

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

U. BARBUTI

Sulla convergenza di un procedimento d'approssimazioni successive in problemi regolari e non lineari, di tipo parabolico, in due variabili

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 16, n° 2 (1962), p. 91-120

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1962_3_16_2_91_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLA CONVERGENZA DI UN PROCEDIMENTO
D'APPROSSIMAZIONI SUCCESSIVE
IN PROBLEMI REGOLARI E NON LINEARI,
DI TIPO PARABOLICO, IN DUE VARIABILI

Nota di U. BARBUTI (a Pisa)

Consideriamo la equazione :

$$0.1 \quad -u_{xx} + a(x, t)u_t = F[u],$$

ove $a(x, t)$ s'intende assegnata sul rettangolo

$$R = \{ x, t : 0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq t \leq T \},$$

mentre l'operatore $F[u]$ è definito con la posizione :

$$0.2 \quad F[u] = F(u_x, u; x, t),$$

supponendo la funzione F assegnata sull'insieme $R \times \Gamma$, prodotto cartesiano di R per il piano numerico delle coppie ordinate di numeri reali u_x, u . Indicata con $\mathcal{C}^{(2)}$ la classe delle funzioni reali $u(x, t)$, definite in R , dotate di derivate u_x, u_t, u_{xx} in R^0 (interno di R) che risultano, insieme alle dette derivate, continue su R , ci occuperemo nel seguito del problema seguente :

PROBLEMA A. *Considerato il sistema :*

$$0.3 \quad -u_{xx} + au_t = F[u], \quad (x, t) \in R^0$$

$$0.4 \quad u(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, X]$$

$$u(0, t) = f_1(t), \quad u(X, t) = f_2(t), \quad t \in [0, T],$$

si cerchino condizioni sufficienti per le funzioni a, F e per i dati al contorno affinché esistano soluzioni del sistema 0.3, 0.4 nella classe $\mathcal{C}^{(2)}$. ⁽¹⁾

Questo problema è classico ed è stato, vari anni addietro, trattato ampiamente da M. Gevrey ⁽²⁾ e, in condizioni più attenuate di regolarità, più recentemente da G. Prodi ⁽³⁾, da C. Ciliberto ⁽⁴⁾ e da altri ⁽⁵⁾.

Il metodo usato da Gevrey consiste nel trasformare il problema in una equazione integro-differenziale, utilizzando poi, per questa, procedimenti di approssimazioni successive; i metodi usati dagli altri autori fanno essenzialmente ricorso alle teorie di Leray Schauder, oppure al principio del punto fisso in trasformazioni di uno spazio funzionale in sè.

Se vogliamo considerare per il problema A procedimenti dimostrativi che conducono ad una effettiva costruzione della soluzione, che interessi anche il punto di vista numerico, ci si può utilmente riferire al metodo dei momenti ⁽⁶⁾, già impiegato da J. W. Green ⁽⁷⁾ nel caso parabolico lineare.

Con questa nota si consegue un teorema d'esistenza e unicità per il problema A (teor. 1, n° 4) in condizioni abbastanza generali sì da includere i casi segnalati dal Green (Cfr. la nota (10)). Segue poi un teorema di con-

⁽¹⁾ Affinchè il problema sia risolubile è necessario che siano soddisfatte ovvie condizioni di compatibilità tra i dati e le funzioni a, F nei punti $x=0, t=0$ e $x=X, t=0$. Esse sono:

$$g(0) = f_1(0), -g''(0) + a(0,0)f_1'(0) = F(g'(0), g(0); 0, 0)$$

$$g(X) = f_1(0), -g''(X) + a(X,0)f_2'(0) = F(g'(X), g(X); X, 0).$$

⁽²⁾ Si veda [1] (a p. 305) nella bibliografia alla fine della nota.

⁽³⁾ Si veda [2], nota I e II, pp. 1-52.

⁽⁴⁾ C. Ciliberto ha recato vari contributi a questo e a più generali problemi; si vedano i lavori citati in [3], [4], [5], [6].

⁽⁵⁾ Per problemi deboli relativi a operatori non lineari di tipo parabolico, in n variabili, si veda E. Gagliardo in [7].

⁽⁶⁾ Così denominato in [8] da S. Faedo che lo ha introdotto, per il problema classico, nel caso di operatori lineari iperbolici. Un tale metodo è stato, indipendentemente, introdotto da Galerkin (Cfr. [10] a p. 215) per le equazioni variazionali di tipo ellittico. Per l'adattamento del metodo a problemi deboli e lineari, di tipo iperbolico, in n variabili, si veda [11]; a problemi regolari, lineari e parabolici in due variabili si veda [9]; a problemi regolari, non lineari di tipo iperbolico in due variabili si veda [12].

Il metodo in parola è stato poi teorizzato da J. L. Lions in problemi deboli (astratti) in uno spazio hilbertiano (cfr. ad es. [13]) ed è denominato da questo autore in [10] « méthode d'approximation par des projections ». Per maggiori notizie bibliografiche rimandiamo alla monografia [10].

⁽⁷⁾ Cfr. in [9] a p. 127.

vergenza (teor. 2, n° 11) e infine una osservazione (n° 12) sul problema della dipendenza continua dai dati nella metrica della approssimazione in media.

1. Va notato, ai fini dell'analisi seguente, che, supponendo soddisfatte per i dati del problema A le condizioni di compatibilità e supponendo che le funzioni f_1, f_2 siano continue con la loro derivata prima e la g continua con la derivata prima e seconda, allora è possibile costruire una funzione $w(x, t)$, tale che, facendo il cambiamento di variabile $v = u - w$, il problema A si trasforma nel problema equivalente:

PROBLEMA B. Considerato il sistema differenziale

$$1.1 \quad -v_{xx} + a(x, t)v_t = \Phi[u] \quad (x, t) \in R^0$$

$$1.2 \quad v(x, 0) = 0, \quad x \in (0, X]$$

$$v(0, t) = v(X, t) = 0, \quad t \in [0, T],$$

ove risulta

$$1.3 \quad \Phi[v] = F[v + w] + w_{xx} - aw_t,$$

ricercare condizioni sufficienti per i dati perchè esistano soluzioni nella classe $\mathcal{C}^{(2)}$.

Basta all'uopo prendere la funzione

$$1.4 \quad w(x, t) = (f_1(t) - f_1(0))\left(1 - \frac{x}{X}\right) + (f_2(t) - f_2(0))\frac{x}{X} + g(x) \quad (8).$$

Il metodo dei momenti e un criterio di eguale continuità.

2. Prendiamo in esame il problema A e, al fine di illustrare per questo il metodo dei momenti, supponiamo $f_1(t) = f_2(t) = 0$ se $t \in [0, T]$. Le condizioni di compatibilità per i dati al contorno impongono, in questo caso, $g(0) = g(X) = 0$. Facciamo anche la ipotesi che, considerato il sistema di funzioni $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n, \dots$, ove:

$$2.1 \quad \varphi_i(x) = \text{sen} \frac{i\pi x}{X},$$

(8) Basta controllare, tenuto conto delle condizioni di compatibilità (si veda la nota (1)). Si osservino anche le condizioni di compatibilità per il problema B che sono: $\Phi(0, 0; 0, 0) = \Phi(0, 0; X, 0) = 0$.

la funzione $g(x)$ sia sviluppabile in serie di Fourier delle φ_i con convergenza uniforme su $[0, X]$.

Avremo allora che esisterà una successione $g_i, i = 1, 2, \dots$, di costanti, tali che per essa risulti:

$$2.2 \quad \lim_n \sum_{i=1}^n g_i \varphi_i(x) = g(x),$$

uniformemente nel detto intervallo.

Si consideri ora su R la funzione:

$$2.3 \quad v_n(x, t) = \sum_{i=1}^n c_{in}(t) \varphi_i(x),$$

ove le funzioni $c_{in}(t)$ si suppongono soddisfare il sistema differenziale

$$2.4 \quad \int_0^X \left\{ -\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + a \frac{\partial v_n}{\partial t} \right\} \varphi_j dx = \int_0^X F[v_n] \varphi_j dx; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad t \in [0, T]$$

$$2.5 \quad c_{in}(0) = g_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

La funzione $v_n(x, t)$, definita in 2.3; 2.4; 2.5, sarà detta l'approssimazione ennesima del metodo dei momenti.

