ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
*Classe di Scienze*

DIONIGI GALLETTO

**Nuove forme per le equazioni in coordinate generali della statica dei continui con caratteristiche di tensione asimmetriche**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série*, tome 17, nº 4 (1963), p. 297-317

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1963_3_17_4_297_0>

# NUOVE FORME PER LE EQUAZIONI IN COORDINATE GENERALI DELLA STATICA DEI CONTINUI CON CARATTERISTICHE DI TENSIONE ASIMMETRICHE

Memoria di DIONIGI GALLETTO (a Padova) (*)

In una recente memoria (1) ho stabilito, in coordinate generali, varie espressioni in forma euleriana e in forma lagrangiana delle equazioni generali della statica dei sistemi continui con caratteristiche di tensione asimmetriche (2). Nel suddetto lavoro tali espressioni — alcune delle quali, nel caso in cui il riferimento sia cartesiano trirettangolo, si riducono alle equazioni stabilite in precedenza da GRIOLI (3) —, sono state presentate in duplice forma, rispettivamente mediante l'uso di densità tensoriali e di tensori: in quest'ultima forma esse rappresentano le corrispondenti di quelle già note nel caso simmetrico (CAUCHY, PIOLA-KIRCHHOFF, BOUSSINESQ, ...), espresse in coordinate generali da TONOLO, e da TOLOTTI (4).

Nel presente lavoro assegno alle espressioni in coordinate generali delle suddette equazioni altre forme che presentano degli indubbi vantaggi sulle precedenti, quale ad esempio quello, nel caso delle equazioni in forma lagrangiana, di non presentare alcuna traccia del riferimento cartesiano che

Pervenuto alla Redazione il 10 Marzo 1963.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n. 7 del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R. per l'anno acc. 1962-63.

(1) Cfr. [4].

(2) Le caratteristiche di tensione si presentano asimmetriche quando o le forze di massa agenti su ogni elemento di volume del continuo in studio o le forze agenti su ogni elemento di superficie siano riducibili, oltre che a un vettore applicato all'elemento, a una coppia. Cfr. [5], [6], ecc.

(3) Cfr. [5], I, 1, 3.

(4) Cfr. [13], [12].

compare, tramite le $x_i^{\alpha'}$, $x_{i'}^{\alpha'}$, ecc. (5), nelle espressioni da me stabilite nel mio precedente lavoro e in quelle stabilite, per il caso simmetrico, nei citati lavori di TONOLO e di TOLOTTI.

Alcune di tali forme sono le corrispondenti di quelle ottenute recentemente per il caso simmetrico da TRUESDELL e TOUPIN (6), le quali sono sostanzialmente differenti da quelle di TONOLO e TOLOTTI. Le equazioni stabilite nel presente lavoro non si presentano tuttavia come una semplice generalizzazione di queste ultime in quanto, comparendo accanto al tensore degli sforzi un secondo tensore, quello dei momenti superficiali, le equazioni relative al caso asimmetrico si differenziano nettamente, e per il numero e per l'aspetto, da quelle relative al caso simmetrico.

Per pervenire alle suddette espressioni ho fatto ricorso alla nozione di doppio campo tensoriale (7). Con essa è infatti possibile assegnare alle derivate $x_i^{i'}$, $x_{i'}^{i}$ ecc. (8) un ben preciso significato tensoriale. Per rendere inoltre agevole la comprensione di quanto esposto ho premesso una deduzione dell'espressione della derivata covariante di una doppia densità tensoriale, espressione che in [2] è invece assegnata per via assiomatica (9).

## 1. Generalità.

Sia $\mathcal{C}$ un qualunque sistema continuo tridimensionale, $C^3$ una sua arbitraria configurazione di riferimento, $C'^3$ la sua configurazione attuale, $C^2$ e $C'^2$ le superficie contorno completo di $C^3$ e $C'^3$.

Supporrò lo spazio euclideo $E^3$, nel quale intenderò prefissato un sistema di coordinate cartesiane trirettangole, riferito a un arbitrario sistema di coordinate generali, coordinate che indicherò rispettivamente con $x^i$ o con $x^{i'}$ a seconda che debbano essere riferite a punti di $C^3$ o di $C'^3$. Nel caso particolare in cui esse si riducano al prefissato sistema di coordinate cartesiane trirettangole, le indicherò con $x^\alpha$, $x^{\alpha'}$. Fatte le posizioni

$$(1.1) \qquad \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i} = x_i^\alpha, \qquad \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{i'}} = x_{i'}^{\alpha'},$$

(5) Cfr. [4], 10, 11, 13; [13], II, § 3, nn. 6, 8; [12], 4. Per il significato di $x_i^{\alpha'}$, $x_{i'}^{\alpha'}$ si veda il n. 1.

(6) Cfr. [14], 210.

(7) Cfr. [2], III, e anche, per qualche cenno, [3], pp. 79-80. Nella nota (10) ne è richiamata la definizione. Inoltre avverto sin d'ora che il termine di *doppio campo tensoriale*, già adoperato in [2], è da non confondersi con quello di *campo di tensori di ordine* 2.

(8) Cfr. il n. 1 e, anche, [2], 19.

(9) Cfr. [2], 20.

segue che la forma quadratica fondamentale è data da

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{1.2}$$

con

$$g_{ij} = \sum_1^3{}_{\alpha}\, x_i^{\alpha}\, x_j^{\alpha}, \tag{1.3}$$

in $C^3$; da

$$ds'^2 = g_{i'j'}\, dx^{i'}\, dx^{j'}, \tag{1.2'}$$

con

$$g_{i'j'} = \sum_1^3{}_{\alpha'}\, x_{i'}^{\alpha'}\, x_{j'}^{\alpha'}, \tag{1.3'}$$

in $C'^3$.

Posto

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = x_i^{i'}, \tag{1.4}$$

è immediato verificare che le nove funzioni $x_i^{i'}$ costituiscono le componenti di un doppio campo tensoriale, di ordine contravariante 0,1 e di ordine covariante 1,0 [10]. Infatti, supposto di passare in $E^3$ a un nuovo sistema di coordinate generali, coordinate che indicherò rispettivamente con $x^{\bar i}$ o con $x^{\bar i'}$ a seconda che debbano essere riferite a punti di $C^3$ o di $C'^3$, si ha, con il significato dei simboli ormai ovvio,

$$x_{\bar i}^{\bar i'} = x_{\bar i}^{i}\, x_{i'}^{\bar i'}\, x_i^{i'}.$$

---

(10) $S^n$, $S'^{n'}$ due spazi di dimensioni rispettive $n$ e $n'$ e riferiti ai sistemi di coordinate $x^i$, $x^{i'}$ $(i = 1, 2, \dots, n;\ i' = 1, 2, \dots, n')$. Le funzioni $T^{i_1 \cdots i_p\, i'_1 \cdots i'_{p'}}_{j_1 \cdots j_q\, j'_1 \cdots j'_{q'}}(x^i, x^{i'})$ su essi definite costituiscono le componenti di un doppio campo di densità tensoriali di pesi $s$, $s'$, di ordine contravariante $p$, $p'$ e di ordine covariante $q$, $q'$ se, nel passaggio dai riferimenti $x^i$, $x^{i'}$ a due qualsiansi altri $x^{\bar i}$, $x^{\bar i'}$, dette funzioni si trasformano secondo le

$$T^{\bar i_1 \cdots \bar i_p\, \bar i'_1 \cdots \bar i'_{p'}}_{\bar j_1 \cdots \bar j_q\, \bar j'_1 \cdots \bar j'_{q'}} = \left| x_{\bar i}^{i} \right|^{s} \left| x_{\bar i'}^{i'} \right|^{s'} x_{i_1}^{\bar i_1} \cdots x_{i_p}^{\bar i_p}\, x_{\bar j_1}^{j_1} \cdots x_{\bar j_q}^{j_q}\, x_{i'_1}^{\bar i'_1} \cdots x_{i'_{p'}}^{\bar i'_{p'}}\, x_{\bar j'_1}^{j'_1} \cdots x_{\bar j'_{q'}}^{j'_{q'}}\, T^{i_1 \cdots i_p\, i'_1 \cdots i'_{p'}}_{j_1 \cdots j_q\, j'_1 \cdots j'_{q'}},$$

ove è da intendersi

$$\left| x_{\bar i}^{i} \right| = \mathrm{Det} \left\| x_{\bar i}^{i} \right\|, \qquad \left| x_{\bar i'}^{i'} \right| = \mathrm{Det} \left\| x_{\bar i'}^{i'} \right\|.$$

