

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

GIOVANNI AQUARO

Convergenza localmente quasi-uniforme ed estensione di Hewitt di uno spazio completamente regolare

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 16,
n° 3 (1962), p. 207-212*

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1962_3_16_3_207_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

CONVERGENZA LOCALMENTE QUASI-UNIFORME ED ESTENSIONE DI HEWITT DI UNO SPAZIO COMPLETAMENTE REGOLARE

Nota (*) di GIOVANNI AQUARO

INTRODUZIONE. — In tutto il seguito, E denota uno spazio topologico ed M denota uno spazio metrico con distanza d .

Nella presente nota si indica un criterio, che non sembra sia stato segnalato altrove, per la continuità della applicazione limite di una successione (semplicemente) convergente di applicazioni continue di E in M .

Se ne deduce la convergenza sulla estensione $v(E)$ di HEWITT di E , supposto completamente regolare (cioè uniformizzabile di Hausdorff), di una successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di applicazioni continue di $v(E)$ in M verso una applicazione continua f di $v(E)$ in M , quando la successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ delle restrizioni delle f_n ad E converga in E verso la restrizione f di f ad E .

Con \mathbb{N} si denota l'insieme degli interi naturali (compreso lo zero).

1. — Conviene premettere un lemma.

LEMMA 1. — *Supponiamo che $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sia una successione di applicazioni continue di E in M e supponiamo che tale successione converga in E verso l'applicazione f di E in M . Supponiamo, inoltre, che esista una applicazione g di E in M tale che per ogni numero reale positivo ε e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si possa assegnare una funzione a valori in \mathbb{N} $\varphi_{\varepsilon n}$ che sia localmente limitata⁽¹⁾ in E e sia tale che per ogni $x \in E$ risulti:*

$$n \leq \varphi_{\varepsilon n}(x), \quad d(f_{\varphi_{\varepsilon n}(x)}(x), g(x)) < \varepsilon.$$

Allora risulta $f = g$ e g , ed in conseguenza f , risulta continua.

(*) Lavoro eseguito nel GRUPPO DI RICERCA n. 9 del Comitato Nazionale per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, per l'anno 1961-62.

(1) Cioè per ogni $x \in E$ esiste un intorno V di x sul quale $\varphi_{\varepsilon n}$ sia limitata.

DIM. Sia ε reale positivo e sia $x_0 \in E$. Poichè risulta $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ esiste uno $\nu \in \mathbb{N}$ tale che da $n \in \mathbb{N}$ e $\nu \leq n$ consegue $d(f_n(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Esiste una funzione $\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}$ a valori in \mathbb{N} la quale è localmente limitata ed è tale che, per ogni $x \in E$ sia $\nu \leq \varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}(x)$, $d(f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}(x)}(x), g(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Poichè $\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}$ è localmente limitata esiste un intorno U di x_0 sul quale $\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}$ è limitata e supponiamo che sia $\zeta \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}(x) \leq \zeta$ per ogni $x \in U$. Poichè ogni f_n è continua esiste un intorno V di x_0 tale che per ogni $k = 0, 1, \dots, \zeta$, sia $d(f_k(x), f_k(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Sia $x \in U \cap V$.

Per quanto sopra si ha $d(f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}(x)}(x), g(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ per la definizione di $\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}$, $d(f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}(x)}(x), f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}(x)}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$ poichè $x \in V$, e, da ultimo, essendo $\nu \leq \varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}(x)$, si ha $d(f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}(x)}(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$ per la definizione di ν .

Consegue

$$\begin{aligned} d(g(x), f(x_0)) &\leq d(g(x), f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}(x)}(x)) + d(f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}(x)}(x), f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}(x)}(x_0)) + \\ &+ d(f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}(x)}(x_0), f(x_0)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Concludendo, in primo luogo è $d(g(x_0), f(x_0)) < \varepsilon$ donde, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, $g(x_0) = f(x_0)$; successivamente risulta $d(g(x), g(x_0)) < \varepsilon$ per ogni $x \in U \cap V$ e quindi g , insieme ad f , è continua

Ciò stabilito premettiamo una definizione:

DEF. 1. — Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di applicazioni di E in M , si dice che $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge localmente quasi-uniformemente verso la applicazione f di E in M se, per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ e per ogni, $\nu \in \mathbb{N}$, esiste una funzione $\varphi_{\varepsilon, \nu}$ su E a valori in \mathbb{N} , localmente limitata⁽²⁾ su E e tale che, per ogni $x \in E$, sia $\nu \leq \varphi_{\varepsilon, \nu}(x)$ e $d(f_{\varphi_{\varepsilon, \nu}(x)}(x), f(x)) < \varepsilon$.

