ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

CALOGERO VINTI

Sopra una definizione dell'integrale multiplo del calcolo delle variazioni in forma ordinaria

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 17, nº 1-2 (1963), p. 79-96
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1963_3_17_1-2_79_0>

SOPRA UNA DEFINIZIONE DELL'INTEGRALE MULTIPLO DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI IN FORMA ORDINARIA

di CALOGERO VINTI (*)

1. Introduzione. J. Serrin (1) nello studiare l'integrale

$$I[u]=\int_R f(x, y, u, p, q)\, dx\, dy,$$

relativamente ad alcuni problemi di minimo del Calcolo delle Variazioni, ha proposto per esso la seguente definizione:

Sia R una regione aperta limitata (2) *del piano* (x, y) *ed* $f(x, y, u, p, q)$ *una funzione, non negativa, continua per* $(x, y) \in R$, u, p, q *qualunque.*

Se $u(x, y)$ *è una funzione continua in* R *si definisce*

$$I_C[u] = \text{estr.}\ \underset{[k]}{\text{inf.}}\ \varliminf_{n\to\infty} \int_{R_n} f(x, y, u_n, u_{n,x}, u_{n,y})\, dx\, dy, \tag{1}$$

ove $[K]$ *denota la collezione di tutte le successioni* $\{u_n(x, y)\}$ *che godono delle seguenti proprietà :*

1⁰) $u_n(x, y)$, $n = 1, 2, \ldots$, *sia di classe* C^1 *in una regione chiusa* $R_n \subset R$;

2⁰) $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = R$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \ \underset{(x,y)\in R_n}{\text{Max}} \ | u(x, y) - u_n(x, y) | = 0.$

(*) Istituto di Matematica dell'Università di Modena.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca N⁰. 18 del Comitato per la Matematica del. C. N. R. (anno accademico 1962-63).

(1) J. SERRIN: *A new definition of the integral for non parametric problems in calculus of variations.* Acta Math., 102, 1959, 23-32.

J. SERRIN: *On a fundamental theorem of the calculus of variations.* Acta Math; 102, 1959, 1-22.

(2) L'ipotesi che R sia limitata, come vedremo, non è una restrizione ai fini della nostra ricerca, e inoltre le considerazioni che facciamo per R 2-dimensionale si estendono, con un'alterazione soltanto formale, al caso n-dimensionale.

In un nostro lavoro ([3]) abbiamo osservato che tale definizione presenta gli stessi inconvenienti della definizione di area alla Lebesgue, di cui essa è generalizzazione diretta, e tenendo presente che tali inconvenienti sono rimediati dai noti teoremi di approssimazione in area con le medie integrali (T. Radò ([4]), C. Goffman ([5]), C. Vinti ([6])), ci siamo ricollegati a un'idea di E. Baiada ([7]) e abbiamo proposto, per l'integrale del Calcolo delle Variazioni, una definizione come generalizzazione delle dette proposizioni di approssimazione in area. La definizione proposta era la seguente:

Con le stesse ipotesi per R, f, u, si ponga:

$$I_B[u] = \lim_{D \to R} \lim_{h \to 0} \int_D f(x, y, u^{(h)}, u_x^{(h)}, u_y^{(h)})\, dx\, dy, \tag{2}$$

con D regione chiusa in R, ed $u^{(h)}$, funzione media integrale della u, definita dalla:

$$u^{(h)}(x, y) = \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} u(x + \varrho, y + \eta)\, d\varrho\, d\eta,$$

che, per h sufficientemente piccolo, è di classe C^1 in D.

In vista della circostanza che l'integrale $I_B[u]$ potesse fornire un algoritmo per il calcolo di $I_C[u]$, abbiamo mostrato ([8]) l'equivalenza tra le definizioni $I_B[u]$ ed $I_C[u]$, ma limitatamente al caso che f soddisfi le proprietà:

i) *per* $(x, y, u), (x, y) \in R$, *u qualunque*, $f(x, y, u, p, q)$ *risulti convessa in senso lato, secondo Jensen, rispetto a* (p, q), *cioè si abbia:*

$$f\left(x, y, u, \frac{p_1 + p_2}{2}, \frac{q_1 + q_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \{f(x, y, u, p_1, q_1) + f(x, y, u, p_2, q_2)\},$$

comunque si scelgano le coppie $(p_1, q_1), (p_2, q_2)$;

([3]) C. VINTI: *L'integrale multiplo del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria come generalizzazione dell'approssimazione dell'area di una superficie* Rend. Seminario Mat. Padova, XXXI, 1961, 266-280.

([4]) T. RADÒ: *Length and Area.* American Math. Society Colloquium Pubblications, vol. XXX, 1948, th. V. 3. 7.

[5]) C. GOFFMAN: *Convergence in area of integral means.* Amer. J. Math. 77, 1955, 563-574.

([6])C. VINTI: *Sopra una classe di funzionali che approssimano l'area di una superficie.* Annali Mat. Pura. Appl. (4), 48, 1959. 237-255.

