Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Giovanni Aquaro

Una generalizzazione degli spazii di Lindelöf

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 16, nº 3 (1962), p. 195-206
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1962_3_16_3_195_0>

UNA GENERALIZZAZIONE DEGLI SPAZII DI LINDELÖF

Nota (*) di GIOVANNI AQUARO

La generalizzazione degli spazii di Lindelöf (regolari) che viene esaminata in questa Nota, si descrive facilmente: si tratta degli spazii uniformizzabili nei quali ogni sottospazio uniformemente discreto rispetto alla struttura uniforme universale (def. 1) è un sottospazio (discreto) di Lindelöf e quindi numerabile.

Questi spazii, che vengono detti « paralindelöfiani », condividono con gli spazii di Lindelöf le più importanti proprietà elementari (cfr. propp. 6, 7, 8) ed inoltre godono di ulteriori proprietà collegate a strutture uniformi ed ai completamenti di HEWITT (propp. 4 e 9).

Ovviamente gli spazii di Lindelöf regolari sono paralindelöfiani come paralindelöfiani sono tutti gli spazii uniformizzabili prelindelöfiani, secondo la definizione introdotta in [3], a condizione che in essi ogni sottospazio uniformememente discreto rispetto alla struttura uniforme universale sia un Q-spazio secondo HEWITT (real-compatto secondo la terminologia di [4]).

La classe degli spazii paralindelöfiani include, senza coincidere, la classe degli spazii che verificano la « condizione della catena numerabile » cioè degli spazii in ciascuno dei quali ogni insième di parti aperte, non vuote, a due a due disgiunte sia numerabile.

Esistono spazii paralindelöfiani molto semplici che non verificano la proprietà della catena numerabile ed altri molto generali che la verificano.

1. — La seguente definizione descrive una particolare categoria di sottospazii discreti di uno spazio uniforme.

(*) Lavoro eseguito nel GRUPPO DI RICERCA n. 9 del Comitato Nazionale per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, per l'anno 1961-62.

DEF. 1. — *Chiamasi sottospazio uniformemente discreto dello spazio uniforme* $(E, \mathcal{U})$ [1] *ogni parte* A *di* E *tale che esista un'adiacenza* V *di* $(E, \mathcal{U})$ *per cui, da* $x \in A$, $y \in A$, $x \neq y$ *consegna* $x \in \complement V(y)$).

OSSERVAZIONE 1. — Dunque A è un sottospazio uniformemente discreto di $(E, \mathcal{U})$ se e solo se:

esiste un'adiacenza W *di* $(E, \mathcal{U})$ *tale che da* $x \in A$, $y \in A$, $x \neq y$ *consegua* $W(x) \cap W(y) = \emptyset$.

Invero per ogni adiacenza V di $(E, \mathcal{U})$ esiste un'adiacenza simmetrica W di $(E, \mathcal{U})$ tale che $W \circ W \subset V$.

OSSERVAZIONE 2. — Se E è uno spazio uniformizzabile e se $\mathcal{U}'$ ed $\mathcal{U}''$ sono strutture uniformi su E compatibili con la topologia di E, la parte A di E può essere un sottospazio uniformemente discreto di $(E, \mathcal{U}')$ senza esserlo necessariamente per $(E, \mathcal{U}'')$.

Passiamo a stabilire alcune proprietà dei sottospazi uniformemente discreti dopo aver premesso, per comodità del lettore, il lemma:

LEMMA 1. — *Supponiamo che* A *sia una parte ovunque densa dello spazio uniforme* $(E, \mathcal{U})$ *e sia* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ *una famiglia di parti del sottospazio uniforme* $(A, \mathcal{U}_A)$ [2] *tale che esista un'adiacenza* V *di* $(A, \mathcal{U}_A)$ *per cui da* $\lambda \in I$, $\mu \in I$, $\lambda \neq \mu$ *consegua* $V(X_\lambda) \cap V(X_\mu) = \emptyset$. *Allora esiste un'adiacenza* W *di* $(E, \mathcal{U})$ *tale che* $\lambda \in I$, $\mu \in I$, $\lambda \neq \mu$ *implichi* $W(X_\lambda) \cap W(X_\mu) = \emptyset$.

DIM. Per definizione di $\mathcal{U}_A$ esiste un'adiacenza V' di $(E, \mathcal{U})$ tale che $V = V' \cap (A \times A)$. Sia W l'interno di V': è noto che W è un'adiacenza di $(E, \mathcal{U})$. Poichè ogni $W(X_\iota)$ è aperto in E ed A è ovunque denso in E, da $\lambda \in I$, $\mu \in I$, $\lambda \neq \mu$ consegue $W(X_\lambda) \cap W(X_\mu) = \emptyset$.