(2) Cfr. nota (4).

Dopo ciò è agevole stabilire la caratterizzazione preannunciata nell'INTRODUZIONE.

PROP. 1. — *Supponiamo che $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sia una successione convergente di applicazioni di E in M e f sia il suo limite. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) — f è continua,

b) — per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ e per ogni $\nu \in \mathbb{N}$ esistono una funzione $\varphi_{\varepsilon, \nu}$ su E a valori in \mathbb{N} ed un ricoprimento aperto numerabile, localmente finito ed \mathcal{U} -riducibile⁽³⁾ $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di E tale che $\varphi_{\varepsilon, \nu}$ sia limitata su ciascun G_n e, per ogni $x \in E$ sia $\nu \leq \varphi_{\varepsilon, \nu}(x)$, $d(f_{\varphi_{\varepsilon, \nu}(x)}(x), f(x)) < \varepsilon$.

c) — la successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge localmente quasi-uniformemente verso f su E (def. 1).

DIM. a) *implica* b). Sia vera la a) e supponiamo che ε sia un numero reale > 0 e che sia $\nu \in \mathbb{N}$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia g_k la funzione reale, ovviamente continua in E , definita ponendo $g_k(x) = d(f_{\nu+k}(x), f(x))$ per ogni $x \in E$ e poniamo

$$F_k = g_k^{-1}(] - \infty, \varepsilon/2]), \quad U_k = g_k^{-1}(] - \infty, \varepsilon[).$$

Ovviamente F_k è chiuso, U_k è aperto ed F_k è \mathcal{U} -contenuto⁽³⁾ in U_k (si tenga presente che la retta numerica è uno spazio normale e quindi che $] - \infty, \varepsilon/2]$ è \mathcal{U} -contenuto in $] - \infty, \varepsilon[$ ed inoltre che g_k è continua).

Sia $x \in E$.

Risultando $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $\nu \leq n$ e tale che $d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon/2$. Posto $k = n - \nu$, consegue $g_k(x) \leq \varepsilon/2$ e quindi $x \in F_k$: dunque $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento (chiuso) di E . In conseguenza $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento aperto \mathcal{U} -riducibile di E e $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è una sua \mathcal{U} -riduzione⁽³⁾.

Inoltre, per il sopradetto n si ha $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$: denotiamo con $\varphi_{\varepsilon, \nu}(x)$ il più piccolo degli $n \in \mathbb{N}$ tali che $\nu \leq n$ e $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Pertanto la applicazione $\varphi_{\varepsilon, \nu}: E \rightarrow \mathbb{N}$ gode della proprietà $\nu \leq \varphi_{\varepsilon, \nu}(x)$ per ogni $x \in E$.

Sia $k \in \mathbb{N}$ e $x \in U_k$: risulta $d(f_{\nu+k}(x), f(x)) = g_k(x) < \varepsilon$ e quindi si ha $\varphi_{\varepsilon, \nu}(x) \leq \nu + k$. Dunque, la restrizione di $\varphi_{\varepsilon, \nu}$ ad U_k è limitata.

In forza della def. 6, § 3 e del lemma 10, § 2 di [1] risulta l'esistenza di un ricoprimento aperto, numerabile, localmente finito ed \mathcal{U} -riducibile $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di E tale che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, sia $G_k \subset U_k$,

b) *implica* c). Consegue dalla def. 1.

c) *implica* a). Consegue dal lemma 1 per $f = g$.

⁽³⁾ Le definizioni di insieme chiuso \mathcal{U} -contenuto in un insieme aperto, di ricoprimento aperto \mathcal{U} -riducibile e di \mathcal{U} -riduzione trovansi in [1] § 3, deff. 2, 5 e 6.

2. — Il risultato stabilito consente di ottenere la seguente prop. 2 relativa alla convergenza sulla estensione di HEWITT dopo aver premesso l'ulteriore lemma:

LEMMA 2. — *Supponiamo che X sia una parte ovunque densa dello spazio uniformizzabile separato E tale che, posto $\omega = \text{card } \mathbf{N}$, la ω -struttura uniforme $\mathcal{A}_\omega(X)$ su X ⁽⁴⁾ sia identica alla struttura uniforme $\mathcal{A}_\omega(E)_X$ indotta su X dalla ω -struttura uniforme $\mathcal{A}_\omega(E)$ su E . Allora se $(G_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è un ricoprimento aperto numerabile localmente finito ed \mathcal{U} -riducibile del sottospazio (uniformizzabile e separato) X , esiste un ricoprimento aperto numerabile localmente finito ed \mathcal{U} -riducibile $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dell'intero E tale che $(U_n \cap X)_{n \in \mathbf{N}}$ sia un raffinamento di $(G_n)_{n \in \mathbf{N}}$.*

DIM. Sia W un'adiacenza di X per $\mathcal{A}_\omega(X)$ tale che $W(x)_{x \in E}$ sia un raffinamento di $(G_n)_{n \in \mathbf{N}}$, la cui esistenza è assicurata⁽⁴⁾ dal teor. 1, d), § 2 di [1].