([7]) E. BAIADA - G. TRIPICIANO: *Un integrale analogo a quello di Weierstrass nel Calcolo delle Variazioni in una variabile.* Rend. Cir. Mat. Palermo. VII, 1958, 1-8

([8]) Tale proposizione, quando f soddisfa le i), ii), la chiameremo proposizione (A).

ii) *per ogni compatto* S *dello spazio* (x, y, u), *avente proiezione* $S_{x,y}$ (*sul piano* (x, y)) in R, *esista una costante* $M(S)$ *tale che risulti :*

$$|f(x_1, y_1, u_1, p, q) - f(x_2, y_2, u_2, p, q)| \leq$$
$$\leq M(S)\{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |u_1 - u_2|\},$$

comunque si scelgano i punti (x_1, y_1, u_1), (x_2, y_2, u_2) *in* S *e qualunque siano* p, q;

oppure la proprietà :

I) $f(x, y, u, p, q)$ *risulti convessa in senso tato, secondo Jensen, rispetto al complesso delle sue variabili, cioè si abbia :*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{u_1 + u_2}{2}, \frac{p_1 + p_2}{2}, \frac{q_1 + q_2}{2}\right) \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\{f(x_1, y_1, u_1, p_1, p_1) + f(x_2, y_2, u_2, p_2, q_2)\},$$

comunque si scelgano $(x_1, y_1, u_1, p_1, q_1)$, $(x_2, y_2, u_2, p_2, q_2)$, *con* $(x_1, y_1) \in R$, $(x_2, y_2) \in R$.

Contemporaneamente al nostro lavoro [9] J. Serrin nello studiare alcune definizioni dell'integrale del Calcolo delle Variazioni ha mostrato [10] che :

(S). *Se* $u(x, y)$ *è uniformemente continua in* R [11] *ed* $f(x, y, u, p, q)$ *soddisfa le condizioni :*

α) $f(x, y, u, p, q)$ *goda della proprietà* i) ;

β) *esista un modulo di continuità* $\lambda(\sigma)$ *tale che, comunque si scelgano* (x, y, u, p, q), $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, p, q)$, *con* $(x, y) \in R$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in R$, $u, \bar{u}, p, q$ *qualunque, si abbia :*

$$|f(x, y, u, p, q) - f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, p, q)| \leq$$
$$\leq \lambda(|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}| + |u - \bar{u}|)\{1 + f(x, y, u, p, q)\};$$

risulta [12] *:*

$$\lim_{h \to \infty} I[u_h, R_h] = I_C[u], \tag{3}$$

---

[9] Lavoro citato in nota 3).

[10] J. SERRIN : *On the definition and properties of certain variational integrals.* Trans. Amer. Math. Soc. 101, 1, 1961, 139-167, teorema 6.

[11] Tale proposizione sarà d'ora in avanti denotata proposizione (S) o teorema (S).

[12] Tale proposizione (S) è stata dimostrata da J. SERRIN per un altro funzionale, da lui introdotto e denotato $J[u]$, ma come vedremo al N. 2, sotto la sola ipotesi della continuità di $u(x, y)$ in R, è $J[u] = I_c[u]$.

essendo: R_h la regione aperta, sottoinsieme di R, con la proprietà che ogni punto della frontiera di R_h dista h dalla frontiera di R; u_h la funzione media (13) *della u, definita dalla:*

$$u_h(x) = \int K_h(\xi - x)\, u(\xi)\, d\xi,$$

con $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ punto variabile del piano (x, y), $x = (x_1, x_2) \in R_h$, e con il nucleo $K_h(\xi)$ non negativo, regolare in tutti i punti ξ, identicamente nullo per $|\xi| \geq h$ e tale che $\int K_h(\xi)\, d\xi = 1$; $I[u_h, R_h]$ l'integrale della $f(x_1, x_2, u_h,$ $u_{h,x_1}, u_{h,x_2})$ su R_h definito dalla $I[u_h, R_h] = \lim\limits_{D \to R_h} \int_D f(x_1, x_2, u_h, u_{h,x_1}, u_{h,x_2})\, dx_1\, dx_2$, con D regione chiusa che invade R_h dall'interno.

Osserviamo intanto che, per il calcolo di $I_C[u]$, da un punto di vista formale, la (3) sembrerebbe più agevole della $I_B[u] = I_C[u]$, ma non lo è affatto se si tiene presente la definizione della $I[u_h, R_h]$; inoltre, se $u(x,y)$ è uniformemente continua in R ed f oltre alla i) soddisfa la ii), quando in quest'ultima la funzione $M(S)$ è limitata superiormente da una costante $N > 0$, risulta:

$$\lim_{h \to 0} I[u^{(h)}, R_h] = I_C[u],$$

e quindi si ritrova il risultato dato dalla proposizione (S) ma sotto condizioni più restrittive per la f.

Visto l'interesse che offre la nostra definizione $I_B[u]$ crediamo opportuno riprendere le considerazioni fatte per migliorare notevolmente la proposizione (A), facendo poi vedere che, quando $u(x, y)$ è uniformemente continua in R e le condizioni sulla f si restringono opportunamente, lo stesso procedimento dimostrativo, con dovuti accorgimenti, ci conduce a una proposizione che generalizza il teorema (S).

---

(13) Le medie $u^{(h)}$ adoperate da noi differiscono dalle medie u_h adoperate da J. SERRIN per il fatto che non posseggono un nucleo regolare, ma un nucleo di tipo impulsivo come hanno fatto vedere E. BAIADA - M. LOREFICE (*Generalizzazione Markoviana non stazionaria della definizione di perimetro.* Atti delle Celebrazioni Archimedee del XX secolo. Siracusa 1961).

Le $u^{(h)}$ sono meno regolari delle u_h e le considerazioni che faremo adoperando le $u^{(h)}$ si ripetono senza alterazione alcuna adoperando le u_h, ma non inversamente.

Al n. 2 premetteremo alcune considerazioni inerenti alle varie definizioni dell'integrale del Calcolo delle Variazioni proposte da J. Serrin e porremo una definizione.