In particolare, per $s = s' = 0$, si ha un doppio campo tensoriale, mentre per $p = p' = q = q' = 0$ si ha un doppio campo di densità scalari.

Analogamente, le funzioni $x^i_{i'}$, con

$$(1.4') \qquad x^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}},$$

costituiscono le componenti di un doppio campo tensoriale, di ordine contravariante 1,0 e di ordine covariante 0,1.

La funzione

$$(1.5) \qquad | x^{i'}_i | = \operatorname{Det} \| x^{i'}_i \|$$

costituisce un doppio campo di densità scalari, di pesi 1, — 1, in quanto risulta, con ovvio significato dei simboli,

$$| x^{\bar{i}'}_{\bar{i}} | = | x^i_{\bar{i}} | \, | x^{\bar{i}'}_{i'} | \, | x^{i'}_i |.$$

Analogamente, la funzione $| x^i_{i'} |$ costituisce un doppio campo di densità scalari, di pesi — 1, 1.

Da quanto sino ad ora osservato segue che i complementi algebrici delle $x^{i'}_i$ nella matrice $\| x^{i'}_i \|$, dati da $| x^{j'}_j | \, x^i_{i'}$, sono le componenti di un doppio campo di densità tensoriali, di pesi 1, — 1, di ordine contravariante 1, 0 e di ordine covariante 0, 1. Analoga osservazione vale per i complementi algebrici delle $x^i_{i'}$ nella matrice $\| x^i_{i'} \|$, dati da $| x^j_{j'} | \, x^{i'}_i$.

## 2. Derivazione covariante dei doppi campi di densità tensoriali.

Siano $t^{i'}_i$ le componenti di un doppio campo tensoriale, definito in $C^3$, $C'^3$. Posto per brevità,

$$(2.1) \qquad \frac{\partial t^{i'}_i}{\partial x^j} = \partial_j \, t^{i'}_i, \qquad \frac{\partial t^{\bar{i}'}_{\bar{i}}}{\partial x^{\bar{j}}} = \partial_{\bar{j}} \, t^{\bar{i}'}_{\bar{i}}, \ \partial_{\bar{j}} \, x^i_{\bar{i}} = x^i_{\bar{i}\,\bar{j}}, \dots,$$

si ha (11)

$$\partial_{\bar{j}} \, t^{\bar{i}'}_{\bar{i}} = \partial_{\bar{j}} \left( x^i_{\bar{i}} \, x^{\bar{i}'}_{i'} \, , t^{i'}_i \right) =$$

$$= x^i_{\bar{i}\,\bar{j}} \, x^{\bar{l}}_i \, t^{\bar{i}'}_{\bar{l}} + x^{\bar{i}'}_{i'j'} \, x^{i'}_{\bar{l}'} \, x^{j'}_{\bar{j}'} \, x^{\bar{j}'}_{\bar{j}} \, t^{\bar{l}'}_{\bar{i}} + x^i_{\bar{i}} \, x^j_{\bar{j}} \, x^{\bar{i}'}_{i'} \, \partial_j \, t^{i'}_i$$

(11) Si ricordi la nota (10).

e, sostituendo in queste le [12]

$$x^{i}_{\bar i \bar j}\, x^{\bar l}_{i} = \Gamma^{\bar l}_{\bar j \bar i} - x^{\bar l}_{l}\, x^{j}_{\bar j}\, x^{i}_{\bar i}\, \Gamma^{l}_{ji}, \tag{2.2}$$

$$x^{\bar i'}_{i'j'}\, x^{i'}_{\bar l'}\, x^{j'}_{\bar j'} = -\Gamma^{\bar i'}_{\bar j' \bar l'} + x^{\bar i'}_{i'}\, x^{j'}_{\bar j'}\, x^{l'}_{\bar l'}\, \Gamma^{i'}_{j'l'}, \tag{2.2'}$$

ove con $\Gamma^{i}_{jl}$ ho indicato i simboli di CHRISTOFFEL di 2ª specie costruiti con i coefficienti della forma quadratica (1.2) e con $\Gamma^{i'}_{j'l'}$ quelli costruiti con i coefficienti della forma quadratica (1.2′), si ottengono le

$$\partial_{\bar j}\, t^{\bar i'}_{\bar i} - \Gamma^{\bar l}_{\bar j \bar i}\, t^{\bar i'}_{\bar l} + \Gamma^{\bar i'}_{\bar j' \bar l'}\, x^{\bar j'}_{\bar j}\, t^{\bar l'}_{\bar i} =$$

$$= x^{i}_{\bar i}\, x^{j}_{\bar j}\, x^{\bar i'}_{i'} \left(\partial_j\, t^{i'}_{i} - \Gamma^{l}_{ji}\, t^{i'}_{l} + \Gamma^{i'}_{j'l'}\, x^{j'}_{j}\, t^{l'}_{i}\right),$$

le quali esprimono che le quantità entro parentesi sono le componenti di un doppio campo tensoriale, di ordine contravariante 0, 1 e di ordine covariante 2, 0, la *derivata covariante* del doppio campo tensoriale $t^{i'}_{i}$ fatta rispetto alle coordinate $x^i$. Indicate tali componenti con $t^{i'}_{i;j}$ [13], si ha quindi

$$t^{i'}_{i;j} = \partial_j\, t^{i'}_{i} - \Gamma^{l}_{ji}\, t^{i'}_{l} + \Gamma^{i'}_{j'l'}\, x^{j'}_{j}\, t^{l'}_{i} \tag{2.3}$$

e, nell'ipotesi in cui il riferimento in $E^3$ sia cartesiano, tali derivate si riducono alle ordinarie derivate parziali.

