ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ANTONIO CHIFFI

Sezioni di insiemi *k*-rettificabili

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 16, nº 2 (1962), p. 173-193

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1962_3_16_2_173_0>

SEZIONI DI INSIEMI k-RETTIFICABILI (*)

di ANTONIO CHIFFI (Pisa)

Definita una classe $\mathcal{E}_{k,n}$ di insiemi dello spazio R^n (def. 2.4) la quale risulta formata (teor. 2.13) dagli insiemi di R^n misurabili rispetto alla misura di Hausdorff $\mathcal{H}_k$ e $(\mathcal{H}_k, k)$-rettificabili (1), studiamo le sezioni degli insiemi di $\mathcal{E}_{k,n}$ con sottospazi di R^n (teor. 3.6).

§ 1. — Richiami sulle misure di Hausdorff.

DEFINIZIONE 1.1. — Sia R^n lo spazio numerico a n dimensioni e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un suo generico punto; poniamo $|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$. Detto E un insieme di R^n e k un intero positivo, si dirà *misura esterna k dimensionale secondo Hausdorff* (2) il numero (finito o infinito):

$$(1) \quad \mathcal{H}_k(E) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left\{ \inf \left[2^{-k} \omega_k \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} E_i)^k : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \operatorname{diam} E_i < \varepsilon, i = 1, 2, \ldots \right] \right\}$$

dove con *diam E* si è indicato il diametro dell'insieme E con ω_k si è indicata la misura secondo Lebesgue della sfera di R^k di raggio unitario. Per $k = 0$, $\mathcal{H}_0(E)$ è, per definizione, uguale a $+\infty$ se E è infinito; è uguale al numero dei punti di E se E è finito. La misura $\mathcal{H}_n$ è uguale alla misura esterna di Lebesgue in R^n. Per $k > n$ è sempre: $\mathcal{H}_k(E) = 0$. La misura $\mathcal{H}_k$ è monotona e numerabilmente subadditiva.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n. 9 del Comitato per la Matematica del C. N. R. per l'anno accademico 1961-62. L'autore ringrazia il prof. Ennio De Giorgi per i preziosi suggerimenti.

(1) Cfr., ad es., H. FEDERER [6] def. 8.9 a pag. 496. I numeri in parentesi [ ] si riferiscono all'elenco bibliografico posto in fondo al lavoro.

(2) Cfr., ad es., H. FEDERER, [5] n. 2, a pag. 307.

DEFINIZIONE 1.2. — Un insieme $E \subset R^n$ si dice *misurabile* (3) *rispetto a* $\mathcal{H}_k$, ovvero $\mathcal{H}_k$*-misurabile*, se per ogni $L \subset R^n$ si ha:

$$\mathcal{H}_k(L) = \mathcal{H}_k(L \cap E) + \mathcal{H}_k(L - E). \tag{2}$$

La famiglia degli insiemi $\mathcal{H}_k$ misurabili è chiusa rispetto alle operazioni di unione finita o numerabile e differenza e contiene i boreliani di R^n. La misura esterna $\mathcal{H}_k$ di un insieme $E \subset R^n$ che sia $\mathcal{H}_k$ misurabile sarà detta *misura k-dimensionale secondo Hausdorff* di E. La misura $\mathcal{H}_k$ è numerabilmente additiva nella famiglia degli insiemi $\mathcal{H}_k$-misurabili.

Richiamiamo pure le seguenti proprietà della misura di Hausdorff:

TEOREMA 1.3. — *Se* $f: R^n \to R^m$ *è una trasformazione lipschitziana con coefficiente* λ, *vale a dire: se per ogni coppia di punti* x *e* x' *di* R^n *è:* $|f(x) - f(x')| \leq \lambda\,|x - x'|$ *si ha:*

$$\mathcal{H}_k[f(E)] \leq \lambda^k\, \mathcal{H}_k(E) \tag{3}$$

per ogni $E \subset R^n$.

Il teorema segue subito dalla definizione 1.1.

Valgono i seguenti teoremi (vedi, ad esempio, Federer [4] n. 2, pag. 308 e 309; per le dimostrazioni cfr. [9], cap. II, theorem 8.1 a pag. 53 e [8] corollary 3.8 a pag. 245):

TEOREMA 1.4. — *Sia* E *un insieme di* R^n: *esiste una successione di insiemi aperti* $\{A_h\}_{h=1,2,..}$, *tale che sia:* $A_h \supset E$ *e:*

$$\mathcal{H}_k(E) = \mathcal{H}_k\left(\bigcap_{h=1}^{\infty} A_h\right). \tag{4}$$

TEOREMA 1.5. — *Sia* $E \subset R^n$ *un insieme* $\mathcal{H}_k$ *misurabile e di misura* $\mathcal{H}_k$ *finita. Esiste una successione di insiemi chiusi* $\{C_h\}_{h=1,2...}$ *tale che sia:* $C_h \subset E$ *e:*

$$\mathcal{H}_k(E) = \mathcal{H}_k\left(\bigcup_{h=1}^{\infty} C_h\right). \tag{5}$$

