{n-1} \leq \frac{1}{2} \cdot \int_{\mathcal{F}C_\varrho(\xi)} dH_{n-1},$$

dalla (5.9) segue, per la diseguaglianza isoperimetrica (4.23), la

$$(5.11)\qquad g'(\varrho) \geq p \cdot \gamma^{\frac{1-n}{n}} (1 - 2^{-1:n})\, g(\varrho)^{\frac{n-1}{n}},$$

altrimenti, cioè se non vale la (5.10), si ha ovviamente

$$(5.12)\qquad g'(\varrho) \geq \frac{1}{2} \cdot \int_{\mathcal{F}C_\varrho(\xi)} dH_{n-1} \geq \frac{1}{2} \cdot \gamma^{\frac{1-n}{n}} \cdot g(\varrho)^{\frac{n-1}{n}}$$

in ogni caso avremo, essendo $p \leq 1$, $1 - 2^{-1:n} \leq \frac{1}{2}$,

$$(5.13)\qquad g'(\varrho) \geq p \cdot \gamma^{\frac{1-n}{n}} \cdot (1 - 2^{-1:n}) \cdot g(\varrho)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Da questa integrando e ricordando che è sempre $g(\varrho) > 0$ per $\varrho > 0$ si ricava

$$n \cdot g(\varrho)^{1:n} \geq \gamma^{\frac{1-n}{n}} (1 - 2^{-1:n}) \cdot p \cdot \varrho \tag{5.14}$$

e quindi

$$g(\varrho) \geq \gamma^{1-n} (1 - 2^{-1:n})^n \cdot n^{-n} \cdot p^n \cdot \varrho^n \tag{5.15}$$

e quindi la (5.2) è provata, per quanto riguarda la (5.3) basta applicare la diseguaglianza isoperimetrica (4.23) ad E oppure ad $R^n - E$ e ricordare che si ha la (4.6) e quindi tutto quanto qui detto vale anche per $R^n - E$.

c. v. d.

5.2 Lemma. « Se E ha perimetro localmente finito su A e se, indicato con α un vettore unitario e con D_α la derivazione nella direzione α, vale, $|D\varphi(x, E)|$-quasi ovunque su A,

$$\frac{D_\alpha \varphi(x, E)}{|D\varphi(x, E)|} \geq p > 0, \tag{5.16}$$

allora valgono le (5.2) e (5.3) per ogni $C_\varrho(\xi) \in \mathcal{K}(A)$, con $\xi \in \mathcal{F}E$. »

Dimostrazione. Basta osservare che per la (5.16) si ha

$$\left| \int_{C_\varrho(\xi)} D\varphi(x, E) \right| \geq \int_{C_\varrho(\xi)} D_\alpha \varphi(x, E) \geq p \cdot \int_{C_\varrho(\xi)} |D\varphi(x, E)|. \tag{5.17}$$

c. v. d.

5.3 Lemma. « Sia E di perimetro localmente finito su A. Sia $g \in C_0^\infty$ e valga, per ogni t dell'intervallo $(0, k)$, $\operatorname{supp} g(x - t\alpha) \subset A$ allora vale

$$\int_E [g(x - k\alpha) - g(x)]\, dx = \int_0^k dt \int g(x - t\alpha)\, D_\alpha \varphi(x, E). \text{ »} \tag{5.18}$$

Dimostrazione. Poichè vale

$$g(x - k\alpha) - g(x) = - \int_0^k D_\alpha g(x - t\alpha)\, dt, \tag{5.19}$$

integrando su E si ha

$$(5.20) \qquad \int_E [g(x - k\alpha) - g(x)]\, dx = -\int_E dx \int_0^k D_\alpha g(x - t\alpha)\, dt$$

d'altra parte, per quanto riguarda l'ultimo integrale si ha

$$(5.21) \qquad -\int_E dx \int_0^k D_\alpha g(x - t\alpha)\, dt = -\int_0^k dt \int_E D_\alpha g(x - t\alpha)\, dx =$$

$$= \int_0^k dt \int g(x - t\alpha)\, D_\alpha \varphi(x, E).$$

Dalle (5.20) e (5.21) segue allora l'asserto. c. v. d.

5.4 LEMMA. « Se E ha perimetro localmente finito su A e se, per ogni t dell'intervallo $(0, k)$, si ha $C_\varrho(\xi + t\alpha) \in \mathcal{K}(A)$, allora

$$(5.22) \qquad \text{mis}\,[E \cap C_\varrho(\xi + k\alpha)] - \text{mis}\,[E \cap C_\varrho(\xi)] = \int_0^k dt \int_{\overline{C}_\varrho(\xi + t\alpha)} D_\alpha \varphi(x, E). \text{ »}$$

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare il risultato precedente alla φ_η definita dalla (2.16) e passare al limite per $\eta \to 0+$. c. v. d.

5.5 LEMMA. « Sia E di perimetro localmente finito su A e valga la (5.16). Allora, se $\xi \in \mathcal{F}E \cap A$ e se k è tale che il segmento $(\xi, \xi + k\alpha)$ è contenuto in A, si ha che $\xi + k\alpha$ è interno ad E per $k > 0$, è esterno per $k < 0$. »

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che esista un $k > 0$ tale che il segmento $(\xi, \xi + k\alpha)$ sia contenuto in A e tale che $\xi + k\alpha$ non sia interno ad E. Allora, grazie alla (5.22) si ha che il segmento $(\xi, \xi + k\alpha)$ è contenuto nella $\mathcal{F}E$, quindi avremo per la (5.16), (5.3) e (5.22) che

$$(5.23) \qquad \text{mis}\,[E \cap C_\varrho(\xi + k\alpha)] - \text{mis}\,[E \cap C_\varrho(\xi)] \geq \delta(n, p)\, \varrho^{n-1}$$

dove $\delta(n, p)$ è una quantità positiva. Ma la (5.23) è ovviamente assurda, essendo il primo membro di essa infinitesimo di ordine non inferiore ad n rispetto a ϱ.