Ad esempio, per il doppio campo tensoriale $x^{i'}_{i}$ si ha

$$x^{i'}_{i;j} = x^{i'}_{ij} - \Gamma^{l}_{ji}\, x^{i'}_{l} + \Gamma^{i'}_{j'l'}\, x^{j'}_{j}\, x^{l'}_{i}.$$

Con procedimento analogo a quello seguito per ottenere le (2.3) si ottengono le

$$t^{i'}_{i;j'} = \partial_{j'}\, t^{i'}_{i} - \Gamma^{l}_{ji}\, x^{j}_{j'}\, t^{i'}_{l} + \Gamma^{i'}_{j'l'}\, t^{l'}_{i}, \tag{2.3'}$$

---

(12) Si veda, ad es., [3], pp. 197-198 e si tengano presenti le

$$x^{\bar l}_{ij}\, x^{i}_{\bar i}\, x^{j}_{\bar j} = -x^{i}_{\bar i \bar j}\, x^{\bar l}_{i},$$

immediatamente deducibili dalle

$$\partial_{\bar j}(x^{\bar l}_{i}\, x^{i}_{\bar i}) = 0.$$

(13) In [4] ho indicato il simbolo di derivazione covariante, invece che con $;j$, con $\nabla_j$.

da cui si constata che fra queste e le precedenti sussistono le

$$t^{i'}_{i;j'} = t^{i'}_{i;j}\, x^j_{j'}\,, \quad t^{i'}_{i;j} = t^{i'}_{i;j'}\, x^{j'}_j\,. \tag{2.4}$$

* * *

Sia ora $D(x^i, x^{i'})$ un doppio campo di densità scalari, di pesi $s, s'$, definito in $C^3$, $C'^3$. Posto

$$D = D(x^i, x^{i'}), \quad \bar{D} = D(x^{\bar{i}}, x^{\bar{i}'}),$$

si ha, con ovvio significato dei simboli,

$$\partial_{\bar{j}}\, \bar{D} = \partial_{\bar{j}}\left( |x^h_{\bar{h}}|^s\, |x^{h'}_{\bar{h}'}|^{s'}\, D\right) =$$

$$= |x^h_{\bar{h}}|^s\, |x^{h'}_{\bar{h}'}|^{s'} \left(s\, D x^l_{\bar{l}\,\bar{j}}\, x^{\bar{l}}_l + s'\, D x^{l'}_{\bar{l}'\,\bar{j}'}\, x^{\bar{l}'}_{l'}\, x^{\bar{j}'}_{j'}\, x^{j'}_{\bar{j}} + \partial_{\bar{j}}\, D\right),$$

da cui, tenendo presenti le (2.2), (2.3), si ottengono le

$$\partial_{\bar{j}}\, \bar{D} - s\, \bar{D}\, \Gamma^{\bar{l}}_{\bar{j}\,\bar{l}} - s'\, \bar{D}\, \Gamma^{\bar{l}'}_{\bar{j}'\,\bar{l}'}\, x^{\bar{j}'}_{\bar{j}} =$$

$$= |x^h_{\bar{h}}|^s\, |x^{h'}_{\bar{h}'}|^{s'}\, x^j_{\bar{j}} \left(\partial_j\, D - s\, D\, \Gamma^l_{jl} - s'\, D\, \Gamma^{l'}_{j'l'}\, x^{j'}_j\right)$$

le quali esprimono che le quantità entro parentesi costituiscono le componenti di un doppio campo di densità tensoriali, la *derivata covariante* del doppio campo di densità scalari $D$. Indicatele con $D_{;j}$ si ha quindi

$$D_{;j} = \partial_j\, D - s\, D\, \Gamma^l_{jl} - s'\, D\, \Gamma^{l'}_{j'l'}\, x^{j'}_j\,. \tag{2.5}$$

Ad esempio, per il doppio campo di densità $|x^{h'}_h|$ si ha

$$|x^{h'}_h|_{;j} = |x^{h'}_h|\,(x^{i'}_{ij}\, x^i_{i'} - \Gamma^l_{jl} + \Gamma^{l'}_{j'l'}\, x^{j'}_j).$$

Infine, analogamente alle (2.4), sussistono le

$$D_{;j'} = D_{;j}\, x^j_{j'}\,, \quad D_{;j} = D_{;j'}\, x^{j'}_j\,.$$

* * *

Dalle (2.3), (2.3′), (2.5) appare ormai evidente quale è l'espressione della derivata covariante di un qualsiasi doppio campo di densità. Dato ad esempio il doppio campo di densità tensoriali $D^i_{i'}$, di pesi $s, s'$, risulta [14]

$$(2.6)\qquad D^i_{i';j} = \partial_j D^i_{i'} + \Gamma^i_{jl} D^l_{i'} - s\,\Gamma^l_{jl} D^i_{i'} -$$
$$- (\Gamma^{l'}_{j'i'} D^i_{l'} + s'\,\Gamma^{l'}_{j'l'} D^i_{i'})\, x^{j'}_j$$

ed anche ora si ha

$$(2.7)\qquad D^i_{i';j'} = D^i_{i';j}\, x^j_{j'}, \quad D^i_{i';j} = D^i_{i';j'}\, x^{j'}_j .$$

## 3. Alcune identità notevoli.

Per il doppio campo di densità $|\,x^{h'}_h\,|\,x^i_{i'}$, definito al n. 1, si ha

$$(\,|\,x^{h'}_h\,|\,x^i_{i'})_{;\,i} = \partial_i(\,|\,x^{h'}_h\,|\,x^i_{i'}) + |\,x^{h'}_h\,|\,(\Gamma^i_{il}\,x^l_{i'} - \Gamma^l_{il}\,x^i_{i'} - \Gamma^{l'}_{j'i'}\,x^{j'}_i\,x^i_{l'} +$$
$$+ \Gamma^{l'}_{j'l'}\,x^{j'}_i\,x^i_{i'}),$$

ossia

$$(\,|\,x^{h'}_h\,|\,x^i_{i'})_{;\,i} = \partial_i(\,|\,x^{h'}_h\,|\,x^i_{i'})$$

e, essendo

$$\partial_i(\,|\,x^{h'}_h\,|\,x^i_{i'}) = |\,x^{h'}_h\,|\,(x^{j'}_{ji}\,x^j_{j'}\,x^i_{i'} + x^i_{i'j'}\,x^{j'}_i) = |\,x^{h'}_h\,|\,\partial_{j'}(x^i_{i'}\,x^{j'}_i) = 0,$$

risulta in definitiva

$$(3.1)\qquad (\,|\,x^{h'}_h\,|\,x^i_{i'})_{;\,i} = 0.$$

Analogamente, risulta

$$(3.1')\qquad (\,|\,x^h_{h'}\,|\,x^{i'}_i)_{;\,i'} = \partial_{i'}(\,|\,x^h_{h'}\,|\,x^{i'}_i) = 0.$$

* * *

Ricordate le posizioni (1.1), le quantità

$$|\,x^\gamma_h\,| = \mathrm{Det}\,\|\,x^\gamma_h\,\|$$

costituiscono le componenti di un campo di densità scalari di peso 1 e risulta [15]

$$|\,x^\gamma_h\,|_{;\,i} = |\,x^\gamma_h\,|\,(x^\alpha_{ji}\,x^j_\alpha - \Gamma^j_{i\,j}),$$

[14] È ovvio che le (2.6) si possono ottenere con procedimento analogo a quello seguito per dedurre le (2.3), (2.5).