Utilizzeremo la seguente proposizione:

PROP. 1. — *Se* $(E, \mathcal{U})$ *è uno spazio uniforme, se* A *è una parte di* E *ovunque densa in* E *e se* $\mathfrak{a}$ *è un numero cardinale infinito, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) — *ogni sottospazio uniformemente discreto di* $(E, \mathcal{U})$ (def. 1) *ha numero cardinale inferiore ad* $\mathfrak{a}$,

b) — *ogni sottospazio uniformemente discreto del sottospazio uniforme* $(A, \mathcal{U}_A)$ *ha numero cardinale inferiore ad* $\mathfrak{a}$.

DIM. *a*) *implica b*). Sia vera la *a*) e supponiamo che X sia un sottospazio uniformemente discreto di $(A, \mathcal{U}_A)$: per la osservazione 1 alla def. 1 e per il lemma 1, X risulta un sottospazio uniformemente discreto di $(E, \mathcal{U})$ e quindi, per la *a*) risulta card $(X) \leq \mathfrak{a}$

---

(1) Cioè E è un insieme ed $\mathcal{U}$ è una struttura uniforme su E: E viene considerato spazio topologico con la topologia dedotta da $\mathcal{U}$ su E.

(2) Con $\mathcal{U}_A$ si indica la struttura uniforme indotta da $\mathcal{U}$ su A.

b) implica a). Supponiamo vera la $b)$ e supponiamo che Y sia un sottospazio uniformemente discreto di $(E, \mathcal{U})$. Per la def. 1, e la sua osservazione 1, esiste un'adiacenza W di $(E, \mathcal{U})$ tale che da $a \in Y$, $b \in Y$ e $a \neq b$ consegua $W(a) \cap W(b) = \emptyset$.

Supponiamo che V sia un'adiacenza *aperta simmetrica* di $(E, \mathcal{U})$ tale che $V \circ V \subset W$. Poiché A è ovunque denso e, per ogni $y \in E$, $V(y)$ è aperto in E, mediante l'assioma della scelta si può assegnare un'applicazione f di Y in A tale che per ogni $y \in Y$ risulti $f(y) \in A \cap V(y)$.

Sia $X = f(y)$.

Riconosciamo che f è ingettiva e che, posto $V_A = V \cap (A \times A)$, oltre ad essere V_A un'adiacenza di $(A, \mathcal{U}_A)$, da $x' \in X$ e $x'' \in X$, e $x' \neq x''$ consegue $V_A(x') \cap V_A(x'') = \emptyset$.

A tal fine, sia $y' \in Y$, $y'' \in Y$ e $y' \neq y''$.

Ragionando per assurdo supponiamo che esista $z \in V_A(f(y')) \cap V_A(f(y''))$: essendo $f(y') \in V(y')$, $f(y'') \in V(y'')$ e $V \circ V \subset W$, si avrebbe $z \in V(V(y')) \cap V(V(y'')) \subset$ $\subset W(y') \cap W(y'')$ contro la definizione di W e l'ipotesi relativa ad y' e y''.

Dunque è $V_A(f(y')) \cap V_A(f(y'')) = \emptyset$.

Da ciò consegue, in primo luogo che è $f(y') \neq f(y'')$ e, quindi, che f è ingettiva.

Inoltre se è $x' \in X$, $x'' \in X$ e $x' \neq x''$ e assunti y' e y'' tali che $f(y') = x'$ $f(y'') = x''$, si ha $V_A(x') \cap V_A(x'') = \emptyset$: dunque X è un sottospazio uniformemente discreto di $(A, \mathcal{U}_A)$: da ciò, in forza di $b)$, f essendo ingettiva, si ha card $(Y) =$ card $(f(Y)) =$ card $(X) \leq \mathfrak{a}$.

Dunque è vera la $a)$.

2. — Si procede ora ad enunciare un lemma del quale la dimostrazione è contenuta nel lemma 12, § 3 di [1]: di questo nell'enunciato seguente si sono conservati i simboli per consentire al Lettore di ricostruire l'argomentazione.

LEMMA 2. — *Supponiamo che E sia uno spazio uniforme* [3] *e che $(V_\iota)_{\iota \in I}$ sia una famiglia di adiacenze di E tale che per ogni insieme aperto U di E risulti* $U = \bigcup_{\iota \in I} (\complement(V_\iota(\complement U)))$ (ciò che accade, in particolare, per il lemma 7, § 3 di [1] se la famiglia $(V_\iota)_{\iota \in I}$ è un sistema fondamentale di adiacenze di E).

Allora, per ogni ricovrimento aperto $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ di E esistono un ricovrimento $(G^*_\beta)_{\beta \in B}$ ed un ricovrimento $(G_\beta)_{\beta \in B}$ di E tali che $(G_\beta)_{\beta \in B}$ sia un raffinamento di $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$, esista un ricovrimento $(B_\iota)_{\iota \in I}$ di B formato da insiemi a due a due disgiunti ed una famiglia $(V^*_\iota)_{\iota \in I}$ di adiacenze aperte di E tati che, per ogni

---

[3] Come di consueto, quando non vi sia possibilità di equivoci, uno spazio uniforme $(E, \mathcal{U})$ si designerà semplicemente con E.

$\iota \in I$, da $\beta \in B_\iota$ consegua $V_\iota^*\ (G_\beta^*) = G_\beta$ ed inoltre i G_β siano a due a due disgiunti.

