ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

P. GRISVARD

Espaces intermédiaires entre espaces de Sobolev avec poids

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 17, nº 3 (1963), p. 255-296

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1963_3_17_3_255_0>

ESPACES INTERMEDIAIRES ENTRE ESPACES DE SOBOLEV AVEC POIDS

P. GRISVARD (Nancy)

Introduction.

Soit U un ouvert de R^n et $L^p(U)$ l'espace des fonctions mesurables et de puissance $p^{ième}$ sommable pour la mesure de Lebesgue dans U; on note $W^{1,p}(U)$ le sous-espace des fonctions de $L^p(U)$ dont toutes les dérivées partielles premières au sens des distributions sont dans $L^p(U)$, et $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(U)$ la fermeture de $\mathcal{D}(U)$ (1) dans $W^{1,p}(U)$. Les espaces intermédiaires définis par la méthode des traces (2), entre $W^{1,p}(U)$ (ou $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(U)$) et $L^p(U)$ ont été bien étudiés (c. f. par exemple Lions-Magenes [9], Uspenski [16]). Lorsque l'on fait sur U des hypothèses de régularité raisonnables, le problème se ramène sans difficultés au cas $U = R^n_+$ (3).

Nous nous proposons d'étudier dans ce travail un problème un peu plus général: Soit pour μ réel quelconque $L^p_\mu(R^n_+)$ l'espace des fonctions mesurables et de puissance $p^{ième}$ intégrable pour la mesure $x_n^\mu \, dx_1 \ldots dx_n$ dans R^n_+; on note $W^{1,p}_\mu(R^n_+)$ le sous-espace de $L^p_\mu(R^n_+)$ formé des fonctions dont toutes

Pervenuto in Redazione il 15 Aprile 1963.

(1) $\mathcal{D}(U)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans U.

(2) Cette méthode a été définie dans [7]; nous rappelons brièvement en quoi elle consiste: Si X et Y sont deux espaces de Banach contenus dans un même espace vectoriel topologique séparé $\mathcal{A}$, $T(q, \alpha; X, Y)$ est l'image par l'application $u \longrightarrow u(0)$ de l'espace $W(q, \alpha; X, Y)$ des fonctions $t \longrightarrow u(t)$ définies pour $t \geq 0$ et telles que $t^\alpha u(t)$ soit une fonction mesurable et de puissance $q^{\text{ième}}$ intégrable à valeurs dans X, $t^\alpha u'(t)$ étant mesurable et de puissance $q^{\text{ième}}$ intégrable à valeurs dans Y avec $0 < \alpha + \dfrac{1}{q} < 1$. $T(q, \alpha; X, Y)$ est muni de la topologie image de la topologie quotient de $W(q, \alpha; X, Y)$ par $W_0(q, \alpha; X, Y) = \{u \in W(q, \alpha; X, Y) \mid u(0) = 0\}$.

(3) $R^n_+ = \{x = (x_1, \ldots x_n) \in R^n \mid x_n > 0\}$.

les dérivées partielles d'ordre un au sens des distributions sont dans $L^p_\mu(R^n_+)$, et $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}_\mu(R^n_+)$ la fermeture de $\mathcal{D}(R^n_+)$ dans $W^{1,p}_\mu(R^n_+)$. Nous étudions les espaces intermédiaires entre $W^{1,p}_\mu(R^n_+)$ et $L^p_\mu(R^n_+)$ et entre $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}_\mu(R^n_+)$ et $L^p_\mu(R^n_+)$.

Des espaces tels que $L^p_\mu(R^n_+)$ et $W^{1,p}_\mu(R^n_+)$ interviennent dans la théorie des problèmes aux limites (c. f. par exemple Nečas [12]).

Après avoir étudié au n⁰ 1 quelques propriétés des espaces $W^{1,p}_\mu(R^n_+)$, nous généralisons dans les n^os 2-3-4 les résultats obtenus dans Lions-Magenes [9].

Nous vérifierons en particulier que lorsque $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}_\mu(R^n_+)$ (qui est un sous-espace fermé de $W^{1,p}_\mu(R^n_+)$) est distinct de $W^{1,p}_\mu(R^n_+)$, $T(p, \alpha\,;\, \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_\mu(R^n_+), L^p_\mu(R^n_+))$ n'est pas nécessairement fermé dans $T(p, \alpha\,;\, W^{1,p}_\mu(R^n_+), L^p_\mu(R^n_+))$; plus précisément *pour chaque* μ *il existe une valeur* $\theta(\mu)$ *du paramètre* $\theta = \alpha + \dfrac{1}{p}$, *telle que* $T(p, \alpha\,;\, \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_\mu(R^n_+), L^p_\mu(R^n_+))$ *ne soit pas fermé dans* $T(p, \alpha\,;\, W^{1,p}_\mu(R^n_+), L^p_\mu(R^n_+))$ *pour* $\theta = \theta(\mu)$ *et ce paramètre exceptionnel peut prendre toutes les valeurs comprises entre* 0 *et* 1, *même dans le cas hilbertien* $(p = 2)$ (4).

Au n⁰ 5 nous étudions les propriétés de continuité des fonctions de $T(q, \alpha\,;\, W^{1,p}_\mu(0, +\infty), L^p_\mu(0, +\infty))$, en utilisant des techniques voisines de celles de Il'in [5] ; puis après avoir défini au n⁰ 6 la trace des fonctions de $T(p, \alpha\,;\, W^{1,p}_\mu(R^n_+), L^p_\mu(R^n_+))$ sur l'hyperplan $\{x_n = 0\}$, nous obtenons au n⁰ 7 une généralisation au cas $\mu \neq 0$ et par des méthodes différentes, des résultats de Uspenski [16] (5).

Nous indiquons brièvement au n⁰ 8 que des resultats analogues sont vrais en remplaçant R^n_+ par un ouvert borné « assez régulier ».

Dans les 7 premiers n^os U désignera toujours l'ouvert R^n_+.

n⁰ 1. Propriétés des espaces $W^{1,p}_\mu(U)$.

Précisons pour commencer les définitions de l'introduction : $L^p_\mu(U)$ *désigne l'espace des* (*classes de*) *fonctions* u *mesurables et de puissance* $p^{\text{ième}}$ *in-*

(4) Ces résultats ont été résumés dans une note aux C. R. Acad. Sc. Paris t. 256, 1963, p. 2745-2748.

(5) Ces résultats sont des cas particuliers de théorèmes plus généraux entrant dans le cadre de la théorie des semi-groupes (c. f. Grisvard C. R. Acad. Sc. Paris t. 256, 1963, p. 3226-3228).

tégrable pour la mesure $x_n^\mu\, dx$ *dans* U (6), $(1 < p < +\infty$; μ réel quelconque) *muni de la norme*

$$\left(\int_U | u(x)|^p x_n^\mu \, dx\right)^{1/p} = \| u \|_{L_\mu^p(U)}$$

Les inclusions suivantes faciles à vérifier, $L_\mu^p(U) \subset L_{\text{loc}}^1(U) \subset \mathcal{D}'(U)$, (7) donnent un sens à la définition suivante :

$W_\mu^{1,p}(U)$ *est l'espace des fonctions* u *de* $L_\mu^p(U)$ *telles que* $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L_\mu^p(U)$ *pour* $i = 1, 2, \ldots n$, *muni de la norme*

$$\| u \|_{W_\mu^{1,p}(U)} = \left(\int_U | u(x)|^p x_n^\mu \, dx\right)^{1/p} + \sum_{i=1}^n \left(\int_U \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^p x_n^\mu \, dx\right)^{1/p}.$$

On note $\overset{\circ}{W}{}_\mu^{1,p}(U)$ la fermeture de $\mathcal{D}(U)$ dans $W_\mu^{1,p}(U)$ munie de la topologie induite par $W_\mu^{1,p}(U)$; $L_\mu^p(U)$, $W_\mu^{1,p}(U)$ et $\overset{\circ}{W}{}_\mu^{1,p}(U)$ sont des espaces de Banach si $p \neq 2$ et de Hilbert si $p = 2$. On note ces espaces $L^p(U)$, $W^{1,p}(U)$ et $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(U)$ respectivement, lorsque $\mu = 0$.

Nous utiliserons également les notations suivantes : Si E est un espace de Banach, $L_\mu^p(0, +\infty ; E)$ désigne l'espace des fonctions mesurables et de puissance $p^{ième}$ intégrable pour la mesure $x^\mu\, dx$ dans $(0, +\infty)$ et à valeurs dans E ; c'est un espace de Banach pour la norme $\left(\int_0^{+\infty} \| u(x) \|_E^p x^\mu \, dx\right)^{1/p}$. Enfin $W_\mu^{1,p}(0, +\infty ; E)$ est l'espace des fonctions $u \in L_\mu^p(0, +\infty ; E)$ telles que $u' \in L_\mu^p(0, +\infty ; E)$; c'est un espace de Banach pour la norme $\left(\int_0^{+\infty} \| u(x) \|_E^p x^\mu \, dx\right)^{1/p} + \left(\int_0^{+\infty} \| u'(x) \|_E^p x^\mu \, dx\right)^{1/p}$

Ainsi en appliquant le théorème de Fubini, nous avons :

$$L_\mu^p(U) = L_\mu^p(0, +\infty ; L^p(R^{n-1}))$$

et

$$W_\mu^{1,p}(U) = L_\mu^p(0, +\infty ; W^{1,p}(R^{n-1})) \cap W_\mu^{1,p}(0, +\infty ; L^p(R^{n-1}))$$

---

(6) dx désigne la mesure de Lebesgue dans U.

(7) $L_{\text{loc}}^1(U)$ est l'espace des fonctions mesurables et localement sommables pour la mesure dx dans U ; $\mathcal{D}'(U)$ est l'espace des distributions dans U.

1.*a*) Si $n = 1$ i.e. $U =]0, +\infty[$ et si $u \in W_\mu^{1,p}(U)$ alors $u' \in L^1_{\text{loc}}(U)$ donc u est une fonction continue ; plus précisément nous avons la

PROPOSITION : 1.1 : *Si $\mu < p - 1$ on a $W_\mu^{1,p}(0, +\infty ; E) \subset C^0([0, +\infty[; E)$ (algébriquement et topologiquement) où $C^0([0, +\infty[; E)$ désigne l'espace des fonctions $t \longrightarrow u(t)$ continues de $t \geq 0$ à valeurs dans E* (8).

DÉMONSTRATION : Il résulte de l'inégalité suivante vraie pour toute fonction $v \in L^p_\mu(0, +\infty ; E)$ et $T > 0$

$$\int_0^T \| v(x) \|_E \, dx \leq \left(\int_0^{+\infty} \| v(x) \|_E^p \, x^\mu \, dx \right)^{1/p} \left(\int_0^T x^{-\frac{\mu p'}{p}} dx \right)^{1/p'} \tag{1.1}$$

que l'application $u \longrightarrow (u, u')$ est continue de $W_\mu^{1,p}(0, +\infty ; E)$ dans $L^1_{\text{loc}}([0, +\infty[; E) \times L^1_{\text{loc}}([0, +\infty[; E)$, donc u est même absolûment continue à valeurs dans E (9).
En particulier il résulte de la proposition 1.1 que l'on peut définir $u(0)$ pour $u \in W_\mu^{1,p}(0, +\infty ; E)$, l'application $u \longrightarrow u(0)$ étant continue de $W_\mu^{1,p}(0, +\infty ; E)$ dans E. Si nous appliquons ce résultat au cas $E = L^p(R^{n-1})$ nous obtenons la

PROPOSITION : 1.1' : *Si $U = R^n_+$ (et $dU = R^{n-1}$) et si $\mu < p - 1$, on peut définir $\gamma u = \lim_{x_n \to 0} u(., x_n)$ pour $u \in W_\mu^{1,p}(U)$ comme élément de $L^p(dU)$, l'application $u \longrightarrow \gamma u$ étant linéaire et continue de $W_\mu^{1,p}(U)$ dans $L^p(dU)$.*

1.*b*) Nous allons maintenant caractériser les fonctions, de $\overset{\circ}{W}{}_\mu^{1,p}(U)$, pour cela il nous faut démontrer deux lemmes. Pour ces lemmes nous ne donnons que la démonstration du cas $n = 1$; nous procédons ainsi pour toutes les démonstrations où les méthodes utilisées s'étendent sans difficulté au cas $n > 1$.

LEMME 1.1 : *$\overset{\circ}{W}{}_\mu^{1,p}(U)$ est la fermeture de $W_\mu^{1,p}(U) \cap \mathcal{E}'(U)$ dans $W^{1,p}(U)$* (10)
DÉMONSTRATION : Il suffit de démontrer que toute fonction de $W_\mu^{1,p}(U) \cap \mathcal{E}'(U)$ peut être approchée pour la norme de $W_\mu^{1,p}(U)$ par une suite de fonctions

(8) On munit cet espace de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $[0, +\infty[$.

(9) $L^1_{\text{loc}}([0, +\infty[; E)$ est l'espace des fonctions mesurables et localement sommables pour la mesure dx dans $[0, +\infty[$, à valeurs dans E.

(10) $\mathcal{E}'(U)$ est l'espace des distributions à support compact dans U.

de $\mathcal{D}(U)$. Fixons u dans $W_\mu^{1,p}(U) \cap \mathcal{E}'(U)$ et supposons u nulle hors de l'intervalle (a, b), $(a > 0,\ b < +\infty)$ alors il résulte de l'inégalité

$$\left(\int_0^{+\infty} |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \leq \max_{a \leq x \leq b} x^{-\frac{\mu}{p}} \left(\int_0^{+\infty} |u(x)|^p\, x^\mu\, dx\right)^{1/p}$$

que $u \in W^{1,p}(U)$; dans ces conditions il existe une suite de fonctions de $\mathcal{D}(U)$ soit $\{u_\alpha\}_{\alpha=1,2\dots}$ ayant toutes leur support dans $\left(\frac{a}{2}, 2b\right)$ et telles que $u_\alpha \to u$ dans $W^{1,p}(U)$. Comme nous avons l'inégalité

$$\left(\int_0^{+\infty} |u(x) - u_\alpha(x)|^p\, x^\mu\, dx\right)^{1/p} \leq \max_{\frac{a}{2} \leq x \leq 2b} x^{\frac{\mu}{p}} \left(\int_0^{+\infty} |u(x) - u_\alpha(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$$

ainsi que l'inégalité analogue pour $|u'(x) - u'_\alpha(x)|$, nous voyons que $u_\alpha \to u$ dans $W_\mu^{1,p}(U)$, ce qui achève la démonstration.