Va notato che l'esistenza di v_n in R è vincolata alla possibilità del sistema 2.4, 2.5 nelle incognite $c_{in}(t)$. A questo proposito proviamo che:

I. Se la funzione $a(x, t)$ è continua in R , se $a(x, t) \geq m > 0$, se la funzione $F(u_x, u; x, t)$ è continua e lipschitziana in grande su $R \times \Gamma$ rispetto alle variabili u_x, u , vale a dire se esiste una costante assoluta L , tale per essa risulta:

$$2.6 \quad |F(\tilde{u}_x, \tilde{u}; x, t) - F(u_x, u; x, t)| \leq L \{ |\tilde{u}_x - u_x| + |\tilde{u} - u| \}$$

allora esiste, ed è unica, la soluzione del sistema 2.4, 2.5.

A questo proposito scriviamo, più esplicitamente, le equazioni 2.4; si ha:

$$\sum_{i=1}^n c'_{in}(t) \int_0^X a \varphi_i \varphi_j dx = \sum_{i=1}^n c_{in}(t) \int_0^X \varphi_i'' \varphi_j dx + \int_0^X F[v_n] \varphi_j dx$$

$$j = 1, 2, \dots, n, \quad t \in [0, T].$$

Questo sistema si può normalizzare in quanto la matrice dei coefficienti delle c'_{in} è la matrice di Gram, relativa alle funzioni $\sqrt{a(x, t)} \varphi_i(x) \quad i = 1, 2, \dots, n$,

che risultano linearmente indipendenti in $[0, X]$ per la ipotesi $a(x, t) \geq m$; conseguentemente il suo determinante è (per ogni $t \in [0, T]$) maggiore di una costante positiva. Normalizzando il sistema si ottiene:

$$2.7 \quad c'_{jn} = \sum_{i=1}^n A_{ij}(t) c_{in} + \sum_{i=1}^n B_{ij}(t) \cdot \int_0^X F[v_n] \varphi_j dx, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

ove le funzioni $A_{ij}(t)$, $B_{ij}(t)$ sono continue in $[0, T]$. Indicando con Δc_{in} incrementi arbitrari per le c_{in} (riguardate come variabili indipendenti) risulta poi, per ogni j , a motivo della ipotesi 2.6:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^X F(\sum_i (c_{in} + \Delta c_{in}) \varphi'_i, \sum_i (c_{in} + \Delta c_{in}) \varphi_i; x, t) \varphi_j dx - \int_0^X F(\sum_i c_{in} \varphi'_i, \sum_i c_{in} \varphi_i; x, t) \varphi_j dx \right| \leq \\ & \leq \int_0^X |F(\sum_i (c_{in} + \Delta c_{in}) \varphi'_i, \sum_i (c_{in} + \Delta c_{in}) \varphi_i; x, t) - F(\sum_i c_{in} \varphi'_i, \sum_i c_{in} \varphi_i; x, t)| dx \leq \\ & \leq \int_0^X L \{ |\sum_i \Delta c_i \varphi'_i| + |\sum_i \Delta c_i \varphi_i| \} dx \leq K \sum_i |\Delta c_i|. \end{aligned}$$

Ne segue la lipschitzianità in grande del sistema 2.7 rispetto alle c_{in} ; conseguentemente, per noti teoremi sulle equazioni differenziali ordinarie, segue l'esistenza in tutto $[0, T]$ e l'unicità della soluzione del sistema 2.4, 2.5.

OSSERVAZIONE.

Osserviamo che se nella proposizione I facciamo la ulteriore ipotesi della derivabilità della a rispetto a t e della F rispetto a u_x, u, t e la continuità di dette derivate, allora la funzione $v_n(x, t)$ (definita in 2.3, 2.4, 2.5) ha derivata prima e seconda continua rispetto a t , oltre, ben s'intende, alle derivate continue di tutti gli ordini rispetto ad x .

3. Utilizzeremo nel seguito il seguente criterio di eguale continuità⁽⁹⁾.

⁽⁹⁾ Cfr. S. Faedo in [14] a p. 192, teor. V. A facilitare la lettura diamo la dimostrazione della prop. II (con i ragionamenti di S. Faedo l'eguale continuità delle funzioni di \mathcal{E} può conseguirsi nell'interno di R).

Fissato $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta_1 > 0$, tale che se x_1, x_2 sono punti di $[0, X]$ per cui è $|x_1 - x_2| < \delta$ segue:

$$(9) \quad |u(x_1, t) - u(x_2, t)| \leq \varepsilon,$$

II. Se \mathcal{I} è un insieme di funzioni $u(x, t)$, definite su R , assolutamente continue rispetto ad una qualunque delle due variabili, fissata l'altra, per le quali risulti:

$$3.1 \quad \int_0^X \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{1+\alpha} dx \leq M, \quad \int_R \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^{1+\alpha} dt \leq \tilde{M},$$

qualunque sia $t \in [0, T]$ e qualunque sia $u \in \mathcal{I}$. La $(^0)$ è una facile conseguenza dell'assoluta continuità di $u(x, t)$ per ogni fissato t , attraverso la prima delle 3.1 e utilizzando la disuguaglianza di Schwarz-Hölder.

Si determini ora un $\tilde{\delta}_1 > 0$ in modo che la $(^0)$ valga con $\varepsilon/4$ al posto di ε . Consideriamo poi il numero $\delta_2 = \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \cdot \left(\frac{\tilde{\delta}_1}{\tilde{M}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, essendo \tilde{M} la costante a secondo membro della seconda delle 3.1. Dico che se t_1, t_2 sono punti di $[0, T]$ tali che $|t_1 - t_2| < \delta_2$, allora si ha:

$$(^{00}) \quad |u(x, t_1) - u(x, t_2)| \leq \varepsilon$$

qualunque sia $x \in [0, X]$ e qualunque sia $u \in \mathcal{I}$. Supponiamo per assurdo che la $(^{00})$ non possa realizzarsi, allora esistono due punti $(x', t_1), (x', t_2)$ di \mathcal{I} ed una $u \in \mathcal{I}$, tale che per essa risulta:

$$m) \quad |u(x', t_1) - u(x', t_2)| > \varepsilon.$$

Consideriamo l'intervallo chiuso $\delta_{x'}$, di $[0, X]$ (indicheremo con $\delta_{x'}$, anche la sua lunghezza) definito con $\delta_{x'} = [0, X] \cap \left[x' - \frac{\tilde{\delta}_1}{2}, x' + \frac{\tilde{\delta}_1}{2}\right]$; risulta per la sua lunghezza $\frac{\tilde{\delta}_1}{2} \leq \delta_{x'} \leq \tilde{\delta}_1$. Se $x \in \delta_{x'}$, si ha:

$$n) \quad |u(x, t_1) - u(x', t_1)| \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad |u(x, t_2) - u(x', t_2)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

Dalle m), n) segue:

$$p) \quad |u(x, t_1) - u(x, t_2)| > \frac{\varepsilon}{2}$$

se $x \in \delta_{x'}$.

Risulta ora supponendo (per fissare le idee) $t_1 < t_2$ e utilizzando la p):

$$q) \quad \int_{t_1}^{t_2} \int_{\delta_{x'}} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| dx dt \geq \int_{\delta_{x'}} \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial x} dt \right| dx = \int_{\delta_{x'}} |u(x, t_2) - u(x, t_1)| dx > \\ > \int_{\delta_{x'}} \frac{\varepsilon}{2} dx = \frac{\varepsilon}{2} \delta_{x'} \geq \varepsilon \frac{\tilde{\delta}_1}{4}.$$

Si ha d'altronde per la disuguaglianza di Schwarz Holder:

essendo $u(x, t)$ una qualsiasi funzione di \mathcal{I} , M, \tilde{M} due costanti assolute ed $\alpha > 0$, allora le funzioni di \mathcal{I} sono egualmente continue su R .

Teorema d'esistenza e unicità per il problema A.

4. Proveremo nel seguito, per il problema A, il seguente teorema:

TEOREMA. 1. *Se le funzioni a, F soddisfano le condizioni seguenti:*

a) *la funzione a è continua con a_x, a_t su R e inoltre risulta per ogni punto di R : $a(x, t) \geq m > 0$;*

b) *la funzione F è continua in $R \times \Gamma$ assieme alle F_{u_x}, F_u, F_t, F_x e le prime tre derivate sono limitate in $R \times \Gamma$;*

c) *i dati al contorno f_1, f_2 sono continui con le loro derivate prime e seconde in $[0, T]$, mentre g è continua con le derivate dei primi tre ordini in $[0, X]$;*

d) *le funzioni a, f e i dati al contorno soddisfano le condizioni di compatibilità:*

$$f_1 = g, g'' - a(0, 0)f_1' = F(g', g; 0, 0) \quad \text{per } x = 0; t = 0$$

$$f_2 = g, g'' + a(X, 0)f_2' = F(g', g; X, 0) \quad \text{per } x = X, t = 0.$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\delta_{x'}} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| dx \leq |t_1 - t_2|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\delta_{x'}} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^{1+\alpha} dx \right) dt \right\}^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

e risulta anche

$$\left(\int_{\delta_{x'}} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{1+\alpha} dx \right) \leq \delta_{x'}^\alpha \int_{\delta_{x'}} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^{1+\alpha} dx \leq \tilde{\delta}_1^\alpha \int_{\delta_{x'}} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^{1+\alpha} dx;$$

sostituendo nella precedente si ha, tenendo conto della seconda delle 3.1 e di come si è scelto δ_2 :

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\delta_{x'}} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| dx \leq |t_1 - t_2|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left(\tilde{\delta}_1^\alpha \int_{\delta_{x'}} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^{1+\alpha} dx \right) dt \right\}^{\frac{1}{1+\alpha}} \leq \leq \delta_2^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \tilde{\delta}_1^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \tilde{M}^{\frac{1}{1+\alpha}} = \frac{\varepsilon}{4} \tilde{\delta}_1,$$

che contraddice la q). È dunque vera la (00). Dalle (0) e (00) segue subito facilmente la tesi.