In conseguenza stabiliamo che:

PROP. 2. — *Supponiamo che E sia uno spazio uniformizzabile, che $\mathcal{U}$ sia una struttura uniforme su E compatibile con la topologia di E e che V sia una adiacenza di E per $\mathcal{U}$ (cioè dello spazio uniforme $(E, \mathcal{U})$).*

Allora, esistono due ricovrimenti aperti $(G_\iota^*)_{\iota \in I}$ e $(G_\iota)_{\iota \in I}$ di E tali che esista un ricovrimento $(I_n)_{n \in N}$ di I formato da insiemi a due a due disgiunti ed esista una successione $(V_n^*)_{n \in N}$ di adiacenze aperte di E per $\mathcal{U}$, tali che, per ogni $n \in \mathrm{N}$ e $\iota \in I$, sia $G_\iota = V_n^*(G_\iota^*)$, gli elementi di $(V_n^*(G_\iota))_{\iota \in I_n}$ siano a due a due disgiunti e risulti:

$$\bigcup_{\iota \in I} (G_\iota \times G_\iota) \subset V.$$

DIM. Si assuma una successione $(V_n)_{n \in \mathrm{N}}$ di adiacenze aperte simmetriche di E per $\mathcal{U}$ tali che $V_0 = V$ e, per ogni $n \in \mathrm{N}$, $V_{n+1} \circ V_{n+1} \subset V_n$. Esiste una struttura uniforme $\mathcal{M}$ su E che ha come sistema fondamentale di adiacenze l'insieme degli elementi della successione $(V_n)_{n \in \mathrm{N}}$. Sia $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ la topologia su E dedotta da $\mathcal{M}$: poichè $\mathcal{M}$ è meno fine di $\mathcal{U}$, $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$, a sua volta, è meno fine della topologia $\mathcal{T}$ inizialmente data su E. Esiste un certo ricovrimento perto $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ di E per $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ tale che

$$\bigcup_{\alpha \in A} (U_\alpha \times U_\alpha) \subset V. \tag{1}$$

Dal lemma 2 consegue la tesi tenendo presente che $\mathcal{M}$ è meno fine di $\mathcal{U}$ e che $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ è meno fine di $\mathcal{T}$.

In relazione ai sottospazii uniformemente discreti può stabilirsi un primo risultato, che adopereremo nel successivo n. 3.

PROP. 3. — *Supponiamo che E sia uno spazio uniformizzabile, che $\mathfrak{a}$ sia un numero cardinale infinito; che $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}(E)$ sia la $\mathfrak{a}$-struttura uniforme su E* ([1], § 3, def. 4) *e che $\mathcal{U}$ sia una qualunque struttura uniforme su E compatibile con la topologia di E.*

Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:

a) — la struttura uniforme $\mathcal{U}$ è meno fine di $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}(E)$.

b) — ogni sottospazio uniforme discreto dello spazio uniforme $(E, \mathcal{U})$ ha numero cardinale inferiore ad $\mathfrak{a}$.

c) — per ogni parte A di E tale che esista un'adiacenza V di E per $\mathcal{U}$ tale che da $x \in A$, $y \in A$, $x \neq y$ consegua $V(x) \cap V(y) = \emptyset$, risulta card $(A) \leq \mathfrak{a}$.

DIM. *a*) *implica b*). Supponiamo vera la *a*) e supponiamo che A sia un sottospazio uniforme discreto di $(E, \mathcal{U})$: dunque esiste un'adiacenza V di $(E, \mathcal{U})$ tale che $x \in A$, $y \in A$, $x \neq y$, implica $x \in \complement V(y)$.

Poichè $\mathcal{U}$ è meno fine di $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}(E)$, esiste un ricovrimento aperto, localmente finito ed $\mathcal{U}$-riducibile [4] $(U_\iota)_{\iota \in I}$ di E tale che

$$\text{card}(I) \leq \mathfrak{a} \tag{1}$$

$$\bigcup_{\iota \in I} (U_\iota \times U_\iota) \subset V. \tag{2}$$

Sia $x \in A$ e sia I_x^* l'insieme degli $\iota \in I$ tali che $x \in U_\iota$. Notoriamente, a causa di (2) si ha:

$$\bigcup_{\iota \in I_x^*} U_\iota \subset V(x). \tag{3}$$

Sia $x \in A$, $y \in A$ e $I_x^* = I_y^*$: allora, a causa di (3) risulta

$$x \in \bigcup_{\iota \in I_x^*} U_\iota = \bigcup_{\iota \in I_y^*} U_\iota \subset V(y)$$

donde, per la definizione di A, consegue $x = y$. Dunque, l'applicazione φ di A nell'insieme $\mathcal{F}(I)$ delle parti finite di I definita ponendo $\varphi(x) = I_x^*$ per ogni $x \in A$, è ingettiva: pertanto è $\text{card}(A) = \text{card}(\varphi(A)) = \text{card}(\mathcal{F}(I))$.