[15] La legge di derivazione dei campi di densità si deduce come caso particolare dalla legge di derivazione dei doppi campi di densità.

ossia

$$|x^\gamma_h|_{;i} = 0 \tag{3.2}$$

in quanto è

$$\Gamma^j_{i\,l} = x^\alpha_{il}\, x^j_\alpha = -\, x^j_{\alpha\beta}\, x^\alpha_i\, x^\beta_l. \tag{3.3}$$

Analogamente, le qaantità $|x^{h'}_{\gamma'}|$ (16) costituiscono le componenti di un campo di densità scalari di peso $-1$ e risulta

$$|x^{h'}_{\gamma'}|_{;i} = |x^{h'}_{\gamma'}|_{;i'}\, x^{i'}_i = |x^{h'}_{\gamma'}|\,(x^{j'}_{\alpha'\beta'}\, x^{\beta'}_{i'}\, x^{\alpha'}_{j'} + \Gamma^{j'}_{i'\,j'})\, x^{i'}_i,$$

ossia ricordando le analoghe delle (3.3),

$$|x^{h'}_{\gamma'}|_{;i} = 0. \tag{3.2'}$$

Ciò premesso, le (3.1) si possono scrivere

$$(|x^\gamma_h|\,|x^{h'}_{\gamma'}|\,|x^{\gamma'}_\gamma|\, x^i_{i'})_{;i} = 0$$

e da queste, tenendo presente che la derivazione covariante segue le regole della derivazione ordinaria e ricordando le (3.2), (3.2′), seguono le

$$(|x^{\gamma'}_\gamma|\, x^i_{i'})_{;i} = 0. \tag{3.4}$$

In modo analogo si ottengono le

$$(|x^\gamma_{\gamma'}|\, x^{i'}_i)_{;i'} = 0. \tag{3.4'}$$

## 4. Le ipotesi sulle forze di massa e sulle forze esterne.

Convenendo di rappresentare i momenti tramite tensori emisimmetrici del secondo ordine (prodotti esterni di vettori) (17) e indicata con $\mu'$ la den-

---

(16) Il significato dei simboli è ormai ovvio.

(17) In [4] ho rappresentato i momenti sia tramite densità vettoriali che tramite vettori (prodotti vettoriali).

Una rappresentazione dei momenti tramite vettori viene inoltre fatta nel successivo n. 7, deducendola dall'attuale rappresentazione tramite tensori emisimmetrici. Viceversa, dalla rappresentazione tramite vettori si può dedurre la rappresentazione tramite tensori emisimmetrici e risulta quindi evidente il significato da attribuire a $M^{i'j'}, q'^{i'j'}, \ldots (M^{i'+1\, i'+2} = |x^{h'}_{\alpha'}|\, M_{i'}, \ldots$. Cfr. (7.2), ...).

sità in $C'^3$, si supponga che le forze di massa agenti sull'elemento di volume $dv'$ di $C'^3$ siano riducibili a una forza $\mu' g^{*i'} dv'$ applicata a $dv'$ e a una coppia di momento $\mu' M^{i'j'} dv'$ $(M^{i'j'} = - M^{j'i'})$. Analogamente, si supponga che le forze esterne agenti sull'elemento di superficie $d\sigma'$ di $C'^2$ siano riducibili alla forza $f'^{i'} d\sigma'$ applicata a $d\sigma'$ e alla coppia di momento $q'^{i'j'} d\sigma'$ $(q'^{i'j'} = - q'^{j'i'})$.

Considerato un qualsiasi elemento di superficie orientato [18] $d\sigma'$ interno a $C'^3$ e indicato con $\nu'^{i'}$ il versore della normale alla sua faccia positiva, si deve ritenere, in base alle suesposte ipotesi, che le forze di contatto esercitate dagli elementi del continuo aderenti alla sua faccia negativa su quelli aderenti alla sua faccia positiva siano riducibili a una forza $T^{i'}_{(\nu')} d\sigma'$ applicata a $d\sigma'$ e a una coppia di momento $L^{i'j'}_{(\nu')} d\sigma'$ $(L^{i'j'}_{(\nu')} = - L^{j'i'}_{(\nu')})$. Inoltre, per evidenti motivi di continuità, segue che, su $C'^2$, sussistono le

$$T^{i'}_{(\nu')} = f'^{i'}, \quad L^{i'j'}_{(\nu')} = q'^{i'j'}, \tag{4.1}$$

qualora si ritenga positiva la faccia interna di $C'^2$.

## 5. Tensore degli sforzi e tensore dei momenti superficiali.

Supposto che il riferimento coincida con il prefissato riferimento cartesiano trirettangolo, le equazioni cardinali della statica applicate a una qualsiasi porzione $c'^3$ di $C'^3$ si scrivono, ritenendo positiva la faccia interna di $c'^2$, contorno di $c'^3$, e tenendo presenti le (4.1),

$$\int_{c'^3} \mu' g^{*\alpha'} dv' + \int_{c'^2} T^{\alpha'}_{(\nu')} d\sigma' = 0, \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} &\int_{c'^3} \mu' [M^{\alpha'\beta'} + (TP')^{\alpha'} g^{*\beta'} - (TP')^{\beta'} g^{*\alpha'}] dv' + \\ &+ \int_{c'^2} [L^{\alpha'\beta'}_{(\nu')} + (TQ')^{\alpha'} T^{\beta'}_{(\nu')} - (TQ')^{\beta'} T^{\alpha'}_{(\nu')}] d\sigma' = 0, \end{aligned} \tag{5.2}$$

ove $T$ è un arbitrario punto fisso di $E^3$, $P'$ un punto variabile in $c'^3$, $Q'$ un punto variabile su $c'^2$ [19].

---

[18] Nel senso che su esso sia stata scelta una faccia come positiva.

[19] Il significato di $(TP')^{\alpha'}, \ldots,$ è ovvio.

Col procedimento del *tetraedro di* CAUCHY[20] applicato alla (5.2) si deduce che in ogni punto $P'$ di $C'^3$ devono sussistere le

$$\begin{aligned}(5.3)\qquad & L^{\alpha'\beta'}_{(\nu')} + (TP')^{\alpha'}\, T^{\beta'}_{(\nu')} - (TP')^{\beta'}\, T^{\alpha'}_{(\nu')} = \\ & = L^{\alpha'\beta'\gamma'}\,\nu'_{\gamma'} + [(TP')^{\alpha'}\, T^{\beta'\gamma'} - (TP')^{\beta'}\, T^{\alpha'\gamma'}]\nu'_{\gamma'}\,,\end{aligned}$$

ove ho posto

$$(5.4)\qquad T^{\alpha'}_{(\eta'_{\gamma'})} = T^{\alpha'\gamma'}, \quad L^{\alpha'\beta'}_{(\eta'_{\gamma'})} = L^{\alpha'\beta'\gamma'},$$

$\boldsymbol{\eta}'_{\gamma'}$ essendo i tre versori, uscenti da $P'$, paralleli e concordi ai versori della prefissata terna cartesiana trirettangola.

Dalle (5.3) seguono immediatamente le

$$(5.5)\qquad \begin{cases} T^{\alpha'}_{(\nu')} = T^{\alpha'\beta'}\,\nu'_{\beta'}\,, \\ L^{\alpha'\beta'}_{(\nu')} = L^{\alpha'\beta'\gamma'}\,\nu_{\gamma'} \end{cases}$$

e da queste, in base a un noto criterio di tensorialità, segue che le $T^{\alpha'\beta'}$, $L^{\alpha'\beta'\gamma'}$ sono componenti di due tensori, il *tensore degli sforzi* e il *tensore dei momenti superficiali.*

Qualora il riferimento sia arbitrario, le (5.5) si scrivono

$$(5.6)\qquad \begin{cases} T^{i'}_{(\gamma')} = T^{i'j'}\,\nu'_{j'}\,, \\ L^{i'j'}_{(\nu')} = L^{i'j'l'}\,\nu'_{l'} \end{cases}$$

e da queste e le (4.1) seguono le

$$(5.7)\qquad \begin{cases} f'^{i'} = T^{i'j'}\,\nu'_{j'}\,, \\ q'^{i'j'} = L^{i'j'l'}\,\nu'_{l'}\,, \end{cases}$$

esprimenti le condizioni al contorno.