Dal teorema 1.5 segue, per l'additività della misura $\mathcal{H}_k$ nella famiglia degli insiemi $\mathcal{H}_k$ misurabili, il seguente:

TEOREMA 1.6. — *Un insieme* $E \subset R^n$ *misurabile rispetto a* $\mathcal{H}_k$ *e di misura* $\mathcal{H}_k$ *finita è uguale alla unione di un insieme di Borel e di un insieme di misura* $\mathcal{H}_k$ *nulla.*

---

(3) Cfr. C. CARATHÉODORY [2], cap. V, n. 239 a pag. 246.

§ 2. — Definizione e prime proprietà della famiglia $\mathcal{E}_{k,n}$.

DEFINIZIONE 2.1. — Siano n e k due interi con $0 < k \leq n$ e siano $f_1, f_2, \dots, f_n$ n funzioni reali continue nell'intervallo T di R^k, dove indichiamo le coordinate del generico punto y con: $(y_1, \dots, y_k)$; indichiamo con $\mathcal{F}T$ la frontiera di T. Posto: $f = (f_1, \dots, f_n)$, consideriamo la funzione vettoriale f: $T \to R^n$ che al punto y di T associa il punto x di R^n di coordinate:

$$x_1 = f_1(y), \dots, x_n = f_n(y). \tag{1}$$

Indichiamo con $f(I)$ l'immagine secondo f di un insieme $I \subset T$ e poniamo: $V = f(T)$.

Se sono verificate le seguenti ipotesi:

(*a*) la f possiede derivate parziali prime continue in T;

(*b*) la corrispondenza f: $T \to V$ è biunivoca;

(*c*) la matrice jacobiana $\dfrac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(y_1, \dots, y_k)}$ ha caratteristica k;

allora la terna:

$$\mathcal{V} = [T, f, V]$$

sarà detta *varietà parametrica regolare k-dimensionale di R^n, di equazioni* (1) *con intervallo base T e supporto V.*

Se in luogo delle ipotesi (*a*), (*b*), (*c*) si fa soltanto l'ipotesi che la funzione f sia lipschitziana, la terna $\mathcal{V} = [T, f, V]$ si dirà *varietà parametrica lipschitziana k dimensionale di R^n.*

È noto (4) il seguente:

TEOREMA 2.2. — *Se $\mathcal{V} = [T, f, V]$ è una varietà lipschitziana k-dimensionale di R^n $(0 < k \leq n)$ e se la corrispondenza f: $T \to G$ è biunivoca, esistono quasi ovunque e sono misurabili in T le derivate parziali della f e, posto:*

$$g_{hm} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_h} \frac{\partial f_i}{\partial y_m} \tag{2}$$

si ha, per ogni insieme misurabile (secondo Lebesgue) $I \subset T$:

$$\mathcal{H}_k[f(I)] = \int_I (det \, \| g_{hm} \|)^{1/2} \, dy. \tag{3}$$

---

(4) Cfr. ad es. H. FEDERER [4] 5.9 a pag 144.

TEOREMA 2.3. — *Se* $\mathcal{V} = [T, f, V]$ *è una varietà lipschitziana k-dimensionale di* R^n $(0 < k \leq n)$ *ha luogo per ogni insieme misurabile* $I \subset T$ *la disuguaglianza :*

$$(4) \qquad \mathcal{H}_k [f(I)] \leq \int_I (det \| g_{hm} \|)^{1/2} dy.$$

DIMOSTRAZIONE. — Invero, detto $\nu(f, I, x)$ il numero, finito o infinito, dei punti $y \in I$ per i quali è: $f(y) = x$, si ha (5)

$$(5) \qquad \int_{R^n} \nu(f, I, x) \, d\mathcal{H}_k = \int_I (det \| g_{hm} \|)^{1/2} dy$$

ed essendo ovviamente:

$$(6) \qquad \mathcal{H}_k [f(I)] \leq \int_{R^n} \nu(f, I, x) \, d\mathcal{H}_k ,$$

il teorema risulta dimostrato.

DEFINIZIONE 2.4. — Sia $0 < k \leq n$. Diremo che un insieme $E \subset R^n$ appartiene alla famiglia $\mathcal{E}_{k,n}$ se:

l'insieme E *è misurabile rispetto a* $\mathcal{H}_k$;

esistono una successione $\{\mathcal{V}_h\}_h$ *di varietà regolari* $\mathcal{V}_h = [T_h , f^{(h)}, V_h]$ *ed un insieme* N *di misura* $\mathcal{H}_k$ *nulla, tali che :*

$$(7) \qquad E \subset \left(\bigcup_{h=1}^{\infty} V_h \right) \cup N.$$

Diremo poi che l'insieme $E \subset R^n$ appartiene alla famiglia $\mathcal{E}_{0,n}$ se è finito o numerabile.