LEMME 1.2: *Les fonctions de $W_\mu^{1,p}(U)$ qui sont nulles pour $|x|$ assez grand et bornées, forment un sous-espace dense dans $W_\mu^{1,p}(U)$.*

DÉMONSTRATION (du cas $n = 1$): Soit $a(x)$ une fonction de classe C^1, $\equiv 1$ dans $(0, 1)$, $\equiv 0$ dans $(2, +\infty)$ et telle que $a(x) \in (0, 1)$ pour $x \in (1, 2)$. Nous posons $a_n(x) = a\left(\frac{x}{n}\right)$. Pour $u \in W_\mu^{1,p}(U)$ nous posons également $u_n(x) = a_n(x) \cdot u(x)$ alors $u_n(x)$ est nulle pour $x \geq 2n$ et $u \in W_\mu^{1,p}(U)$; nous allons montrer que $u_n \to u$ dans $W_\mu^{1,p}(U)$, ce qui prouvera déjà que les fonctions nulles pour $|x|$ assez grand forment un sous-espace dense.

Le théorème de Lebesgue montre que

$$u_n \to u \text{ dans } L_\mu^p(U), \qquad a_n u' \to u' \text{ dans } L_\mu^p(U)$$

et par ailleurs nous avons:

$$\left(\int_0^{+\infty} |a'_n(x)\, u(x)|^p\, x^\mu\, dx\right)^{1/p} \leq C^{te}\, \frac{1}{n} \left(\int_0^{+\infty} |u(x)|^p\, x^\mu\, dx\right)^{1/p}$$

donc $a'_n u \to 0$ dans $L_\mu^p(U)$ et $u'_n \to u'$ dans $L_\mu^p(U)$, ce qui, joint au fait que $u_n \to u$ dans $L_\mu^p(U)$ montre que $u_n \to u$ dans $W_\mu^{1,p}(U)$.

A présent pour démontrer le lemme il suffit d'approcher une fonction u de $W_\mu^{1,p}(U)$ nulle pour $|x|$ assez grand par une suite de fonction u_k

nulles pour x assez grand et bornées. Lorsque $\mu < p-1$ nous savons que $u \in \overline{C}^0(U)$ (cf. prop. 1.1) donc u est bornée et on peut poser $u_k = u$. Lorsque $\mu \geq p-1$, on pose

$$u_k(x) = \begin{cases} u(x) & \text{dans} \quad E_k = \{x / |u(x)| \leq k\} \\ +k & \text{dans} \quad F_k = \{x / u(x) > k\} \\ -k & \text{dans} \quad G_k = \{x / u(x) < -k\}. \end{cases}$$

Il résulte de [3] (lemme 3.3 chap. 1) que

$$u_k'(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{dans} \quad E_k \\ 0 & \text{dans} \quad U - E_k. \end{cases}$$

Le théorème de Lebesgue montre que $u_k \to u$ dans $L^p_\mu(U)$ et $u_k' \to u'$ dans $L^p_\mu(U)$, i. e. $u_k \to u$ dans $W^{1,p}_\mu(U)$. Comme u_k est évidemment une fonction de $W^{1,p}_\mu(U)$ bornée et nulle pour $|x|$ grand, le lemme est démontré.

Nous pouvons à présent démontrer le

THÉORÈME 1.1: *Si* $\mu \geq p-1$ *on a* $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}_\mu(U) = W^{1,p}_\mu(U)$ *et si* $\mu > p-1$ *on a* $W^{1,p}_\mu(U) \subset L^p_{\mu-p}(U)$.

DÉMONSTRATION: pour montrer que $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}_\mu(U) = W^{1,p}_\mu(U)$ il suffit, en appliquant les lemmes 1.1 et 1.2 d'approcher une fonction $u \in W^{1,p}_\mu(U)$ bornée et nulle pour $|x|$ assez grand à l'aide d'une suite de fonctions u_ε de $W^{1,p}_\mu(U) \cap \mathcal{E}'(U)$.

Soit φ une fonction de classe C^1 nulle pour $x \leq 1$, $\equiv 1$ pour $x \geq 2$, et telle que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ pour $x \in (1, 2)$, on pose $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, et $u_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon(x)\, u(x)$. Il est clair que $u_\varepsilon \in W^{1,p}_\mu(U) \cap \mathcal{E}'(U)$ et le théorème de Lebesgue montre que

$$u_\varepsilon \to u \text{ dans } L^p_\mu(U), \quad \varphi_\varepsilon u' \to u' \text{ dans } L^p_\mu(U)$$

enfin $\varphi_\varepsilon' u \to 0$ car $\varphi_\varepsilon'(x)\, u(x) = \dfrac{1}{\varepsilon}\, \varphi'\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) u(x)$ et

$$\left(\int_0^{+\infty} |\varphi_\varepsilon'(x)\, u(x)|^p\, x^\mu\, dx\right)^{1/p} = 0\left(\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_\varepsilon^{2\varepsilon} x^\mu\, dx\right]\right) = 0\,(\varepsilon^{\frac{\mu+1}{p}-1})$$

car u est bornée. Ceci montre que $\varphi_\varepsilon' u \to 0$ dans $L^p_\mu(U)$ si $\mu > p-1$.

Si $\mu = p-1$ nous voyons que $\varphi'_\varepsilon u$ demeure dans un borné de $L^p_\mu(U)$ lorsque $\varepsilon \to 0$; comme $L^p_\mu(U)$ est réflexif il existe une suite $\varepsilon_i \to 0$ et une fonction v de $L^p_\mu(U)$ telles que $\varphi'_{\varepsilon_i} u \to v$ dans $L^p_\mu(U)$ faible. Par ailleurs $\varphi'_{\varepsilon_i} u \to 0$ dans $\mathcal{D}'(U)$ donc $v = 0$ et en appliquant le corollaire de la proposition 10 n⁰ 8 chap. 4 § 2 de [2], on voit que $u_{\varepsilon_i} \to u$ dans $W^{1,p}_\mu(U)$ faible.

Nous avons donc montré que $W^{1,p}_\mu(U) \cap \mathcal{E}'(U)$ est (faiblement donc fortement) dense dans $W^{1,p}_\mu(U)$ quand $\mu \geq p-1$. La première assertion du théorème est démontrée.

On suppose maintenant que $\mu > p-1$; si $u \in \mathcal{D}(U)$ nous pouvons écrire

$$u(x) = -\int_x^{+\infty} u'(t)\, dt \quad \text{d'où,} \quad |u(x)| \leq \int_x^{+\infty} |u'(t)|\, dt$$

et il résulte du théorème 330 de [4] ([11]) que l'on a l'inégalité

$$\left(\int_0^{+\infty} |u(x)|^p x^{\mu-p}\, dx\right)^{1/p} \leq \frac{p}{\mu+1-p} \left(\int_0^{+\infty} |u'(x)|^p x^\mu\, dx\right)^{1/p}$$

Comme $\mathcal{D}(U)$ est dense dans $W^{1,p}_\mu(U)$ cette inégalité se prolonge à $W^{1,p}_\mu(U)$, ce qui démontre l'inclusion algébrique et topologique $W^{1,p}_\mu(U) \subset L^p_{\mu-p}(U)$.

Théorème 1.2 : *Si* $\mu < p-1$ *on a* $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}_\mu(U) = W^{1,p}_\mu(U) \cap L^p_{\mu-p}(U)$.

Démonstration : Comme nous pouvons écrire pour $u \in \mathcal{D}(U)$

$$u(x) = \int_0^x u'(t)\, dt \quad \text{nous avons} \quad |u(x)| \leq \int_0^x |u'(t)|\, dt$$

([11]) L'énoncé de ce théorème est le suivant: Si $p > 1$ et $r \neq 1$ et si $F(x)$ est défini par $F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\, dt$ $(r < 1)$ avec f mesurable et positive, $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ $(r > 1)$ alors on a

$$\int_0^{+\infty} x^{-r} F(x)^p\, dx \leq \left(\frac{p}{|r-1|}\right)^p \int_0^{+\infty} x^{p-r} f(x)^p\, dx$$

et il résulte du théorème déjà cité de [4] que l'on a :

$$\left(\int_0^{+\infty} |u(x)|^p x^{\mu-p}\, dx\right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-\mu-1}\left(\int_0^{+\infty} |u'(x)|^p x^{\mu}\, dx\right)^{1/p}$$

cette inégalité se prolonge à $\overset{\circ}{W}{}_{\mu}^{1,p}(U)$, ce qui montre que $\overset{\circ}{W}{}_{\mu}^{1,p}(U) \subset$ $\subset W_{\mu}^{1,p}(U) \cap L_{\mu-p}^{p}(U)$.

Réciproquement on considère une fonction $u \in W_{\mu}^{1,p}(U) \cap L_{\mu-p}^{p}(U)$ le procédé que nous avons utilisé dans la démonstration du lemme 1.2 montre que l'on peut approcher u pour la norme de $W_{\mu}^{1,p}(U)$ par des fonctions de $W_{\mu}^{1,p}(U) \cap L_{\mu-p}^{p}(U)$ nulles pour x assez grand. Dans la suite nous pouvons donc supposer u nulle pour x assez grand.

Soit φ_ε la fonction que nous avons introduite dans la démonstration du théorème 1.1, nous posons $u_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon(x)\, u(x)$. Comme précédemment il résulte du théorème de Lebesgue que

$$u_\varepsilon \longrightarrow u \text{ dans } L_{\mu}^{p}(U) \quad \text{et} \quad \varphi_\varepsilon u' \longrightarrow u' \text{ dans } L_{\mu}^{p}(U)$$

enfin nous avons

$$\left(\int_0^{+\infty} |\varphi_\varepsilon'(x)\, u(x)|^p x^{\mu}\, dx\right)^{1/p} \leq C^{te}\, \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_\varepsilon^{2\varepsilon} |u(x)|^p x^{\mu}\, dx\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq C^{te}\left(\int_\varepsilon^{2\varepsilon} |u(x)|^p x^{\mu-p}\, dx\right)^{1/p} \longrightarrow 0$$

car $u \in L_{\mu-p}^{p}(U)$, donc $u_\varepsilon \longrightarrow u$ dans $W_{\mu}^{1,p}(U)$.

Nous savons donc que $W_{\mu}^{1,p}(U) \cap \mathcal{E}'(U)$ est dense dans $W_{\mu}^{1,p}(U) \cap$ $\cap L_{\mu-p}^{p}(U)$ muni de la topologie induite par $W_{\mu}^{1,p}(U)$, ce qui achève la démonstration d'après le lemme 1.1.

PROPOSITION 1.2 : *Si* $\mu < p-1$, $\overset{\circ}{W}{}_{\mu}^{1,p}(U)$ *est formé des fonctions de* $W_{\mu}^{1,p}(U)$ *telles que* $\gamma u = 0$.

DÉMONSTRATION : $(n = 1)$ Pour $u \in \mathcal{D}(U)$ on a $u(0) = 0$, alors il résulte de la proposition 1.1', que $u(0) = 0$ pour toute $u \in \overset{\circ}{W}{}_{\mu}^{1,p}(U)$.

Réciproquement si $u \in W_{\mu}^{1,p}(U)$ et si $u(0) = 0$, nous pouvons écrire $u(x) = \int_0^x u'(t)\, dt$ donc $|u(x)| \leq \int_0^x |u'(t)|\, dt$ et en appliquant à nouveau le théorème 330 de [4] (cf. page 7, note de bas de page (11)) on obtient $u \in L^p_{\mu-p}(U)$ donc $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\mu}(U)$ grâce au théorème 1.2.

THÉORÈME 1.3: *Pour* $\mu \leq -1$, *on a* $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\mu}(U) = W^{1,p}_{\mu}(U)$ *et par conséquent* $W^{1,p}_{\mu}(U) \subset L^p_{\mu-p}(U)$.

DÉMONSTRATION : $(n = 1)$ Si $u \in W^{1,p}_{\mu}(U)$ on a $u \in C^0(\overline{U})$ en vertu de la proposition 1.1 et

$$\int_0^{+\infty} |u(x)|^p x^{\mu} dx < +\infty.$$

Supposons $u(0) \neq 0$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $x \leq \varepsilon$ on ait $|u(x)| \geq \frac{|u(0)|}{2}$ et il vient

$$\int_0^{+\infty} |u(x)|^p x^{\mu} dx \geq \left(\frac{|u(0)|}{2}\right)^p \int_0^{\varepsilon} x^{\mu} dx$$

ce qui est impossible puisque $\mu \leq -1$; ceci montre que $u(0) = 0$, d'où en appliquant la proposition 1.2 que $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\mu}(U)$. C. Q. F. D.

1. *c*) Nous allons étudier les translations dans $L^p_{\mu}(U)$. Dans cette partie nous utilisons l'identication $L^p_{\mu}(U) = L^p_{\mu}(0, +\infty ; L^p(R^{n-1}))$ (cf. 1. *a*) et les fonctions que nous écrivons sont donc à valeurs vectorielles (dans $L^p(R^{n-1})$).

Pour $u \in L^p_{\mu}(0, +\infty ; L^p(R^{n-1}))$, $t \geq o$ on pose

$$G(t)\, u(x) = u(x + t) \tag{1.2}$$

$$H(t)\, u(x) = \begin{cases} u(x - t) & \text{si } x \geq t \\ 0 & \text{si } x < t. \end{cases} \tag{1.3}$$

Il est facile de vérifier que $G(t)$ est un semi-groupe fortement continu et borné ($\| G(t) \| \leq 1$) dans $L^p_{\mu}(U)$ pour $\mu \geq o$ et que $G(t)$ n'opère pas dans $L^p_{\mu}(U)$ pour $\mu < 0$ par contre $H(t)$ n'opère pas dans $L^p_{\mu}(U)$ pour $\mu > 0$ et est un semi-groupe fortement continu et borné ($\| H(t) \| \leq 1$) dans $L^p_{\mu}(U)$ pour $\mu \leq o$.

PROPOSITION 1.3 :

a) Si $\mu \geq 0$, le générateur infinitésimal A de $G(t)$ est l'operateur défini par $D(A) = W_\mu^{1,p}(0, +\infty; L^p(R^{n-1}))$ (12), $Au = u'$ pour $u \in D(A)$.

b) Si $\mu \leq 0$, le générateur infinitésimal B de $H(t)$ est l'opérateur défini par $D(B) = \{u \in W_\mu^{1,p}(0, +\infty; L^p(R^{n-1})) \mid u(0) = 0\}$, $Bu = -u'$ pour $u \in D(B)$ (13).

DÉMONSTRATION : Nous démontrons par exemple le cas b): Si $u \in D(B)$ il existe $v \in L_\mu^p(U)$ telle que

$$\frac{H(t)u - u}{t} \longrightarrow v \quad \text{dans} \quad L_\mu^p(U), \quad \text{quand} \quad t \longrightarrow 0$$

on a donc nécéssairement $v = -u'$ puisque en appliquant le § 4 chap. 3 de [14] on voit que

$$\frac{H(t)u - u}{t} \longrightarrow -u' \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(0, +\infty; L^p(R^{n-1}))$$

ceci montre que $D(B) \subset W_\mu^{1,p}(0, +\infty; L^p(R^{n-1}))$ et que $Bu = -u'$ pour $u \in D(B)$.