In queste condizioni il problema A ammette una, ed una sola, soluzione e l'approssimazione ennesima del metodo dei momenti converge ad essa ⁽¹⁰⁾.

Osserviamo preliminarmente, allo scopo di avviare la dimostrazione del teorema ora enunciato, che le ipotesi fatte danno la possibilità di eseguire il cambiamento di variabile $v = u - w$ (ove w è la funzione definita in 1.4). Il problema A si trasforma allora nel problema B e va notato che la funzione Φ , definita in 1.3, soddisfa le ipotesi b); va pure notato che, per le ipotesi a) e le b), che valgono per Φ , è possibile applicare al problema B, ora in esame, il metodo dei momenti, valendo la proposizione I.

È dunque possibile costruire l'approssimazione ennesima $v_n(x, t)$, data dalla 2.3, ove però le $c_{in}(t)$ soddisfano il sistema differenziale:

$$4.1 \quad \int_0^x \left\{ -\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + a \frac{\partial v_n}{\partial t} \right\} \varphi_j dx = \int_0^x \Phi[v_n] \varphi_j dx \quad j = 1, 2, \dots, n, t \in [0, T]$$

$$4.2 \quad c_{in}(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

L'analisi successiva si fonda su alcune formule di maggiorazione, relative ad integrali delle derivate, con esponente 2, delle funzioni v_n , delle quali andiamo a trattare nei prossimi numeri.

Su alcune maggiorazioni integrali per le derivate delle v_n .

5. Nelle ipotesi del teorema 1 vale la seguente proposizione:

III. *Esistono due costanti M, \tilde{M} , indipendenti dall'intero n , per le quali risulta:*

$$5.1 \quad \int_0^x \left(\frac{\partial v_n}{\partial x} \right)^2 \leq M, t \in [0, T]; \quad \int_{\bar{K}} \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx dt \leq \tilde{M} \quad n = 1, 2, \dots$$

Ragioniamo per la prima delle 5.1. Moltiplichiamo ambo i membri della 4.1 per $c'_j(t)$ e sommiamo rispetto all'indice j ; si avrà per ogni $t \in [0, T]$:

$$5.2 \quad \int_0^x \left\{ -\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + a \frac{\partial v_n}{\partial t} \right\} \frac{\partial v_n}{\partial t} dx = \int_0^x \Phi[v_n] \frac{\partial v_n}{\partial t} dx.$$

⁽¹⁰⁾ Si veda il teor. 2, n. 11. J. W. Green, in loc. cit. in [9], prova la convergenza della approssimazione ennesima del metodo dei momenti per la soluzione in $\mathcal{C}^{(2)}$ della equazione $u_{xx} - u_t - g(x, t)u = f(x, t)$ con dati nulli al contorno e supponendo g ed f continue con le loro derivate prime e seconde.

Dalla forma 2.3 di v_n , con una integrazione per parti, segue:

$$\int_0^X -\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \frac{\partial v_n}{\partial t} dx = \int_0^X \frac{\partial v_n}{\partial x} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} dx = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^X \left(\frac{\partial v_n}{\partial x} \right)^2 dx ;$$

conseguentemente la 5.2 diviene

$$5.3 \quad \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^X \left(\frac{\partial v_n}{\partial x} \right)^2 dx = - \int_0^X a \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx + \int_0^X \Phi [v_n] \frac{\partial v_n}{\partial t} dx.$$

Risulta d'altro canto per la ipotesi a)

$$5.4 \quad \left| \int_0^X \Phi [v_n] \frac{\partial v_n}{\partial t} dx \right| \leq 2 \int_0^X \frac{|\Phi [v_n]|}{2\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a} \left| \frac{\partial v_n}{\partial t} \right| dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{4} \int_0^X \frac{\Phi^2 [v_n]}{a} dx + \int_0^X a \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx.$$

La 5.3 dà allora (Cfr. ancora la ipotesi a))

$$5.5 \quad \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^X \left(\frac{\partial v_n}{\partial x} \right)^2 dx \leq \frac{1}{4m} \int_0^X \Phi^2 [v_n] dx.$$

Cerchiamo ora una maggiorazione del secondo membro della 5.5. Le ipotesi fatte in b) implicano la lipschitzianità in grande di Φ rispetto a u_x e ad u (cfr. la 2.6) e conseguentemente risulta:

$$|\Phi [v_n]| \leq L \left\{ \left| \frac{\partial v_n}{\partial x} \right| + |v_n| \right\} + |\Phi [0]|,$$

ove si è posto $\Phi [0] = \Phi (0, 0; x, t)$ ed L è una costante indipendente da n .

Segue allora:

$$5.6 \quad \int_0^X \Phi^2 [v_n] dx \leq 3L^2 \int_0^X v_n^2 dx + 3L^2 \int_0^X \left(\frac{\partial v_n}{\partial x} \right)^2 dx + 3 \int_0^X \Phi^2 [0] dx.$$

Risulta per altro, utilizzando la disuguaglianza di Schwarz e tenuto conto che $v_n(0, t) = 0$ (cfr. la 2.3 e la 2.5):

$$5.7 \quad \int_0^X v_n^2 dx = \int_0^X \left\{ \int_0^X \frac{\partial v_n(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi \right\}^2 dx \leq \int_0^X \left\{ x \int_0^X \left(\frac{\partial v_n}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right\} dx \leq \\ \leq \int_0^X \left(X \int_0^X \left(\frac{\partial v_n}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right) dx = X^2 \int_0^X \left(\frac{\partial v_n}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Tenuto conto delle 5.6 e 5.7, la 5.5 dà

$$5.8 \quad \frac{d}{dt} \int_0^X \left(\frac{\partial v_n}{\partial x} \right)^2 dx \leq A \int_0^X \left(\frac{\partial v_n}{\partial x} \right)^2 dx + B$$

ove A, B sono costanti indipendenti da n ⁽¹¹⁾.

Posto:

$$\varphi_n(t) = \int_0^X \left(\frac{\partial v_n}{\partial x} \right)^2 dx,$$

integrando la 5.8 rispetto a t (tra 0 e t) e osservando che $\frac{\partial v_n(x, 0)}{\partial x} = 0$, si avrà

$$\varphi_n(t) \leq A \int_0^t \varphi_n(\tau) d\tau + B.$$

Per il noto lemma di Gronwall ⁽¹²⁾, risulta allora:

$$\varphi_n(t) \leq B e^{At}.$$

e la prima delle 5.1 è provata, ponendo $M = B e^{AT}$.

⁽¹¹⁾ Precisamente si ha:

$$A = \frac{3}{2m} L^2(1 + X^2), \quad B = \frac{3}{2m} \max_{t \in [0, T]} \int_0^X \Phi^2[0] dx$$

⁽¹²⁾ Ricordiamo per comodità di lettura questo lemma: Se $\varphi(t)$ è continua non negativa in $[0, T]$, A, B sono costanti positive e se per ogni t di detto intervallo risulta:

$$\varphi(t) \leq A \int_0^t \varphi(\tau) d\tau + B$$

allora è $\varphi(t) \leq B e^{At}$ per ogni $t \in [a, b]$.

Osserviamo anche che se la disuguaglianza integrale su scritta vale con $B = 0$, allora segue facilmente $\varphi(t) \equiv 0$.