DEFINIZONE 2.5. Diremo che un insieme $E \subset R^n$ è *k-orientabile* (6) se:

appartiene alla famiglia $\mathcal{E}_{k,n}$;

esiste un insieme aperto $A \subset R^n$ *tale che :*

$$(8) \qquad \mathcal{H}_k (E - A) = 0$$

---

(5) Cfr. ad es., loc. cit. (4).

(6) Tale nome verrà giustificato dai prossimi lavori, dove mostreremo che tali insiemi sono supporti di insiemi k-orientati del tipo considerato da R. CACCIOPPOLI in [1].

qualunque sia l'insieme compatto $C \subset A$ si abbia:

$$\mathcal{H}_k(E \cap C) < \infty \tag{9}$$

Stabiliremo ora alcune proprietà degli insiemi della famiglia $\mathcal{E}_{k,n}$.

È di immediata dimostrazione il seguente:

TEOREMA 2.6. — *La famiglia degli insiemi $\mathcal{E}_{k,n}$ è chiusa rispetto alle operazioni di unione finita o numerabile e di differenza; anzi, dati un insieme $E \in \mathcal{E}_{k,n}$ e un insieme $L \subset R^n$ che sia $\mathcal{H}_k$ misurabile, appartiene a $\mathcal{E}_{k,n}$ anche la differenza $E - L$.*

TEOREMA 2.7. — *Sia $E \in \mathcal{E}_{k,n}$. Esistono una successione di insiemi compatti $\{C_m\}_{m=1,2...}$ di R^n ciascuno dei quali contenuto nel supporto di una varietà regolare e un insieme $N' \subset R^n$ verificanti le relazioni:*

$$\mathcal{H}_k(N') = 0 \tag{10}$$

$$E = \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} C_m\right) \cup N'. \tag{11}$$

DIMOSTRAZIONE. — Tenuto conto della def. 2.4 e, in particolare, della (7), poniamo:

$$E_h = E \cap \left(V_h - \bigcup_{r=1}^{h-1} V_r\right) \qquad h = 1, 2, ... \tag{12}$$

Si ha subito, per la (3):

$$\mathcal{H}_k(E_h) \leq \mathcal{H}_k(V_h) < +\infty \qquad h = 1, 2, ... \tag{13}$$

Per il teorema 1.5 esiste, per ogni h, una successione $\{C_{hl}\}_{l=1,2,...}$ di insiemi chiusi contenuti in E_h e tali che si abbia:

$$\mathcal{H}_k(E_h) = \mathcal{H}_k\left(\bigcup_{l=1}^{\infty} C_{hl}\right) \qquad h = 1, 2, ... \tag{14}$$

Per la (14) e per l'additività della misura $\mathcal{H}_k$ nella famiglia degli insiemi $\mathcal{H}_k$-misurabili, per ogni h esiste un insieme N_h' di misura $\mathcal{H}_k$ nulla tale che:

$$E_h = \left(\bigcup_{l=1}^{\infty} C_{hl}\right) \cup N_h' \qquad h = 1, 2, ... \tag{15}$$

Dalla (15), posto $N' = \bigcup_{l=1}^{\infty} N'_l$, segue:

$$E = \left(\bigcup_h \bigcup_{l=1}^{\infty} C_{hl} \right) \cup N', \tag{16}$$

dove gli insiemi C_{hl} soddisfano alla (11) per la (16) e l'insieme N' ha misura $\mathcal{H}_k$ nulla.

TEOREMA 2.8. — *Ogni insieme $E \in \mathcal{E}_{k,n}$ $(0 \leqq k \leqq n)$ è uguale alla unione di un insieme di Borel e di un insieme di misura $\mathcal{H}_k$ nulla.*

DIMOSTRAZIONE. — Per $k \neq 0$ il teorema segue dal precedente teorema 2.7 : per $k = 0$ è banale.

TEOREMA 2.9. — *I supporti delle varietà lipschitziane k-dimensionali di R^n $(0 < k \leqq n)$ sono insiemi della famiglia $\mathcal{E}_{k,n}$.*

DIMOSTRAZIONE. — Sia $\mathcal{V} = [T, f, V]$ una varietà lipschitziana. Sia $\{\varepsilon_l\}_l$ una successione di numeri positivi convergente a zero. Esiste per ogni ε_l una funzione vettoriale $f^{(l)} : T \to R^n$, continua con le sue derivate parziali prime in T, tale che l'insieme:

$$I_l = \{ y : y \in T, f^{(l)}(y) \neq f(y) \}$$

ha misura secondo Lebesgue minore di ε_l (7).