Al N. 3 mostreremo la seguente proposizione:

Se $f(x, y, u, p, q)$ soddisfa la i) *e inoltre la limitazione data dalla* ii) *così modificata:*

$$ii) \qquad |f(x_1, y_2, u_1, p, q) - f(x_2, y_2, u_2, p, q)| \leq$$

$$\lambda_S(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |u_1 - u_2|)\, \Phi(x_1, y_1, u_1, p, q)$$

con $\lambda_S(\sigma)$ modulo di continuità e Φ ad integrale confrontabile con f(14), *risulta:*

$$I_B[u] = I_C[u].$$

Al N. 4 faremo vedere che:

Se $u(x, y)$ è uniformemente continua in R ed f oltre alla i) *soddisfa la ii), quando in quest'ultima la classe $\{\lambda_S(\sigma)\}$, al variare di S, è limitata superiormente da un modulo di continuità $\lambda(\sigma)$, risulta:*

$$\lim_{h \to 0} I[u^{(h)}, R_h] = I_C[u],$$

proposizione questa che comprende come caso particolare la proposizione (S).

Mostreremo anche che vale la precedente uguaglianza se $u(x, y)$ è continua in R ed f è convessa in senso lato, secondo Jensen, rispetto al complesso delle sue variabili, cioè soddisfa la I).

Al N. 5 daremo degli esempi

2. D'ora in avanti con R intenderemo un insieme aperto limitato del piano (x, y), e con $f(x, y, u, p, q)$ una funzione definita non negativa e continua per $(x, y) \in R$, u, p, q qualunque.

Definizione del funzionale $J[u]$. Se $u(x, y)$ è una funzione localmente sommabile in R si definisca:

$$J[u] = \underset{[K']}{\text{estr. inf.}} \varliminf_{n \to \infty} I[u_n, R_n]$$

ove $[K']$ denota la collezione di tutte le successioni $\{u_n(x, y)\}$ che godono delle seguenti proprietà:

(14) La definizione di funzione ad integrale confrontabile con f sarà data al N. 2.

I⁰) $u_n(x, y)$, $n = 1, 2, \ldots$, sia di classe C^1 in una regione aperta $R_n \subset R$, con $R_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} R$.

II⁰) per ogni compatto C risulti:

$$\lim_{n \to \infty} \int_C |u_n(x, y) - u(x, y)| \, dx \, dy = 0.$$

Definizione del funzionale $J_C[u]$. Se $u(x, y)$ è continua in R si definisca:

$$J_C[u] = \underset{[K'']}{\text{estr. inf.}} \varliminf_{n \to \infty} I[u_n, R_n],$$

ove $[K'']$ denota la collezione di tutte le successioni $\{u_n(x, y)\}$ che oltre a godere della proprietà I⁰) convengono uniformemente a $u(x, y)$ su ogni compatto $C \subset R$.

Facilmente si vede che per $u(x, y)$ continua in R risulta:

$$J[u] = J_C[u].$$

Basta osservare che è manifestamente:

$$J[u] \leq J_C[u],$$

e quindi l'uguaglianza è mostrata se si fa vedere che:

$$J_C[u] \leq J[u].$$

Detta infatti $\{u_n(x, y)\}$ una successione che goda delle proprietà I⁰), II⁰) e tale che (15):

$$\lim_{n \to \infty} I[u_n, R_n] = J[u],$$

denotiamo con $\{u'_n(x, y)\}$ una sottosuccessione della $\{u_n\}$ che converga quasi ovunque ad $u(x, y)$ in R (16), e, mediante questa, si costruisca (17) una successione $\{v_n(x, y)\}$, $(x, y) \in R_n$, $v_n(x, y) \in C^1$, che converga uniformemente ad $u(x, y)$

(15) Una tale successione esiste per un noto procedimento diagonale.

(16) Per l'esistenza di una tale successione Cfr. ad es. G. VITALI - G. SANSONE: ***Moderna teoria delle funzioni di variabile reale.*** Editore ZANICHELLI vol. I.

(17) La costruzione di una tale successione è stata data da J. SERRIN, lavoro citato in nota (1) pag. 30.

su ogni compatto C di R, e tale che:

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} I[v_n, R_n] \leq J[u] + \varepsilon,$$

con $\varepsilon > 0$ prefissato arbitrariamente.

Da qui segue:

$$J_C[u] \leq J[u].$$

In modo analogo si dimostra l'equivalenza tra le definizioni $J_C[u]$ ed $I_C[u]$.

Il teorema (S) di Serrin è, come abbiamo osservato in nota (12), dallo stesso autore libellato per il funzionale $J[u]$, ma vista l'equivalenza, quando $u(x, y)$ è continua in R, tra $J[u]$, $J_C[u]$ ed $I_C[u]$, non si lede la generalità se per le proposizioni che stabiliremo ci ricolleghiamo al funzionale $I_C[u]$ come s'è fatto nell'introduzione.

DEFINIZIONE I. Una funzione $\Phi(x, y, u, p, q)$ definita non negativa e continua per $(x, y) \in R$, u, p, q qualunque, la diremo ad *integrale confrontabile* con $f(x, y, u, p, q)$ relativamente a una funzione $u(x, y)$ continua in R, per la quale $I_C[u] < +\infty$, se è soddisfatta la seguente proprietà: per almeno una successione $\{u_n(x, y)\}$ che goda delle 1^0), 2^0) del N. 1 e inoltre sia $\lim_{n \to \infty} I[u_n, R_n] = I_C[u]$, risulti:

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} I_\Phi[u_n, R_n] < +\infty,$$

ove s'è posto [18]:

$$I_\Phi[u_n, R_n] = \int_{R_n} \Phi(x, y, u_n, u_{n,x}, u_{n,y})\, dx\, dy.$$

3. In questo numero daremo una proposizione di equivalenza tra gli integrali $I_B[u]$ ed $I_C[u]$ che generalizza notevolmente la proposizione (A).