Montrons à présent que $u(0) = 0$ pour $u \in D(B)$: Nous avons $H(t)u \longrightarrow u$ dans $D(B)$ lorsque $t \longrightarrow 0$, d'où en utilisant l'inclusion $D(B) \subset W_\mu^{1,p}(0, +\infty; L^p(R^{n-1}))$ et la proposition 1.1, nous déduisons que $H(t)u \longrightarrow u$ dans $C^0([0, +\infty[; L^p(R^{n-1}))$ et comme $H(t)u$ est nulle à l'origine nous avons $u(0) = 0$.

Réciproquement, il nous faut montrer que si $u \in W_\mu^{1,p}(0, +\infty; L^p(R^{n-1}))$ et $u(0) = 0$ alors $u \in D(B)$: Désignons par $\tilde{u}$ la fonction u prolongée par 0 pour les valeurs négatives de la variable, on peut alors écrire $H(t)u(x) = \tilde{u}(x - t)$, d'où

$$\frac{H(t)u(x) - u(x)}{t} + u'(x) = -\frac{1}{t}\int_0^t [\tilde{u}'(x - s) - \tilde{u}'(x)]\, ds, \qquad \text{p. p.}$$

---

(12) $D(A)$ désigne le domaine de l'opérateur (non borné) A.

(13) Si l'on considére u comme fonction de n variables (à valeurs scalaires) on a

$$Au = \frac{\partial u}{\partial x_n} \quad \text{et} \quad Bu = -\frac{\partial u}{\partial x_u}.$$

puisque $(\widetilde{u})' = (\widetilde{u'})$, on a

$$\frac{H(t)\,u - u}{t} + u' = -\frac{1}{t}\int_0^t [H(s)\,u' - u']\,ds$$

et

$$\left\| \frac{H(t)\,u - u}{t} + u' \right\| \leq \frac{1}{t}\int_0^t \| H(s)\,u' - u' \|\,ds \to 0$$

ceci prouve que $\frac{1}{t}(H(t)\,u - u) \to -u'$ dans $L^p_\mu(U)$, donc que $u \in D(B)$.

C Q F D.

Le résultat suivant est maintenant immédiat:

PROPOSITION 1.3′:

a) Si $\mu \geq 0$: $W^{1,p}_\mu(U)$ *est le domaine commun aux générateurs infinitésimaux des n semi-groupes suivants (qui sont bornés et deux à deux commutatifs) :*

$$G_i(t)\,u(x) = u(x_1, \dots x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots x_n) \tag{1.2′}$$

b) *Si* $\mu \leq 0$: $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}_\mu(U)$ *est le domaine commun aux générateurs infinitésimaux des n semi-groupes suivants (qui sont bornés et deux à deux commutatifs) :*

$$H_i(t)\,u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i - t, x_{i+1}, \dots x_n) \text{ pour } i = 1, 2, \dots n-1$$

$$H_n(t)\,u(x) = \begin{cases} u(x_1, \dots x_{n-1}, x_n - t) & \text{si } x_n \geq t \\ 0 & \text{si } x_n < t \end{cases} \tag{1.3′}$$

(la démonstration utilise la proposition 1.3 et les propriétés classiques des translations dans $L^p(R^{n-1})$).

1.*d*) Pour terminer nous montrons le

THÉORÈME 1.4: *Si* $-1 < \mu < p - 1$, $\mathcal{D}(\overline{U})$ *est dense dans* $W^{1,p}_\mu(U)$.

DÉMONSTRATION :

(*a*) *cas* $\mu \geq 0$: Nous notons $W_\mu^{\infty, p}(U)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables dans U dont toutes les dérivées sont dans $L_\mu^p(U)$; il est clair que

$$W_\mu^{\infty, p}(U) = \bigcap_{\substack{k \geq 0 \\ i_1, \dots i_k \in \{1, 2 \dots n\}}} D(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \dots A_{i_k}) \, ({}^{14})$$

où A_i désigne le générateur infinitésimal de $G_i(t)$, pour $i = 1, 2, \dots n$; et il est bien connu que $W_\mu^{\infty, p}(U)$ est dense dans $\bigcap_{1 \leq i \leq n} D(A_i) = W_\mu^{1, p}(U)$. Il est facile de vérifier que les fonctions de $W_\mu^{\infty, p}(U)$ sont indéfiniment différentiables dans $\overline{U}$ et que pour $u \in W_\mu^{\infty, p}(U)$ la suite des fonctions $\varphi_k u$, où φ_k est une fonction de $\mathcal{D}(\overline{U})$, $\equiv 1$ dans la boule de rayon $k - 1$, $\equiv 0$ hors de la boule de rayon k, converge vers u dans $W_\mu^{1, p}(U)$ (grace au théorème de Lebesgue); comme $\varphi_k u \in \mathcal{D}(\overline{U})$ nous avons montré que $\mathcal{D}(\overline{U})$. est dense dans $W_\mu^{1, p}(U)$.

(*b*) *cas* $\mu \leq 0$: Nous fixons $u \in W_\mu^{1, p}(U)$, alors en régularisant par rapport aux seules variables $x_1, \dots x_{n-1}$, nous approchons u à l'aide d'une suite de fonctions de $W_\mu^{1, p}(0, +\infty\,; W^{1, p}(R^{n-1}))$ (15). Pour la suite nous pouvons donc supposer que $u \in W_\mu^{1, p}(0, +\infty\,; W^{1, p}(R^{n-1}))$ et en conséquence (cf. prop. 1.1) nous avons $\gamma u = u(0) \in W^{1, p}(R^{n-1})$).

Introduisons $\varphi \in \mathcal{D}([0, +\infty[)$ telle que $\varphi(0) = 1$ et posons

$$v(x) = u(x) - u(0)\, \varphi(x) = u(x) - w(x)$$

---

(14) $D(A_{i_1} \dots A_{i_k}) = \{u \in D(A_{i_k}) \mid A_{i_k} u \in D(A_{i_{k-1}}) \dots A_{i_2} \dots A_{i_k} u \in D(A_{i_1})\}$.

(15) Plus précisémént nous approchons u par les fonctions

$$(x_1, \dots x_n) \longrightarrow \int_{R^{n-1}} g_k(t_1, \dots t_{n-1})\, u(x_1 - t_1, \dots x_{n-1} - t_{n-1}, x_n)\, dt_1 \dots dt_{n-1}$$

où g_k est une suite de fonctions $\mathcal{D}(R^{n-1})$ qui sont positives, et telles que

$$\int_{R^{n-1}} g_k(t_1, \dots t_{n-1})\, dt_1, \dots dt_{n-1} = 1,$$

g_k ayant son support dans la boule de rayon $\dfrac{1}{k}$.

nous avons $v(o) = o$ donc $v \in D(B)$ (cf. prop. 1.3) et même $v \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} D(B_i)$, [16] on peut donc approcher v par des fonctions v_k de

$$\bigcap_{\substack{k \geq 0 \\ i_1, \ldots i_k \in \{1, \ldots n\}}} D(B_{i_1} \cdot B_{i_2} \ldots B_{i_k}) \subset W_\mu^{\infty, p}(U) \subset \mathcal{D}(\bar{U}).$$

Ensuite on approche w par une suite $w_k(x) = f_k \cdot \varphi(x)$ ou f_k est une suite de fonctions de $\mathcal{D}(R^{n-1})$ qui converge vers $u(0)$ dans $W^{1,p}(R^{n-1})$, (donc $w_k \in \mathcal{D}(\bar{U})$; comme $u = \lim (v_k + w_k)$, nous avons demontré la densité de $\mathcal{D}(\bar{U})$ dans $W_\mu^{1,p}(U)$ · *CQFD*.

n⁰ 2. Théorème de densité.

Il résulte par exemple de [10] [17] que $\mathcal{D}(U)$ est dense dans $T(q, \alpha; \overset{\circ}{W}{}_\mu^{1,p}(U), L_\mu^p(U))$. Nous allons étudier la densité de $\mathcal{D}(U)$ dans $T(q, \alpha; W_\mu^{1,p}(U), L_\mu^p(U))$ lorsque $-1 < \mu < p - 1$ (pour ces valeurs de μ, $\overset{\circ}{W}{}_\mu^{1,p}(U)$ est distinct de $W_\mu^{1,p}(U)$).

Théorème 2.1: *Pour* $-1 < \mu < p - 1$, $\mathcal{D}(U)$ *est dense dans* $T(q, \alpha; W_\mu^{1,p}(U), L_\mu^p(U))$ *lorsque* $1 - \theta \leq \dfrac{\mu + 1}{p}$ *où* $\theta = \alpha + \dfrac{1}{q}$.

Démonstration: $(n = 1)$ Comme précédemmet il résulte de [10] et du théorème 1.4 que $\mathcal{D}(\bar{U})$ est dense dans $T(q, \alpha; W_\mu^{1,p}(U), L_\mu^p(U))$. Il suffit donc de montrer qu'une fonction $u \in \mathcal{D}(\bar{U})$ peut étre approchée pour la norme de $T(q, \alpha; W_\mu^{1,p}(U), L_\mu^p(U))$ par des fonctions de $\mathcal{D}(U)$.

Soit φ une fonction de classe C^∞, $\equiv 1$ pour $x \geq 1$, $\equiv 0$ pour $x \leq \dfrac{1}{2}$ et telle que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ pour $x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$. Nous posons $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ pour ε positif.

---

(16) B_i désigne le générateur infinitésimal de $H_i(t)$ (cf. prop. 1.3′).

(17) En effet nous avons $T(q, \alpha; \overset{\circ}{W}{}_\mu^{1,p}(U), L_\mu^p(U)) = S(q, \theta, \overset{\circ}{W}{}_\mu^{1,p}; q, \theta - 1, L_\mu^p(U))$ et il est évident que $\overset{\circ}{W}{}_\mu^{1,p}(U)$ est dense dans $S(q, \theta, \overset{\circ}{W}{}_\mu^{1,p}(U); q, \theta - 1, L_\mu^p(U))$.

Fixons $u \in \mathcal{D}(\bar{U})$ et posons $u_\varepsilon = \varphi_\varepsilon u$, il est clair que $u_\varepsilon \in \mathcal{D}(U)$ et lorsque $\varepsilon \longrightarrow o$ nous avons

$$\| u - u_\varepsilon \|_{L^p_\mu(U)} = 0\left(\left[\int_0^\varepsilon x^\mu \, dx\right]^{\frac{1}{p}}\right) = 0\,(\varepsilon^{\frac{\mu+1}{p}})$$

$$\| u - u_\varepsilon \|_{W^{1,p}_\mu(U)} = 0\left(\frac{1}{\varepsilon}\left[\int_0^\varepsilon x^\mu \, dx\right]^{\frac{1}{p}}\right) = 0\,(\varepsilon^{\frac{\mu+1}{p}-1}).$$

Utilisant la proposition 2.1 de [7] nous voyons que

$$\| u - u_\varepsilon \|_{T(q,\,\alpha\,;\,W^{1,p}_\mu(U),\,L^p_\mu(U))} = 0\,(\varepsilon^{\frac{\mu+1}{p}-(1-\theta)})\ (^{18}).$$

Nous en déduisons que $u_\varepsilon \longrightarrow u$ dans $T(q, \alpha\,;\, W^{1,p}_\mu(U), L^p_\mu(U))$ si $1 - \theta < \dfrac{\mu+1}{p}$ et que u_ε demeure dans un borné de $T(q, \alpha\,;\, W^{1,p}_\mu(U), L^p_\mu(U))$ si $1 - \theta = \dfrac{\mu+1}{p}$. Dans le premier cas la densité est démontrée et dans le second cas, utilisant la réflexivité de $T(q, \alpha\,;\, W^{1,p}_\mu(U), L^p_\mu(U))$ (19) et en raisonnant comme dans la démonstration du théorème 1.1 nous vérifions que $\mathcal{D}(U)$ est encore dense.

---

(18) La proposition 2.1 de [7] dit que

$$\| v \|_{T(q,\,\alpha\,;\,W^{1,p}_\mu(U),\,L^p_\mu(U))} \leq \| v \|^{1-\theta}_{W^{1,p}_\mu(U)} \, \| v \|^{\theta}_{L^p_\mu(U)} \qquad \text{pour } v \in W^{1,p}_\mu(U).$$

(19) L'espace $T(q, \alpha\,;\, W^{1,p}_\mu(U)\,;\, L^p_\mu(U))$ est réflexif parce qu'isomorphe au quotient de l'espace réflexif $W(q, \alpha\,;\, W^{1,p}_\mu(U), L^p_\mu(U))$ par un sous-espace vectoriel fermé (cf. prop. 11 chap. 4 § 5 de [2]. On vérifie facilement la réflexivité de $W(q, \alpha\,;\, W^{1,p}_\mu(U), L^p_\mu(U))$ en utilisant le corrollaire de la prop. 10 chap. 4 § 2 de [2] et la réflexivité des espaces $L^q(0, +\infty\,;\, L^p_\mu(U))$ et $L^q(0, +\infty\,;\, W^{1,p}_\mu(U))$ elle même conséquence d'un théorème de [13].