Se I è finito, $\mathcal{F}(I)$ è finito e quindi $\text{card}(\mathcal{F}(I)) \leq \mathfrak{a}$. Se I è infinito, si ha $\text{card}(\mathcal{F}(I)) = \text{card}(I) = \mathfrak{a}$. Quindi, in ogni caso, $\text{card}(A) = \mathfrak{a}$.

b) *implica c*). Consegue dalla osservazione alla def. 1.

c) *implica a*). Supponiamo vera la *c*) e sia V un'adiacenza di E per $\mathcal{U}$. In forza della prop. 2 esistono due ricovrimenti aperti $(G_\iota^*)_{\iota \in I}$ e $(G_\iota)_{\iota \in I}$ di E, un ricovrimento numerabile $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ di I formato da insiemi a due a due disgiunti ed una successione $(V_n^*)_{n \in \mathbf{N}}$ di adiacenze aperte di E per $\mathcal{U}$ tali che, per ogni $n \in \mathbf{N}$, gli elementi di $(V_n^*(G_\iota^*))_{\iota \in I_n}$ siano a due a due disgiunti e, per ogni $\iota \in I_n$, sia $V_n^*(G_\iota^*) = G_\iota$ e si abbia:

$$\bigcup_{\iota \in I} (G_\iota \times G_\iota) \subset V. \tag{4}$$

Scartando gli $\iota \in I$ tali che $G_\iota^* = \emptyset$, senza ledere la validità di quanto sopra, possiamo supporre che ogni G_ι^* sia non vuoto. Sia $x_\iota \in G_\iota^*$.

---

[4] Si rammenti la def. 6, § 3 di [1].

Se è $n \in \mathbf{N}$, poichè per ogni $\iota \in I$ è $V_n^*(x_\iota) \subset V_n^*(G_\iota^*)$, la sottofamiglia $(V_n^*(x_\iota))_{\iota \in I_n}$ è formata da insiemi a due a due disgiunti e quindi per c) si ha card $(I_n) \leq \mathfrak{a}$.

Poniamo ora $F = \overline{G}_\iota^*$ per ogni $\iota \in I$. Evidentemente $(F_\iota)_{\iota \in I}$ è un ricovrimento chiuso di E.

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ sia V_n un'adiacenza aperta simmetrica di $(E, \mathcal{U})$ tale che

$$V_n \circ V_n \circ V_n \circ V_n \circ V_n \circ V_n \subset V_n^* .$$

e sia $(U_\iota)_{\iota \in I_n}$ la famiglia di insiemi aperti di E definita ponendo $U_\iota = V_n(F_\iota)$ se $\iota \in I_n$. È facile riconoscere che per ogni $x \in E$, $V_n(x)$ interseca al più un $V_n(F_\iota)$ e quindi $(U_\iota)_{\iota \in I_n}$ è una famiglia discreta di parti di E.

Dopo ciò risulta che $(U_\iota)_{\iota \in I}$ è un ricovrimento aperto $\mathcal{U}$ riducibile di E e che $(F_\iota)_{\iota \in I}$ è una sua $\mathcal{U}$-riduzione. Inoltre, per ogni $\iota \in I$, risulta $U_\iota \subset G_\iota$ e quindi, da (4), consegue

$$\bigcup_{\iota I} (U_\iota \times U_\iota) \subset V.$$

Ciò, per la def. 4, § 2 e per la prop. 4, § 2 di [1] dimostra che V è un'adiacenza di E per $\mathcal{A}_{\mathfrak{a}}(E)$.

3. — Si fornisce ora la definizione di spazio « paralindelöfiano ».

DEF. 2. — *Lo spazio uniformizzabile E si dice paralindelöfiano se, detta $\mathcal{A}_\infty(E)$ la struttura uniforme universale su E* (cfr. [1], § 3, def. 4.), *ogni sottospazio uniformemente discreto dello spazio uniforme $(E, \mathcal{A}_\infty(E))$, secondo la* def. 1, *è uno spazio di Lindelöf.*

OSSERVAZIONE 1. — Poichè ogni spazio discreto di Lindelöf è numerabile, nella def. 2 ora enunciata, la frase « è uno spazio di Lindelöf » può essere sostituita dall'altra « è numerabile ».

PROP. 4. — *Se E è uno spazio uniformizzabile le seguenti proposizioni sono equivalenti :*

a) — *E è paralindelöfiano* (def. 2).

b) — *la struttura uniforme universale $\mathcal{A}_\infty(E)$ di E è identica alla ω-struttura uniforme $\mathcal{A}_\omega(E)$ di E, con $\omega = card\,(\mathbf{N})$.* ([1], § 3, def. 4).

c) — *se $(G_\iota)_{\iota \in I}$ è un ricovrimento aperto, localmente finito ed $\mathcal{U}$-riducibile di E* ([1], § 3, def. 6) *esiste una parte numerabile H di I tale che la sottofamiglia $(G_\iota)_{\iota \in H}$ sia un ricovrimento di E.*

DIM. L'equivalenza di *a*) e *b*) consegue dalla prop. 3, per $\mathfrak{a} = \omega$, tenendo presente che per costruzione $\mathcal{A}_\infty(E)$ è più fine di $\mathcal{A}_\omega(E)$.