Posto: $I = \bigcap_{l=1}^{\infty} I_l$, si ha subito:

$$\mathcal{H}_k(I) = 0 \tag{17}$$

Sia $\mathcal{V}_l = [T, f^{(l)} V_l]$ la varietà di intervallo base T, di equazioni $x = f^{(l)}(y)$ e supporto $V_l = f^{(l)}(T)$. Il supporto della varietà lipschitziana $\mathcal{V}$ è contenuto nell'unione dell'insieme $\bigcup_{l=1}^{\infty} V_l$ e dell'insieme $f(I)$, che ha, per la (17) e per il teorema 1.3 misura $\mathcal{H}_k$ nulla. Le varietà $\mathcal{V}_l$ possono non risultare regolari nel senso della def. 2.1, potendo la matrice jacobiana della funzione $f^{(l)}$ rispetto alle variabili $(y_1, \dots, y_k)$ non avere caratteristica k e la corrispondenza $f^{(l)} : T \to V_l$ non risultare biunivoca. Basterà però dimostrare che, a loro volta, i supporti V_l delle varietà $\mathcal{V}_l = [T, f^{(l)}, V_l]$ sono contenuti, a

(7) Cfr. H. WHITNEY [11] teor. 3 a pag. 148.

meno di un insieme di misura $\mathcal{H}_k$ nulla, in una famiglia numerabile di supporti di varietà regolari.

Fissato un valore dell'indice l e posto:

$$g_{hm}^{(l)}(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i^{(l)}}{\partial y_h} \frac{\partial f_i^{(l)}}{\partial y_m},$$

sia G_l il sottoinsieme chiuso di T tale che, per $y \in G_l$, è: $det \| g_{hm}^{(l)}(y) \| = 0$. Per noti teoremi sulle funzioni implicite l'insieme aperto $T - (\mathcal{F} T \cup G_l)$ si lascia ricoprire da una infinità numerabile di intervalli T_h tali che la corrispondenza definita dalla restrizione $f^{(l,h)}$ di $f^{(l)}$ a T_h sia biunivoca e la caratteristica della relativa matrice jacobiana sia uguale a k.

Dette $\mathcal{V}_{lh}$ le varietà regolari di intervallo base T_h, di equazione $x = f^{(l,h)}(y)$ e supporto V_{lh}, si ha:

$$V_l \subset \left(\bigcup_{h=1}^{\infty} V_{lh} \right) \cup f^{(l)}(G_l) \cup f^{(l)}(\mathcal{F} T) \qquad (l = 1, 2, ...) \tag{18}$$

ed è: $\mathcal{H}_k [f^{(l)}(G_l)] = 0$ per il teorema 2.3, e: $\mathcal{H}_k [f^{(l)}(\mathcal{F} T)] = 0$ per il teorema 1.3, quindi $V_l \in \mathcal{E}_{k,n}$ e il teorema è dimostrato.

Valgono pure i teoremi seguenti:

TEOREMA 2.10. — *Sia*: $0 < k \leq n$. *Condizione necessaria perchè un insieme* $\mathcal{H}_k$ *misurabile* $E \subset R^n$ *appartenga alla famiglia* $\mathcal{E}_{k,n}$ *è che esista una funzione lipschitziana* f: $R^k \to R^n$ *tale che*: $\mathcal{H}_k [E - f(R^k)] = 0$.

DIMOSTRAZIONE. — Sia $\mathcal{V}_h = [T_h, f^{(h)}, V_h]$ $(h = 1, 2, ...)$ una successione di varietà regolari ed N un insieme di misura $\mathcal{H}_k$ nulla tali che sia, a norma della def. 2.4:

$$E \subset \left(\bigcup_{h=1}^{\infty} V_h \right) \cup N \tag{19}$$

e sia μ_h il modulo di Lipschitz della funzione vettoriale $f^{(h)}$. Sia $\{\tau_h\}_h$ una successione di trasformazioni di R^k in sè, tali che:

(a) per ogni coppia di punti y e y' di R^k si abbia

$$| \tau_h(y) - \tau_h(y') | = (\mu_h + 1) | y - y' |$$

(b) posto: $T'_h = \tau_h(T_h)$, la distanza tra gli insiemi T'_h e T'_l $(h \neq l)$ sia maggiore del massimo di $| f^{(h)}(y') - f^{(l)}(y'') |$, per $y' \in T_h$ e $y'' \in T_l$.

La trasformazione inversa τ_h^{-1} di τ_h esiste per la (a) e poniamo, per ogni $y \in T'_h$: $\varphi^{(h)} = f^{(h)}[\tau_h^{-1}(y)]$.