## 6. Equazioni generali.

Dalle (5.1), ricordando le (5.7) e applicando il lemma di GREEN al secondo integrale, si deducono, per l'arbitrarietà di $c'^3$, le

$$(6.1)\qquad \mu'\, g^{*\alpha'} = \partial_{\beta'}\, T^{\alpha'\beta'}.$$

---

[20] Cfr., ad es., [10], pp 373-375.

Analogamente, dalle (5.2), nelle quali si sostituiscano le (5.7) e si applichi il lemma di GREEN al secondo integrale, tenute presenti le (6.1) e osservato che risulta ([21])

$$\partial_{\beta'} (TP')^{\alpha'} = \delta^{\alpha'}_{\beta'} ,$$

si ottengono, per l'arbitrarietà di $c'^3$, le

$$\mu' M^{\alpha'\beta'} + T^{\alpha'\beta'} - T^{\beta'\alpha'} = \partial_{\gamma'} L^{\alpha'\beta'\gamma'}$$

e queste, posto ([22])

$$R^{\alpha'\beta'} = \frac{1}{2} (T^{\alpha'\beta'} - T^{\beta'\alpha'}), \tag{6.2}$$

si posssono in definitiva scrivere ([23])

$$\mu' M^{\alpha'\beta'} + 2R^{\alpha'\beta'} = \partial_{\gamma'} L^{\alpha'\beta'\gamma'}. \tag{6.3}$$

Le (6.1), (6.3) rappresentano, nelle attuali ipotesi, le *equazioni generali in forma euleriana e in coordinate cartesiane* ([24]). Le condizioni al contorno sono espresse dalle (5.7), nelle quali si sostituiscono agli indici latini gli indici greci.

---

([21]) Ho indicato con $\delta^{\alpha'}_{\beta'}$ il simbolo di KRONECKER.

([22]) $R^{\alpha'\beta'}$ è quindi la parte emisimmetrica del tensore $T^{\alpha'\beta'}$.

([23]) La deduzione delle (6.3) non differisce sostanzialmente da quella svolta in [4], 9 e qua viene riportata unicamente per comodità di lettura.

([24]) Nell'ipotesi in cui risulti

$$M^{\alpha'\beta'} = 0, \quad q^{\alpha'\beta'} = 0,$$

le quali implicano necessariamente le

$$L^{\alpha'\beta'\gamma'} = 0,$$

le (6.2) si riducono alle

$$R^{\alpha'\beta'} = 0,$$

esprimenti la simmetria del tensore degli sforzi, mentre le (6.1), (5.7) si riducono alle note equazioni di CAUCHY.

* * *

Stante il carattere tensoriale delle (6.1), (6.3), le *equazioni in forma euleriana e in coordinate generali* sono di deduzione immediata e sono date dalle

$$\left\{\begin{array}{l}\mu' g^{*i'} = T^{i'j'}{}_{;j'} ,\\ \mu' M^{i'j'} + 2R^{i'j'} = L^{i'j'l'}{}_{;l'} ,\end{array}\right. \tag{6.4}$$

con le condizioni al contorno espresse dalle (5.7).

* * *

Le (6.4), ricordando le (2.7), si possono scrivere (25)

$$\left\{\begin{array}{l}|\, x^{\alpha'}_{\alpha} \,|\, \mu' g^{*i'} = |\, x^{\alpha'}_{\alpha} \,|\, x^{j}_{j'}\, T^{i'j'}{}_{;j} ,\\ |\, x^{\alpha'}_{\alpha} \,|\, (\mu' M^{i'j'} + 2R^{i'j'}) = |\, x^{\alpha'}_{\alpha} \,|\, x^{l}_{l'}\, L^{i'j'l'}{}_{;l}\end{array}\right. \tag{6.5}$$

e da queste, ricordando le (3.4) e posto (26)

$$|\, x^{\alpha'}_{\alpha} \,|\, x^{j}_{j'}\, T^{i'j'} = T^{i'j}, \quad |\, x^{\alpha'}_{\alpha} \,|\, x^{i}_{i'}\, T^{i'j'} = T^{ij'}, \tag{6.6}$$

$$R^{i'j} = \frac{1}{2}(T^{i'j} - T^{ji'}) = |\, x^{\alpha'}_{\alpha} \,|\, x^{j}_{j'}\, R^{i'j'} , \tag{6.7}$$

$$|\, x^{\alpha'}_{\alpha} \,|\, x^{l}_{l'}\, L^{i'j'l'} = L^{i'j'l} , \tag{6.8}$$

si ottengono le

$$\left\{\begin{array}{l}\mu\, g^{*i'} = T^{i'j}{}_{;l} ,\\ \mu\, M^{i'j'} + 2x^{j'}_{j}\, R^{i'j} = L^{i'j'l}{}_{;l} ,\end{array}\right. \tag{6.9}$$

---

(25) Nell'ipotesi in cui il riferimento sia cartesiano trirettangolo, le (6.5) si possono scrivere

$$\left\{\begin{array}{l}\mu\, g^{*\alpha'} = X^{\beta}_{\beta'}\, T^{\alpha'\beta'}{}_{;\beta} ,\\ \mu\, M^{\alpha'\beta'} + 2 \left|\, x^{\gamma'}_{\gamma} \,\right|\, R^{\alpha'\beta'} = X^{\gamma}_{\gamma'}\, L^{\alpha'\beta'\gamma'}{}_{;\gamma} ,\end{array}\right. \tag{a}$$

con $\mu$ densità della configurazione di riferimento e $X^{\alpha}_{\alpha'} = \left|\, x^{\beta'}_{\beta} \,\right|\, x^{\alpha}_{\alpha'}$ complemento algebrico di $x^{\alpha'}_{\alpha}$ nella matrice $\left\| x^{\alpha'}_{\alpha} \right\|$.

Le (a), nell'ipotesi della nota (24), si riducono alle equazioni di BOUSSINESQ. Cfr. [1]; [9], II, 3.

(26) Nel caso simmetrico risulta $T^{i'j} = T^{ji'}$ e detto tensore si identifica col tensore di PIOLA-KIRCHHOFF. Cfr. [14], 210; [11], p. 74.

con

$$(6.10) \qquad \mu = | x_{\alpha}^{\alpha'} | \mu',$$

densità della configurazione di riferimento.

Analogamente, indicato con $\delta_\sigma$ il coefficiente di dilatazione areale nella corrispondenza tra la configurazione $C^3$ e la configurazione $C'^3$ e posto (27)

$$(6.11) \qquad \begin{cases} f^{i'} = (\delta_\sigma + 1) f'^{i'}, \\ q^{i'j'} = (\delta_\sigma + 1) q'^{i'j'}, \end{cases}$$

le (5.7), con le posizioni (6.6), (6.8), si scrivono

$$(6.12) \qquad \begin{cases} f^{i'} = T^{i'j} \nu_j, \\ q^{i'j'} = L^{i'j'l} \nu_l, \end{cases}$$

con (28)

$$(6.13) \qquad \nu_j = (\delta_\sigma + 1) | x_{\alpha'}^{\alpha} | x_j^{j'} \nu'_{j'}.$$

Le (6.9), con le condizioni al contorno (6.12), rappresentano una *prima forma per le equazioni generali in forma lagrangiana e in coordinate generali* (29).