Premettiamo il seguente

LEMMA I. *Se $u(x, y)$ è continua in R ed $f(x, y, u, p, q)$ soddisfa le seguenti condizioni:*

i) *per ogni (x, y, u), $(x, y) \in R$, u qualunque, $f(x, y, u, p, q)$ sia convessa in senso lato, secondo Jensen, rispetto a (p, q), cioè si abbia:*

$$f\left(x, y, u, \frac{p_1 + p_2}{2}, \frac{q_1 + q_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\{f(x, y, u, p_1, q_1) + f(x, y, u, p_2, q_2)\},$$

comunque si scelgano le coppie (p_1, q_1), (p_2, q_2);

---

[18]) Al N. 4 daremo degli esempi di funzioni Φ ad integrale confrontabile con f.

ii) *per ogni compatto* S *dello spazio* (x, y, u), *avente proiezione* S_{xy} (*sul piano* (x, y)) *in* R, *esista un modulo di continuità* $\lambda_S(\sigma)$ *tale che si abbia:*

$$|f(x_1, y_1, u_1, p, q) - f(x_2, y_2, u_2, p, q)| \leq$$

$$\leq \lambda_S(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |u_1 - u_2|) \cdot \Phi(x_1, y_1, u_1, p, q),$$

comunque si scelgano i punti (x_1, y_1, u_1), (x_2, y_2, u_2) *in* S *e qualunque siano* p, q, *essendo* Φ *una funzione ad integrale confrontabile con* f *relativamente ad* $u(x, y)$;
risulta:

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \, I[u^{(h)}, D] \leq I_C[u],$$

per ogni regione chiusa D *contenuta in* R.

Supponiamo $I_C[u] < +\infty$ (in caso contrario il lemma è evidente), e siano: $D \subset R$ una regione chiusa; $d > 0$ la distanza tra la frontiera di D e quella di R. Denotiamo poi con D_1 la regione chiusa costituita da tutti i punti di R che distano da almeno un punto di D di non più di $\frac{d}{2}$ (è $D_1 \subset R$), con M il massimo della funzione $|u(x, y)|$ in D_1 e con S il compatto $[(x, y, u): (x, y) \in D_1, -(M+1) \leq u \leq M+1]$.

Essendo Φ ad integrale confrontabile con f, relativamente ad $u(x, y)$, esiste una successione $\{u_n(x, y)\}$, $(x, y) \in R_n$, $n = 1, 2, \ldots$, che gode delle proprietà 1⁰), 2⁰) del N. 1, con

$$(4) \qquad \lim_{n\to\infty} I[u_n, R_n] = I_C[u], \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}} \, I_\Phi[u_n, R_n] < +\infty.$$

Inoltre poichè è $\lim_{n\to\infty} R_n = R$ esiste un $n_1 > 0$ tale che per $n > n_1$ risulta $R_n \supset D_1$.

Supponiamo d'ora in avanti $n > n_1$.

Per ogni $0 < h < \frac{d}{4}$ denotiamo con $u_n^{(h)}$ la funzione media integrale della u_n, la quale, per $(x, y) \in D$, è definita dalla:

$$u_n^{(h)}(x, y) = \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} u_n(x + \varrho, y + \eta) \, d\varrho \, d\eta,$$

e le cui derivate parziali sono date, per $(x, y) \in D$, da:

$$u_{n,x}^{(h)} = \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} u_{n,x}(x + \varrho, y + \eta) \, d\varrho \, d\eta, \quad u_{n,y}^{(h)} = \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} u_{n,y}(x + \varrho, y + \eta) \, d\varrho \, d\eta.$$

A causa della convessità della f rispetto a (p, q) (proprietà i)), per una nota disuguaglianza di Jensen ([19]), risulta:

$$f(x, y, z, u_{n,x}^{(h)}, u_{n,y}^{(h)}) \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} f(x, y, z, u_{n,x}(x+\varrho, y+\eta), u_{n,y}(x+\varrho, y+\eta))\, d\varrho\, d\eta,$$

per $(x, y) \in D$, z qualunque; e da questa, per $z = u^{(h)}(x, y)$, segue:

$$f(x, y, u^{(h)}, u_{n,x}^{(h)}, u_{n,y}^{(h)}) \leq \tag{5}$$

$$\leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} f(x+\varrho, y+\eta, u_n(x+\varrho, y+\eta), u_{n,x}(x+\varrho, y+\eta), u_{n,y}(x+\varrho, y+\eta))\, d\varrho\, d\eta + \Delta,$$

ove s'è posto:

$$\Delta = \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \{ f(x, y, u^{(h)}(x, y), u_{n,x}(x+\varrho, y+\eta), u_{n,y}(x+\varrho, y+\eta)) -$$

$$- f(x+\varrho, y+\eta, u_n(x+\varrho, y+\eta), u_{n,x}(x+\varrho, y+\eta), u_{n,y}(x+\varrho, y+\eta)) \}\, d\varrho\, d\eta.$$

Valutiamo ora Δ.

Osserviamo intanto che per la proprietà ii) a cui soddisfa la f si ha:

$$|\Delta| \leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \lambda_S(|\varrho| + |\eta| + |u_n(x+\varrho, y+\eta) - u^{(h)}(x, y)|) \cdot \tag{6}$$

$$\cdot\, \Phi(x+\varrho, y+\eta, u_n(x+\varrho, y+\eta), u_{n,x}(x+\varrho, y+\eta), u_{n,y}(x+\varrho, y+\eta))\, d\varrho\, d\eta.$$

Ma è:

$$|u^{(h)}(x, y) - u_n(x, y)| \leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} |u(x+\varrho, y+\eta) - u_n(x, y)|\, d\varrho\, d\eta,$$

([19]) Cfr. ad es. S. CINQUINI: *Sopra una diseguaglianza di Jensen.* Rend. Cir. Mat. Palermo, LVIII, 1934, 335-358.

e da questa, in virtù della convergenza uniforme della $\{u_n\}$ ad u in D_1, segue che in corrispondenza ad $\varepsilon > 0$ esistono un $\bar{n}$ ed un $\bar{h} > 0$ tale che per $n > \bar{n}$ ed $0 < h < \bar{h}$ risulti:

$$|\, u^{(h)}(x, y) - u_n(x, y) \,| < \varepsilon, \tag{7}$$

per $(x, y) \in D$.