Gli intervalli T'_h $(h = 1, 2, ...)$ sono disgiunti a due a due per (b) e pertanto ha senso considerare una funzione φ definita nell'insieme $\bigcup_{h=1}^{\infty} T_h$ ed a valori in R^n, tale che, per $y \in T'_h$, si abbia: $\varphi(y) = \varphi^{(h)}(y)$. La funzione φ risulta lipschitziana di modulo 1 ed è:

$$\varphi\left(\bigcup_{h=1}^{\infty} T'_h\right) = \bigcup_{h=1}^{\infty} \varphi^{(h)}(T'_h) = \bigcup_{h=1}^{\infty} f^{(h)}(T_h) = \bigcup_{h=1}^{\infty} V_h . \tag{21}$$

Per un noto teorema [8] esiste una funzione vettoriale lipschitziana: $f: R^k \to R^n$ tale che si abbia ; $f(y) = \varphi(y)$ per $y \in \bigcup_{h=1}^{\infty} T'_h$.

Dalla (20) segue subito: $\mathcal{H}_k[E - f(R^k)] = 0$.

TEOREMA 2.11. — *Condizione sufficiente perchè un insieme $\mathcal{H}_k$-misurabile $E \subset R^n$ $(0 < k \leq n)$ appartenga alla famiglia $\mathcal{E}_{k,n}$ è che, fissato $\varepsilon > 0$, esista una funzione lipschitziana f: $R^k \to R^n$ tale che sia:*

$$\mathcal{H}_k[E - f(R^k)] < \varepsilon.$$

DIMOSTRAZIONE. — Se è soddisfatta per E la condizione enunciata, esiste una successione di funzioni lipschitziane $f^{(h)}$: $R^k \to R^n$ $(h = 1, 2, ...)$, tali che: $\mathcal{H}_k[E - \bigcup_{h=1}^{\infty} f^{(h)}(R^k)] = 0$. Decomposto R^k in una infinità numerabile di intervalli T_l, consideriamo le funzioni $f^{(h,l)}$, restrizioni di $f^{(h)}$ a T_l. Per il teorema 2.9 gli insiemi $f^{(h,l)}(T_l)$ $(h, l = 1, 2, ...)$ e di conseguenza, l'insieme $\bigcup_{h=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} f^{(h,l)}(T_l)$, appartengono alla famiglia $\mathcal{E}_{k,n}$. A tale famiglia appartiene pure l'insieme E, in quanto differisce dall'insieme $\bigcup_{h=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} f^{(h,l)}(T_l)$ per un insieme di misura $\mathcal{H}_k$ nulla.

Dai precedenti teoremi seguono immediatamente i due seguenti:

TEOREMA 2.12. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè un insieme $\mathcal{H}_k$-misurabile $E \subset R^n$ $(0 < k \leq n)$ appartenga alla famiglia $\mathcal{E}_{k,n}$ è che esista una funzione lipschitziana f: $R^k \to R^n$ tale che sia: $\mathcal{H}_k[E - f(R^k)] = 0$.*

---

[8] Cfr. M. D. KIRSZBRAUN [7], Hauptsatz $\mathcal{L}$ 1 a pag. 104.

TEOREMA 2.13. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè un insieme $\mathcal{H}_k$-misurabile $E \subset R^n$ appartenga alla famiglia $\mathcal{E}_{k,n}$ è che, fissato $\varepsilon > 0$, esista una funzione lipschitziana $f: R^k \to R^n$ tale che:*

$$\mathcal{H}_k[E - f(R^k)] < \varepsilon.$$

Dal teorema 2.13 si vede che gli insiemi della famiglia $\mathcal{E}_{k,n}$ sono tutti e soli gli insiemi di R^n $\mathcal{H}_k$-misurabili e $(\mathcal{H}_k, k)$-rettificabili, secondo la nomenclatura adottata da Federer in [6], def. 8.9 a pag. 496.

TEOREMA 2.14. — *Sia $\varphi : R^n \to R^m$ una funzione lipschitziana e k un intero positivo non maggiore dei due numeri m e n. Se E appartiene alla famiglia $\mathcal{E}_{k,n}$ l'insieme $\varphi(E)$ appartiene alla famiglia $\mathcal{E}_{k,m}$.*

DIMOSTRAZIONE. — Per il teorema 2.7 esiste una successione di insiemi compatti $\{C_i\}_{i=1,2,\dots}$ e un insieme N' di misura $\mathcal{H}_k$ nulla, tali che sia:

$$E = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) \cup N'.$$

L'immagine secondo φ di ciascun insieme compatto C_i è un insieme compatto e pertanto è misurabile rispetto a $\mathcal{H}_k$; l'immagine secondo φ di un insieme N' di misura $\mathcal{H}_k$ nulla è pure, per il teorema 1.3 di misura $\mathcal{H}_k$ nulla e pertanto anche $\varphi(E)$ è $\mathcal{H}_k$ misurabile.