* * *

Posto (30)

$$(6.14) \qquad T^{ij} = x_{i'}^{i} T^{i'j},$$

$$(6.15) \qquad R^{ij} = \frac{1}{2}(T^{ij} - T^{ji}) = x_{i'}^{i} R^{i'j},$$

$$(6.16) \qquad L^{ijl} = x_{i'}^{i} x_{j'}^{j} L^{i'j'l},$$

(27) Risulta pertanto

$$f^{i'} d\sigma = f'^{i'} d\sigma', \quad q^{i'j'} d\sigma = q'^{i'j'} d\sigma',$$

ove con $d\sigma$ ho indicato l'immagine di $d\sigma'$ su $C^2$.

(28) Il versore di componenti covarianti $\nu_j$ è il vettore della normale interna a $C^2$. Cfr. [4], 5.

(29) Nell'ipotesi della nota (24), le (6.9), (6.12) si riducono alle equazioni di Piola-Kirchhoff in coordinate generali, nella forma ad esse assegnata da Truesdell e Toupin. Cfr. [14], 210. Per le equazioni di Piola-Kirchhoff in coordinate cartesiane, cfr. [8]; [7]; [9], II, 3.

(30) Stanti le seconde delle (6.6), risulta pure

$$T^{ij} = x_{j'}^{j} T^{ij'}.$$

sicchè, ricordando le (6.6), (6.7), (6.8), risulta

$$T^{ij} = \mid x_a^{\alpha'} \mid x_{i'}^i x_{j'}^j T^{i'j'}, \tag{6.14'}$$

$$R^{ij} = \mid x_a^{\alpha'} \mid x_{i'}^i x_{j'}^j R^{i'j'}, \tag{6.15'}$$

$$L^{ijl} = \mid x_a^{\alpha'} \mid x_{i'}^i x_{j'}^j x_{l'}^l L^{i'j'l'}, \tag{6.16'}$$

le (6.9) si possono scrivere

$$\begin{cases} \mu g^{*i'} = (x_i^{i'} T^{ij})_{;j}, \\ \mu M^{i'j'} + 2 x_i^{i'} x_j^{j'} R^{ij} = (x_i^{i'} x_j^{j'} L^{ijl})_{;l}, \end{cases} \tag{6.17}$$

o anche

$$\begin{cases} \mu g^{*i'} = (x_i^{i'} T^{ij})_{;j}, \\ \mu M^{i'j'} + (x_i^{i'} x_j^{j'} - x_i^{j'} x_j^{i'}) T^{ij} = (x_i^{i'} x_j^{j'} L^{ijl})_{;l}. \end{cases} \tag{6.17'}$$

Analogamente, le (6.12) si scrivono

$$\begin{cases} f^{i'} = x_i^{i'} T^{ij} \nu_j, \\ q^{i'j'} = x_i^{i'} x_j^{j'} L^{ijl} \nu_l. \end{cases} \tag{6.18}$$

Le (6.17), o le (6.17′), con le condizioni al contorno (6.18), rappresentano una *seconda forma per le equazioni generali in forma lagrangiana e in coordinate generali* (31).

## 7. Intervento del tensore $\eta_{i'j'l'}$.

Introdotti i simboli $\delta_{i'j'l'}^{1\,2\,3}$ con la convenzione che essi, in ogni riferimento, valgano zero quando i tre indici $i', j', l'$ non siano tutti distinti, $\pm 1$ nel caso restante, valendo il segno positivo o negativo a seconda che la disposizione $i', j', l'$ è di classe pari o dispari rispetto alla fondamentale 1, 2, 3, è immediato verificare che essi costituiscono le componenti di una densità emisimmetrica di peso $-1$ e di ordine 3. Di conseguenza, risultando $\mid x_{h'}^{\alpha'} \mid$

(31) Nell'ipotesi della nota (24), le (6.17), (6.18) si riducono alle equazioni di PIOLA in coordinate generali, nella forma ad esse assegnata da TRUESDELL e TOUPIN. Cfr. [14], 210. Per le equazioni di PIOLA in coordinate cartesiane, cfr. [8]; [9], II, 4.

una densità scalare di peso 1, segue che le quantità ([32])

$$\eta_{i'j'l'} = | x^{\alpha'}_{h'} | \, \delta^{1\,2\,3}_{i'j'l'} \tag{7.1}$$

sono le componenti di un tensore emisimmetrico del terzo ordine.

Ciò premesso, fatte le posizioni ([33])

$$M_{i'} = \frac{1}{2} \eta_{i'j'l'} M^{j'l'}, \quad q'_{i'} = \frac{1}{2} \eta_{i'j'l'} q'^{j'l'}, \tag{7.2}$$

$$R_{i'} = \frac{1}{2} \eta_{i'j'l'} R^{j'l'} = \frac{1}{2} | x^{\alpha'}_{h'} | (T^{i'+1\,i'+2} - T^{i'+2\,i'+1}), \tag{7.3}$$

$$L_{i'}^{j'} = \frac{1}{2} \eta_{i'h'k'} L^{h'k'j'}, \tag{7.4}$$

le seconde delle (6.4), (5.7) si possono scrivere ([34])

$$\mu' M_{i'} + 2R_{i'} = L_{i'}^{j'}{}_{;j'}, \tag{7.5}$$

$$q'_{i'} = L_{i'}^{j'} \nu'_{j'}. \tag{7.6}$$

---

([32]) Ricordando le (1.3′), segue che $\left| x^{\alpha'}_{h'} \right|$ differisce al più per il segno da $\sqrt{|g_{i'j'}|}$ ($|g_{i'j'}| = \mathrm{Det} \| g_{i'j'} \|$). Supposto il riferimento curvilineo congruente al prefissato sistema di coordinate cartesiane trirettangole, ossia tale che risulti $\left| x^{\alpha'}_{h'} \right| > 0$, alle (7.1) si possono sostituire le

$$\eta_{i'j'l'} = \sqrt{|g_{i'j'}|} \, \delta^{1\,2\,3}_{i'\,j'\,l'},$$

nelle quali non v'è più traccia del prefissato riferimento cartesiano. In altri termini, il tensore definito dalle (7.1) si identifica con il cosiddetto *tensore di* Ricci in quei riferimenti congruenti al prefissato riferimento cartesiano trirettangolo. Esso, a differenza di quest'ultimo che ha carattere tensoriale soltanto rispetto a sistemi di riferimento tra loro congruenti, è un effettivo tensore rispetto a *ogni* riferimento.

([33]) Naturalmente, se l'indice $i' + l$ supera 3 esso va diminuito di 3.

([34]) Alle (7.5), (7.6) si può anche assegnare la forma

$$\begin{cases} \mu' M^{i'} + 2R^{i'} = L^{i'j'}{}_{;j'} \\ q'^{i'} = L^{i'j'} \nu'_{j'} \end{cases} \tag{a}$$

con

$$M^{i'} = g^{i'j'} M_{j'}, \quad R^{i'} = g^{i'j'} R_{j'}, \ldots,$$

Analogamente, posto

$$L_{i'}^{j} = |x_a^{\alpha'}|\, x_{j'}^{j}\, L_{i'}^{j'} = \frac{1}{2}\,\eta_{i'h'k'}\, L^{h'k'j}, \tag{7.7}$$

$$q_{i'} = (\delta_\sigma + 1)\, q'_{i'} = \frac{1}{2}\,\eta_{i'j'l'}\, q^{j'l'} \tag{7.8}$$

e ricordate le (7.3), (6.7), le seconde delle (6.9), (6.12) si possono scrivere

$$\mu M_{i'} + |x_{h'}^{\alpha'}|\, x_j^{i'+2}\,(T^{i'+1\,j} - T^{j\,i'+1}) = L_{i'\,;\,j}^{\;j}, \tag{7.9}$$