La (6), tenuto conto della (7) si maggiora ulteriormente:

$$| \Delta | \leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \lambda_S (2h + \varepsilon) \cdot \Phi (x + \varrho, y + \eta, u_n (x + \varrho, y + \eta),$$
$$u_{n,x} (x + \varrho, y + \eta), u_{n,y} (x + \varrho, y + \eta))\, d\varrho\, d\eta,$$

per $(x, y) \in D$ e per $n > \bar{n}$, $0 < h < \bar{h}$.

Integrando la (5) su D, tenendo presente quest'ultima limitazione, e adoperando il classico teorema di Fubini-Tonelli sull'invertibilità dell'ordine dell'integrazione, si ottiene:

$$\int_D f(x, y, u^{(h)}, u^{(h)}_{n,x}, u^{(h)}_{n,y})\, dx\, dy \leq \tag{8}$$
$$\leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} d\varrho \int_{-h}^{h} d\eta \int_D f(x + \varrho, y + \eta, u_n (x + \varrho, y + \eta),$$
$$u_{n,x} (x + \varrho, y + \eta), u_{n,y} (x + \varrho, y + \eta))\, dx\, dy +$$
$$+ \lambda_S (2h + \varepsilon) \cdot \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} d\varrho \int_{-h}^{h} d\eta \int_D \Phi (x + \varrho, y + \eta, u_n (x + \varrho, y + \eta),$$
$$u_{n,x} (x + \varrho, y + \eta), u_{n,y} (x + \varrho, y + \eta))\, dx\, dy \leq$$
$$\leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} d\varrho \int_{-h}^{h} d\eta \int_{D(\varrho,\eta)} f(x, y, u_n (x, y), u_{n,x} (x, y), u_{n,y} (x, y))\, dx\, dy +$$
$$+ \lambda_S (2h + \varepsilon) \cdot \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} d\varrho \int_{-h}^{h} d\eta \int_{D(\varrho,\eta)} \Phi (x, y, u_n (x, y), u_{n,x} (x, y), u_{n,y} (x, y))\, dx\, dy,$$

per $n > \bar{n}$, $0 < h < \bar{h}$, e ove $D(\varrho, \eta)$ è la regione chiusa ottenuta da D per traslazione del vettore (ϱ, η).

Ma è $D(\varrho, \eta) \subset D_1$ e inoltre $D_1 \subset R_n$, e quindi dalla (8) segue,

$$\int_D f(x, y, u^{(h)}, u^{(h)}_{n,x}, u^{(h)}_{n\,y})\, dx\, dy \leq I[u_n, D_1] + \lambda_S (2h + \varepsilon) I_\Phi [u_n, D_1] \leq \tag{9}$$

$$\leq I[u_n, R_n] + \lambda_S (2h + \varepsilon) I_\Phi [u_n, R_n],$$

per $n > \bar{n}$, $0 < h < \bar{h}$.

Mostriamo ora che per ogni $0 < h < \bar{h}$ è:

$$\lim_{n \to \infty} \int_D f(x, y, u^{(h)}, u^{(h)}_{n,x}, u^{(h)}_{n,y})\, dx\, dy = \int_D f(x, y, u^{(h)}, u^{(h)}_x, u^{(h)}_y)\, dx\, dy. \tag{10}$$

Basta procedere analogamente a come abbiamo fatto per dimostrare la (13) del lavoro citato in nota (3).

Si fissi un $h < \bar{h}$ (si può supporre $\bar{h} < 1$), si tenga presente la continuità in D delle funzioni $u^{(h)}(x, y)$, $u^{(h)}_x(x, y)$, $u^{(h)}_y(x, y)$, si ponga:

$$M^* = \max\,[\max_{(x,y) \in D} |\, u^{(h)}(x, y) \,|, |\, u^{(h)}_x(x, y) \,|, |\, u^{(h)}_y(x, y) \,|],$$

e si osservi che, in virtù della uniforme continuità della f nel campo chiuso $C = [(x, y) \in D, |\, u \,| \leq M^*, |\, p \,| \leq M^* + 1, |\, q \,| \leq M^* + 1]$, in corrispondenza a $\sigma > 0$ esiste un $\tau(\sigma) > 0$ tale che risulti:

$$|\, f(x, y, u, p, q) - f(x, y, u, p_1, q_1) \,| < \sigma, \tag{11}$$

per $|\, p - p_1 \,| < \tau$, $|\, q - q_1 \,| < \tau$, con $(x, y, u, p, q) \in C$, $(x, y, u, p_1, q_1) \in C$. Essendo poi:

$$|\, u^{(h)}_{n,x}(x, y) - u^{(h)}_x(x, y) \,| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} |\, [u_n(x + h, y + \eta) - u_n(x - h, y + \eta)] - [u(x + h, y + \eta) -$$

$$- u(x - h, y + \eta)] \,|\, d\eta,$$

$$u^{(h)}_{n,y}(x, y) - u^{(h)}_y(x, y) \,| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} |\, [u_n(x + \varrho, y + h) - u_n(x + \varrho, y - h)] - [u(x + \varrho, y + h) -$$

$$- u(x + \varrho, y - h)] \,|\, d\varrho,$$

e tenendo presente che, per la convergenza uniforme della $\{u_n\}$ ad u in D_1, in corrispondenza a $\tau > 0$ esiste un n^* $(n^* > \bar{n})$ tale che:

$$| u(x, y) - u_n(x, y) | < \tau \cdot h, \quad \text{per } n > n^* \text{ ed } (x, y) \in D_1,$$

risulta:

$$| u_{n,x}^{(h)}(x, y) - u_x^{(h)}(x, y) | < \tau, \quad | u_{n,y}^{(h)}(x, y) - u_y^{(h)}(x, y) | < \tau, \tag{12}$$

per $n > n^*$, $(x, y) \in D$.