Per il teorema 2.12 esiste una funzione lipschitziana $f: R^k \to R^n$ tale che l'insieme $N = E - f(R^k)$ abbia misura $\mathcal{H}_k$ nulla. La funzione composta $\psi = \varphi \cdot f$ è lipschitziana e si ha: $\varphi(N) \supset \varphi(E) - \psi(R^k) = N'$.

Per il teorema 1.3 si ha: $\mathcal{H}_k(N') = \mathcal{H}_k[\varphi(N)] = 0$ e, per il teorema 2.12, l'insieme $\varphi(E)$ risulta appartenere alla famiglia $\mathcal{E}_{k,n}$.

§ 3. — Sezioni di insiemi di $\mathcal{E}_{k,n}$.

DEFINIZIONE 3.1. — Indicheremo con s un intero soddisfacente alla limitazione: $1 \leq s < n$; con R^s lo spazio numerico ad s dimensioni, di cui indicheremo con $t = (t_1, \dots, t_s)$ il generico punto; fissato $t \in R^s$, indicheremo con $S^{n-s}(t)$ il sottospazio di R^n di equazioni:

$$\{x_1 = t_1, \dots, x_s = t_s\}.$$

TEOREMA 3.2. — *Siano: E un insieme di R^n; k e s due interi soddisfacenti alle limitazioni: $1 \leq s \leq k \leq n$, $s < n$. Tenuta presente la definizione 3.1,* *ha luogo la disuguaglianza:*

$$(1) \qquad \overline{\int_{R^s}} \mathcal{H}_{k-s}[E \cap S^{n-s}(t)]\, dt \leqq 2^k \mathcal{H}_k(E),$$

dove si è scritto dt al posto di $dt_1 \dots dt_s$ e dove l'integrale a primo membro è da intendersi nel senso di integrale superiore e le misure $\mathcal{H}_k$ e $\mathcal{H}_{k-s}$ nel senso di misure esterne di Hausdorff [9].

Dimostrazione. Prendiamo prima in considerazione il caso $s < k$. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia delle successioni $\{K_i, \delta_i\}_{i=1,2,\dots}$ dove K_i è una sfera aperta di R^n di raggio δ_i (l'insieme vuoto $\emptyset$ deve considerarsi come una sfera di raggio zero). Sia $\mathcal{S}_k(E)$ la misura (esterna) definita per ogni insieme $E \subset R^n$ nel modo seguente:

$$(2) \quad \mathcal{S}_k(E) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left\{ \inf \left[2^{-k} \omega_k \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^k : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i, \{K_i, \delta_i\}_i \in \mathcal{F}, \delta_i < \varepsilon, i = 1, 2 \dots \right] \right\}$$

dove con ω_k si è indicata la misura secondo Lebesgue della sfera di R^k di raggio unitario. Ogni ricoprimento di E con una successione $\{K_i\}_i$ di sfere aventi tutte diametro δ_i minore di ε, induce per ogni $t \in R^s$ un ricoprimento di $[E \cap S^{n-s}(t)]$ con sfere $K_i(t) = [K_i \cap S^{n-s}(t)]$ di $S^{n-s}(t)$ aventi diametro $\delta_i(t)$ minore di ε. Poniamo $\delta_i(t) = 0$ se l'intersezione $[K_i \cap S^{n-s}(t)]$ è vuota.

Un facile calcolo mostra che vale l'uguaglianza:

$$(3) \qquad 2^{-k+s} \omega_{k-s} \int_{R^s} \delta_i^{k-s}(t)\, dt = 2^{-k} \omega_k \delta_i^k . \qquad i = 1, 2, \dots$$

Sommando le (3) rispetto a i si ottiene:

$$(4) \qquad 2^{-k+s} \omega_{k-s} \int_{R^s} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^{k-s}(t)\, dt = 2^{-k} \omega_k \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^k .$$

Sia $(\varepsilon_l)_{l=1,2,\dots}$ una successione di numeri positivi convergente a zero e sia $\{K_{1i}, \delta_{1i}\}_i, \{K_{2i}, \delta_{2i}\}_i, \dots \{K_{li}, \delta_{li}\}_i, \dots$ una successione di elementi di $\mathcal{F}$ tale

---

(9) Per $s = 1$ cfr. S. Eilenberg [3]; per $s = k = n - 1$, cfr. J. Schauder [10], teor. III a pag. 11.

che

$$(5) \qquad E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{li} \qquad l = 1, 2, \ldots$$

$$(6) \qquad \delta_{li} < \varepsilon_l \qquad i = 1, 2, \ldots$$

$$(7) \qquad \lim_{l\to\infty} 2^{-k} \omega_k \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{li}^k = \mathcal{S}_k(E).$$

Si ha subito, per la (4):

$$(8) \qquad \int_{R^s} \min_{l\to\infty} \lim 2^{-k+s} \omega_{k-s} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{li}^{k-s}(t)\, dt \leq \lim_{l\to\infty} 2^{-k} \omega_k \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{li}^k = \mathcal{S}_k(E).$$