La tesi è completamente dimostrata stabilendo che *b*) equivale a *c*). Ora è chiaro che se è vera la *b*) cioè $\mathcal{A}_\infty(E) = \mathcal{A}_\omega(E)$ e se $(G_\iota)_{\iota \in I}$ è il ricovrimento aperto descritto in c), in forza della definizione di $\mathscr{A}_\infty(E)$, esiste un'adiacenza V di E per $\mathscr{A}_\infty(E)$ tale che $(V(x))_{x\in E}$ sia più fine di $(G_\iota)_{\iota\in I}$: ciò viene assicurato dalla c) del teor. 1, § 2, di [1].

Ma essendosi supposto $\mathscr{A}_\infty(E) = \mathscr{A}_\omega(E)$, V è anche un'adiacenza di E per $\mathscr{A}_\omega(E)$ e quindi, ancora per la c) del teor. 1, § 2 di [1], tenuto conto della definizione di $\mathscr{A}_\omega(E)$, esiste un ricovrimento aperto numerabile, localmente finito ed $\mathcal{U}$-riducibile $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ di E più fine di $(G_\iota)_{\iota\in I}$. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ assumiamo uno $\varphi(n) \in I$ tale che $U_n \subset G_{\varphi(n)}$. Evidentemente si ha $E = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} G_{\varphi(n)}$ e quindi H può essere assunto quale insieme degli $\iota \in I$ tali che sia $\iota = \varphi(n)$. Ciò dimostra la c).

Reciprocamente se è vera la c) la b) consegue immediatamente dalle definizioni di $\mathscr{A}_\infty(E)$ e $\mathscr{A}_\omega(E)$.

Ogni spazio di Lindelöf regolare è paralindelöfiano. Ciò risulta dalla:

PROP. 5. — *Se E è uno spazio regolare le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) — *E è paracompatto e paralindelöfiano* (def. 2)

b) — *E è uno spazio di Lindelöf.*

DIM. a) *implica* b). Se è vera la a) e se $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ è un qualunque ricovrimento aperto di E, poichè E è paracompatto e regolare esiste un ricovrimento aperto localmente finito ed $\mathcal{U}$-riducibile ([5]) $(G_\iota)_{\iota\in I}$ di E più fine di $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$; poichè E è paralindelöfiano esiste una parte numerabile H di I tale che la sottofamiglia $(G_\iota)_{\iota\in H}$ sia un ricovrimento di E (cfr. prop. 4). Evidentemente, esiste un' applicazione f di H in L tale che da $\iota \in H$ consegua $G_\iota \subset H_{f(\iota)}$. Comunque $E = \bigcup_{\lambda\in f(H)} U_\lambda$: ciò, $f(H)$ essendo numerabile al pari di H, dimostra la b).

b) *implica* a). Se è vera la b), E è paracompatto come è stato dimostrato da K. MORITA [5] e, per la prop. 4, E è paralindelöfiano.

Indichiamo ora alcune proprietà generali degli spazii paralindelöfiani.

PROP. 6. — *Supponiamo che A sia una parte ovunque densa dello spazio uniformizzabile e supponiamo che A come sottospazio* (*uniformizzabile*) *di E sia paralindelöfiano* (def. 2). *Allora anche E è paralindelöfiano.*

DIM. La struttura uniforme universale $\mathscr{A}_\infty(E)$ di E induce su A la struttura uniforme $\mathscr{A}_\infty(E)_A$ la quale, ovviamente, è meno fine della struttura uniforme universale $\mathscr{A}_\infty(A)$ del sottospazio A. Poichè A è paralindelöfiano, ogni sottospazio uniformemente discreto di $(A, \mathscr{A}_\infty(A))$, e quindi ogni sottospazio uniformemente discreto di $(A, \mathscr{A}_\infty(E)_A)$, è numerabile. Ciò in forza della prop. 1 dimostra la tesi.

([5]) Notoriamente ogni spazio paracompatto regolare è normale ed ogni ricovrimento aperto localmente finito di uno spazio normale è $\mathcal{U}$-riducibile.

PROP. 7. — *Supponiamo che E sia uno spazio uniformizzabile e supponiamo che $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sia un ricovrimento di E tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ il sottospazio uniformizzabile A_n sia paralindelöfiano. Allora l'intero spazio E è paralindelöfiano.*

DIM. Sia $(G_\iota)_{\iota \in I}$ un ricovrimento aperto localmente finito ed $\mathcal{U}$-riducibile di E. Sia $n \in \mathbf{N}$. La famiglia $(A_n \cap G_\iota)_{\iota \in I}$ è un ricovrimento aperto localmente finito ed $\mathcal{U}$-riducibile del sottospazio A_n. Poichè A_n è paralindelöfiano, in forza della prop. 4, equivalenza di *a*) e *c*), esiste una parte numerabile H_n di I tale che la sottofamiglia $(A_n \cap G_\iota)_{\iota \in H_n}$ sia un ricovrimento di A_n. Posto $H = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} H_n$, la sottofamiglia $(G_\iota)_{\iota \in H}$ è un ricovrimento di E ed H è una parte numerabile di I. Ciò, ancora per l'equivalenza di *a*) e *b*) nella prop. 4, dimostra la tesi.