Poichè è $\mathcal{A}_\omega(X) = \mathcal{A}_\omega(E)_X$ esiste un'adiacenza V di E per $\mathcal{A}_\omega(E)$ la cui traccia $V \cap (X \times X)$ su $X \times X$ sia W . Sia W^* un'adiacenza aperta e simmetrica di E per $\mathcal{A}_\omega(E)$ tale che $W^* \circ W^* \subset V$. Sia $x \in E$ e sia $y \in W^*(x) \cap X$. Per ogni $z \in W^*(x) \cap X$, stante la simmetria di W^* , si ha $(y, z) \in W^* \circ W^* \subset V$ nonchè $(y, z) \in X \times X$ e per ciò $(y, z) \in W$ e poi $z \in W(y)$. Supposto che $n \in \mathbf{N}$ sia tale che $W(y) \subset G_n$, esistente perchè $(W(x))_{x \in X}$ è un raffinamento di $(G_n)_{n \in \mathbf{N}}$, consegue $z \in G_n$ e quindi, per l'arbitrarietà di z in $W^*(x) \cap X$, risulta $W^*(x) \cap X \subset G_n$.

Ma, d'altra parte, poichè W^* è un'adiacenza di E per $\mathcal{A}_\omega(E)$, esiste un ricoprimento aperto, localmente finito, numerabile ed \mathcal{U} -riducibile $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ di E tale che:

$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}} (U_n \times U_n) \subset W^*.$$

Sia $x \in U_q$ con $q \in \mathbf{N}$. Consegue $U_q \subset \bigcup_{p \in \mathbf{N}_x^*} U_p \subset W^*(x)$, dove \mathbf{N}_x^* è l'insieme degli $n \in \mathbf{N}$ tali che $x \in U_n$: assunto un $n \in \mathbf{N}$ tale che $W^*(x) \cap X \subset G_n$, come sopra, risulta $U_p \cap X \subset G_n$.

Così dimostrato il lemma 2, si può procedere a stabilire la proposizione che è obbiettivo del presente n. 2.

PROP. 2. — *Supponiamo che X sia una parte ovunque densa dello spazio uniformizzabile separato E tale che, posto $\omega = \text{card } (\mathbf{N})$, la ω -struttura uniforme $\mathcal{A}_\omega(X)$ su X ⁽⁴⁾ sia identica alla struttura uniforme $\mathcal{A}_\omega(E)_X$ indotta su X dalla ω -struttura uniforme $\mathcal{A}_\omega(E)$ su E . Supponiamo inoltre che \bar{f} e $(\bar{f}_n)_{n \in \mathbf{N}}$*

⁽⁴⁾ Cfr. [1], § 3, def. 4.

⁽⁵⁾ Cfr. nota ⁽³⁾.

siano un'applicazione e , rispettivamente, una successione di applicazioni di E in M , tutte continue su E e tali che, denotate con f e, rispettivamente, f_n per ogni $n \in \mathbb{N}$ le restrizioni di \bar{f} e di \bar{f}_n ad X , sia $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$. Allora, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n = \bar{f}.$$

DIM. Ragionando per assurdo, supponiamo che esista un $x_0 \in E$ tale che $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ non converga verso $f(x_0)$. Dunque, esistono un numero reale positivo ε ed una successione strettamente crescente $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di interi non negativi (cioè di elementi di \mathbb{N}) tale che

$$(1) \quad d(\bar{f}_{n_k}(x_0), \bar{f}(x_0)) > \varepsilon.$$

In X la successione $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge verso la f al pari della $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dalla quale essa è estratta. Pertanto, in forza della equivalenza di a) e b) nella prop. 1, esistono una funzione φ su X a valori in \mathbb{N} , ed un ricoprimento aperto numerabile, localmente finito, \mathcal{U} -riducibile $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ del sottospazio X , tali che φ sia limitata sopra ciascun G_n e per ogni $x \in X$ sia:

$$(2) \quad d(f_{n_{\varphi(x)}}(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Per il lemma 1, esiste un ricoprimento numerabile, localmente finito ed \mathcal{U} -riducibile $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di E tale che $(U_n \cap X)_{n \in \mathbb{N}}$ sia un raffinamento di $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (in X).

Esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $x_0 \in U_n$ ed esiste un $p \in \mathbb{N}$ tale che $U_n \cap X \subset G_p$: la φ abbia $\varrho \in \mathbb{N}$ come suo massimo su G_p . Per ogni $k = 0, 1, \dots, \varrho$ sia V_k l'insieme degli $x \in E$ tali che $d(\bar{f}_{n_k}(x), \bar{f}(x)) > \varepsilon$: stante la continuità ϱ di \bar{f} e di ciascuna delle \bar{f}_k ($k = 0, 1, \dots, \varrho$), ogni V_k è aperto e, posto $V = \bigcap_{k=0}^{\varrho} V_k$, V è un intorno di x_0 a causa di (1).

Poichè X è ovunque denso in E e poichè $V \cap U_n$ è un intorno di x_0 , risulta $(V \cap U_n) \cap X \neq \emptyset$. Sia $x \in (V \cap U_n) \cap X$ (ovviamente $\subset V \cap G_p$).

Risulta $x \in G_p$ e quindi è $\varphi(x) \leq \varrho$ e $x \in V \subset V_{\varphi(x)}$ e poi $d(\bar{f}(x), \bar{f}_{n_{\varphi(x)}}(x)) \geq \varepsilon$ mentre, per la (2), si ha $d(\bar{f}(x), \bar{f}_{n_{\varphi(x)}}(x)) = d(f(x), f_{n_{\varphi(x)}}(x)) < \varepsilon$ il che è contraddittorio.

Dunque $(\bar{f}(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ deve convergere verso $\bar{f}(x_0)$ e da ciò $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n = \bar{f}$.

La prop. 2 è così dimostrata.

Conserviamo l'ipotesi che E sia uniformizzabile e separato (cioè, completamente regolare). Tale spazio può considerarsi (ingettivamente) immerso, come parte ovunque densa, nel suo completamento di HEWITT $v(E)$ con la condizione che, detta $\mathcal{A}_\omega(v(E))_E$ la struttura uniforme indotta su E dalla ω -struttura uniforme $\mathcal{A}_\omega(v(E))$ di $v(E)$, sia $\mathcal{A}_\omega(v(E))_E = \mathcal{A}_\omega(E)$ ed inoltre

$v(E)$ sia completo per $\mathcal{A}_\omega(v(E))$ (cioè sia un Q -spazio secondo HEWITT; cfr. [2], § 2, prop. 2). Con ciò la prop. 2 dà luogo al

COROLLARIO. — Se \bar{f} e $(\bar{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sono un'applicazione e, rispettivamente, una successione di applicazioni, tutte continue, della estensione di HEWITT $v(E)$ nello spazio metrico M e se la successione $(\bar{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ delle restrizioni delle \bar{f}_n ad E converge, in E , verso la restrizione f di \bar{f} ad E , allora in tutto $v(E)$ si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n = \bar{f}$.

3. — Ferme restando le ipotesi per E e $v(E)$ del corollario alla prop. 2, supponiamo che E sia un P -spazio cioè supponiamo che l'intersezione di ogni successione di insiemi aperti di E sia ancora un insieme aperto. È noto che ciò accade se e solo se ogni successione convergente di funzioni reali continue ha come limite necessariamente una funzione continua.

Sia $(\bar{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni reali continue convergente in $v(E)$ verso una funzione \bar{f} . Dimostriamo che se, come si è ammesso E è un P -spazio, la \bar{f} è continua e quindi anche $v(E)$ è un P -spazio.

Invero siano f_n e f le restrizioni di \bar{f}_n e, rispettivamente, di \bar{f} ad E .

Poichè E è P -spazio, come sopra si è detto, f risulta continua in E e quindi, per una proprietà di $v(E)$, esiste una funzione reale continua g su $v(E)$ la cui restrizione ad E è f . Per il corollario alla prop. 2. in cui M si faccia coincidere con la retta numerica, si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n = g$ e quindi $\bar{f} = g$.

La \bar{f} è continua e quindi $v(E)$ è un P -spazio.

Il risultato indicato è noto per altra via.

Che, reciprocamente, se $v(E)$ è un P -spazio anche E lo sia, è banale.

BIBLIOGRAFIA

- [1] AQUARO, G: *Ricovrimenti aperti e strutture uniformi sopra uno spazio topologico*; Annali di Mat. pura ed appl. (IV), tomo XLVII (1959) pp. 319-390.
 [2] » : *Completamenti di spazi uniformi*; Annali di Mat. pura ed appl. (IV), vol. LVI, pp. 87-98.