Dalle (11) e (12), per $n > n^*$ e qualunque sia $(x, y) \in D$, segue allora:

$$| f(x, y, u^{(h)}, u_{n,x}^{(h)}, u_{n,y}^{(h)}) - f(x, y' u^{(h)}, u_x^{(h)}, u_y^{(h)}) | < \sigma,$$

e quindi è manifestamente vera la (10).

Prendiamo ora in ambo i membri della (9) il minimo limite per $n \to \infty$ e teniamo presente le (4) e la (10). Si ha:

$$I[u^{(h)}, D] \leq I_C[u] + \lambda_S(2h + \varepsilon) \varliminf_{n \to \infty} I_\Phi[u_n, R_n],$$

e da questa segue:

$$\varlimsup_{h \to 0} I[u^{(h)}, D] \leq I_C[u] + \lambda_S(\varepsilon) \varliminf_{n \to \infty} I_\Phi[u_n, R_n],$$

e quindi il lemma è dimostrato tenendo presente l'arbitrarietà di ε. Da tale lemma segue immediatamente il seguente

TEOREMA I. *Se $u(x, y)$ è continua in R ed f soddisfa le condizioni* i), ii) *del Lemma I, risulta:*

$$I_B[u] = I_C[u].$$

Basta osservare che dal Lemma I. segue:

$$I_B[u] = \varliminf_{D \to R} \varliminf_{h \to 0} I[u^{(h)}, D] \leq I_C[u],$$

e poichè è anche vera la disuguaglianza contraria [20]:

$$I_C[u] \leq I_B[u],$$

il teorema è dimostrato.

---

[20] Tale disuguaglianza è stata da noi dimostrata nel lavoro citato in nota (3) indipendentemente dalle ipotesi i), ii).

4. In questo numero, come abbiamo già detto nella introduzione, faremo vedere che quando $u(x, y)$ è uniformemente continua in R e la condizione ii) sulla f) si restringe convenientemente, seguendo, modificandolo opportunamente, lo stesso procedimento per dimostrare il Lemma I., si ottiene una generalizzazione della proposizione (S).

Premettiamo il seguente

LEMMA II. *Se $u(u, y)$ è uniformemente continua in R e la f soddisfa le seguenti proprietà:*

α^*) *f goda della* i) *del Lemma I.*;

β^*) *esistano una funzione Φ (x, y, u, p, q) ad integrale confrontabile con f, relativamente a $u(x, y)$, ed un modulo di continuità $\lambda(\sigma)$ tale che si abbia:*

$$|f(x_1, y_1, u_1, p, q) - f(x_2, y_2, u_2, p, q)| \leq$$

$$\leq \lambda(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |u_1 - u_2|) \cdot \Phi(x_1, y_1, u_1, p, q),$$

comunque si scelgano $(x_1, y_1) \in R$, $(x_2, y_2) \in R$, u_1, u_2, p, q qualunque; risulta:

$$\overline{\lim_{h \to 0}}\, I[u^{(h)}, R_h] \leq I_C[u]. \tag{13}$$

Per ogni $h > 0$ denotiamo con R_h la regione aperta sottoinsieme di R con la proprietà che ogni punto della frontiera di R_h disti $h\sqrt{2}$ dalla frontiera di R.

Fissato $h > 0$, siano: D una regione chiusa contenuta in R_h, $d\sqrt{2} > 0$ la distanza tra la frontiera di D e quella di R_h, D_0 una regione chiusa contenuta in R con la proprietà che la distanza di ogni punto della frontiera di D_0 dalla frontiera di R sia minore del $\mathrm{Min}\,[h\sqrt{2}, d\sqrt{2}]$. È manifestamente $D \subset D_{0h}$, essendo D_{0h} la regione chiusa ottenuta da D_0 così come R_h s'è ottenuta da R.

Supponiamo $I_C[u] < +\infty$ (in caso contrario la (13) sarebbe manifestamente vera), e denotiamo con $\{u_n(x, y)\}$, $(x, y) \in R_n$, $n = 1, 2, \ldots$, una successione che goda delle proprietà 1^0), 2^0) del N. 1 e per la quale siano soddisfatte le (4) del N. 3, e con n_0 quell'intero tale che per $n > n_0$ risulti $R_n \supset D_0$.

D'ora in avanti supporremo $n > n_0$.

Riprendiamo la (5) e valutiamo Δ.