Prop. 8. — *Supponiamo che $f: E \to E'$ sia un'applicazione continua surgettiva dello spazio uniformizzabile E sopra lo spazio uniformizzabile E'. Ogni volta che E sia paralindelöfiano* (def. 2) *E' lo è del pari.*

DIM. Supponiamo che $(G'_\iota)_{\iota \in I}$ sia un ricovrimento aperto localmente finito ed $\mathcal{U}$-riducibile di E'. In forza del lemma 2, § 3 di [1] e in forza della continuità di f la famiglia $(\overset{-1}{f}(G'_\iota))_{\iota \in I}$ è un ricovrimento aperto localmente finito ed $\mathcal{U}$-riducibile di E. Dalla prop. 4, *a*) equivale *c*), E' risulta paralindelöfiano.

PROP. 9. — *Se E è uno spazio uniformizzabile di Hausdorff* (*cioè completamente regolare*) *paralindelöfiano, l'estensione $v(E)$ di* HEWITT *di E è, del pari, paralindelöfiana* (def. 2).

DIM. Supponiamo che $\mathcal{A}_\infty(E)$ e $\mathcal{A}_\omega(E)$ siano la struttura uniforme universale e, rispetto, la ω-struttura uniforme di E ($\omega = \operatorname{card}(\mathbf{N})$) e supponiamo che $\mathcal{A}_\infty(v(E))$ e $\mathcal{A}_\omega(v(E))$ (6) siano le analoghe strutture uniformi su $v(E)$. Detta $\mathcal{A}_\omega(v(E))_E$ la struttura uniforme indotta da $\mathcal{A}_\omega(v(E))$ su E, risulta:

$$\mathcal{A}_\omega(E) = \mathcal{A}_\omega(v(E))_E . \tag{1}$$

D'altra parte, detta $\mathcal{A}_\infty(v(E))_E$ la struttura uniforme indotta da $\mathcal{A}_\infty(v(E))$ su E, poichè E è paralindelöfiano, a causa di (1) si ha:

$\mathcal{A}_\omega(E) = \mathcal{A}_\omega(v(E))_E$ *meno fine di* $\mathcal{A}_\infty(v(E))_E$ *meno fine di* $\mathcal{A}_\infty(E) = \mathcal{A}_\omega(E)$ e quindi $\mathcal{A}_\infty(E) = \mathcal{A}_\infty(v(E))_E$. Da ciò, dalla def. 2 e dalla prop. 1 consegue la tesi tenendo presente che E, che è (ingettivamente) immerso in $v(E)$, è ovunque denso in $v(E)$.

---

(6) Lo spazio uniforme $(v(E), \mathcal{A}_\omega(v(E)))$ è completo (cfr. [2], § 3, prep. 8, osserv. 1).

4. — La nozione di spazio paralindelöfiano può essere posta in relazione con quella di spazio prelindelöfiano introdotta in [3]. A tal fine conviene osservare preliminarmente che:

PROP. 10. — *Supponiamo che* $(E, \mathcal{U})$ *sia uno spazio uniforme tale che ogni filtro* $\mathcal{U}$*-inviluppato* (7) *su* $(E, \mathcal{U})$, *verificante la proprietà dell'intersezione numerabile* (8) *sia meno fine di almeno un filtro di Cauchy su* $(E, \mathcal{U})$.

Allora ogni sottospazio uniformemente discreto di $(E, \mathcal{U})$ (cfr. def. 1) *è numerabile.*

DIM. Supponiamo che A sia un sottospazio uniformemente discreto di $(E, \mathcal{U})$ e sia V un'adiacenza di $(E, \mathcal{U})$ tale che $x \in A$, $y \in A$, $x \neq y$ implichi $y \in \complement(V(x))$.

Per assurdo, supponiamo che A sia infinito non numerabile.

Sia $\mathcal{B}_A$ l'insieme delle parti B di E della forma $B = A \cap (\complement D)$, dove D è una parte numerabile di A. Ovviamente $\mathcal{B}_E$ è base di un filtro $\mathcal{F}_A$ su E il quale verifica la proprietà dell'intersezione numerabile. Sia $\mathcal{F}_{A\mathcal{U}}$ il filtro $\mathcal{U}$-inviluppato generato da $\mathcal{F}_A$.

Poichè $\mathcal{F}_{A\mathcal{U}}$, al pari di $\mathcal{F}_A$, verifica la proprietà dell'intersezione numerabile, per ipotesi, esiste un filtro di Cauchy $\mathcal{M}$ su $(E, \mathcal{U})$ più fine di $\mathcal{F}_{A\mathcal{U}}$.