Posto, analogamente a quanto si è fatto nella (2), per ogni insieme $E \subset R^n$:

$$(9) \qquad \mathcal{S}_{k-s}(E) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left\{ \inf \left[2^{-k+s} \omega_{k-s} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^{k-s};\ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i,\ \{K_i, \delta_i\}_i \in \mathcal{F},\ \delta_i < \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots \right] \right\}$$

si ha immediatamente:

$$(10) \qquad \mathcal{S}_{k-s}[E \cap S^{n-s}(t)] \leq \min_{l\to\infty} \lim 2^{-k+s} \omega_{k-s} \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{li}^{k-s}(t)$$

e dalle (10) e (8) segue:

$$(11) \qquad \overline{\int_{R^s}} \mathcal{S}_{k-s}[E \cap S^{n-s}(t)]\, dt \leq \mathcal{S}_k(E),$$

dove l'integrale a primo membro è da intendersi nel senso di integrale superiore. Dalla disuguaglianza, valevole ovviamente per ogni $E \subset R^n$ e $0 < r \leq n$:

$$(12) \qquad 2^{-r} \mathcal{S}_r(E) \leq \mathcal{H}_r(E) \leq \mathcal{S}_r(E)$$

e dalla (11) segue subito la (1).

Sia ora $s = k$. Detta $\{K_i, \delta_i\}_i$ una successione di elementi di $\mathcal{F}$, per ogni i poniamo $\nu_i(t) = 0$ se $K_i \cap R^{n-s}(t) = \emptyset$ e $\nu_i(t) = 1$ in caso contrario.

Detto $\nu[\{K_i, \delta_i\}_i, t]$ il numero delle sfere della successione $\{K_i, \delta_i\}_i$ che hanno intersezione non vuota con $S^{n-s}(t)$, si vede facilmente che il numero $\mathcal{H}_0[E \cap S^{n-s}(t)]$ dei punti che appartengono a $E \cap S^{n-s}(t)$ soddisfa la disuguaglianza:

$$(13) \qquad \mathcal{H}_0[E \cap S^{n-s}(t)] \leq$$

$$\leq \lim_{\varepsilon \to 0+} \left\{ \inf \left[\nu[\{K_i, \delta_i\}_i, t] : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i,\ \{K_i, \delta_i\} \in \mathcal{F},\ \delta_i < \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots \right] \right\}.$$

Per ogni i si ha, ricordando che è: $k = s$:

$$(14) \qquad \int_{R^s} \nu_i(t)\, dt = 2^{-k} \omega_k \delta_i^k \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

Sommando le (14) si ottiene l'uguaglianza:

$$(15) \qquad \int_{R^s} \nu[\{K_i, \delta_i\}_i, t]\, dt = 2^{-k} \omega_k \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^k .$$

Come nel caso precedente, detta $\{\varepsilon_l\}_l$ una successione di numeri positivi decrescente e convergente a zero, consideriamo una successione di elementi di $\mathcal{F}$:

$$\{K_{1i}, \delta_{1i}\}_i, \{K_{2i}, \delta_{2i}\}_i, \ldots, \{K_{li}, \delta_{li}\}_i, \ldots$$

tali che valgono le (5), (6) e (7). Anche questa volta dalle (15) e dalla (7) segue:

$$(16) \qquad \int_{R^s} \min \lim_{l \to \infty} \nu[\{K_{li}, \delta_{li}\}_i, t]\, dt \leq \mathcal{S}_k(E)$$

e, per le (12), (13) e (16) si ottiene:

$$(17) \qquad \overline{\int_{R^s}} \mathcal{H}_0(E \cap S^{n-s}(t))\, dt \leq \mathcal{S}_k(E) \leqq 2^k \mathcal{H}_k(E)$$

e la (1) è pienamente dimostrata.

OSSERVAZIONE. — I risultati ora stabiliti si estendono immediatamente alla intersezione di E con la famiglia dei sottospazi a $n - s$ dimensioni perpendicolari ad un sottospazio ad s dimensioni di R^n arbitrariamente prefissato; ci si può infatti ricondurre al caso del sottospazio $\{x_{s+1}=0, \dots, x_n=0\}$ mediante una rotazione, essendo le misure esterne di Hausdorff invarianti per rotazioni.

TEOREMA 3.3. — *Nelle ipotesi del teorema 3.2 e se $\mathcal{H}_k(E)$ è finita, $\mathcal{H}_{k-s}[E \cap S^{n-s}(t)]$ è finita per quasi ogni $t \in R^s$; se $\mathcal{H}_k(E)$ è nulla, $\mathcal{H}_{k-s}[E \cap S^{n-s}(t)]$ è nulla per quasi ogni $t \in R^s$.*

Segue immediatamente dal teorema 3.2.