Lorsque $\mu \geq 0$ la réflexivité de $T(q, \alpha\,;\, W^{1,p}_\mu(U), L^p_\mu(U))$ est une conséquence facile du théorème de dualité de [7].

n⁰ 3. Caractérisation des éléments de $T(q, \alpha\,;\ \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\mu}(U),\ L^p_\mu(U))$

De la proposition 1.3′ et de [6] (théorème 1.1) résulte la

PROPOSITION 3.1 :

a) Si $\mu \geq 0$, $T(q, \alpha\,;\ W^{1,p}_\mu(U),\ L^p_\mu(U))$ *est le sous-espace de* $L^p_\mu(U)$ *formé des fonctions u telles que*

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^{+\infty} t^{q(\alpha-1)}\left(\int_{R^n_+} |\, u(x_1..x_i + t, \dots x_n) - u(x_1..x_i, \dots x_n)\,|^p\, x_n^\mu\, dx_1 \dots dx_n\right)^{q/p} dt\right)^{1/q} < +\infty$$

b) Si $\mu \leq 0$, $T(q, \alpha\,;\ \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\mu}(U),\ L^p_\mu(U))$ *est le sous-espace de* $L^p_\mu(U)$ *formé des fonctions u telles que*

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^{+\infty} t^{q(\alpha-1)}\left(\int_{R^n_+} |\, \tilde{u}(x_1..x_i - t, \dots x_n) - u(x_1..x_i, \dots x_n)\,|^p\, x_n^\mu\, dx_1 \dots dx_n\right)^{q/p} dt\right)^{1/q} < +\infty \text{ (20)}$$

Le reste de ce n⁰ est consacré en entier à la démonstration du

THÉORÈME 3.1 : *Lorsque* $-1 < \mu < p - 1$, on a

$$T(q, \alpha\,;\ \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\mu}(U),\ L^p_\mu(U)) = T(q, \alpha\,;\ W^{1,p}_\mu(U),\ L^p_\mu(U)) \cap T(q, \alpha\,;\ L^p_{\mu,\,\mu-p}(U)\, L^p_\mu(U)) \text{ (21)}$$

Ce théoreme est à rapprocher du théorème 1.2. De ce dernier théorème il résulte que l'on a

$$\overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\mu}(U) \subset L^p_{\mu,\,\mu-p}(U)$$

et

$$T(q, \alpha\,;\ \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\mu}(U),\ L^p_\mu(U)) \subset T(q, \alpha\,;\ W^{1,p}_\mu(U), L^p_\mu(U)) \cap T(q, \alpha; L^p_{\mu,\,\mu-p}(U), L^p_\mu(U))$$

L'inclusion inverse résulte du

LEMME 3.1 : *Les fonctions de* $T(q, \alpha\,;\ W^{1,p}_\mu(U),\ L^p_\mu(U))$ *telles que*

$$I(u) = \left(\int_0^{+\infty} t^{q(\alpha-1)}\left(\int_{x_n \leq t} |\, u(x)\,|^p\, x_n^\mu\, dx\right)^{q/p} dt\right)^{1/q} < +\infty$$

(20) $\tilde{u}$ est la fonction u prolongée par 0 pour les valeurs négatives de x_n.

(21) On pose par définition $L^p_{\mu,\,\mu-p}(U) = L^p_\mu(U) \cap L^p_{\mu-p}(U)$.

sont dans $T(q, \alpha\,;\ \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\mu}(U),\ L^p_\mu(U))$ *et il existe une constante ne dépendant que de* p, q, α *et* μ *telle que*

$$\| u \|_{T(q,\,\alpha;\ \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\mu},\ L^p_\mu(U))} \leq C^{te}\left[I(u) + \| u \|_{T(q,\,\alpha;\ W^{1,p}_{\mu}(U),\ L^p_\mu\ (U))}\right].$$

Admettant provisoirement ce lemme nous en déduisons le théorème 3.1 : It suffit de montrer que pour $u \in T(q, \alpha\,;\ L^p_{\mu,\,\mu-p}(U),\ L^p_\mu(U))$ on a $I(u) < +\infty$; pour cela nous utilisons le n⁰ 6 de [6] qui montre que

$$J(u) = \left(\int_0^{+\infty} t^{q(\alpha-1)}\left(\int_0^{+\infty} |\,(e^{-t/x} - 1)\,u(x)\,|^p\, x^\mu\, dx\right)^{q/p} dt\right)^{1/q} < +\infty\ ;\ ^{(22)}$$

lorsque $x \leq t$, on a $e^{-t/x} \leq e^{-1}$ donc $|\,(e^{-t/x} - 1)\,| \geq 1 - e^{-1}$, et en conséquence on a $I(u) \leq (1 - e^{-1})\,J(u) < +\infty$. Le théorème est démontré sous réserve de vérifier le lemme.

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.1 : Nous considérerons séparément les cas $\mu = 0$, $\mu < 0$ et $\mu > 0$.

(a) *cas* $\mu = 0$ Dans ce cas seulement nous pouvons utiliser les deux parties (a et b) de la proposition 3.1 :

Considérons une fonction u de $T(q, \alpha\,;\ W^{1,p}_\mu(U),\ L^p_\mu\ (U))$ telle que $I(u) < +\infty$ alors nous avons

$$\left(\int_0^{+\infty} t^{q(\alpha-1)}\left(\int_0^{+\infty} |\,\tilde{u}(x - t) - u(x)\,|^p\, dx\right)^{q/p} dt\right)^{1/q} \leq$$

$$C^{te}\left(\int_0^{+\infty} t^{q(\alpha-1)}\left(\int_0^{t} |\,u(x)\,|^p\, dx\right)^{q/p} dt\right)^{1/q} + C^{te}\left(\int_0^{+\infty} t^{q(\alpha-1)}\left(\int_0^{+\infty} |\,u(x+t) - u(x)\,|^p dx\right)^{q/p} dt\right)^{1/q}$$

c'est à dire

$$\| u \|_{T(q,\,\alpha;\ \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\mu}(U),\ L^p_\mu(U))} \leq C^{te}\left(I(u) + \| u \|_{T(q,\,\alpha;\ W^{1,p}_{\mu}(U),\ L^p_\mu\ (U)}\right)$$

et le lemme est démontré dans ce cas.

---

(22) Nous ne donnons que la démonstration du cas $n = 1$.

(b) *cas* $\mu < 0$ Cette fois nous ne pouvons utiliser que la partie b de la proposition 3.1 ; la partie a est remplacée par le

LEMME 3.2 : *Lorsque* $\mu < 0$ *il existe une constante ne dépendant que de* p, q, α *et* μ, *et telle que*

$$\left(\int_0^{+\infty} t^{q(\alpha-1)}\left(\int_{R_+^n} |u(x_1,\dots x_{n-1},x_n+t)-u(x_1,\dots x_{n-1},x_n)|^p (x_n+t)^\mu\, dx_1 dx_2 \dots dx_n\right)^{q/p} dt\right)^{1/q}$$

$$\leq c^{te} \| u \|_{T(q,\alpha;\, W_\mu^{1,p}(U),\, L_\mu^p(U))}$$

pour toute u *dans* $T(q, \alpha;\ W_\mu^{1,p}(U),\ L_\mu^p(U))$.

Alors si nous considérons $u \in T(q, \alpha;\ W_\mu^{1,p}(U),\ L_\mu^p(U))$ avec $I(u) < +\infty$ nous avons

$$\left(\int_0^{+\infty} t^{q(\alpha-1)}\left(\int_0^{+\infty} |\tilde{u}(x-t) - u(x)|^p x^\mu\, dx\right)^{q/p} dt\right)^{1/q} \leq$$

$$C^{te}\left(\int_0^{+\infty} t^{q(\alpha-1)}\left(\int_0^{t} |u(x)|^p x^\mu\, dx\right)^{q/p} dt\right)^{1/q} +$$

$$+ C^{te}\left(\int_0^{+\infty} t^{q(\alpha-1)}\left(\int_t^{+\infty} |u(x-t) - u(x)|^p x^\mu\, dx\right)^{q/p} dt\right)^{1/q} \leq$$

$$C^{te}\left[I(u) + \left(\int_0^{+\infty} t^{q(\alpha-1)}\left(\int_0^{+\infty} |u(x+t) - u(x)|^p (x+t)^\mu\, dx\right)^{q/p} dt\right)^{1/q}\right] < +\infty$$

grâce au lemme 3.2 et on a $u \in T(q, \alpha;\ \overset{\circ}{W}{}_\mu^{1,p}(U),\ L_\mu^p(U))$; le lemme 3.1 est démontré dans le cas $\mu < 0$ sous réserve de démontrer le lemme 3.2.

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.2 :

Considérons $F \in W(q, \alpha;\ W_\mu^{1,p}(U),\ L_\mu^p(U))$ telle que $u(x) = \lim_{t \to 0} F(x, t)$ dans $L_\mu^p(U)$, alors nous avons $F, \dfrac{\partial F}{\partial t}, \dfrac{\partial F}{\partial x} \in S$ (S désigne l'espace des fonctions φ des deux variables x et t, telles que

$$|||\varphi||| = \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha q} \left(\int_0^{+\infty} |\varphi(x,t)|^p x^\mu \, dx \right)^{q/p} dt \right)^{1/q} < +\infty \; (^{23}).$$

Nous posons $f = \dfrac{\partial F}{\partial t} - \dfrac{\partial F}{\partial x}$ et $g = \dfrac{\partial F}{\partial t}$; alors $f, g \in S$ et il est facile de vérifier l'identité suivante:

$$u(x+t) - u(x) = \int_0^t g(x,s)\, ds - \int_0^t f(x+t-s, s)\, ds$$

$$= t \int_0^1 g(x, st)\, ds - t \int_0^1 f(x+t-st, st)\, ds \tag{3.1}$$

et de 3.1 on déduit que

$$\left(\int_0^{+\infty} t^{q(\alpha-1)} \left(\int_0^{+\infty} |u(x+t) - u(x)|^p (x+t)^\mu \, dx \right)^{q/p} dt \right)^{1/q} \leq$$

$$\left(\int_0^{+\infty} t^{q\alpha} \left(\int_0^{+\infty} \left| \int_0^1 g(x, st)\, ds \right|^p (x+t)^\mu \, dx \right)^{q/p} dt \right)^{1/q} +$$

$$\left(\int_0^{+\infty} t^{q\alpha} \left(\int_0^{+\infty} \left| \int_0^1 f(x+t-st, st)\, ds \right|^p (x+t)^\mu \, dx \right)^{q/p} dt \right)^{1/q} = J_1 + J_2 . \tag{3.2}$$

Comme on a $\mu < 0$, il vient $(x+t)^\mu \leq x^\mu$ et

$$J_1 \leq \left|\left|\left| \int_0^1 g(x, st)\, ds \right|\right|\right| \leq \int_0^1 |||g(x, st)|||\, ds = \left(\int_0^1 s^{-\theta} ds \right) |||g||| \leq$$

$$C^{te} \| F \|_{W(q,\alpha;\, W_\mu^{1,p}(U),\, L_\mu^p(U))} \tag{3.3}$$

(^{23}) On munit S de la norme $|||\varphi|||$.

Majorons J_2 :

$$J_2 = \left|\!\left|\!\left| \int_0^1 f(x+t-st, st)\, ds \left(\frac{x+t}{x}\right)^{\mu/p} \right|\!\right|\!\right| \leq \int_0^1 \left|\!\left|\!\left| f(x+t-st, st) \left(\frac{x+t}{x}\right)^{\mu/p} \right|\!\right|\!\right| ds$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} t^{q\alpha} \left(\int_0^{+\infty} |f(x+t-st, st)|^p (x+t)^\mu \, dx \right)^{q/p} dt \right)^{1/q} ds$$

$$= \int_0^1 s^{-\theta} \left(\int_0^{+\infty} t^{q\alpha} \left(\int_0^{+\infty} \left| f\left(x + \frac{t}{s} - t, t\right) \right|^p \left(x + \frac{t}{s}\right)^\mu dx \right)^{q/p} dt \right)^{1/q} ds$$

en posant $y = x + \frac{t}{s} - t$ il vient

$$J_2 \leq \int_0^1 s^{-\theta} \left(\int_0^{+\infty} t^{q\alpha} \left(\int_{\frac{t}{s}-t}^{+\infty} |f(y, t)|^p (y+t)^\mu \, dy \right)^{q/p} dt \right)^{1/q} ds$$

$$\leq \int_0^1 s^{-\theta} \, |||f||| \, ds \leq C^{te} \, \| F \|_{W(q,\alpha;\, W_\mu^{1,p}(U),\, L_\mu^p(U))} . \tag{3.4}$$

Il résulte de (3.2)-(3.4) que

$$\left(\int_0^{+\infty} t^{q(\alpha-1)} \left(\int_0^{+\infty} |u(x+t) - u(x)|^p (x+t)^\mu \, dx \right)^{q/p} dt \right)^{1/q} \leq$$

$$C^{te} \, \| F \|_{W(q,\alpha;\, W_\mu^{1,p}(U),\, L_\mu^p(U))}$$

pour toute F telle que $u(x) = \lim_{t \to 0} F(x, t)$ dans $L_\mu^p(U)$; comme la constante ne dépend pas de F le lemme est démontré.

(c) *cas* $\mu > 0$: Nous ne disposons que la partie a de la proposition 3.1 ; nous utiliserons le

LEMME 3.3 : *Pour* $u \in L_\mu^p(U) = L_\mu^p(O, +\infty\,;\, L^p(R^{n-1}))$, *nous posons*

$$K(t)\, u(x) = \begin{cases} u(x+t) & \text{si} \quad x > t, \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq t \end{cases}$$

alors si $\mu \geq 0$, $K(t)$ *est un opérateur linéaire continu dans* $L^p_\mu(U)$, *pour tout* $t \geq 0$, $(\| K(t) \| \leq 1,\ K(0) = 1)$ *et pour u fixée dans* $L^p_\mu(U)$, *la fonction* $t \longrightarrow K(t)\,u$ *est continue dans* $[0, +\infty[$, *à valeurs dans* $L^p_\mu(U)$ (24).

Nous ne démontrons pas ce lemme qui est tres élémentaire.

Nous considérons à présent une fonction

$$u \in T(q, \alpha\,;\ W^{1,p}_\mu(U),\ L^p_\mu(U)) \quad \text{avec} \quad I(u) < +\infty$$

nous allons montrer que la fonction

$$t \longrightarrow \varphi(t)\,F(t) \quad \text{où} \quad F(t) = \frac{1}{t}\int_0^t K(\xi)\,u\,d\xi \ (^{25})$$

est dans $W(q, \alpha\,;\ \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_\mu(U),\ L^p_\mu(U))$, comme $F(0) = u$, cela montrera que $u \in T(q, \alpha\,;\ \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_\mu(U),\ L^p_\mu(U))$ et achèvera la démonstration du lemme 3.1.

Nous posons

$$F_0(t) = \frac{1}{t}\int_0^t G(\xi)\,u\,d\xi \ (^{26}) \tag{3.5}$$

nous savons cf. [6] que

$$\begin{cases} t^\alpha F_0(t) \in L^q_{\text{loc}}([0, +\infty[\,;\ W^{1,p}_\mu(U)) \\ t^\alpha F_0'(t) \in L^q_{\text{loc}}([0, +\infty[\,;\ L^p_\mu(U)) \end{cases} \tag{3.6}$$

Il résulte du lemme 3.3 que $F(t)$ est continue dans $[0, +\infty[$ à valeurs dans $L^p_\mu(U)$ et que: $F(0) = u$ il nous faut donc démontrer que

$$\begin{cases} t^\alpha F(t) \in L^q_{\text{loc}}([0, +\infty[\,;\ \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_\mu(U)) \\ t^\alpha F'(t) \in L^q_{\text{loc}}([0, +\infty[\,;\ L^p_\mu(U)). \end{cases} \tag{3.7}$$

Comme F est continue dans $[0, +\infty[$ à valeurs dans $L^p_\mu(U)$ nous savons déjà que $t^\alpha F(t) \in L^q_{\text{loc}}([0, +\infty[\,;\ L^p_\mu(U))$.