Supponiamo che W sia un'adiacenza simmetrica di $(E, \mathcal{U})$ tale che $W \circ W \circ W \subset V$.

Poichè $\mathcal{M}$ è un filtro di Cauchy esiste un $M \in \mathcal{M}$ tale che M sia piccolo di ordine W cioè sia $M \times M \subset W$.

Per ogni $B \in \mathcal{B}_A$, risulta $W(B) \in \mathcal{F}_{A\mathcal{U}}$ e quindi, essendo $\mathcal{F}_{A\mathcal{U}}$ meno fine di $\mathcal{M}$ ed $M \in \mathcal{M}$, si ha $W(B) \cap M \neq \emptyset$. Consegue che esistono $x \in M$ e $p \in B$ tali che $(x, p) \in W$. Posto $B' = B \cap (\complement\{p\})$, è $B' \in \mathcal{B}_A$ e quindi, in modo analogo esistono $y \in M$ e $q \in B'$ tali che $(y, q) \in W$: poichè risulta $(x, y) \in M \times M \subset W$ e W è simmetrica, si trova $(p, q) \in W \circ W \circ W \subset V$ e poi $q \in V(p)$ contro $p \in A$, $q \in A$ e $p \neq q$.

Dunque A è numerabile.

OSSERVAZIONE. — Se $\mathcal{U}$ è identica ad $\mathcal{A}_\infty(E)$, la struttura uniforme universale su E, risulta, dunque, che E è paralindelöfiano.

Si deve rammentare ora un risultato di T. SHIROTA [6] sul quale si fondano alcune fondamentali caratterizzazioni dei Q-spazii secondo E. HEWITT (spazii real-compatti, secondo [4] alla quale opera si rinvia per tutti i dettagli). L'enunciato è tradotto nella terminologia adoperata in [3] e nella presente nota.

---

(7) Le definizioni di filtro $\mathcal{U}$-inviluppato, di filtro $\mathcal{U}$-inviluppato generato da un filtro $\mathcal{F}$ (detto anche $\mathcal{U}$-inviluppo di $\mathcal{F}$), di filtro $\mathcal{U}$-inviluppato massimale etc. vedasi [3] § 2.

(8) Il filtro $\mathcal{F}$ verifica la proprietà dell'intersezione numerabile se l'intersezione di una qualunque successione di elementi di $\mathcal{F}$, non è vuota.

PROP. 11. — *Supponiamo che E sia uno spazio uniformizzabile e che $\mathcal{U}$ sia una struttura uniforme su E compatibile con la topologia di E e tale che ogni sottospazio uniformemente discreto di $(E, \mathcal{U})$ sia un Q-spazio. Allora ogni filtro completamente regolare massimale verificante la proprietà della intersezione numerabile è un filtro di Cauchy su $(E, \mathcal{U})$.*

Ancora in [3] è stata introdotta la seguente definizione

DEF. 3. — *Lo spazio uniformizzabile E si dice prelindelöfiano se ogni filtro completamente regolare verificante la proprietà dell'intersezione numerabile è meno fine di un filtro della medesima specie massimale.*

PROP. 12. — *Sepponiamo che E sia uno spazio uniformizzabile prelindelöfiano* (def. 3). *Se $\mathcal{U}$ è una struttura uniforme su E compatibile con la topologia di E tale che ogni sottospazio uniformemente discreto di $(E, \mathcal{U})$* (def. 1) *sia un Q-spazio, allora ogni sottospazio uniformemente discreto di $(E, \mathcal{U})$ è numerabile.*

DIM. Sia $\mathcal{F}$ un filtro completamente regolare verificante la proprietà della intersezione numerabile su E: esiste un filtro della medesima specie e massimale $\mathcal{M}$ su E più fine di $\mathcal{F}$ per la def. 3. Per la prop. 11, $\mathcal{M}$ è un filtro di Cauchy su $(E, \mathcal{U})$ e quindi per la prop. 10, consegue la tesi.

COROLLARIO. — *Nelle ipotesi della prop. 12, $\mathcal{U}$ è meno fine della ω-struttura uniforme $\mathcal{A}_\omega(E)$ su E* ($\omega = \text{card}(\mathbf{N})$).

Consegue dalla prop. 12 e dalla prop. 1.

OSSERVAZIONE. — Dunque, se si può indicare uno spazio uniformizzabile prelindelöfiano E sul quale esista una struttura uniforme compatibile con la topologia di E e strettamente più fine di $\mathcal{A}_\omega(E)$, allora esiste un numero cardinale misurabile, cioè un insieme infinito (non numerabile) che con la topologia discreta non è un Q-spazio (cfr. [4]). La questione, ovviamente, è aperta.

5. — La nozione di spazio paralindelöfiano può porsi in relazione con la nozione di « proprietà della catena numerabile ».

DEF. 4. — *Se E è uno spazio topologico, si dice che E verifica la proprietà della catena numerabile se ogni insieme di parti aperte non vuote a due a due disgiunte di E è, al più, numerabile.*

OSSERVAZIONE 1. — Qualche autore chiama la precedente proprietà con la denominazione di « proprietà di SOUSLIN ».