Per la condizione β^*) si ha intanto la maggiorazione:

$$|\Delta| \leq \frac{1}{(2h)^2}\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} \lambda(|\varrho| + |\eta| + |u_n(x+\varrho, y+\eta) - u^{(h)}(x, y)|) \cdot \tag{14}$$

$$\cdot\, \Phi(x+\varrho, y+\eta, u_n(x+\varrho, y+\eta), u_{n,x}(x+\varrho, y+\eta), u_{n,y}(x+\varrho, y+\eta))\, d\varrho d\eta.$$

Poichè è:

$$| u_n (x + \varrho, y + \eta) - u^{(h)} (x, y) | \leq | u_n (x + \varrho, y + \eta) - u (x + \varrho, y + \eta) | +$$
$$+ | u (x + \varrho, y + \eta) - u (x, y) | + | u (x, y) - u^{(h)} (x, y) | ,$$

posto:

$$\varepsilon_1 (n) = \underset{\substack{(x, y) \in D \\ \varrho^2 + \eta^2 \leq 2h^2}}{\mathrm{Max}} | u_n (x + \varrho, y + \eta) - u (x + \varrho, y + \eta) | ,$$

$$\varepsilon_2 (h) = \underset{\substack{(x,y) \in R_h \\ \varrho^2 + \eta^2 \leq 2h^2}}{\mathrm{Max}} \{ | u (x + \varrho, y + \eta) - u (x, y) | + | u (x, y) - u^{(h)} (x, y) | \} ,$$

dalla (14) segue:

$$(15) \qquad | \Delta | \leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \lambda (2h + \varepsilon_1 (n) + \varepsilon_2 (h)) \cdot$$
$$\cdot \Phi (x+\varrho, y+\eta, u_n (x+\varrho, y+\eta), u_{n, x} (x+\varrho, y+\eta), u_{n, y} (x+\varrho, y+\eta)) \, d\varrho d\eta .$$

Osserviamo che a causa della convergenza uniforme di $\{u_n (x, y)\}$ ad $u (x, y)$ in D_0 e a causa della uniforme continuità della $u (x, y)$ in R, risulta;

$$(16) \qquad \lim_{n \to \infty} \varepsilon_1 (n) = 0, \qquad \lim_{h \to 0} \varepsilon_2 (h) = 0.$$

Integrando su D ambo i membri della (5), tenendo presente la (15) e adoperando il teorema di Fubini-Tonelli, si ha:

$$\int_D f (x, y, u^{(h)} (x, y), u^{(h)}_{n, x} (x, y), u^{(h)}_{n, y} (x, y)) \, dx \, dy \leq$$
$$\leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} d\varrho \int_{-h}^{h} d\eta \int_D f (x + \varrho, y + \eta, u_n (x + \varrho, y + \eta), u_{n, x} (x + \varrho, y + \eta),$$
$$u_{n, y} (x + \varrho, y + \eta)) \, dx \, dy +$$
$$\lambda (2h + \varepsilon_1 (n) + \varepsilon_2 (h)) \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} d\varrho \int_{-h}^{h} d\eta \int_D \Phi (x + \varrho, y + \eta, u_n (x + \varrho, y + \eta),$$
$$u_{n, x} (x + \varrho, y + \eta), u_{n, y} (x + \varrho, y + \eta)) \, dx \, dy \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} d\varrho \int_{-h}^{h} d\eta \int_{D(\varrho, \eta)} f(x, y, u_n(x, y), u_{n,x}(x, y), u_{n,y}(x, y))\, dx\, dy +$$

$$+\lambda(2h+\varepsilon_1(n)+\varepsilon_2(h)) \frac{1}{(2h)^2} \int_{-h}^{h} d\varrho \int_{-h}^{h} d\eta \int_{D(\varrho, \eta)} \Phi(x, y, u_n(x, y), u_{n,x}(x, y), u_{n,y}(x, y))\, dx\, dy.$$

Ma è $D(\varrho, \eta) \subset D_0 \subset R_n$, e quindi da quest'ultima segue ovviamente:

$$\int_D f(x, y, u^{(h)}, u^{(h)}_{n,x}, u^{(h)}_{n,y})\, dx\, dy \leq I[u_n, R_n] + \lambda(2h + \varepsilon_1(n) + \varepsilon_2(h)) \cdot I_\Phi[u_n, R_n].$$

Prendiamo ora il minimo limite, per $n \to \infty$, di ambo i membri della (17) e ricordiamo le (4), la (10) e la prima delle (16). Si ha:

$$I[u^{(h)}, D] \leq I_C[u] + \lambda(2h + \varepsilon_2(h)) \varliminf_{n \to \infty} I_\Phi[u_n, R_n].$$

Ma questa disuguaglianza è vera per ogni regione chiusa $D \subset R_h$, e quindi per $D \to R_h$ ci dà:

$$I[u^{(h)}, R_h] \leq I_C[u] + \lambda(2h + \varepsilon_2(h)) \varliminf_{n \to \infty} I_\Phi[u_n, R_n],$$

e infine per $h \to 0$, tenendo presente la seconda delle (16), risulta:

$$\varlimsup_{h \to 0} I[u^{(h)}, R_h] \leq I_C[u].$$

Da tale lemma segue immediatamente il seguente

TEOREMA II. *Se $u(x, y)$ è uniformemente in R, ed f soddisfa le condizioni α^*), β^*) del Lemma II., risulta:*

$$\lim_{h \to 0} I[u^{(h)}, R_h] = I_C[u].$$

Basta osservare che essendo $u(x, y)$ continua in R, per le considerazioni fatte al N. 2, è $J_C[u] = I_C[u]$, e quindi, tenendo presente la definizione di $J_C[u]$ risulta:

$$\varliminf_{h \to 0} I[u^{(h)}, R_h] \geq J_C[u] = I_C[u].$$

Da questa e dalla limitazione stabilita dal Lemma II. segue l'asserto.

OSSERVAZIONE. Facilmente si vede che il teorema II. costituisce una generalizzazione del teorema (S) di J. Serrin; quando infatti è vera la β^*) per $\Phi = 1 + f$, che è ad integrale confrontabile con f relativamente ad ogni $u(x, y)$ continua in R, si ottiene la proposizione (S). Una classe di funzioni $\Phi(x, y, u, p, q)$ ad integrale confrontabile con f, relativamente ad ogni $u(x, y)$ continua in R, è data dalle Φ definite dalla:

$$\Phi(x, y, u, p, q) = \omega\,[f(x, y, u, p, q)],$$

con $\omega(t)$ funzione arbitraria definita, non negativa, continua per $t \geq 0$ e concava ([21]).