---

(24) $K(t)$ n'est *pas* un semi-groupe car on n'a pas $K(t)\,K(s) = K(t+s)$.

(25) $\varphi(t)$ est une fonction de $\mathcal{D}([0, +\infty[)$ telle que $\varphi(0) = 1$.

(26) $G(t)$ a été défini au n° 1 point *c*).

Si nous écrivons explicitement F et F_0 comme fonctions des deux variables t et x nous avons:

$$F_0(t, x) = \frac{1}{t}\int_0^t u(x+\xi)\,d\xi = \int_0^1 u(x+\xi t)\,d\xi \tag{3.8}$$

$$F(t, x) = \begin{cases} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t u(x+\xi)\,d\xi = \int_0^1 u(x+\xi t)\,d\xi & \text{si} \quad t \leq x \\ \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^x u(x+\xi)\,d\xi = \int_1^2 u(\xi x)\frac{x}{t}\,d\xi & \text{si} \quad t \geq x \end{cases} \tag{3.9}$$

et en conséquence nous avons $F_0(x, t) = F(x, t)$ si $t \leq x$. Nous déduisons de (3.8) et de (3.9) que

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial F_0}{\partial t}(x, t) \quad \text{si} \quad x \geq t \quad \text{et} \quad -\frac{x}{t^2}\int_1^2 u(\xi x)\,d\xi \quad \text{si} \quad x \leq t \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial F_0}{\partial x}(t, x) \quad \text{si} \quad x \geq t \quad \text{et} \quad \frac{1}{t}(2u(2x) - u(x)) \text{ si } \quad x \leq t. \tag{3.11}$$

Pour achever la démonstration il nous faut vérifier les inégalités suivantes:

$$J_1 = \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha q}\left(\int_0^t \left|\frac{x}{t^2}\int_1^2 u(\xi x)\,d\xi\right|^p x^\mu\,dx\right)^{q/p} dt\right)^{1/q} < +\infty \tag{3.12}$$

$$J_2 = \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha q}\left(\int_0^t \left|\frac{1}{t}(2u(2x) - u(x))\right|^p x^\mu\,dx\right)^{q/p} dt\right)^{1/q} < +\infty \tag{3.13}$$

et il faut aussi verifier que $F(t) \in \mathring{W}_\mu^{1,p}(U)$, i. e. $F(t, 0) = 0$, pour presque tout t.

1^0) *vérification de* (3.12):

Si on pose

$$\{\{ f \}\} = \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha q}\left(\int_0^t |f(t, x)|^p x^\mu\,dx\right)^{q/p} dt\right)^{1/q}$$

on a

$$J_1 = \left\{\!\!\left\{ \int_1^2 \frac{x}{t^2}\, u(\xi x)\, d\xi \right\}\!\!\right\} \leq \int_1^2 \left\{\!\!\left\{ \frac{x}{t^2}\, u(\xi x) \right\}\!\!\right\} d\xi$$

et

$$\left\{\!\!\left\{ \frac{x}{t^2}\, u(\xi x) \right\}\!\!\right\} = \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha q} \left(\int_0^t \frac{x^p}{t^{2p}} \mid u(\xi x) \mid^p x^\mu\, dx \right)^{q/p} dt \right)^{1/q} \leq$$

$$\left(\int_0^{+\infty} t^{q(\alpha-1)} \left(\int_0^t \mid u(\xi x) \mid^p x^\mu\, dx \right)^{q/p} dt \right)^{1/q} \leq$$

$$C^{te}\, \xi^{-\frac{\mu+1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} t^{q(\alpha-1)} \left(\int_0^t \mid u(x) \mid^p x^\mu\, dx \right)^{q/p} dt \right)^{1/q}$$

donc on a enfin

$$J_1 \leq C^{te} \left(\int_1^2 \xi^{-\frac{\mu+1}{p}}\, d\xi \right) I(u) < +\infty .$$

2⁰) *vérification de* 3.13 : On a

$$J_2 \leq 2 \left(\int_0^{+\infty} t^{q(\alpha-1)} \left(\int_0^t \mid u(2x) \mid^p x^\mu\, dx \right)^{q/p} dt \right)^{1/q} +$$

$$\left(\int_0^{+\infty} t^{q(\alpha-1)} \left(\int_0^t \mid u(x) \mid^p x^\mu\, dx \right)^{q/p} dt \right)^{1/q} \leq C^{te}\, I(u) < +\infty,$$

enfin comme $F(t, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{t} \int_0^x u(x+\xi)\, d\xi = 0$ le lemme est complétement démontré.

Du théorème 3.1 on déduit le

COROLLAIRE 3.1 : *Si* $\mu \geq 0$, $T(q, \alpha ; \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\mu}(U), L^p_{\mu}(U))$ *est le sous-espace des fonctions de* $L^p_{\mu}(U)$ *telles que*

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^{+\infty} t^{q(\alpha-1)}\left(\int_{R^n_+} | u(x_1,\dots x_i+t,\dots x_n) - u(x_1,\dots x_i,\dots x_n) |^p x_n^{\mu}\, dx_1 \dots dx_n\right)^{q/p} dt\right)^{1/q}$$

$$+\left(\int_0^{+\infty} t^{q(\alpha-1)}\left(\int_{x_n\leq t} | u(x_1,\dots x_n) |^p x_n^{\mu}\, dx_1 \dots dx_n\right)^{q/p} dt\right)^{1/q} < +\infty.$$

n⁰ 4. Conséquences :

Par définition on pose $W^{1-\theta,p}_{\mu}(U) = T(p, \alpha ; W^{1,p}_{\mu}(U), L^p_{\mu}(U))$ pour $\theta = \alpha + \dfrac{1}{p}$; et $\overset{\circ}{W}{}^{1-\theta,p}_{\mu}(U)$ est la fermeture de $\mathcal{D}(U)$ dans $W^{1-\theta,p}_{\mu}(U)$ ($\overset{\circ}{W}{}^{1-\theta,p}_{\mu}(U)$ coincide avec $W^{1-\theta,p}_{\mu}(U)$ lorque $1-\theta \leq \dfrac{\mu+1}{p}$ grâce au théorème 2.1).

Il résulte alors du théorème 3.1 que
$T(p, \alpha ; \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\mu}(U), L^p_{\mu}(U)) = W^{1-\theta,p}_{\mu}(U) \cap L^p_{\mu-p(1-\theta)}(U)$ (puisque on a l'identité (c. f. [6] n⁰ 6) $T(p, \alpha ; L^p_{\mu,\,\mu-p}(U), L^p_{\mu}(U)) = L^p_{\mu,\,\mu-p(1-\theta)}(U)$).

Le résultat principal de ce n⁰ est le

THÉORÈME 4.1 : *Lorsque* $-1 < \mu < p-1$, *on a*

1⁰) $T(p, \alpha ; \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\mu}(U), L^p_{\mu}(U)) = W^{1-\theta,p}_{\mu}(U)$ *avec* $\theta = \alpha + \dfrac{1}{p}$,

quand $1-\theta < \dfrac{\mu+1}{p}$

2⁰) $T(p, \alpha ; \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\mu}(U), L^p_{\mu}(U)) = \overset{\circ}{W}{}^{1-\theta,p}_{\mu}(U)$ *avec* $\theta = \alpha + \dfrac{1}{p}$,

quand $1-\theta > \dfrac{\mu+1}{p}$.

Ce théorème est conséquence du

LEMME 4.1 : *Pour* $-1 < \mu < p-1$ *et* $1-\theta \neq \dfrac{\mu+1}{p}$, *il existe une constante ne dépendant que de* μ, p *et* θ *telle que*

$$\| u \|_{L^p_{\mu-p(1-\theta)}(U)} \leq C^{te} \| u \|_{W^{1-\theta,p}_{\mu}(U)} \tag{4.1}$$

pour toute u *dans* $\mathcal{D}(U)$.

Nous admettons provisoirement ce lemme et nous en deduisons pour commencer le théorème 4.1 :

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.1 : L'inégalité (4.1) se prolonge par continuité à $W_{\mu}^{1-\theta,p}(U)$ lorsque $1-\theta<\dfrac{\mu+1}{p}$, (puisque dans ce cas $\mathcal{D}(U)$ est dense dans $W_{\mu}^{1-\theta,p}(U)$ — c. f. th. 2.1) et à $\overset{\circ}{W}{}_{\mu}^{1-\theta,p}(U)$ lorsque $1-\theta>\dfrac{\mu+1}{p}$.

En conséquence lorsque $1-\theta<\dfrac{\mu+1}{p}$, on a $W_{\mu}^{1-\theta,p}(U)\subset L^p_{\mu-p(1-\theta)}(U)$ et $W_{\mu}^{1-\theta,p}(U)=W_{\mu}^{1-\theta,p}(U)\cap L^p_{\mu-p(1-\theta)}(U)=T(p,\alpha\,;\overset{\circ}{W}{}_{\mu}^{1,p}(U),L^p_{\mu}(U))$ grâce au théorème 3.1 et lorsque $1-\theta>\dfrac{\mu+1}{p}$ on a $\overset{\circ}{W}{}_{\mu}^{1-\theta,p}(U)\subset L^p_{\mu-p(1-\theta)}(U)$ et $\overset{\circ}{W}{}_{\mu}^{1-\theta,p}(U)\subset W_{\mu}^{1-\theta,p}(U)\cap L^p_{\mu-p(1-\theta)}(U)=T(p,\alpha\,;\overset{\circ}{W}{}_{\mu}^{1,p}(U),L^p_{\mu}(U))$ grâce au corollaire 3.1 ; comme l'inclusion (topologique) réciproque : $T(p,\alpha\,;\overset{\circ}{W}{}_{\mu}^{1,p}(U),L^p_{\mu}(U))\subset\overset{\circ}{W}{}_{\mu}^{1-\theta,p}(U)$ est évidente, on a $T(p,\alpha\,;\overset{\circ}{W}{}_{\mu}^{1,p}(U),L^p_{\mu}(U))=$ $=\overset{\circ}{W}{}_{\mu}^{1-\theta,p}(U)$.

Le théorème est démontré sous réserve de vérifier le lemme 4.1.

DÉMONSTRATION DU LEMME 4.1 : $(n=1)$ Nous utiliserons des identités analogues à celles de Il'in [5].

1. Identité (4.2): Pour $u\in\mathcal{D}(U)$ on a

$$u(x)=v(x)-\int_x^{+\infty}v(y)\,\frac{dy}{y} \tag{4.2'}$$

$$v(x)=\frac{1}{x}\int_0^x(u(x)-u(y))\,dy \tag{4.2''}$$

On démontre cette identité en introduisant la fonction

$$V(x)=\frac{1}{x}\int_0^x u(y)\,dy$$

et en écrivant que $V(x)=V(+\infty)-\displaystyle\int_x^{+\infty}V'(y)\,dy$

i. e.
$$0 = -\frac{1}{x}\int_0^x u(y)\,dy - \int_x^{+\infty} v(y)\,\frac{dy}{y} \tag{4.3}$$

car $V(+\infty) = 0$ et $V'(y) = \dfrac{v(y)}{y}$

De (4.3) on déduit (4.2) en additionnant membre à membre (4.3) et l'identité suivante
$$u(x) = \frac{1}{x}\int_0^x u(x)\,dy \tag{4.4}$$

2. Identité (4.5): Pour $u \in \mathcal{D}(U)$ on a
$$u(x) = v(x) + \int_0^x v(y)\,\frac{dy}{y} \tag{4.5}$$

Pour démontrer cette identité on écrit cette fois que $V(x) = V(0) + \int_0^x V'(y)\,dy$

i.e.
$$0 = -\frac{1}{x}\int_0^x u(y)\,dy + \int_0^x v(y)\,\frac{dy}{y} \tag{4.6}$$

car $V(0) = u(0) = 0$; de (4.6) on déduit (4.5) en additionnant membre à membre (4.4) et (4.6).

Des identités (4.2) et (4.5) nous déduirons que $u \in L^p_{\mu-p(1-\theta)}(U)$ pour $1-\theta \neq \dfrac{\mu+1}{p}$, en montrant pour commencer que $v \in L^p_{\mu-p(1-\theta)}(U)$, et en appliquant l'inégalité de Hardy.

3. v est élément de $L^p_{\mu-p(1-\theta)}(U)$:

(i) $\mu \geq 0$: On écrit
$$|v(x)| \leq C^{te}\, x^{-\frac{\mu+1}{p}} \left(\int_0^x |u(x)-u(y)|^p\, y^\mu\, dy\right)^{1/p}$$

et
$$\int_0^{+\infty} |v(x)|^p\, x^{\mu-p(1-\theta)}\, dx \leq C^{te} \int_0^{+\infty} x^{p(\alpha-1)} \int_0^x |u(x)-u(y)|^p\, y^\mu\, dy\, dx$$

$$= C^{te}\int_0^{+\infty} y^{\mu}\int_y^{+\infty} |u(x)-u(y)|^p x^{p(\alpha-1)}\,dx\,dy$$

$$= C^{te}\int_0^{+\infty} y^{\mu}\int_0^{+\infty} |u(y+t)-u(y)|^p (y+t)^{p(\alpha-1)}\,dt\,dy$$

$$\leq C^{te}\int_0^{+\infty} t^{p(\alpha-1)}\int_0^{+\infty} |u(y+t)-u(y)|^p y^{\mu}\,dy\,dt \leq C^{te}\|u\|^p_{W_\mu^{1-\theta,p}(U)}$$

grâce à la proposition 3.1.

(ii) $\mu \leq 0$: On écrit

$$|v(x)| \leq C^{te} x^{-\frac{\mu+1}{p}}\left(\int_0^x |u(x)-u(y)|^p (y+x)^{\mu}\,dy\right)^{1/p}$$

et

$$\int_0^{+\infty} |v(x)|^p x^{\mu-p(1-\theta)}\,dx \leq C^{te}\int_0^{+\infty} x^{p(\alpha-1)}\int_0^{+\infty} |u(x)-u(y)|^p (y+x)^{\mu}\,dy\,dx$$

$$= C^{te}\int_0^{+\infty}\int_y^{+\infty} |u(x)-u(y)|^p x^{p(\alpha-1)} (y+x)^{\mu}\,dx\,dy$$

$$= C^{te}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} |u(y+t)-u(y)|^p (y+t)^{p(\alpha-1)} (2y+t)^{\mu}\,dt\,dy$$

$$\leq C^{te}\int_0^{+\infty} t^{p(\alpha-1)}\int_0^{+\infty} |u(y+t)-u(y)|^p (y+t)^{\mu}\,dy\,dt \leq C^{te}\|u\|^p_{W_\mu^{1-\theta,p}(U)}$$

grâce au lemme 3.2.