Passiamo a provare la seconda delle 5.1. Si noti per questo, che integrando rispetto a t (tra 0 e T) ambo i membri della 5.3 e tenendo conto che $\frac{\partial v_n(x, 0)}{\partial x} = 0$, si ottiene :

$$\int_R a \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx dt = - \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial v_n}{\partial x} \right)^2 dx + \int_R \Phi [v_n] \frac{\partial v_n}{\partial t} dx dt ;$$

da questa eguaglianza, per la ipotesi a), segue :

$$5.9 \quad \int_R \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx dt \leq \frac{1}{m} \int_R \Phi [v_n] \frac{\partial v_n}{\partial t} dx dt.$$

Si ha d'altronde

$$\left| \int_R \frac{\Phi [v_n]}{m} \frac{\partial v_n}{\partial t} dx dt \right| \leq \frac{1}{m^2} \int_R \Phi^2 [v_n] dx dt + \frac{1}{4} \int_R \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx dt.$$

Dalla 5.9 risulta allora :

$$\frac{3}{4} \int_R \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx dt \leq \frac{1}{m^2} \int_R \Phi^2 [v_n] dx dt.$$

Utilizzando ora le 5.6, 5.7 nonchè la 5.1 già conseguita, ne viene che esiste una costante \tilde{M} , per la quale vale la 5.2. La proposizione III è così provata.

6. Vale anche la seguente proposizione :

IV. *Esistono due costanti M_1, \tilde{M}_1 , indipendenti da n , tali che per esse risulta :*

$$6.1 \quad \int_0^x \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} \right)^2 dx \leq M_1, \quad t \in [0, T]; \quad \int_R \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \right)^2 dx dt \leq \tilde{M}_1$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Ragioniamo per la prima delle 6.1. Derivando rispetto a t la 4.1 (ciò che è legittimo per la ipotesi a) e b); cfr. la osservazione al n° 2), risulta :

$$6.2 \quad \int_0^x \left\{ - \frac{\partial^3 v_n}{\partial x^2 \partial t} + a \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \right\} \varphi_j dx = - \int_0^x \frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial v_n}{\partial t} \varphi_j dx + \int_0^x \{ \Phi [v_n] \}_t \varphi_j dx$$

$$t \in [0, T], \quad j = 1, 2, \dots, n$$

e moltiplicando ambo i membri per $c''_j(t)$ e sommando rispetto a j , si avrà per gli stessi t :

$$6.3 \quad - \int_0^X \frac{\partial^3 v_n}{\partial x^2 \partial t} \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} dx = - \int_0^X a \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \right)^2 dx - \int_0^X \frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial v_n}{\partial t} \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} dx + \\ + \int_0^X \{ \Phi [v_n] \}_t \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} dx.$$

D'altro canto, con una integrazione per parti (e tenendo conto che $\frac{\partial^2 v_n(0, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v_n(X, t)}{\partial t^2} = 0$), risulta:

$$6.4 \quad - \int_0^X \frac{\partial^3 v_n}{\partial x^2 \partial t} \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} dx = \int_0^X \frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} \frac{\partial^3 v_n}{\partial t^2 \partial x} dx = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^X \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} \right)^2 dx.$$

Dalle 6.3, per la 6.4, si ha:

$$6.5 \quad \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^X \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} \right)^2 dx = - \int_0^X a \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \right)^2 dx - \int_0^X \frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial v_n}{\partial t} \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} dx + \\ + \int_0^X \{ \Phi [v_n] \}_t \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} dx,$$

dove risulta:

$$6.6 \quad \int_0^X \{ \Phi [v_n] \}_t \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} dx = \int_0^X \Phi_{v_x} [v_n] \frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} dx + \int_0^X \Phi_v [v_n] \frac{\partial v_n}{\partial t} \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} dx + \\ + \int_0^X \Phi_t [v_n] \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} dx.$$

Valgono per i termini a secondo membro della 6.6 le seguenti maggiorazioni:

$$6.7 \quad \left\{ \begin{aligned} \left| \int_0^X \Phi_{v_x}[v_n] \frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} dx \right| &\leq \frac{1}{m} \int_0^X \Phi_{v_x}^2[v_n] \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^X a \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \right)^2 dx \\ \left| \int_0^X \Phi_v[v_n] \frac{\partial v_n}{\partial t} \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} dx \right| &\leq \frac{1}{m} \int_0^X \Phi_v^2[v_n] \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^X a \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \right)^2 dx \\ \left| \int_0^X \Phi_t[v_n] \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} dx \right| &\leq \frac{1}{m} \int_0^X \Phi_t^2[v_n] dx + \frac{1}{4} \int_0^X a \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \right)^2 dx \end{aligned} \right.$$

ed è pure:

$$6.8 \quad \left| \int_0^X \frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial v_n}{\partial t} \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} dx \right| \leq \frac{1}{m} \int_0^X \left(\frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^X a \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \right)^2 dx.$$

Tenuto conto della 6.6 e delle maggiorazioni 6.7 e 6.8, la 6.5 dà, elidendo alcuni termini:

$$6.9 \quad \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^X \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} \right)^2 dx \leq \frac{1}{m} \int_0^X \Phi_{v_x}^2[v_n] \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{m} \int_0^X \Phi_v^2[v_n] \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx + \\ + \frac{1}{m} \int_0^X \Phi_t^2[v_n] dx + \frac{\mu_t^2}{m} \int_0^X \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx.$$

ove si è indicato con μ_t il massimo modulo di a_t su R .

Per la ipotesi b), esiste una costante assoluta H , tale che:

$$\left. \begin{aligned} &|\Phi_{v_x}^2[v_n]| \\ &|\Phi_v^2[v_n]| \\ &|\Phi_t^2[v_n]| \end{aligned} \right\} \leq H, \quad n = 1, 2, \dots$$

Tenuto conto di queste disuguaglianze e posto:

$$6.10 \quad \varphi_n(t) = \int_0^X \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} \right)^2 dx,$$

risulta, integrando la 6.9 rispetto a t (tra 0 e t) e maggiorando successivamente:

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &\leq \frac{2H}{m} \int_0^t \varphi_n(\tau) d\tau + \frac{2H}{m} \int_R \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx dt + \frac{2H}{m} XT + \frac{2\mu_t^2}{m} \int_R \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx dt + \\ &+ \varphi_n(0) \leq \frac{2H}{m} \int_0^t \varphi_n(\tau) d\tau + \frac{2(\mu_t^2 + H)}{m} \int_R \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx dt + \frac{2HXT}{m} + \varphi_n(0). \end{aligned}$$

Tenuto conto della già conseguita disuguaglianza in 5.1, la precedente dà:

$$6.11 \quad \varphi_n(t) \leq \frac{2H}{m} \int_0^t \varphi_n(\tau) d\tau + \frac{2(\mu_t^2 + H)}{m} \tilde{M} + \frac{2HXT}{m} + \varphi_n(0).$$

Cerchiamo ora una maggiorazione per $\varphi_n(0)$. A questo scopo si considerino le 4.1; facendo ivi $t=0$, si ottiene, tenendo conto che $v_n(x, 0) = 0$:

$$6.12 \quad \int_0^X a(x, 0) \left[\frac{\partial v_n}{\partial t} \right]_{t=0} \varphi_j dx = \int_0^X \Phi(0, 0; x, 0) \varphi_j dx, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Integrando quest'ultima per parti, tenendo conto che $\frac{\partial v_n(0, 0)}{\partial t} = \frac{\partial v_n(X, 0)}{\partial t} = 0$, e inoltre delle condizioni di compatibilità per Φ (si veda la nota (8)), si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{X}{\pi j} \int_0^X a(x, 0) \left[\frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} \right]_{t=0} \cos \frac{j\pi x}{X} dx &= - \frac{X}{\pi j} \int_0^X \left[\frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial t} \right]_{t=0} \cos \frac{j\pi x}{X} dx + \\ &+ \frac{X}{\pi j} \int_0^X \Phi_x(0, 0; x, 0) \cos \frac{j\pi x}{X} dx. \end{aligned}$$

Moltiplicando ambo i membri per $\left(\frac{\pi j}{X}\right)^2 c'_{jn}(0)$ e sommando rispetto a j , si ha

$$6.13 \quad \int_0^X a(x, 0) \left\{ \left[\frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} \right]_{t=0} \right\}^2 dx = - \int_0^X \left[\frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial v_n}{\partial t} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} \right]_{t=0} dx + \\ + \int_0^X \Phi_x(0, 0; x, 0) \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} \right)_{t=0} dx.$$

Maggiorando i secondi membri della 6.13, si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_0^X \left[\frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} \right]_{t=0} dx \right| &\leq \frac{1}{m} \int_0^X \left\{ \left[\frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial t} \right]_{t=0} \right\}^2 dx + \\ &+ \frac{1}{4} \int_0^X a(x, 0) \left\{ \left[\frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} \right]_{t=0} \right\}^2 dx \\ \left| \int_0^X \Phi_x(0, 0; x, 0) \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} \right)_{t=0} dx \right| &\leq \frac{1}{m} \int_0^X \Phi_x^2(0, 0; x, 0) dx + \\ &+ \frac{1}{4} \int_0^X a(x, 0) \left\{ \left[\frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} \right]_{t=0} \right\}^2 dx. \end{aligned}$$