OSSERVAZIONE 2. — Ogni insieme aperto di uno spazio verificante la proprietà della catena numerabile, considerato come sottospazio, verifica la proprietà della catena numerabile.

OSSERVAZIONE 3. — Esistono spazii uniformizzabili paralindelöfiani (compatti) i quali non verificano la proprietà della catena numerabile. Infatti sia E uno spazio discreto infinito non numerabile e sia E_ω la sua compattificazione di Alexandroff: come è noto E_ω è uno spazio compatto di Hausdorff tale che sia (ingettivamente) $E \subset E_\omega$ ed esista l'elemento ω di E_ω tale che $\{\omega\} = \complement_{E_\omega}(E)$ ed E munito della topologia discreta sia sottospazio di E_ω. Poiché E è aperto in E_ω, se E_ω verificasse la proprietà della catena numerabile anche E dovrebbe verificarla, come è detto nella Osservazione 2. Ma allora poichè, per ogni $x \in E$, $\{x\}$ è aperto in E, E dovrebbe essere numerabile.

Sussiste la

PROP. 13. — *Se E è uno spazio uniformizzabile le seguenti proposizioni sono equivalenti* :

a) — *E verifica la proprietà della catena numerabile* (def. 4).

b) — *ogni insieme aperto di E come sottospazio* (*uniformizzabile*) *è paralindelöfiano* (def. 2).

DIM. *a*) *implica b*). Consegue dalla osservazione 2 alla def. 4 e dal fatto che ogni spazio uniformizzabile che verifichi la proprietà della catena numerabile è paralindelöfiano.

b) *implica a*). Supponiamo che $(U_\iota)_{\iota \in I}$ sia una famiglia di insiemi aperti non vuoti a due a due disgiunti di E sotto l'ipotesi che *b*) sia vera. Posto $U = \bigcup_{\iota \in I} U_\iota$, U è aperto in E ed $(U_\iota)_{\iota \in I}$ è un ricovrimento aperto localmente finito ed $\mathcal{U}$-riducibile del sottospazio U avente se stesso come $\mathcal{U}$-riduzione (ogni U_ι oltre che aperto è anche chiuso in U). Poichè è vera la *b*) a causa della equivalenza di *a*) e *c*) nella prop. 4, poichè gli U_ι sono non vuoti, I risulta numerabile e quindi è vera la *a*).

La proposizione ora dimostrata va posta in relazione con la osservazione 3. alla def. 4, e va anche osservato che ogni spazio paracompatto che verifichi la proprietà della catena numerabile, in forza dalle prop. 13 e 5, è uno spazio di Lindelöf. Nella osservazione 3 alla def. 4 si dà un esempio di spazio (para)compatto che non verifica la proprietà della catena numerabile e che è uno spazio di Lindelöf.

Si osservi ora che

PROP. 14. — *Se il prodotto $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ di una famiglia di spazii paracompatti regolari è uno spazio paralindelöfiano* (def. 2) *allora ogni E_ι è uno spazio di Lindelöf.*

DIM. La ι-sima proiezione pr_ι di E in E_ι è un'applicazione continua surgettiva e quindi, E essendo paralindelöfiano, per la prop. 8, E_ι è paralindelöfiano e quindi per la prop. 5 è uno spazio di Lindelöf.

Consegue:

PROP. 15. — *Se $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ è prodotto di una famiglia di spazii metrizzabili, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) — *E è paralindelöfiano* (def. 2),

b) — *ogni E_ι ha base numerabile,*

c) — *E verifica la proprietà della catena numerabile* (def. 4).

DIM. *a*) *implica b*). Consegue dalla prop. 14 e dal fatto che ogni spazio metrizzabile di Lindelöf ha base numerabile.

b) *implica c*). È stato stabilito da SPILRAJN [7].

c) *implica a*). Consegue dalla prop. 13.

BIBLIOGRAFIA

[1] AQUARO, G.: *Ricovrimenti aperti e strutture uniformi sopra uno spazio topologico:* Annali di Mat. pura ed appl. (IV), tomo XLVII (1959) pp. 310-390

[2] » : *Completamenti di spazii uniformi;* Annali di Mat. pura ed appl. (IV) vol. LVI, pp. 87-98.

[3] » : *Ancora intorno a completamenti di spazii uniformi,* Annali di Mat. pura ed appl. (1962) (in corso di pubblicazione).

[4] GILLMAN, L. e JERISON, M.: *Rings of continuous functions;* Van Nostrand, New York (1960).

[5] MORITA, K.: *Star finite coverings and the star-finite property;* Math. Japonicae, vol. 1, n. 2 (1948) pp. 60-68.

[6] SHIROTA, T.: *A class of topological spaces;* Osaka Math. Journ. vol. 4, (1952) pp. 23-40.

[7] SPILRAJN, E: *Remarque sur les produits cartesiens d'espaces topologiques;* C. R. (Doklady) Acad. Sci U. R. S. S, vol. 31 (1941), pp. 525-527.