Nous avons montré que $v \in L^p_{\mu-p(1-\theta)}(U)$ et que $\|v\|_{L^p_{\mu-p(1-\theta)}(U)} \leq$ $\leq C^{te}\|u\|_{W_\mu^{1-\theta,p}(U)}$.

4. Nous montrons à présent que $u \in L^p_{\mu-p(1-\theta)}(U)$ et que l'inégalité (4.1) a lieu pour $1-\theta < \dfrac{\mu+1}{p}$, i.e. $\mu - p(1-\theta) > -1$: Il suffit de montrer que

$$\int_x^{+\infty} v(y)\frac{dy}{y} \in L^p_{\mu-p(1-\theta)}(U) \text{ et que } \left\| \int_x^{+\infty} v(y)\frac{dy}{y} \right\|_{L^p_{\mu-p(1-\theta)}(U)} \leq C^{te} \| v \|_{L^p_{\mu-p(1-\theta)}(U)}$$

ce qui résulte du Théorème 330 de [4] (c.f. note de bas de page p. 7).

5. Nous montrons pour terminer que $u \in L^p_{\mu-p(1-\theta)}(U)$ et que l'inégalité (4.1) a lieu pour $1-\theta > \dfrac{\mu+1}{p}$, i.e. $\mu - p(1-\theta) < -1$: On vérifie que

$$\left\| \int_0^x v(y)\frac{dy}{y} \right\|_{L^p_{\mu-p(1-\theta)}(U)} \leq C^{te} \| v \|_{L^p_{\mu-p(1-\theta)}(U)}$$

en appliquant de nouveau le th. 330 de [4].

Le lemme est complétement démontré.

REMARQUE 4.1 : Pour démontrer le lemme 4.1 ou aurait pu faire usage des résultats de [1].

Le théorème 4.1 montre que $T(p, \alpha; \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\mu}(U), L^p_\mu(U))$ est un sous espace fermé de $W^{1-\theta,p}_\mu(U)$ muni de la topologie induite par $W^{1-\theta,p}_\mu(U)$ lorsque $1-\theta > \dfrac{\mu+1}{p}$; la proposition suivante montre que c'est un vrai sous-espace, c'est à dire que $T(p, \alpha; \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\mu}(U), L^p_\mu(U))$ est distinct de $W^{1-\theta,p}_\mu(U)$:

PROPOSITION 4.1 : *Lorsque* $-1 < \mu < p-1$ *et* $1-\theta \geq \dfrac{\mu+1}{p}$ *il existe des fonctions de* $W^{1-\theta,p}_\mu(U)$ *qui ne sont pas éléments de* $T(p, \alpha; \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\mu}(U), L^p_\mu(U))$.

DÉMONSTRATION : $(n=1)$ Soit φ une fonction de classe C^1, $\equiv 1$ dans $(0, 1)$ et nulle pour x assez grand, alors $\varphi \in W^{1,p}_\mu(U)$ puisque $\mu > -1$; et a fortiori on a $\varphi \in W^{1-\theta,p}_\mu(U)$. Comme $\varphi \in L^p_{\mu-p(1-\theta)}(U)$ si et seulement si : $\mu - p(1-\theta) > -1$, i. e. si $1-\theta < \dfrac{\mu+1}{p}$, φ n'est pas élément de $T(p, \alpha; \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\mu}(U), L^p_\mu(U))$ pou $1-\theta \geq \dfrac{\mu+1}{p}$.

REMARQUE 4.2: Le théorème 2.1 montre que $\overset{\circ}{W}{}_{\mu}^{1-\theta,p}(U) = W_{\mu}^{1-\theta,p}(U)$ pour $1-\theta = \dfrac{\mu+1}{p}$ et la proposition 4.1 montre que $T(p, \alpha;\ \overset{\circ}{W}{}_{\mu}^{1,p}(U), L_{\mu}^{p}(U))$ est un vrai sous-espace de $W_{\mu}^{1-\theta,p}(U)$. Comme $\mathcal{D}(U)$ est dense dans $T(p, \alpha;\ \overset{\circ}{W}{}_{\mu}^{1,p}(U), L_{\mu}^{p}(U))$ et dans $W_{\mu}^{1-\theta,p}(U)$, et comme les topologies de ces deux espaces sont comparables $T(p, \alpha:\ \overset{\circ}{W}{}_{\mu}^{1,p}(U), L_{\mu}^{p}(U))$ est un sous-espace dense de $W_{\mu}^{1-\theta,p}(U)$ muni d'une topologie strictement plus fine que la topologie induite par $W_{\mu}^{1-\theta,p}(U)$. En particulier ceci montre que si E, F et G sont trois espaces de Banach avec $E \subset F \subset G$, E fermé dans F, alors $T(p, \alpha;\ E, G)$ n'est pas nécéssairement fermé dans $T(p, \alpha;\ F, G)$, le paramètre $0 = \alpha + \dfrac{1}{p}$ correspondant pouvant prendre toutes les valeurs de l'intervalle $]0,1[$, même si tous les espaces considérés sont hilbertiens (cas précédent avec $p = 2$: $1 - \dfrac{\mu+1}{p} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\mu}{2}$, $-1 < \mu < +1$).

Pour terminer ce n^0 nous démontrons la

PROPOSITION 4.2 : *Pour* $-1 < \mu < 0$ et $1-\theta \neq \dfrac{\mu+1}{p}$, $W_{\mu}^{1-\theta,p}(U)$ *est le sous-espace de* $L_{\mu}^{p}(U)$ *formé des fonctions* u *telles que*

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int_0^{+\infty} t^{p(\alpha-1)} \int_{R_+^n} |\, u(x_1 \dots x_i + t, \dots x_n) - u(x_1 \dots x_i, \dots x_n) \,|^p\, x_n^{\mu}\, dx_1 \dots dx_n\, dt$$

$$+ \int_0^{+\infty} t^{p(\alpha-1)} \int_{R_+^n} |\, u(x_1 \dots x_n + t) - u(x_1 \dots x_n) \,|^p\, (x_n + t)^{\mu}\, dx_1 \dots dx_n\, dt < +\infty$$

DÉMONSTRATION : $(n = 1)$ Nous posons

$$(u)_{1-\theta,p,\mu} = \left(\int_0^{+\infty} t^{p(\alpha-1)} \int_0^{+\infty} |\, u(x+t) - u(x) \,|^p\, (x+t)^{\mu}\, dx\, dt \right)^{1/p}$$

Nous savons par le lemme 3.2 que si $u \in W_{\mu}^{1-\theta,p}(U)$ alors $(u)_{1-\theta,p,\mu} < +\infty$. Réciproquement nous considérons $u \in L_{\mu}^{p}(U)$ telle que $(u)_{1-\theta,p,\mu} < +\infty$.

a) Si $1-\theta<\frac{\mu+1}{p}$, nous avons

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} |u(x)-u(y)|^p K_{\mu,p,\theta}(x,y)\,dx\,dy<+\infty$$

où

$$K_{\mu,p,\theta}(x,y)=(x+y)^{\mu+p(\alpha-1)},\quad \theta=\alpha+\frac{1}{p}.$$

Il est clair que la fonction $K_{\mu,p,\theta}(x,y)$ a les propriétés suivantes :

$$K_{\mu,p,\theta}(\xi x,\xi y)=\xi^{2r-2}K_{\mu,p,\theta}(x,y)$$

pour ξ, x, y positifs, avec $2r-2=\mu-p(1-\theta)-1$

$$\int_0^{+\infty} K_{\mu,p,\theta}(x,1)\,dx=\int_0^{+\infty} K_{\mu,p,\theta}(1,y)\,dy<+\infty.$$

En appliquant le résultat de [1] (27) nous voyons qu'il existe une constante

---

(27) L'énoncé est le suivant: Si $K(x,y)$ est une fonction mesurable et positive pour x et y positifs, positivement homogène de degré $2r-2$ et si

$$\int_0^{+\infty} K(1,y)\,dy<+\infty,\qquad \int_0^{+\infty} K(x,1)\,dx<+\infty,$$

alors si $r\neq 0$ il existe une constante C telle que pour toute fonction u avec

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} K(x,y)\,|u(x)-u(y)|^p\,dx\,dy<+\infty,$$

il existe un nombre complexe $c(u)$ tel que

$$\int_0^{+\infty} t^{2r-1}\,|u(t)-c(u)|^p\,dt\le C\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} K(x,y)\,|u(x)-u(y)|^p\,dx\,dy.$$

$c(u)$ telle que

$$\int_0^{+\infty} | u(x) - c(u) |^p x^{\mu - p(1-\theta)} \, dx < + \infty$$

La constante $c(u)$ est nulle car comme $u \in L^p_\mu(U)$, on a

$$\left(\int_1^{+\infty} | c(u) |^p x^{\mu - p(1-\theta)} \, dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_1^{+\infty} | u(x) - c(u) |^p x^{\mu - p(1-\theta)} \, dx \right)^{1/p} +$$

$$\left(\int_1^{+\infty} | u(x) |^p x^{\mu} \, dx \right)^{1/p} < + \infty$$

et

$$\mu - p(1-\theta) > -1.$$

Nous savons donc que $(u)_{1-\theta, p, \mu} < + \infty$ et $u \in L^p_{\mu - p(1-\theta)}(U)$ et l'inégalité

$$\int_0^{+\infty} t^{p(\alpha-1)} \int_0^{+\infty} | \tilde{u}(x-t) - u(x) |^p x^\mu \, dx \, dt \leq$$

$$\int_0^{+\infty} t^{p(\alpha-1)} \int_0^{+\infty} | u(x+t) - u(x) |^p (x+t)^\mu \, dx \, dt + \int_0^{+\infty} t^{p(\alpha-1)} \int_0^{t} | u(x) |^p x^\mu \, dx \, dt$$

jointe à l'identité

$$\int_0^{+\infty} t^{p(\alpha-1)} \int_0^{t} | u(x) |^p x^\mu \, dx \, dt = C^{te} \int_0^{+\infty} | u(x) |^p x^{\mu - p(1-\theta)} \, dx$$

montre que $u \in T(p, \alpha ; \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_\mu(U), L^p_\mu(U)) = W^{1-\theta, p}_\mu(U)$.

b) Si $1 - \theta > \dfrac{\mu+1}{p}$, nous utiliserons un lemme que nous admettons provisoirement

LEMME 4.2 : *Si* $(u)_{1-\theta, p, \mu} < + \infty$, *alors la fonctions* $x \to \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x u(y) \, dy$ *est continue dans* $[0, + \infty[$.

Nous fixons u dans $L^p_\mu(U)$ telle que $(u)_{1-\theta, p, \mu} < +\infty$, et nous posons $v(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x u(y)\, dy$, $v(x)$ est une fonction continue au voisinage de l'origine; soit $\varphi(x)$ une fonction de $\mathcal{D}([0, +\infty[)$, $\equiv 1$ dans $(0, 1)$, nous notons $w(x) = u(x) - v(0)\, \varphi(x)$. Comme $\varphi \in W^{1, p}_\mu(U)$ nous avons $\varphi \in W^{1-\theta, p}_\mu(U)$ et grâce au lemme 3.2 $(\varphi)_{1-\theta, p, \mu} < +\infty$ d'où nous déduisons que $(w)_{1-\theta, p, \mu} < +\infty$.

En raisonnant comme dans la partie *a*) nous voyons qu'il existe un nombre $c(w)$ tel que

$$\int_0^{+\infty} | w(x) - c(w)|^p\, x^{\mu - p(1-\theta)}\, dx < +\infty.$$

La constante $c(w)$ est nulle car, utilisant l'inégalité de Hardy [4] nous vérifions que la fonction continue $x \longrightarrow \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x w(y)\, dy - c(w)$ est dans $L^p_{\mu - p(1-\theta)}(U)$ et comme: $\mu - p(1-\theta) < -1$ nous avons nécéssairement (c. f. dém. du th. 1.3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x w(y)\, dy - c(w) = 0$, donc $c(w) = 0$.

Nous avons donc $(w)_{1-\theta, p, \mu} < +\infty$ et $w \in L^p_{\mu - p(1-\theta)}(U)$, d'où comme au point *a*) $w \in T(p, \alpha; \overset{\circ}{W}{}^{1, p}_\mu(U), L^p_\mu(U)) \subset W^{1-\theta, p}_\mu(U)$ et $u = w + v(0)\varphi \in W^{1-\theta, p}_\mu(U)$.

Il nous reste à démontrer le lemme 4.2: Fixons u telle que $(u)_{1-\theta, p, \mu} < +\infty$ il *suffit* de démontrer que la dérivée de la fonction $x \longrightarrow \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x u(y)\, dy$, c'est à dire la fonction $x \longrightarrow \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^x (u(x) - u(y))\, dy$ est élément de $L^p_{\mu + \theta p}(U)$, ce qui entraine qu'elle est dans $L^1(0, T)$ pour tout $T > 0$.

On a:

$$\left| \frac{1}{x^2} \int_0^x (u(x) - u(y))\, dy \right| \leq C^{te}\, x^{\frac{1}{p'} - \frac{\mu}{p} - 2} \left(\int_0^x | u(x) - u(y)|^p\, (x + y)^\mu\, dy \right)^{1/p}$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{x^2} \int_0^x (u(x) - u(y))\, dy \right|^p x^{\mu + \theta p}\, dx \leq$$

$$C^{te} \int_0^{+\infty} x^{p(\alpha - 1)} \int_0^x | u(x) - u(y)|^p\, (x + y)^\mu\, dy\, dx \leq (u)^p_{1-\theta, p, \mu}$$

comme nous l'avons déjà vérifié au point 3 (*ii*) de la démonstration du lemme 4.1.

n⁰ 5. Théorèmes de continuité.

Dans tout ce n⁰ U désigne l'ouvert $]0, +\infty[$

5*a*) Nous étudions pour commencer la continuité *dans* U

THÉORÈME 5.1 : *Lorsque* $1-\theta > \dfrac{1}{p}$ *les fonctions de*

$$T(q, \alpha\,;\ W_{\mu}^{1,p}(U),\ L_{\mu}^{p}(U))$$

sont continues dans $U\left(\theta = \alpha + \dfrac{1}{q}\right)$.

DÉMONSTRATION : Ce théorème est conséquence d'un théorème de [5] : Soit φ une fonction de $\mathcal{D}(U)$, $\equiv 1$ dans l'intervalle (a, b), $a > o$, $b < +\infty$; l'application $u \longrightarrow \varphi u$ est linéaire continue de $L_{\mu}^{p}(U)$ dans $L^{p}(U)$ et de $W_{\mu}^{1,p}(U)$ dans $W^{1,p}(U)$, donc par interpolation si $u \in T(q, \alpha\,;\ W_{\mu}^{1,p}(U), L_{\mu}^{p}(U))$ on a $\varphi u \in T(q, \alpha\,;\ W^{1,p}(U), L^{p}(U))$. Il résulte d'un théorème de [10] que $\varphi u \in T(\infty, \theta\,;\ W^{1,p}(U), L^{p}(U))$ donc en utilisant la caractérisation par [6] de ce dernier espace on voit que $\varphi u \in L^{p}(U)$ et

$$t^{\theta-1}\left(\int_{0}^{+\infty} |\,\varphi u(x+t) - \varphi u(x)\,|^{p}\, dx\right)^{1/p} \leq M$$

pour $t > 0$ et grâce à [5] φu est continue quand $(1-\theta)p > 1$. Comme φ est $\equiv 1$ dans (a, b), u est continue dans (a, b) et comme a et b sont quelconques le théorème est démontré.