$$q_{i'} = L_{i'}^{\;j}\, \nu_j\,. \tag{7.10}$$

Infine, ricordate le (6.14) e posto

$$L_i^{\;j} = x_i^{i'}\, L_{i'}^{\;j}, \tag{7.11}$$

alle (7.9), (7.10) si può assegnare la forma [35]

$$\mu M_{i'} + |x_{h'}^{\alpha'}|\,(x_i^{i'+1}\, x_j^{i'+2} - x_i^{i'+2}\, x_j^{i'+1})\, T^{ij} = (x_{i'}^{i}\, L_i^{\;j})_{;\,j}, \tag{7.12}$$

$$q_{i'} = x_{i'}^{i}\, L_i^{\;j}\, \nu_j\,. \tag{7.13}$$

---

$g^{i'j'}$ essendo l'elemento inverso di $g_{i'j'}$ nella matrice $\|g_{i'j'}\|$. Seguendo dalle (7.3) le

$$R^{i'} = \frac{1}{2}\,\eta^{i'j'l'}\, R_{j'l'}$$

con

$$\eta^{i'j'l'} = g^{i'h'}\, g^{j'k'}\, g^{l'p'}\, \eta_{h'k'p'} = |x_{\alpha'}^{h'}|\, \delta_{1\,2\,3}^{i'\,j'\,l'},$$

l'espressione esplicita di $R^{i'}$ è data da

$$R^{i'} = \frac{1}{2}\,|x_{\alpha'}^{h'}|\,(T_{i'+1\,i'+2} - T_{i'+2\,i'+1}).$$

Dalle (a), con posizioni analoghe alle (6.6), (7.7), ..., si possono dedurre altre forme per le equazioni generali.

(35) Le (7.12), (7.13) vanno associate alle prime delle (6.17), (6.18).

* * *

Posto (36)

$$g'_{hk} = \sum_{1}^{3}{}_{\alpha'}\, x_h^{\alpha'}\, x_k^{\alpha'}\,, \tag{7.14}$$

$$L'^{hj} = g'^{ih}\, L_i^j, \tag{7.15}$$

si hanno le (37)

$$g^{i'j'}\, x_{j'}^i\, L_i^j = x_i^{i'}\, L'^{ij} \tag{7.16}$$

e pertanto le (7.12), (7.13) si possono anche scrivere (38)

$$\mu M^{i'} + |\, x_{h'}^{\alpha'} \,| \sum_{1}^{3}{}_{j'}\, g^{i'j'} \left(x_i^{j'+1}\, x_j^{j'+2} - x_i^{j'+2}\, x_j^{j'+1}\right) T^{ij} = \left(x_i^{i'}\, L'^{ij}\right)_{:j}\,, \tag{7.17}$$

$$q^{i'} = x_i^{i'}\, L'^{ij}\, \nu_j\,. \tag{7.18}$$

Intendendo

$$L^{i'j'} = g^{i'h'}\, L_{h'}^{j'}$$

e ricordate le (7.11), (7.7), dalle (7.15) segue che il legame fra $L^{i'j'}$ e $L'^{ij}$ è espresso dalle

$$L'^{ij} = |\, x_\alpha^{\alpha'} \,|\, x_{i'}^i\, x_{j'}^j\, L^{i'j'}, \tag{7.19}$$

analoghe alle (6.14').

(36) Le posizioni (7.15), (7.16),... corrispondono ad interpretare le coordinate della configurazione di riferimento $C^3$ come particolari coordinate della configurazione attuale $C'^3$. Cfr., ad es., [4], 4.

(37) Risulta, ricordando le (1.3'), (7.14),

$$g^{i'j'} = \sum_{1}^{3}{}_{\alpha'}\, x_{\alpha'}^{i'}\, x_{\alpha'}^{j'}\,, \qquad g'^{ij} = \sum_{1}^{3}{}_{\alpha'}\, x_{\alpha'}^{i}\, x_{\alpha'}^{j}\,.$$

Naturalmente, nelle (7.17) risulta ancora sottinteso il simbolo di sommatoria rispetto agli indici ripetuti in alto e in basso. E così nelle seconde delle (7.23), (7.27).

(38) Ovviamente, è da intendersi

$$M^{i'} = g^{i'j'}\, M_{j'}\,, \qquad q^{i'} = g^{i'j'}\, q_{j'}\,.$$

Le (7.17), (7.18) vanno associate alle prime delle (6.17), (6.18). Nell'ipotesi in cui il riferimento coincida con il prefissato riferimento cartesiano trirettangolo, esse si riducono alle equazioni stabilite in [5], I, 3.

* * *

Posto [39]

$$g^{*\alpha} = \delta^{\alpha}_{\alpha'}\, g^{*\alpha'}\,, \qquad M^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{\alpha'}\, M^{\alpha'}, \tag{7.20}$$

$$g^{*i} = g^{i}_{i'}\, g^{*i'}\,, \qquad M^{i} = g^{i}_{i'}\, M^{i'}\,, \tag{7.21}$$

con [40]

$$g^{i}_{i'} = x_{\alpha}^{\ i}\, \delta^{\alpha}_{\alpha'}\, x^{\alpha'}_{i'}\,, \tag{7.22}$$

le prime delle (6.17) e le (7.17) si possono scrivere

$$\left\{\begin{aligned} &\mu g^{*i} = (g^{i}_{i'}\, x^{i'}_{l}\, T^{lj})_{;j}\,,\\ &\mu M^{i} + |\, x^{\alpha'}_{h'} \,|\, \sum_{1}^{3}{}_{j'}\, g^{i}_{i'}\, g^{i'j'}\,(x^{j'+1}_{j}\, x^{j'+2}_{l} - x^{j'+2}_{j}\, x^{j'+1}_{l})\, T^{jl} = (g^{i}_{i'}\, x^{i'}_{l}\, L'^{lj})_{;j} \end{aligned}\right. \tag{7.23}$$

in quanto, ricordando le (2.6), (7.22), (3.3), risulta

$$g^{i}_{i';\,j} = 0. \tag{7.24}$$

Introdotto il vettore spostamento [41]

$$\mathbf{s} = P' - P$$

con $P$ corrispondente in $C^3$ del punto $P'$ di $C'^3$, si ha

$$g^{i}_{i'}\, x^{i'}_{l}\, T^{lj} = T^{ij} + T^{lj}\, x^{i}_{\alpha}\,(\delta^{\alpha}_{\alpha'}\, x^{\alpha'}_{l} - x^{\alpha}_{l}) = T^{ij} + T^{lj}\, x^{i}_{\alpha}\, \partial_{l}\, s^{\alpha},$$

---

[39] Tali posizioni corrispondono a supporre $g^{*i'}$, $M^{i'}$ applicati, invece che nei punti $P'$ della configurazione attuale $C'^3$, nei corrispondenti punti $P$ della configurazione di riferimento $C^3$.

[40] Ottenendosi dalle (7.22)

$$g^{\alpha}_{\alpha'} = \delta^{\alpha}_{\alpha'}\,,$$

dalle stesse segue che le funzioni $g^{i}_{i'}$ costituiscono le componenti di un tensore doppio.