Allo stesso modo si prova che non esistono $k < 0$ per i quali il segmento $(\xi, \xi + k\alpha)$ è contenuto in A e tali che il punto $\xi + k\alpha$ non sia esterno ad E. c. v. d.

5.6 Teorema. « Sia A aperto convesso di R^n. Sia E un insieme di perimetro localmente finito su A e valga la

$$\frac{D_n \varphi(x, E)}{|D\varphi(x, E)|} \geq p > 0, \quad |D\varphi(x, E)| - \text{quasi ovunque su } A; \tag{5.24}$$

allora esiste un aperto Ω di R^{n-1} e una funzione lipschitziana f definita su Ω, tali che

$$\mathcal{F}E \cap A = \{(y, f(y)) ; y \in \Omega\}, \tag{5.25}$$

ed inoltre la f verifica

$$|f(y') - f(y'')| \leq p^{-1}(1 - p^2)^{1/2} |y' - y''|, \forall y', y'' \in \Omega. \text{ »} \tag{5.26}$$

Dimostrazione. Se $\alpha_n = \langle \alpha, e_n \rangle$ (e_n è il versore dell'asse Ox_n) è positivo, allora per la (5.24) si ha

$$\frac{D_\alpha \varphi(x, E)}{|D\varphi(x, E)|} \geq \alpha_n p - (1 - \alpha_n^2)^{1/2}(1 - p^2)^{1/2} \tag{5.27}$$

e quindi, dal Lemma 5.5, si ricava che: se $\alpha_n > (1 - p^2)^{1/2}$, allora, per $\xi \in \mathcal{F}E \cap A$, si ha che tutti i punti di A che stanno sulla parte positiva della retta passante per ξ e avente orientazione α sono interni ad E, mentre sono esterni ad E quelli che stanno sulla parte negativa. Questo prova l'asserto quando si prenda per Ω la proiezione n-ma di $\mathcal{F}E \cap A$. c. v. d.

5.7 Osservazione. Se Ω è un aperto di R^{n-1} ed f è localmente lipschitziana su Ω, allora l'insieme E di R^n definito da

$$E = \{(y, z) ; \; y \in \Omega, \; z > f(y)\}, \tag{5.28}$$

ha perimetro localmente finito su $\Omega \times R$ e se $x = (y, f(y))$ valgono le

$$\frac{D_i \varphi(x, E)}{|D\varphi(x, E)|} = \frac{D_i f(y)}{[1 + |Df(y)|^2]^{\frac{1}{2}}}, \text{ per } i = 1, \dots, n-1 \tag{5.29}$$

$$\frac{D_n \varphi(x, E)}{|D\varphi(x, E)|} = \left[\frac{1}{1 + |Df(y)|^2}\right]^{1/2} \tag{5.30}$$

quasi ovunque su Ω.

Dalle (3.6) e (3.7) si ricava che le (5.29) e (5.30) valgono in tutti e soli i punti $y \in \Omega$ in cui vale la

$$\lim_{\varrho \to 0+} \varrho^{n-1} \int_{C_\varrho(y)} | D_i f(\eta) - D_i f(y) | \, d\eta = 0. \tag{5.31}$$

5.8 TEOREMA. « Se E ha perimetro localmente finito sull'aperto A, e $\dfrac{D\varphi(x, E)}{|D\varphi(x, E)|}$ è continuo su $\mathcal{F}E \cap A$, allora $\mathcal{F}E \cap A$ è una ipersuperficie di classe C^1. ».

DIMOSTRAZIONE. Per la continuità di $\dfrac{D\varphi(x, E)}{|D\varphi(x, E)|}$ e per il Teorema di Radon-Nikodym si ha che $\left| \dfrac{D\varphi(x, E)}{|D\varphi(x, E)|} \right| = 1$ ovunque su $\mathcal{F}E \cap A$; allora per ogni punto $\xi \in \mathcal{F}E \cap A$ esiste, per il teorema 5.6, una sfera in cui $\mathcal{F}E \cap A$ ha una rappresentazione cartesiana mediante una funzione lipschitziana f. Ma per la Osservazione 5.7 la f risulta avere le derivate prime coincidenti quasi ovunque con funzioni continue, e perciò la f risulta avere le derivate prime continue. c. v. d.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. CACCIOPPOLI - « *Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati* » - Rend. Acc. Naz. Lincei Cl. Sc. Fis. Mat. Nat. Serie VIII, Vol. XII (1952).

[2] E. DE GIORGI - « *Su una teoria generale della misura $(r-1)$-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni* » - Ann. di Mat. Pura e Appl. Serie IV, Tomo XXXVI (1954).

[3] E. DE GIORGI - « *Nuovi teoremi relativi alle misure $(r-1)$-dimensionali in uno spazio ad r dimensioni* » - Ricerche di Mat., Vol. IV (1955).

[4] E. DE GIORGI - « *Sulla proprietà isoperimetrica della ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita* » - Atti Acc. Naz. Lincei, Serie VIII, Vol. V (1958).

[5] L. SCHWARTZ - « *Théorie des distributions* » - Voll. 1°, 2°. Act. Sc. et Ind. 1245, 1122.

[6] A. WEIL - « *L'Intégration dans les groupes topologiques* » - Act. Sc. et Ind. 869, (1940).

[7] W. H. FLEMING - « *Functions whose partial derivatives are measures* » - Illinois Journ. of Math., Vol. 4, n. 3 (1960).

[8] W. HUREWICZ-H. WALLMANN - « *Dimension theory* ». Princeton, 1941.