REMARQUE 5.1 : Il existe des fonctions de $T(q, \alpha\,;\ W_{\mu}^{1,p}(U), L_{\mu}^{p}(U))$ qui ne sont pas continues *dans* U lorsque $1-\theta < \dfrac{1}{p}$ (par exemple la fonction égale à 1 dans (1,2) et nulle ailleurs).

5*b*) Nous étudions à présent la continuité dans $\overline{U}$, et plus particulièrement au voisinage de l'origine :

THÉORÈME 5.2 : *Si* $o \leq \mu < p-1$ *et* $\dfrac{\mu+1}{p} < 1-\theta < 1$, *les fonctions de* $T(q, \alpha\,;\ W_{\mu}^{1,p}(U),\ L_{\mu}^{p}(U))$ *sont continues dans* $\overline{U}$, *et l'application* $u \longrightarrow u(0)$ *est continue.*

DÉMONSTRATION : De l'inclusion

$$T(q, \alpha\,;\, W_\mu^{1,p}(U), L_\mu^p(U)) \subset T(\infty, \theta\,;\, W_\mu^{1,p}, L_\mu^p(U))$$

cf. [10] on deduit l'inégalité suivante

$$\max_{t\geq 0} t^{\theta-1}\left(\int_0^{+\infty} |\, u(t+s) - u(s)\,|^p\, s^\mu\, ds\right)^{1/p} \leq C^{te}\, \|\, u\, \|_{T(q,\,\alpha\,;\, W_\mu^{1,p}(U),\, L_\mu^p(U))}$$

vraie pour toute fonction u dans $T(q, \alpha\,;\, W_\mu^{1,p}(U), L_\mu^p(U))$.

Supposons à présent que $u \in \mathcal{D}(\bar{U})$, on a alors (cf. [5])

$$u(x) = \frac{1}{h}\int_0^h u(x+t)\, dt + \int_0^h \frac{1}{t^2}\int_0^t [u(x+s) - u(x+t)]\, ds\, dt = I_1 + I_2$$

où h est un nombre positif fixé quelconque. On a les majorations suivantes

$$|\, I_1\,| \leq \frac{1}{h}\left(\int_0^h |\, u(x+t)\,|^p\, t^\mu\, dt\right)^{1/p}\left(\int_0^h t^{-\mu p'/p}\, dt\right)^{1/p'} \leq$$

$$\leq C^{te}\left(\int_0^{+\infty} |\, u(x)\,|^p\, x^\mu\, dx\right)^{1/p} \quad \text{car } \mu < p-1$$

$$|\, I_2\,| \leq \int_0^h ds \int_s^h \frac{1}{t^2}\, |\, u(x+s) - u(x+t)\,|\, dt =$$

$$= \int_0^h ds \int_0^{h-s} \frac{1}{(y+s)^2}\, |\, u(x+s) - u(x+s+y)\,|\, dy$$

$$= \int_0^h dy \int_0^{h-y} \frac{1}{(y+s)^2}\, |\, u(x+s+y) - u(x+s)\,|\, ds \leq$$

$$\int_0^h \left(\int_0^{h-y} |\, u(x+s+y) - u(x+s)|^p\, (x+s)^\mu\, ds\right)^{1/p}\left(\int_0^{h-y} (x+s)^{-\mu p'/p}\, (y+s)^{-2p'} ds\right)^{1/p'} dy$$

$$\leq C^{te} \max_{t\geq 0} t^{\theta-1}\left(\int_0^{+\infty} |\, u(t+s) - u(s)\,|^p\, s^\mu\, ds\right)^{1/p}$$

où la constante est majorée par

$$\int_0^h y^{1-\theta}\left(\int_0^{h-y} s^{-\mu p'/p}(y+s)^{-2p'}\,ds\right)^{1/p'} dy <$$

$$\left(\int_0^h y^{1-\theta-(\mu/p)-2+(1/p')}\,dy\right)\left(\int_0^{+\infty}(1+s)^{-2p'}\,s^{-\mu p'/p}\,ds\right)^{1/p'} < +\infty$$

$$\text{car } 1-\theta-(\mu/p)-2+(1/p') = -\theta-\frac{\mu+1}{p} > -1,$$

$$-\mu p'/p > -1 \quad \text{et} \quad -2p'-(\mu p'/p) < -1$$

puisque $1-\theta > \dfrac{\mu+1}{p}$ et $\mu < p-1$.

Des majorations précédentes on déduit l'existence d'une constante C telle que $\max\limits_{x\geqq 0} |u(x)| \leq C \| u \|_{T(q,\alpha;\, W_\mu^{1,p}(U),\, L_\mu^p(U))}$ pour toute u dans $\mathcal{D}(\overline{U})$ et comme $\mathcal{D}(\overline{U})$ est dense dans $T(q,\alpha;\, W_\mu^{1,p}(U), L_\mu^p(U))$ toute fonction de cet espace est limite uniforme dans $\overline{U}$ de fonctions continues ; le théorème est démontré. (On a même démontré l'inclusion (algebrique et topologique) $T(q,\alpha;\, W_\mu^{1,p}(U), L_\mu^p(U)) \subset C_0^0(\overline{U})$, ce dernier espace désignant l'espace des fonctions continues dans $\overline{U}$ qui tendent vers 0 quand $x \to +\infty$, muni, de la topologie de la convergence uniforme dans $\overline{U}$).

Lorsque $\mu < 0$ on a le résultat suivant

THÉORÈME 5.2′: *Si* $\mu < 0$ *et* $\dfrac{1}{p} < 1-\theta < 1$, *les fonctions de* $T(q,\alpha;\, W_\mu^{1,p}(U), L_\mu^p(U))$ *sont continues dans* $\overline{U}$ *et l'application* $u \to u(0)$ *est continue.*

DÉMONSTRATION : Soit φ une fonction de $\mathcal{D}(\overline{U})$, $\equiv 1$ dans $(0, a)$; l'application $u \to \varphi u$ est continue de $L_\mu^p(U)$ dans $L^p(U)$ et de $W_\mu^{1,p}(U)$ dans $W_\mu^{1,p}(U)$, donc aussi de $T(q,\alpha;\, W_\mu^{1,p}(U), L_\mu^p(U))$ dans $T(q,\alpha;\, W^{1,p}(U), L^p(U))$. Utilisant le théorème 5.2 on voit que si $u \in T(q,\alpha;\, W_\mu^{1,p}(U), L_\mu^p(U))$ alors φu est continue dans $\overline{U}$ et par conséquent u est continue dans (o, a) ; comme a est quelconque, le théorème est démontré.

n⁰ 6. **Operateur** γ :

Quand $U =]0, +\infty[$, on a défini au n⁰ 5 l'opération $u \longrightarrow u(0)$ pour u dans $T(q, \alpha; W^{1,p}_{\mu}(U), L^p_{\mu}(U))$ $\left(1-\theta > \frac{\mu+1}{p} \text{ si } \mu > o, 1-\theta > \frac{1}{p} \text{ si } \mu \leq 0\right.$ où $\left.\theta = \alpha + \frac{1}{q}\right)$; comme il est facile de le vérifier cette opération est le prolongement par continuité de l'opération $u \longrightarrow u(0)$ définie dans $\mathcal{D}(\overline{U})$, à $T(q, \alpha; W^{1,p}_{\mu}(U), L^p_{\mu}(U))$.

Considérant maintenant le cas $U = R^n_+$, n quelconque et $p = q$ nous avons le

Théorème 6.1 : *Pour* $1 - \theta > \frac{\mu+1}{p}$ $(-1 < \mu < p-1)$, *l'application* $u \longrightarrow u(x_1, \dots x_{n-1}, 0)$ *de* $\mathcal{D}(\overline{U})$ *dans* $L^p(dU)$ *se prolonge par continuité en une application linéaire continue de* $W^{1-\theta,p}_{\mu}(U)$ *dans* $L^p(dU)$, *notée* $u \longrightarrow \gamma u$ (28).

Ce théorème résulte du

Lemme 6.1 : *Pour* $-1 < \mu < p-1$, *l'application*

$$u(x_1, \dots x_n) \longrightarrow Tu(x_1, \dots x_n) =$$

$$\varphi(x_n)(1/x_n^n) \int_0^{x_n} \cdots \int_0^{x_n} u(x_1 + t_1, \dots x_{n-1} + t_{n-1}, t_n)\, dt_1 \dots dt_n$$

est linéaire continue de $W^{1-\theta,p}_{\mu}(U)$ *dans* $W^{1,p}_{\mu+\theta p}(U)$ (29).

Alors utilisant la proposition 1.1′ nous voyons que si $\mu + \theta p < p - 1$ $\left(\text{i.e. } 1-\theta > \frac{\mu+1}{p}\right)$, l'application $u \longrightarrow \lim\limits_{x_n \to 0} Tu(x_1, \dots x_n)$ est linéaire continue de $W^{1-\theta,p}_{\mu}(U)$ dans $L^p(dU)$ et le résultat suit en remarquant que si $u \in \mathcal{D}(\overline{U})$ on a $\lim\limits_{x_n \to 0} Tu(x_1, \dots x_{n-1}, x_n) = u(x_1, \dots x_{n-1}, 0)$.

Démonstration du lemme 6.1 :

Il *suffit* de vérifier

a) que T est application linéaire continue de $L^p_{\mu}(U)$ dans $W^{1,p}_{\mu+p}(U)$

b) que T est application linéaire continue de $W^{1,p}_{\mu}(U)$ dans $W^{1,p}_{\mu}(U)$

---

(28) Lorsque $n = 1$ il faut remplacer $L^p(dU)$ par C.

(29) φ est une fonction de $\mathcal{D}([0, +\infty[)$ qui est $\equiv 1$ dans un voisinage de l'origine.

c) que $T(p, \alpha\,;\, W^{1,p}_{\mu}(U)\,;\, W^{1,p}_{\mu+p}(U)) \subset W^{1,p}_{\mu+\theta p}(U)$, $\qquad \theta = \alpha + \dfrac{1}{p}$

(on en déduira que T est linéaire continue de

$$W^{1-\theta,\,p}_{\mu}(U) = T(p, \alpha\,;\, W^{1,p}_{\mu}(U),\, L^p_{\mu}(U)) \text{ dans } W^{1,p}_{\mu+\theta p}(U)\,; \text{ C. Q. F. D.)}$$

Vérification de a): (on suppose $n = 2$, pour simplifier l'écriture)

On pose $v(x_1, x_2) = \dfrac{1}{x_2^2} \displaystyle\int_0^{x_2}\int_0^{x_2} u(x_1 + t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2$

on a $\dfrac{\partial v}{\partial x_1} = \dfrac{1}{x_2^2}\displaystyle\int_0^{x_2} (u(x_1 + x_2, t_2) - u(x_1, t_2))\, dt_2$

$$\text{et } \frac{\partial v}{\partial x_2} = -\frac{2}{x_2^3}\int_0^{x_2}\int_0^{x_2} u(x_1+t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2 + \frac{1}{x_2^2}\int_0^{x_2} u(x_1 + x_2, t_2)\, dt_2$$
$$+ \frac{1}{x_2^2}\int_0^{x_2} u(x_1 + t_1, x_2)\, dt_1$$

Si on pose $I(x_2) = \dfrac{1}{x_2}\displaystyle\int_0^{x_2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\, u(x_1, t_2)\,|^p\, dx_1\right)^{1/p} dt_2$

$$\text{on a } \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\, v(x_1, x_2)\,|^p\, dx_1\right)^{1/p} \leq I(x_2) \tag{6.1}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1, x_2)\right|^p dx_1\right)^{1/p} \leq \frac{2}{x_2} I(x_2) \tag{6.2}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right|^p dx_1\right)^{1/p} \leq \frac{3}{x_2} I(x_2) + \frac{1}{x_2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\, u(x_1, x_2)\,|^p\, dx_1\right)^{1/p} \tag{6.3}$$

Il résulte de l'inégalité de Hardy que $\displaystyle\int_0^{+\infty} I(x_2)^p\, x_2^{\mu}\, dx_2 \leq \|\, u\,\|^p_{L^p_{\mu}(U)}$ et comme $Tu(x_1, x_2) = \varphi(x_2)\, v(x_1, x_2)$ le point *a*) est démontré

Vérification de b):

v ayant toujours la même signification ou utilise cette fois les identités :

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{1}{x_2^2}\int_0^{x_2}\int_0^{x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1 + t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{x_2^3}\int_0^{x_2}\int_0^{x_2}\left(t_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}(t_1 + x_1, t_2) + t_2 \frac{\partial u}{\partial x_2}(t_1 + x_1, t_2)\right) dt_1\, dt_2$$

on en déduit les majorations suivantes :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |v(x_1, x_2)|^p\, dx_1\right)^{1/p} \leq I(x_2) = \frac{1}{x_2}\int_0^{x_2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x_1, t_2)|^p\, dx_1\right)^{1/p} dt_2 \tag{6.4}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1, x_2)\right|^p dx_1\right)^{1/p} \leq J(x_2) = \frac{1}{x_2}\int_0^{x_2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, t_2)\right|^p dx_1\right)^{1/p} dt_2 \tag{6.5}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right|^p dx_1\right)^{1/p} \leq \frac{1}{2} J(x_2) + K(x_2) \tag{6.6}$$

$$K(x_2) = \frac{1}{x_2^2}\int_0^{x_2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, t_2)\right|^p dx_1\right)^{1/p} t_2\, dt_2 \tag{6.7}$$

et il résulte à nouveau de l'inégalité de Hardy que

$$\int_0^{+\infty} I(x_2)^p\, x_2^\mu\, dx_2 \leq \| u \|^p_{L^p_\mu(U)} \qquad \int_0^{+\infty} J(x_2)^p\, x_2^\mu\, dx_2 \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|^p_{L^p_\mu(U)}$$

et

$$\int_0^{+\infty} K(x_2)^p\, x_2^\mu\, dx_2 \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\|^p_{L^p_\mu(U)}$$

et le point b) est démontré.

c) L'inclusion à démontrer résulte immédiatement de l'inclusion

$$T(p, \alpha\,;\, L^p_\mu(U), L^p_{\mu+p}(U)) \subset L^p_{\mu+\theta p}(U)$$

qui est facile à vérifier.

n[0] 7. Théorème de trace :

A présent il se pose le problème naturel de déterminer l'image de $W_\mu^{1-\theta,p}(U)$ par γ. Posons d'abord quelques définitions :

DÉFINITION 7.1 : *On désigne par* $W_\mu^{m,p}(U)$ *l'espace des fonctions de* $L_\mu^p(U)$ *dont toutes les dérivées d'ordre* $\leq m$ *sont dans* $L_\mu^p(U)$ *muni de la norme* $\| u \|^p_{W_\mu^{m,p}(U)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_U | D^\alpha u(x) |^p x_n^\mu \, dx$ [30].