[41] Risulta pertanto, con ovvio significato dei simboli,

$$s^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{\alpha'}\, x^{\alpha'} - x^{\alpha}\,, \qquad s^{\alpha'} = x^{\alpha'} - \delta^{\alpha'}_{\alpha}\, x^{\alpha}\,.$$

Cfr. anche la nota (39).

da cui segue, ricordando le (3.3),

$$g^i_{i'}\, x^{i'}_l\, T^{lj} = T^{ij} + T^{lj} s^i_{\ ;l}. \tag{7.25}$$

In modo analogo si ottiene

$$g^i_{i'}\, x^{i'}_l\, L'^{lj} = L'^{ij} + L'^{lj} s^i_{\ ;l} \tag{7.26}$$

e pertanto le (7.23) si possono scrivere

$$\begin{cases} \mu\, g^{*i} = (T^{ij} + T^{lj} s^i_{\ ;l})_{;j}, \\ \mu\, M^i + |\, x^{\alpha'}_{h'} \,|\, \sum_1^3{}_{j'}\, g^i_{i'}\, g^{i'j'} (x^{j'+1}_j x^{j'+2}_l - x^{j'+2}_j x^{j'+1}_l)\, T^{jl} = (L'^{ij} + L'^{lj} s^i_{\ ;l})_{;j}. \end{cases} \tag{7.27}$$

Infine, posto, analogamente alle (7.21),

$$f^i = g^i_{i'} f^{i'}, \qquad q^i = g^i_{i'} q^{i'} \tag{7.28}$$

e ricordate le (7.25), (7.26), dalle prime delle (6.18) e dalle (7.18) si ottengono, come condizioni al contorno per le (7.27), le (42)

$$\begin{cases} f^i = (T^{ij} + T^{lj} s^i_{\ ;l})\, \nu_j, \\ q^i = (L'^{ij} + L'^{lj} s^i_{\ ;l})\, \nu_j. \end{cases} \tag{7.29}$$

## 8. Lavori specifici delle forze interne di contatto.

Il lavoro specifico delle forze interne di contatto relativo alla configurazione $C'^3$, nel passaggio da detta configurazione a un'altra infinitamente prossima $C''^3$, risulta espresso dalla

$$\delta l'^{(i)} = S^{i'j'} \delta e_{i'j'} + L^{i'j'l'} (\delta r_{i'j'})_{;l'}, \tag{8.1}$$

con $S^{i'j'}$ parte simmetrica del tensore $T^{i'j'}$, $\delta e_{i'j'}$ caratteristiche di deformazione, $\delta r_{i'j'}$ tensore emisimmetrico rappresentante la rotazione locale che gli elementi del sistema continuo subiscono nel passaggio da $C'^3$ a $C''^3$ (43).

(42) Nell'ipotesi della nota (24), le (7.27), (7.29) si riducono alle equazioni di TOLOTTI. Cfr. [12]; [13], II, § 3, n. 3.

(43) La deduzione di (8.1) è in tutto analoga a quella contenuta in [4], 16.

Il lavoro specifico delle forze interne di contatto relativo alla configurazione $C^3$, nel passaggio da $C'^3$ a $C''^3$, risulta espresso dalla ([44])

$$\delta l^{(i)} = \frac{1}{2} S^{ij} \delta g'_{ij} + L^{ijl} (\delta r_{ij})'_{;l}, \tag{8.2}$$

con ([45])

$$\delta r_{ij} = x_i^{i'} x_j^{j'} \delta r_{i'j'} \tag{8.3}$$

e $S^{ij}$ parte simmetrica di $T^{ij}$. La (8.2) segue dalla ([46])

$$\delta l^{(i)} = | x_\alpha^{\alpha'} | \, \delta l'^{(i)}$$

e dalla ([47])

$$\delta e_{ij} = \frac{1}{2} \delta g'_{ij} . \tag{8.4}$$

Qualora si faccia ricorso al tensore $L_{i'}{}^{j'}$, la (8.1) si scrive

$$\delta l'^{(l)} = S^{i'j'} \delta e_{i'j'} + L_{i'}{}^{j'} (\delta r^{i'})_{:j'}, \tag{8.5}$$

ove è da intendersi ([48])

$$\delta r^{i'} = \eta^{i'j'l'} \delta r_{j'l'} . \tag{8.6}$$

Analogamente, alla (8.2) si può assegnare la forma

$$\delta l^{(i)} = \frac{1}{2} S^{ij} \delta g'_{ij} + L_i{}^j (\delta r'^i)'_{;j}, \tag{8.7}$$

con

$$\delta r'^i = \eta'^{ijl} \delta r_{jl}, \quad (\eta'^{ijl} = | x_{\alpha'}^h | \, \delta_{1\,2\,3}^{i\,j\,l}). \tag{8.8}$$

---

([44]) L'apice che compare in $(\delta r_{ij})'_{;l}$ sta ad indicare che i simboli di CHRISTOFFEL vanno costruiti con i coefficienti $g'_{hk}$, definiti dalle (7.14).

Accanto alla (8.2) si può ottenere un'altra espressione di $\delta l^{(i)}$, nella quale compaiono $T^{i'j}$, $T^{ji'}$, $L^{i'j'l}$, espressione che, per brevità, tralascio di riportare.

([45]) Per le (8.3) vale la stessa osservazione contenuta nella nota (36).

([46]) Cfr. ad es., [4], 17.

([47]) Cfr. [4], 15.

([48]) Per la definizione di $\eta^{i'j'l'}$ si veda la nota (34).

## BIBLIOGRAFIA

[1] J. BOUSSINESQ, *Théorie des ondes liquides périodiques*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences, 1869, t. XX.

[2] J. L. ERICKSEN, *Tensor Fields* (Appendice all'articolo di C. TRUESDELL e R. TOUPIN: *The Classical Field Theories*), Handbuch der Physik, Bd. III/1, Berlin, Springer-Verlag, 1960.

[3] B. FINZI-M. PASTORI, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Bologna, Zanichelli, 1949.

[4] D. GALLETTO, *Sulle equazioni in coordinate generali della statica dei continui con caratteristiche di tensione asimmetriche*, Ann. Univ. di Ferrara, Sez. VII, vol. X, n. 5, (1962), pp. 33-68.

[5] G. GRIOLI, *Elasticità asimmetrica*, Ann. di Mat., s. IV, vol. L (1960), pp. 389-417.

[6] W. GÜNTHER, *Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums*, Abhandl. Braunschw. Wiss. Ges., vol. X (1958), pp. 195-213.

[7] G. KIRCHHOFF, *Über die Gleichungen des Gleichgewichts eines elastischen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verschiebungen seiner Theile*, Sitzgsber. Akad. Wiss., Bd. IX, Wien, 1852, pp. 762-773.

[8] G. PIOLA, *La meccanica de' corpi naturalmente estesi trattata col calcolo delle variazioni*, Op. di diversi autori, Milano, Giusti, 1833, I.

[9] A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Mem. 1a, Ann. di Mat., s. IV, t. XXII (1943), pp. 33-143.

[10] A. SIGNORINI, *Meccanica Razionale con elementi di Statica Grafica*, vol. II, Roma, Perrella, 1954.

[11] A. SIGNORINI, *Lezioni di Fisica Matematica*, anno acc. 1952-53, Roma, Veschi (litografie).

[12] C. TOLOTTI, *Le equazioni lagrangiane della meccanica dei sistemi continui in coordinate generali*, Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. di Napoli, s. IV, vol. XIII (1945), pp. 69-77.

[13] A. TONOLO, *Teoria tensoriale delle deformazioni finite dei corpi solidi*, Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, vol. XIV (1943), pp. 43-117.

[14] C. TRUESDELL-R. TOUPIN, *The Classical Field Theories*, Handbuch der Physik, Bd. III/1, Berlin, Springer-Verlag, 1960.