Sostituendo in 6.13 si ottiene:

$$6.14 \quad \int_0^X a(x, 0) \left\{ \left[\frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} \right]_{t=0} \right\}^2 dx \leq \frac{2}{m} \int_0^X \left\{ \left[\frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial t} \right]_{t=0} \right\}^2 dx + \frac{2}{m} \int_0^X \Phi_x^2(0, 0; x, 0) dx.$$

Dalla 6.12 risulta d'altronde, con procedimenti già usati:

$$\int_0^X a(x, 0) \left\{ \left[\frac{\partial v_n}{\partial t} \right]_{t=0} \right\}^2 dx = \int_0^X \Phi(0, 0; x, 0) \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)_{t=0} dx$$

e quindi anche

$$\int_0^X \left\{ \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)_{t=0} \right\}^2 dx \leq \frac{1}{m} \int_0^X \Phi^2(0, 0; x, 0) dx + \frac{1}{4} \int_0^X \left\{ \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)_{t=0} \right\}^2 dx$$

cioè:

$$\int_0^X \left\{ \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)_{t=0} \right\}^2 dx \leq \frac{4}{3m} \int_0^X \Phi^2(0, 0; x, 0) dx.$$

Si può allora maggiorare il primo termine a secondo membro della 6.14 nel modo che segue

$$\int_0^X \left\{ \left[\frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_n}{\partial t} \right]_{t=0} \right\}^2 dx \leq \mu_x^2 \int_0^X \left\{ \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)_{t=0} \right\}^2 dx \leq \frac{4}{3} \frac{\mu_x^2}{m} \int_0^X \Phi^2(0, 0; x, 0) dx$$

ove μ_x è il massimo modulo di a_x su R . Per quest'ultima disuguaglianza la 6.14 dà allora :

$$\varphi_n(0) \leq \frac{4}{3} \frac{2}{m^2} \frac{\mu_x^2}{m} \int_0^X \Phi^2(0, 0; x, 0) dx + \frac{2}{m} \int_0^X \Phi_x^2(0, 0; x, 0) dx.$$

Si può dunque maggiorare $\varphi_n(0)$ con una costante k , indipendente da n . La 6.11 dà allora

$$\varphi_n(t) \leq A \int_0^t \varphi_n(\tau) + B \quad (13).$$

Utilizzando per quest'ultima disuguaglianza nuovamente il lemma di Gronwall e tenendo conto della 6.10, resta provata la 6.1.

Per la seconda delle 6.1 si può ragionare come nella proposizione III. Integrando la 6.5 rispetto a t (tra 0 e T):

$$\int_{\bar{R}} a \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t} \right)^2 dx dt = -\frac{1}{2} \varphi_n(T) + \frac{1}{2} \varphi_n(0) - \int_{\bar{R}} \frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial v_n}{\partial t} \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} dx dt + \\ + \int_{\bar{R}} \{ \Phi [v_n] \}_t \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} dx dt,$$

ove φ_n è definita dalla 6.10.

Da questa eguaglianza risulta, tenuto conto della maggiorazione su fatta per $\varphi_n(t)$ e indicando con n_1 una costante opportuna :

$$(6.15) \quad \int_{\bar{R}} a \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \right)^2 dx dt \leq \frac{n_1}{2} + \frac{1}{m} \int_{\bar{R}} \left(\frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx dt + \frac{1}{4} \int_{\bar{R}} a \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \right)^2 dx dt + \\ + \frac{1}{m} \int_{\bar{R}} \{ \Phi [v_n] \}_t^2 dx dt + \frac{1}{4} \int_{\bar{R}} a \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \right)^2 dx dt.$$

Teniamo ora conto che è

$$[\Phi [v_n]]_t = \Phi v_x [v_n] \frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} + \Phi v [v_n] \frac{\partial v_n}{\partial t} + \Phi_t [v_n]$$

(13) Con le costanti A, B indipendenti da n e facilmente calcolabili dalla 6.11 e dalla maggiorazione ottenuta per $\varphi_n(0)$ in:

$$A = \frac{2H}{m}, \quad B = \frac{2(\mu + H)}{m} \tilde{M} + \frac{2HXT}{m} + K.$$

e che, conseguentemente, vale la disuguaglianza:

$$\int_{\bar{K}} \{[\Phi[v_n]]_t\}^2 dx dt \leq 3 \int_{\bar{K}} \Phi_{v_x}^2[v_n] \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t}\right)^2 dx dt + 3 \int_{\bar{K}} \Phi_v^2[v_n] \left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2 dx dt + \\ + 3 \int_{\bar{K}} \Phi_t^2[v_n] dx dt;$$

per la ipotesi b), per la 6.1 già provata, nonchè per proposizione III, il secondo membro di quest'ultima disuguaglianza può essere maggiorato con una costante N , indipendente da n ; conseguentemente dalla 6.15 si ottiene

$$\frac{1}{2} \int_{\bar{K}} a \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)^2 dx dt \leq \frac{n_1}{2} + \frac{N}{m} + \frac{\mu_x^2}{m} \tilde{M},$$

dalla quale utilizzando la ipotesi a), si deduce la seconda delle 6.1. La proposizione IV è così completamente provata.

7. Proviamo ora la seguente proposizione:

V. Esiste una costante M_2 , indipendente da n , tale che per essa è:

$$7.1 \quad \int_{\bar{K}} \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}\right)^2 dx dt \leq M_2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Moltiplichiamo ambo i membri della 4.1 per $-\left(\frac{j\pi}{x}\right) c_{jn}(t)$ e sommiamo rispetto a j ; si ottiene;

$$7.2 \quad \int_0^X \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}\right)^2 dx = \int_0^X a \frac{\partial v_n}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} dx - \int_0^X \Phi[v_n] \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} dx.$$

Si ha d'altro canto:

$$7.3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \int_0^X a \frac{\partial v_n}{\partial t} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} dx \right| \leq \int_0^X a^2 \left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^X \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}\right)^2 dx \\ \left| \int_0^X \Phi[v_n] \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} dx \right| \leq \int_0^X \Phi^2[v_n] dx + \frac{1}{4} \int_0^X \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}\right)^2 dx. \end{array} \right.$$

La 7.2, tenuto conto della 7.3, dà:

$$\int_0^X \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \right)^2 dx \leq 2 \int_0^X a^2 \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t} \right)^2 dx + 2 \int_0^X \Phi^2 [v_n] dx.$$

Il secondo termine a secondo membro è maggiorabile (cfr. 5.6, 5.7 e 5.1) con una costante k , indipendente da n , onde risulta

$$\int_0^X \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \right)^2 dx \leq 2 \int_0^X a^2 \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx + k$$

e integrando quest'ultima rispetto a t (tra 0 e T), si ha

$$\begin{aligned} 7.4 \quad \int_R \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \right)^2 dx dt &\leq 2 \int_R a^2 \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx dt + kT \leq \\ &\leq 2\mu^2 \int_R \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx dt + kT. \end{aligned}$$

ove μ è il massimo modulo di a su R . La 7.4, per la 5.1, prova il lemma V.

8. Consideriamo il problema ai limiti $y'' + \lambda y = 0$, con $y(0) = y(X) = 0$ e la relativa funzione di Green $G(x, \xi)$. Risulta:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x(X-\xi)}{X} & \text{se } x \leq \xi \\ \frac{\xi(X-x)}{X} & \text{se } x \geq \xi \end{cases}$$

e vale per la $G(x, \xi)$ lo sviluppo in serie di autofunzioni, uniformemente convergente:

$$8.1 \quad G(x, \xi) = \frac{2}{X} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{i\pi x}{X} \text{sen} \frac{i\pi \xi}{X}}{\left(i \frac{\pi}{X} \right)^2}.$$

Proviamo ora la seguente proposizione

V. Considerato l'operatore:

$$8.2 \quad \varphi[v] = a(x, t) v_t - \Phi[v]$$

risulta

$$8.3 \quad \left| v_n(\xi, t) + \int_0^X \varphi[v_n] \mathcal{G}(x, \xi) dx \right| \leq M_3 n^{-3/2},$$

ove M_3 è indipendente da n .