In questo caso se $u(x, y)$ è una funzione continua in R, con $I_C[u] < +\infty$, detta $\{u_n(x, y)\}$ una successione con le proprietà 1⁰), 2⁰) del N. 1 e tale che:

$$\lim_{n \to \infty} I[u_n, R_n] = I_C[u],$$

in virtù della disuguaglianza di Jensen risulta:

$$I_\Phi[u_n, R_n] = \int_{R_n} \omega\,[f(x, y, u_n, u_{n,x}, u_{n,y})]\,dx\,dy \leq$$

$$\leq m(R_n) \cdot \omega \left[\frac{\displaystyle\int_{R_n} f(x, y, u_n, u_{n,x}, u_{n,y})\,dxdy}{m(R_n)} \right],$$

e da questa per $n \longrightarrow \infty$ segue:

$$\varliminf_{n \to \infty} I_\Phi[u_n, R_n] \leq m(R)\,\omega\left(\frac{I_c[u]}{m(R)}\right) < +\infty.$$

Un esempio di funzione $\omega(t)$ concava è:

$$\omega(t) = A + Bt + Ct^\alpha,$$

con $0 \leq \alpha \leq 1$, ed A, B, C costanti non negative.

([21]) Una funzione $\omega(t)$ la diremo concava se comunque si scelgono i punti t_1, t_2 risulta:

$$\omega\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \geq \frac{1}{2}\{\omega(t_1) + \omega(t_2)\}.$$

TEOREMA III. *Se $u(x, y)$ è continua in R ed f è convessa in senso lato, secondo Jensen, rispetto al complesso delle sue variabili, risulta:*

$$\lim_{h \to 0} I[u^{(h)}, R_h] = I_C[u].$$

Basta osservare che, con i simboli adoperati per dimostrare il Lemma II., in virtù della convessità globale della f, sussiste la disuguaglianza [22]:

$$\int_D f(x, y, u_n^{(h)}, u_{n,x}^{(h)}, u_{n,y}^{(h)})\, dx\, dy \leq I[u_n, R_n],$$

e per $n \longrightarrow \infty$, tenendo presente la (10), si ha:

$$I[u^{(h)}, D] \leq I_C[u].$$

Da quest'ultima, per $D \longrightarrow R_h$, segue:

$$I[u^{(h)}, R_h] \leq I_C[u],$$

e ancora:

$$\overline{\lim_{h \to 0}}\, I[u^{(h)}, R_h] \leq I_C[u].$$

Sussiste poi, come s'è visto, la disuguaglianza:

$$\underline{\lim_{h \to 0}}\, I[u^{(h)}, R_h] \geq I_C[u],$$

e quindi segue immediatamente l'asserto.

5. Esempi di funzioni che soddisfano le condizioni dei Teoremi I, II, III.

Soddisfano le condizioni del Teorema I le funzioni:

1) $f = A(x, y, u) \cdot F(p, q)$, con $A(x, y, u) \geq m > 0$ continua, ed $F(p, q) \geq 0$ convessa secondo Jensen;

2) $f = a_1(x, y, u) \cdot p + a_2(x, y, u) \cdot q + a_3(x, y, u)$,

---

([22]) Tale disuguaglianza si trova dimostrata in: C. VINTI, *L'integrale multiplo del Calcolo delle Variazioni e il problema dell'approssimazione delle funzioni.* Annali Mat. Pura. Appli. (4) 52, 1960, pag. 23.

3) $f = (a_1(x, y, u) \cdot p^2 + a_2(x, y, u) \cdot q^2 + a_3(x, y, u))^{\frac{1}{2}}$,
con $a_i(x, y, u) \geq m > 0$ continua per $i = 1, 2, 3$;

4) $f = B(x, y) \cdot F(p, q)$, con $B(x, y) \geq 0$ continua in R ed $F(p, q) \geq 0$ convessa secondo Jensen;

5) $f = b_1(x, y) \cdot p + b_2(x, y) \cdot q + b_3(x, y)$,

6) $f = (b_1(x, y) \cdot p^2 + b_2(x, y) \cdot q^2 + b_3(x, y))^{\frac{1}{2}}$,
con $b_i(x, y) \geq 0$ continua in R per $i = 1, 2, 3$.

Le funzioni degli esempi precedenti soddisfano le condizioni del Teorema II se $A(x, y, u)$, $B(x, y)$, $a_i(x, y, u)$, $b_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3$, sono uniformemente continue.

Mentre però in ciascuno degli esempi 1), 2), 3), per ogni $u(x, y)$ continua in R esiste sempre una funzione Φ ad integrale confrontabile con f relativamente ad $u(x, y)$ (che è la stessa per tutte le $u(x, y)$), in ciascuno degli esempi 4), 5), 6) una tale funzione Φ esiste per tutte le $u(x, y)$ sufficientemente regolari nei punti ove $B(x, y) = 0$, $b_i(x, y) = 0$.

Soddisfano la condizione del Teorema III le funzioni:

7) $f = (x + y + u + p + q)^{2m}$, con m intero positivo;

8) $f = (x + y + u + p + q)^{2m} \cdot e^{(x+y+u+p+q)^{2n}}$, con m, n interi positivi;

9) $f = (x^2 + p^6 + q^4)^{\mu} \cdot e^{(x^2+p^6+q^4)^{\nu}}$, con $\mu \geq 1$, $\nu \geq 1$;

10) $f = e^{(x^{2m_1}+y^{2m_2}+u^{2m_3}+p^{2n_1}+q^{2n_2})^{\mu}}$
con m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, interi positivi e $\mu \geq 1$.