DÉFINITION 7.2 : *Pour s réel positif non entier de partie entière* $\bar{s}$ *on désigne par* $W_\mu^{s,p}(U)$ *l'espace* $T(p, \alpha;\ W_\mu^{\bar{s}+1,p}(U),\ W_\mu^{\bar{s},p}(U))$ *avec* $\alpha + \dfrac{1}{p} = \bar{s} + 1 - s$.

DÉFINITION 7.3 : *On pose* $B^{s,p}(R^k) = W^{s,p}(R^k)$ *pour s réel positif non entier ; on désigne par* $B^{1,p}(R^k)$ *l'espace des fonctions* $u \in L^p(R^k)$ *telles que*

$$\left(\int_0^{+\infty} t^{-p-1} \int_{R^k} | u(x_1, \dots x_i + t, \dots x_k) + u(x_1, \dots x_i - t, \dots x_k) - \right.$$

$$\left. - 2u(x_1, \dots x_i, \dots x_k) |^p \, dx_1 \dots dx_k \, dt \right)^{1/p} = N_i(u) < + \infty \qquad i = 1, \dots k$$

muni de la norme :

$$\| u \|_{B^{1,p}(R^k)} = \| u \|_{L^p(R^k)} + \sum_{i=1}^{k} N_i(u).$$

Enfin pour tout entier $m \geq 2$, $B^{m,p}(R^k)$ *est l'espace des fonctions u de* $W^{m-1,p}(R^k)$ *dont toutes les dérivées d'ordre* $m - 1$ *sont dans* $B^{1,p}(R^k)$ *muni de la norme*

$$\| u \|_{B^{m,p}(R^k)} = \| u \|_{W^{m-1,p}(R^k)} + \sum_{\substack{i = 1 \dots k \\ |\alpha| = m-1}} N_i(D^\alpha u).$$

---

[30] Pour un multi-indice $\alpha = \{\alpha_1, \dots \alpha_k\}$ dont les compasantes sont des nombre entiers positifs on pose $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_k^{\alpha_k}}$, où $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots \alpha_k$.

Tous les espaces que nous venons de définir sont des espaces de Banach. Le résultat suivant dû à [11] justifie l'introduction des espaces B: Lorsque $0 < s < 1$ et $1 = s + 1 - \left(\alpha + \frac{1}{p}\right)$, nous avons

$$T(p, \alpha ;\ W^{s+1, p}(R^k),\ W^{s, p}(R^k)) = B^{1, p}(R^k)$$

et nous avons donc la règle suivante:

$$T(p, \alpha ;\ B^{s_1, p}(R^k),\ B^{s_0, p}(R^k)) = B^{s, p}(R^k)$$

avec $s = \theta s_0 + (1 - \theta) s_1$, $\theta = \alpha + \frac{1}{p}$, pour $0 < s_0 < s_1$.

Nous pouvons à présent démontrer le

THÉORÈME 7.1: *Pour* $-1 < \mu < p - 1$ *et* $s > \frac{\mu + 1}{p}$, *l' operateur* γ *applique* $W_\mu^{s, p}(U)$ *sur* $B^{s - \frac{\mu+1}{p}, p}(dU)$.

(lorsque $\mu = 0$ on retrouve un théorème de Uspenskii [16])

DÉMONSTRATION:

Il résulte de la définition même des espaces $W^{1-\frac{\mu+1}{p}, p}(dU)$ que γ applique $W_\mu^{1, p}(U)$ sur $W^{1-\frac{\mu+1}{p}, p}(dU)$.

a) nous démontrons le théorème pour $s < 1$: Nous savons grâce au lemme 6.1 que T applique continûment $W_\mu^{1-\theta, p}(U)$ dans $W_{\mu+\theta p}^{1, p}(U)$ et que $\gamma Tu = \gamma u$ par définition (théorème 6.1), donc γ applique $W_\mu^{1-\theta, p}(U)$ *dans* $W^{1-\theta-\frac{\mu+1}{p}, p}(dU)$ pour $\frac{\mu + 1}{p} < 1 - \theta < 1$.

Il reste à montrer la surjectivité; ce qui ést conséquence du

LEMME 7.1: *Pour* $-1<\mu<p-1$, *on a les inclusions* $W_\mu^{1, p}(U) \subset W_{\mu-p(\theta)}^{1-\theta, p}(U)$ *pour tout* $\theta \in]0, 1[$ *et* $\mu - \theta p > -1$.

Nous admettons provisoirement ce lemme (qui est voisin d'un théorème de Uspenskii [15]); utilisant [8] nous savons qu'il existe une application linéaire continue que nous noterons S, de $W^{r, p}(dU)$ dans $W_{p(1-r)-1}^{1, p}(U)$ telle que $\gamma Sf = f$ pour toute f dans $W^{r, p}(dU)$ $(0 < r < 1)$. Alors si nous considérons s et μ tels que $\frac{\mu + 1}{p} < s < 1$, S applique $W^{s-\frac{\mu+1}{p}, p}(dU)$ dans $W_{\mu+p(1-s)}^{1, p}(U)$ donc grâce au lemme dans $W_\mu^{s, p}(U)$, c'est à dire que nous avons construit un inverse à droite pour l'opérateur γ considéré comme application de $W_\mu^{s,p}(U)$ dans $W^{s-\frac{\mu+1}{p},p}(dU) = B^{s-\frac{\mu+1}{p},p}(dU)$ et le point *a*) est démontré.

b) Nous démontrons maintenant le cas $s > 1$: Comme on a l'inclusion $W_\mu^{s,p}(U) \subset W_\mu^{1,p}(U)$ γu est défini pour toute u dans $W_\mu^{s,p}(U)$. Il résulte de [10] que γ applique $W_\mu^{m,p}(U)$ dans $W^{m-\frac{\mu+1}{p},p}(dU)$ pour m entier ≥ 1, donc par interpolation γ applique $W_\mu^{s,p}(U)$ *dans* $B^{s-\frac{\mu+1}{p},p}(dU)$ pour $s > 1$. Réciproquement, utilisant [8] nous savons qu'il existe une application linéaire continue S de $W^{m-\frac{\mu+1}{p},p}(dU)$ dans $W_\mu^{m,p}(U)$ pour m entier ≥ 1, telle que $\gamma S f = f$ pour toute f dans $W^{m-\frac{\mu+1}{p},p}(dU)$, donc par interpolation S applique $B^{s-\frac{\mu+1}{p},p}(dU)$ dans $W_\mu^{s,p}(U)$ pour tout $s > 1$, donc γ applique $W_\mu^{s,p}(U)$ *sur* $B^{s-\frac{\mu+1}{p},p}(dU)$. Le théorème est démontré sous réserve de vérifier le lemme.

DÉMONSTRATION DU LEMME 7.1 : Nous fixons u dans $W_\mu^{1,p}(U)$ et nous posons $F(x_1, \dots x_n, t) = u(x_1, \dots, x_n + t)$ pour $x = (x_1, \dots x_n) \in R_+^n$ et $t \geq 0$, et nous allons montrer que :

$$F \in W(p, \alpha,\ W^{1,p}_{\mu-p(\theta)}(U), L^p_{\mu-p(\theta)}(U)) \qquad (U = R_+^n)$$

Il suffit de vérifier que

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha p} \int_0^{+\infty} x_n^{\mu-\theta p} \int_{R^{n-1}} | u(x_1, \dots x_{n-1}, x_n + t)|^p \, dx_1 \dots dx_n \, dt < +\infty$$

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha p} \int_0^{+\infty} x_n^{\mu-\theta p} \int_{R^{n-1}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots x_{n-1}, x_n + t)\right|^p dx_1 \dots dx_n \, dt < +\infty \qquad \text{pour } i = 1, \dots n$$

avec $\theta = \alpha + \dfrac{1}{p}$. Ces deux inégalités sont conséquence de l'inégalité élémentaire qui suit:

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha p} \int_0^{+\infty} x^{\mu-\theta p} f(x+t) \, dx \, dt = \int_0^{+\infty} t^{\alpha p} \int_t^{+\infty} (x - t)^{\mu-\theta p} f(x) \, dx \, dt =$$

$$\int_0^{+\infty} f(x) \int_0^x t^{\alpha p} (x - t)^{\mu - \theta p} \, dt \, dx \leq C^{te} \int_0^{+\infty} f(x) \, x^{\alpha p + \mu - \theta p + 1} \, dx =$$

$$C^{te} \int_0^{+\infty} f(x) \, x^{\mu} \, dx \left(\text{rappelons que } \alpha + \frac{1}{p} > 0 \text{ et } \mu - \theta p > -1 \right)$$

le lemme est démontré.

n⁰ 8. Cas de U ouvert borné régulier.

Pour U ouvert borné de R^n et $x \in U$ on note $f(x) = d(x, dU)$. Alors $L^p_\mu(U)$ désigne l'espace des fonctions définies dans U qui sont mesurables et de puissance $p^{\text{iéme}}$ sommable pour la mesure $f(x)^\mu \, dx$ où dx désigne la mesure de Lebesgue dans U. Ensuite si m est un entier positif $W^{m,p}_\mu(U)$ désigne le sous-espace des fonctions de $L^p_\mu(U)$ dont toutes les dérivées d'ordre $\leq m$ sont dans $L^p_\mu(U)$. Enfin pour s positif non entier de partie entière $\bar{s}$, $W^{s,p}_\mu(U) = T(p, \alpha; W^{\bar{s}+1,p}(U), W^{\bar{s},p}(U))$ avec $\alpha + \dfrac{1}{p} = \bar{s} + 1 - s$.

Si nous faisons sur U *l'hypothèse* suivante:

U est un ouvert borné de R^n de frontière dU variété une fois continûment différentiable de dimension $n - 1$, U étant d'un seul côté de dU:

Alors *tous les résultats énoncés sous forme de théorèmes* dans les n⁰ 1, 2, 3, 4 et 6 sont vrais sans modification d'énoncé (à l'exception toutefois du théorème 6.1, dans lequel les modifications à apporter sont évidentes)

Nous ne donnons pas les démonstrations: on se ramène au cas déjà traité (i. e. $U = R^n_+$) par cartes locales en utilisant le caractère local ([31]) de tous les espaces introduits suivant à peu pres les mêmes idées que pour $\mu = 0$.

Enfin le théorème 7.1 doit étre remplacé par le

THÉORÈME 8.1: *Pour* $-1 < \mu < p - 1$, $s > \dfrac{\mu + 1}{p}$, *et si U est un ouvert borné de R^n de frontière dU variété $\bar{s} + 1$ fois continûment différentiable de dimension $n - 1$, U étant d'un seul côté de dU alors l'opérateur γ applique* $W^{s,p}_\mu(U)$ *sur* $B^{s - \frac{\mu+1}{p}, p}(dU)$ ([32]).

([31]) On dit qu'un espace $E(U)$ de fonctions dans U est de type local si pour u dans $E(U)$ et φ dans $\mathcal{D}(\bar{U})$ on a $\varphi u \in E(U)$.

([32]) Par définition $B^{m,p}(dU) = T\left(p, \frac{1}{2} - \frac{1}{p}; W^{m+1,p}(dU), W^{m-1,p}(dU)\right)$ pour m entier ≥ 1. De même par définition on a

$$B^{s,p}(dU) = W^{s,p}(dU) = T(p, \alpha; W^{\bar{s}+1,p}(dU), W^{\bar{s},p}(dU)) \text{ avec } \alpha + \frac{1}{p} = \bar{s} + 1 - s$$

pour s réel non entier de partie entière $\bar{s}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. ARONSZJAN-G. H. HARDY: *On a class of double integrals,* Annals of Math. Vol. 46 (1945) p. 220-241.

[2] N. BOURBAKI: *Espaces vectoriels topologiques,* A. S. I. 1229 Paris Herman (1955).

[3] J. DENY-J. L. LIONS: *Les espaces du type de Beppo Levi.* Ann. Inst. Fourier 5 (1955) p. 305-370.

[4] G.. H. HARDY-J. E. LITTLEWOOD- G. POLYA: *Inequalities,* Cambridge University Press (1934).

[5] V. P. Il'in: *Sur un théorème de Hardy et Littlewood,* Trudy matematiceskogo Instituta Steklova (1959) tome 53 p. 128-144.

[6] J. L. LIONS: *Théorème de trace et d'interpolation (I),* Annali Scuola Normale Sup. Pisa XIII (1959) p. 389-403.

[7] J. L. LIONS *Sur les espaces d'interpolation, dualité,* Math. Scand. 9 (1961) p. 147-177.

[8] J. L. LIONS: *Théorème de trace et d'interpolation (IV)* Math. Annalen 151 (1963) p. 42-56.

[9] J. L. LIONS-E. MAGENES: *Problèmes aux limites non homogènes (IV),* Annali Scuola Norm. Sup. Pisa XV (1961) p. 311-326.

[10] J. L. LIONS-J. PEETRE: *Propriétés d'espaces d'interpolation,* C. R. Acad. Sc. Paris t. 253 (1961) p. 1747-1749.

[11] J. L. LIONS-J. PEETRE: *Sur une classe d'espaces d'interpolation, à paraitre aux publications de l'institut des Hautes. Etudes Scientifiques, Paris.*

[12] J. NEČAS: *Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationelle,* Journal tchecoslovaque de Math. t. 11 (86) 1961 p. 632-633.

[13] R. S. PHILLIPS: *On weakly compact subsets of a Banach space* Amer. J. of Math. 65 (1943), p. 108-136.

[14] L. SCHWARTZ: *Théorie des distributions* A. S. I. 1222 et 1245 Paris Herman.

[15] S. V. USPENSKI: *Théorèmes de plongement pour des classes avec poids,* Trudy matematiceskogo Istituta Steklova (1961) tome 61 p. 283-303.

[16] S. V. USPENSKI: *Théorèmes de plongement pour les classes généralisées* W_p^r *de* L. S. Sobolev, Sibirskii Mat. Jurnal (1962) tome 3 p. 418-445.

SANDRO FAEDO - *Direttore responsabile.* Finito di stampare il 5 dicembre 1963