Consideriamo la identità

$$-\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \varphi[v_n] = -\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + a \frac{\partial v_n}{\partial t} - \Phi[v_n].$$

Moltiplicando ambo i membri per $G(x, \xi)$ e integrando rispetto ad x (tra 0 e X), risulta

$$8.4 \quad \int_0^X \left\{ -\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \varphi[v_n] \right\} \mathcal{G}(x, \xi) dx = \int_0^X \left\{ -\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + a \frac{\partial v_n}{\partial t} - \Phi[v_n] \right\} \mathcal{G}(x, \xi) dx.$$

La 8.4, tenuto conto della 8.1 e delle 4.1, dà

$$8.5 \quad \int_0^X \left\{ -\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \varphi[v_n] \right\} \mathcal{G}(x, \xi) dx = \\ = \frac{2X}{\pi^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \operatorname{sen} \frac{i\pi\xi}{X} \int_0^X \left\{ -\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + a \frac{\partial v_n}{\partial t} - \Phi[v_n] \right\} \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{X} dx.$$

Poichè, d'altro canto, risulta

$$\int_0^X \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{X} dx = 0, \text{ se } i > n,$$

dalle 8.4, vista la 8.2, si ottiene:

$$\int_0^X \left\{ -\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \varphi[v_n] \right\} \mathcal{G}(x, \xi) dx = \frac{2X}{\pi^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \operatorname{sen} \frac{i\pi\xi}{X} \int_0^X \varphi[v_n] \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{X} dx.$$

Per la disuguaglianza di Schwarz risulta

$$8.6 \quad \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \operatorname{sen} \frac{i\pi\xi}{X} \int_0^X \varphi[v_n] \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{X} dx \right| \leq \\ \leq \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^4} \right]^{1/2} \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\int_0^X \varphi[v_n] \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{X} dx \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Utilizzando la identità di Parseval⁽¹⁴⁾, si ha:

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\int_0^X \varphi [v_n] \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{X} dx \right)^2 \leq \frac{X}{2} \int_0^X \varphi^2 [v_n] dx,$$

inoltre si ha pure:

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^4} < \frac{1}{3n^3}.$$

Conseguentemente la 8.6 dà

$$8.7 \quad \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{X} \int_0^X \varphi [v_n] \operatorname{sen} \frac{i \pi x}{X} dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{3} n^{3/2}} \sqrt{\frac{X}{2}} \sqrt{\int_0^X \varphi^2 [v_n] dx}$$

e si ha per la 8.2

$$8.8 \quad \int_0^X \varphi^2 [v_n] dx \leq \mu^2 \int_0^X \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx + \int_0^X \Phi^2 [v_n] dx$$

essendo μ il massimo modulo di a su R .

Cerchiamo ora una maggiorazione per il primo termine a secondo membro della 8.8. Per questo moltiplichiamo ambo i membri della 6.2 per $c'_{jn}(t)$ e sommiamo rispetto a j ; si avrà:

$$8.9 \quad \int_0^X \left(- \frac{\partial^3 v_n}{\partial x^2 \partial t} \frac{\partial v_n}{\partial t} + a \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \frac{\partial v_n}{\partial t} \right) dx = \\ = - \int_0^X \frac{\partial a}{\partial t} \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx + \int_0^X \{ \Phi [v_n] \}_t \frac{\partial v_n}{\partial t} dx;$$

vale d'altronde la identità:

$$8.10 \quad \int_0^X a \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \frac{\partial v_n}{\partial t} dx = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^X a \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx \right) - \frac{1}{2} \int_0^X \frac{\partial a}{\partial t} \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx.$$

⁽¹⁴⁾ Poichè $\varphi [V_n]$ è continua, vale per essa (rispetto al sistema ortogonale $[\varphi_i]$) la identità di Parseval.

Inoltre con una integrazione per parti e tenendo conto che $\frac{\partial v_n(0, t)}{\partial t} = \frac{\partial v_n(X, t)}{\partial t} = 0$, risulta

$$8.11 \quad - \int_0^X \frac{\partial^3 v_n}{\partial x^3} \frac{\partial v_n}{\partial t} dx = \int_0^X \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} \right)^2 dx$$

La 8.9, tenuto conto delle 8.10 e 8.11, dà

$$8.12 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^X a \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx \right) = - \int_0^X \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^X \frac{\partial a}{\partial t} \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx + \\ + \int_0^X \{ \Phi [v_n] \}_t \frac{\partial v_n}{\partial t} dx.$$

Risulta poi :

$$\left| \int_0^X \{ \Phi [v_n] \}_t \frac{\partial v_n}{\partial t} dx \right| \leq \int_0^X \left| \Phi_{v_x} [v_n] \frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} \frac{\partial v_n}{\partial t} \right| dx + \int_0^X \left| \Phi_v [v_n] \right| \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx + \\ + \int_0^X \left| \Phi_t [v_n] \frac{\partial v_n}{\partial t} \right| dx$$

quindi anche, tenuto conto delle ipotesi b) e della già conseguita 6.1, con evidenti maggiorazioni, dalla precedente risulta:

$$\left| \int_0^X \{ \Phi [v_n] \}_t \frac{\partial v_n}{\partial t} dx \right| \leq C \int_0^X \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx + D$$

con C e D indipendenti da n .

Dalla 8.12, tenuto conto della ipotesi a) e ancora della 6.1, risulta allora facilmente

$$8.13 \quad \frac{d}{dt} \int_0^X \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx \leq A \int_0^X \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx + B',$$

con A, B' costanti indipendenti da n . Posto allora

$$\varphi_n(t) = \int_0^x \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx,$$

risulta dalla 8.13, integrando rispetto a t

$$\varphi_n(t) \leq A \int_0^x \varphi_n(\tau) d\tau + B' + \varphi_n(0).$$

D'altronde una maggiorazione, indipendente da n , di $\varphi_n(0)$ può subito trovarsi dalla 6.12, moltiplicando ambo i membri per $c'_{jn}(0)$ e sommando rispetto a j . L'ultima disuguaglianza scritta assicura allora, utilizzando di nuovo il lemma di Gronwall, che il primo addendo a secondo membro della 8.8 è maggiorabile con una costante indipendente da n ; lo stesso può dirsi per il secondo addendo (cfr. le 5.6, 5.7 e la già conseguita 5.1).

In definitiva esiste una costante M_3 , indipendente da n , tale che per essa il secondo membro della 8.7 viene maggiorato con $M_3 n^{-3/2}$, conseguentemente la 8.5 dà

$$\left| \int_0^x -\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \mathcal{G}(x, \xi) dx + \int_0^x \varphi[v_n] \mathcal{G}(x, \xi) dx \right| \leq M_3 n^{-3/2}$$

e tenuto conto che è:

$$8.14 \quad v_n(\xi, t) = - \int_0^x \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \mathcal{G}(x, \xi) dx$$

segue la tesi 8.3.

Dimostrazione del teorema 1.

9. Passiamo a provare il teorema 1. Per questo riprendiamo ciò che è stato detto al n° 4 riguardo alla trasformazione del problema A in B e consideriamo su R la successione $\left\{ \frac{\partial v_n}{\partial t} \right\}$, $n = 1, 2, \dots$; a motivo delle 6.1 le funzioni di questa successione sono su R egualmente continue (cfr. la prop. II), per essere poi $\frac{\partial v_n(0,t)}{\partial t} = 0$ per ogni n , tali funzioni sono anche egual-

mente limitate; per il teorema di G. Ascoli è allora possibile estrarre dalla detta successione una sottosuccessione $\left\{\frac{\partial v_{n_k}}{\partial t}\right\}$, $k = 1, 2, \dots$, convergente uniformemente su R ad una funzione continua $V_1(x, t)$. Considerata ora la successione $\left\{\frac{\partial v_{n_k}}{\partial x}\right\}$, $k = 1, 2, \dots$, essa risulterà per la prima delle 6.1 e per la 7.1 (sempre utilizzando la proposizione II) formata da funzioni egualmente continue su R e anche egualmente limitate (per essere $\frac{\partial v_n(x, 0)}{\partial x} = 0$). Applicando di nuovo il teorema di Ascoli sarà possibile estrarre da essa una sottosuccessione $\left\{\frac{\partial v_{\mu_k}}{\partial x}\right\}$, $k = 1, 2, \dots$, convergente uniformemente ad una funzione continua $V_2(x, t)$. Considerando, infine, la successione $\{v_{\mu_k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, per le 5.1 e per essere $V_n(x, 0) = 0$, sarà possibile estrarre da essa una sottosuccessione di indici $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \dots$ in modo che $v_{\mu_k}(x, t)$ converga uniformemente ad una funzione $v(x, t)$ continua. In definitiva esiste una successione d'interi $\{\mu_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, crescenti, tali che per essi risulta:

$$9.1 \quad \lim_k \frac{\partial v_{\mu_k}}{\partial t} = V_1(x, t), \quad \lim_k \frac{\partial v_{\mu_k}}{\partial x} = V_2(x, t)$$

$$\lim_k v_{\mu_k} = v(x, t),$$

con convergenza uniforme. Conseguentemente $v(x, t)$ è derivabile e risulta:

$$V_1(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad V_2(x, t) = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Proviamo che esiste continua in R la $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ e che $v(x, t)$ è soluzione del problema B . Infatti si consideri la successione

$$v_{\mu_k}(\xi, t) + \int_0^x \varphi[v_{\mu_k}(x, t)] \mathcal{G}(x, \xi) dx;$$

poichè v_{μ_k} converge, per $k \rightarrow \infty$, uniformemente a v e $\frac{\partial v_{\mu_k}}{\partial x}$ a $\frac{\partial v}{\partial x}$, conseguentemente, vista la 8.2, per le ipotesi $a)$ e $b)$ $\varphi[v_{\mu_k}]$ convergerà uniformemente

a $\varphi[v]$; per essere poi $G(x, \xi)$ limitata, dalla 8.3, passando al limite avremo:

$$9.2 \quad v(\xi, t) + \int_0^X \varphi[v(x, t)] \mathcal{G}(x, \xi) dx = 0.$$

Questa identità (in ξ, t) reca subito che v è derivabile due volte rispetto ad x e questa derivata è continua, inoltre che v soddisfa la equazione 1.1⁽¹⁵⁾ e, ovviamente le condizioni 1.2. Conseguentemente la $u = v + w$ (ove w è definita dalla 1.4) è soluzione del problema 0.3, 0.4. Resta così provata la esistenza di almeno una soluzione del problema A.

10. Proviamo ora l'unicità della soluzione del detto problema. Siano u, \tilde{u} due distinte soluzioni di 0.3, 0.4 nella classe $\mathcal{C}^{(2)}$, la funzione $v = u - \tilde{u}$ soddisfa il sistema:

$$10.1 \quad -v_{xxx} + av_t = F[u] - F[\tilde{u}] \quad (x, t) \in R^0$$

$$10.2 \quad v(x, 0) = 0, \quad x \in [0, X]$$

$$v(0, t) = v(X, t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

⁽¹⁵⁾ Tenuto conto della definizione di $G(x, \xi)$, data al n.º 8, sia $\xi \in [0, X]$, si ha:

$$\begin{aligned} v(\xi, t) &= - \int_0^X \varphi[v(x, t)] G(x, \xi) dx = - \left\{ \int_0^\xi \varphi[v] G(x, \xi) dx + \int_\xi^X \varphi[v] G(x, \xi) dx \right\} = \\ &= - \left\{ \int_0^\xi \varphi[v] \frac{x(X-\xi)}{X} dx + \int_\xi^X \varphi[v] \frac{\xi(X-x)}{X} dx \right\} = - \\ &= - \left\{ \int_0^\xi \varphi[v] \frac{x(X-\xi)}{X} dx - \int_0^\xi \varphi[v] \frac{\xi(X-x)}{X} dx + \int_0^X \varphi[v] \frac{\xi(X-x)}{X} dx \right\}. \end{aligned}$$

onde anche:

$$v(\xi, t) = - \int_0^\xi \varphi[v](x-\xi) dx - \int_0^X \varphi[v] \frac{\xi(X-x)}{X} dx,$$

il secondo membro di quest'ultima assicura che $v(\xi, t)$ è derivabile due volte rispetto a ξ e si ha: $v_{\xi\xi}(\xi, t) = \varphi[v(\xi, t)]$, da cui segue che la $v(x, t)$ è della classe $\mathcal{C}^{(2)}$ e soddisfa la 1.1.

Moltiplichiamo ambo i membri della 10.1 per v_t e integriamo rispetto ad x (tra 0 e X); si ha:

$$10.3 \quad -\int_0^X v_{xx} v_t dx = -\int_0^X a v_t^2 dx + \int_0^X \{F[u] - F[\tilde{u}]\} v_t dx;$$

risulta d'altro canto

$$10.4 \quad \left| \int_0^X \{F[\bar{u}] - F[\tilde{u}]\} v_t dx \right| \leq \frac{1}{4} \int_0^X \frac{(F[u] - F[\tilde{u}])^2}{a} dx + \int_0^X a v_t^2 dx$$

e inoltre, con la solita integrazione per parti si ha:

$$10.5 \quad \int_0^X v_{xx} v_t dx = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^X v_x^2 dx.$$

Dunque per le 10.4, 10.5, la 10.3 dà

$$\frac{d}{dt} \int_0^X v_x^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^X \frac{(F[u] - F[\tilde{u}])^2}{a} dx.$$

Poichè poi le ipotesi b) recano valida per F la 2.6, risulterà, con calcoli analoghi a quelli fatti in 5.7

$$10.6 \quad \frac{d}{dt} \int_0^X v_x^2 dx \leq \frac{L^2}{2m} \int_0^X (v_x^2 + v^2) dx \leq \frac{L^2}{2m} (1 + X^2) \int_0^X v_x^2 dx.$$

Dalla 10.6, tenuto conto che $v_x(x, 0) = 0$ e, utilizzando il lemma di Gronwall, segue $v_x(x, t) = 0$ su R . Da questa identità discende subito (cfr. il calcolo fatto in 5.7) $v(x, t) = 0$, su R , e il teorema 1 è completamente provato.

Teorema di convergenza.

11. Il teorema di unicità, testè conseguito, reca come conseguenza il seguente teorema di convergenza per il metodo dei momenti

TEOREMA 2. *Nelle ipotesi del teorema 1, le successioni*

$$u_n = v_n + w, \quad \frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial v_n}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_n}{\partial t} = \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

convergono uniformemente in R , rispettivamente a

$$u, \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial t},$$

essendo $u(x, t)$ soluzione del problema 0.1, 0.2, mentre $\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ converge in media a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

La prima parte del teorema è ovvia conseguenza del teorema d'unicità. Per la seconda basterà mostrare che $\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}$ converge in media a $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$. La soluzione del problema 1.1 1.2 è sviluppabile in serie di Fourier:

$$11.1 \quad v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(t) \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{X}.$$

Questa serie derivata una o due volte rispetto a x od una volta rispetto a t dà luogo a serie che convergono almeno in media⁽¹⁶⁾ rispettivamente a $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$.

Poniamo:

$$11.2 \quad \tilde{v}_n(x, t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{X}.$$

Moltiplichiamo ambo i membri della 4.1 per $-\left(\frac{i\pi}{X}\right)^2 (c_{in}(t) - \lambda_i(t))$; otterremo sommando rispetto a j :

$$\int_0^X \left\{ -\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + a \frac{\partial v_n}{\partial t} \right\} \frac{\partial^2 (v_n - \tilde{v}_n)}{\partial x^2} dx = \int_0^X \Phi[v_n] \frac{\partial^2 (v_n - \tilde{v}_n)}{\partial x^2} dx,$$

⁽¹⁶⁾ Per quanto riguarda la convergenza in media delle derivate rispetto ad x della serie in 11.1, basta osservare che, per ogni t fissato, $v(x, t)$ è derivabile due volte rispetto ad x con derivate continue e ricordare una nota proposizione sulla derivazione delle serie di Fourier (cfr. ad es. L. Tonelli in [15] a p. 349). Analogamente per la convergenza in media della derivata rispetto a t del secondo membro di 11.1 a $\frac{\partial v}{\partial t}$.

che può anche scriversi :

$$\int_0^x \left\{ -\frac{\partial^2 (v_n - \tilde{v}_n)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{v}_n}{\partial x^2} + a \frac{\partial v_n}{\partial t} \right\} \frac{\partial^2 (v_n - \tilde{v}_n)}{\partial x^2} dx = \int_0^x \Phi [v_n] \frac{\partial^2 (v_n - \tilde{v}_n)}{\partial x^2} dx.$$

Quest'ultima, tenuto conto che $v(x, t)$ soddisfa la equazione 1.1, dà luogo alla

$$\begin{aligned} 11.3 \quad \int_0^x \left(\frac{\partial^2 (v_n - \tilde{v}_n)}{\partial x^2} \right)^2 dx &= \int_0^x \left\{ -\frac{\partial^2 \tilde{v}_n}{\partial x^2} + a \frac{\partial v_n}{\partial t} - \Phi [v_n] \right\} \frac{\partial^2 (v_n - \tilde{v}_n)}{\partial x^2} dx = \\ &= \int_0^x \left\{ -\frac{\partial^2 (\tilde{v}_n - v)}{\partial x^2} + a \frac{\partial (v_n - v)}{\partial t} + \Phi [v] - \Phi [v_n] \right\} \frac{\partial^2 (v_n - \tilde{v}_n)}{\partial x^2} dx. \end{aligned}$$

Utilizzando la disuguaglianza di Schwarz, dalla 11.3 segue :

$$\begin{aligned} 11.4 \quad \left\{ \int_0^x \left(\frac{\partial^2 (v_n - \tilde{v}_n)}{\partial x^2} \right)^2 dx \right\}^{1/2} &\leq \\ &\leq \left\{ \int_0^x \left[-\frac{\partial^2 (\tilde{v}_n - v)}{\partial x^2} + a \frac{\partial (\tilde{v}_n - v)}{\partial t} + \Phi [v] - \Phi [v_n] \right]^2 dx \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

Poichè risulta : $|\Phi [v] - \Phi [v_n]| \leq L \left\{ \left| \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v_n}{\partial x} \right| + |v - v_n| \right\}$, per quanto già visto circa la convergenza delle successioni $v_n, \frac{\partial v_n}{\partial x}$, la successione $\Phi [v] - \Phi [v_n]$ tende uniformemente a zero; inoltre, poichè per quanto su avvertito $\frac{\partial^2 (\tilde{v}_n - v)}{\partial x^2}, \frac{\partial (\tilde{v}_n - v)}{\partial t}$ tendono in media a zero, lo stesso accadrà (a causa della 11.4) al primo membro della 11.4 medesima e questo implica la tesi per la seconda parte del teorema 2.

Sulla continuità rispetto ai valori iniziali della soluzione del problema A in un caso particolare.

12. Senza entrare a pieno nel problema della continuità, rispetto ai dati iniziali, della soluzione del sistema 0.3, 0.4, mettiamo in luce un aspetto espressivo di questo problema, considerato nella metrica dell'approssimazione

in media, solamente in quanto direttamente legato ad alcune formule di maggiorazione precedentemente stabilite.

Sia \tilde{u} una soluzione del problema A , nelle ipotesi del teorema 1, cioè sia \tilde{u} soluzione del sistema:

$$\begin{cases} -\tilde{u}_{xx} + a\tilde{u}_t = F[\tilde{u}] \\ \tilde{u}(x, 0) = \tilde{g}(x), \tilde{u}(0, t) = \tilde{f}_1(t), \tilde{u}(X, t) = \tilde{f}_2(t). \end{cases}$$

Sia poi u altra soluzione dello stesso problema in corrispondenza ai dati:

$$u(x, 0) = g(x), u(0, t) = \tilde{f}_1(t), u(X, t) = \tilde{f}_2(t).$$

Si ha allora il seguente:

TEOREMA 3. *Fissato $\varepsilon > 0$, si può trovare un $\sigma > 0$ in modo che, posto $\gamma(x) = g(x) - \tilde{g}(x)$, $v = u - \tilde{u}$, se si ha*

$$12.1 \quad \int_0^X \gamma'^2(x) dx < \sigma,$$

allora risulta:

$$12.2 \quad \int_R v^2 dx dt < \varepsilon, \int_R v_x^2 dx dt < \varepsilon, \int_R v_t^2 dx dt < \varepsilon.$$

Con calcolo analogo a quello fatto al n° 10, si trovano valide per v le 10.3, 10.4, 10.5 e 10.6. Integrando quest'ultima rispetto a t , si avrà:

$$\int_0^X v_x^2(x, t) dx \leq \int_0^X v_x^2(x, 0) dx + \frac{L^2}{2m}(1+X^2) \int_0^t \left(\int_0^X v_x^2(x, t) dx \right) dt$$

Utilizzando il lemma di Gronwall, si ha

$$12.3 \quad \int_0^X v_x^2(x, t) dx \leq \left\{ \int_0^X \gamma'^2 dx \right\} \exp \frac{L^2}{2m} (1+X^2) t, \quad t \in [0, T]$$

quindi anche

$$12.4 \quad \int_R v_x^2(x, t) dx dt \leq \left\{ \int_0^X \gamma'^2 dx \right\} T \cdot \exp \frac{L^2}{2m} (1+X^2) T.$$

Considerando ora la 10.3 e, tenuto conto della 10.5, essa dà

$$\begin{aligned} \int_0^X a v_t^2 dx &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^X v_x^2 dx + \int_0^X \{ F(\tilde{u}) - F[\tilde{u}] \} v_t dx \leq \\ &\leq \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^X v_x^2 dx + \frac{1}{m} \int_0^X \{ F[u] - F[\tilde{u}] \}^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^X a v_t^2 dx \end{aligned}$$

cioè, utilizzando maggiorazioni già fatte:

$$\begin{aligned} \int_0^X v_t^2 dx &\leq \frac{4}{3m} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^X v_x^2 dx + \frac{4}{3m^2} \int_0^X \{ F[u] - F[\tilde{u}] \}^2 dx \leq \\ &\leq \frac{4}{3m} \cdot \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^X v_x^2 dx + \frac{4}{3m^2} L^2 (1 + X^2) \int_0^X v_x^2 dx \end{aligned}$$

Integrando rispetto a t (tra 0 e T), tenendo conto della 12.3 e della 12.4, si ha

$$\begin{aligned} 12.5 \quad \int_{\tilde{R}} v_t^2 dx dt &\leq \frac{2}{3m} \left(\int_0^X v_x^2(x, T) dx - \int_0^X \gamma'^2 dx \right) + \frac{4}{3m^2} L^2 (1 + X^2) \int_{\tilde{R}} v_x^2 dx dt \leq \\ &\leq \left\{ \int_0^X \gamma'^2 dx \right\} \cdot \left[\frac{2}{3m} + \frac{4}{3m^2} L^2 (1 + X^2) T \right] \exp \frac{L^2}{2m} (1 + X^2) T. \end{aligned}$$

Si ha infine facilmente

$$\int_{\tilde{R}} v^2 dx dt \leq X^2 \int_{\tilde{R}} v_x^2 dx dt$$

e quest'ultima, assieme alle 12.4 e 12.5, conducono subito alla tesi.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. GEVREY : *Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique*. Journal de Math. pures et appliquées, Ser. VI, vol. IX, (1913).
- [2] G. PRODI : *Teoremi d'esistenza per equazioni alle derivate parziali non lineari di tipo parabolico*. Rend. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, vol. LXXXVI, Fasc. I, (1953).
- [3] C. CILIBERTO : *Su un problema al contorno per la equazione $u_{xx} - u_y = f(x, y, u, u_x)$* , Ricerche di Matematica, v. I, Fasc. 2, (1952), pp. 295-316.
- [4] » » *Sulle equazioni non lineari di tipo parabolico in due variabili*. Ricerche di Matematica, vol. III, Fasc. 2, (1954), pp. 129-165.
- [5] » » *Sulle equazioni quasi lineari di tipo parabolico in due variabili*. Ricerche di Matematica, v. V, Fasc. 1, (1956), pp. 97-125.
- [6] » » *Nuovi contributi alla teoria dei problemi al contorno relativi ad equazioni paraboliche non lineari in due variabili*. Ricerche di Matematica, vol. V, Fasc. 2, (1956) pp. 237-257.
- [7] E. GAGLIARDO : *Teoremi di esistenza e di unicità per problemi al contorno relativi ad equazioni paraboliche lineari e quasi lineari*. Ricerche di Matematica, vol. V, Fasc. 2, (1956), pp. 1-40.
- [8] S. FAEDO : *Un nuovo metodo per l'analisi esistenziale e quantitativa dei problemi di propagazione*. Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa, Ser. III, vol. I, (1947), pp. 1-40.
- [9] J. W. GREEN : *An expansion method for parabolic partial differential equations*. Journal of Research of the Nat. Bureau of Standards v. 51, n.º 3, (1953) pp. 127-132.
- [10] J. L. LIONS : *Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites*. Springer Verlag, Berlin, (1961).
- [11] A. CHIFFI : *Analisi esistenziale e quantitativa dei problemi di propagazione*. Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa, ser. III, v. IX, (1957), pp. 248-281.
- [12] U. BARBUTI : *Analisi esistenziale in problemi di propagazione semilineari*. Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa, ser. III, v. XI, (1957), pp. 183-206.
- [13] J. L. LIONS : *Problemi misti nel senso di Hadamard classici e generalizzati*. Rend. del Seminario Mat. e Fisico di Milano, v. XXVIII, (1959), pp. 149-187.
- [14] S. FAEDO : *Alcuni nuovi criteri di eguale continuità per le funzioni di più variabili*. Rend. di Mat. e delle sue Applicazioni, Fasc. I, (1947), pp. 1-15.
- [15] L. TONELLI : *Serie Trigonometriche*, Zanichelli, Bologna, (1928).