TEOREMA 3.4. — *Siano k e s due interi soddisfacenti alla limitazione: $1 \leqq s \leqq k$; R^k lo spazio numerico a k dimensioni, del quale indichiamo con $y=(y_1, \dots, y_k)$ il generico punto; R^s lo spazio ad s dimensioni del quale indichiamo con $t=(t_1, \dots, t_s)$ il generico punto; R^{k+s} il prodotto cartesiano di R^k e R^s, del quale indichiamo con $z=(z_1, \dots, z_{k+s})=(y_1, \dots, y_k;\ t_1, \dots, t_s)$ il generico punto; $S^k(t)$ il sottospazio di R^{s+k} di equazioni: $\{z_{k+1}=t_1, \dots, z_{k+s}=t_s\}$; T un intervallo di R^k; $f_1(y), \dots, f_s(y)$ funzioni definite in T ed ivi lipschitziane; $\mathcal{W}=[T, \psi, W]$ una varietà lipschitziana k-dimensionale di R^{s+k}, dove la funzione vettoriale ψ ha come componenti le funzioni:*

$$y_1, \dots, y_k, f_1(y), \dots, f_s(y). \tag{18}$$

Posto:

$$g_{pq}(y)=\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f_p}{\partial y_i} \frac{\partial f_q}{\partial y_i} \qquad (p, q=1, 2, \dots, s) \tag{19}$$

per ogni insieme $I \subset T$ misurabile secondo Lebesgue, ha luogo la disuguaglianza:

$$\overline{\int_{R^s}} \mathcal{H}_{k-s}[\psi(I) \cap S^k(t)]\, dt \leq 2^k \int_I (\det \| g_{pq}(y) \|)^{1/2}\, dy. \tag{20}$$

DIMOSTRAZIONE. — Detto λ un numero reale positivo, poniamo:

$$\begin{cases} \psi_i(\lambda, y)=y_i & \text{per } i=1, 2, \dots, k \\ \psi_{k+j}(\lambda, y)=\lambda f_j(y) & \text{per } j=1, 2, \dots, s \end{cases} \tag{21}$$

dove le funzioni $f_1, \dots, f_s$ sono le funzioni che compaiono nella (18). Consideriamo la funzione vettoriale $\psi(\lambda, y): T \to R^{s+k}$ avente come componenti le funzioni:

$$\psi_1(\lambda, y), \dots, \psi_{s+k}(\lambda, y) \tag{22}$$

e la varietà lipschitziana

$$\mathcal{W}_\lambda = [T, \psi(\lambda, y), W(\lambda)]. \tag{23}$$

Dato un insieme I misurabile secondo Lebesgue e contenuto in T, indicheremo al solito con $\psi(\lambda, I)$ [oppure $\psi(I)$] la immagine di I secondo la funzione $\psi(\lambda, y)$ [oppure $\psi(y)$].

Posto:

$$\widetilde{g}_{hm}(\lambda, y) = \sum_{i=1}^{k+s} \frac{\partial \psi_i(\lambda, y)}{\partial y_h} \frac{\partial \psi_i(\lambda, y)}{\partial y_m} \tag{24}$$

la funzione $\widetilde{g}_{hm}(\lambda, y)$ risulta definita quasi ovunque in T e si ha, per il teorema 2.2:

$$\mathcal{H}_k[\psi(\lambda, I)] = \int_I (\det \| \widetilde{g}_{hm}(\lambda, y) \|)^{1/2} dy \tag{25}$$

ed anche, per la (1) del teor. 3.2:

$$\overline{\int_{R^s}} \mathcal{H}_{k-s}[\psi(\lambda, I) \cap S^k(t)] \, dt \leq 2^k \int_I (\det \| \widetilde{g}_{hm}(\lambda, y) \|)^{1/2} dy . \tag{26}$$

Per le ovvie uguaglianze:

$$\overline{\int_{R^s}} \mathcal{H}_{k-s}[\psi(\lambda, I) \cap S^k(t)] \, dt = \lambda^s \overline{\int_{R^s}} \mathcal{H}_{k-s}[\psi(\lambda, I) \cap S^k(\lambda t)] \, dt \tag{27}$$

e:

$$\psi(\lambda, I) \cap S^k(\lambda t) = \psi(I) \cap S^k(t) \tag{28}$$

la (26) diventa:

$$\overline{\int_{R^s}} \mathcal{H}_{k-s}[\psi(I) \cap S^k(t)] \, dt \leq 2^k \int_I \left(\frac{1}{\lambda^{2s}} \det \| \widetilde{g}_{hm}(\lambda, y) \| \right)^{1/2} dy. \tag{29}$$

Tenuto conto delle (19), un semplice calcolo mostra che è:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda^{2s}} \det \| \widetilde{g}_{hm}(\lambda, y) \| = \det \| g_{pq}(y) \| . \tag{30}$$

Poichè le funzioni di y:

$$\frac{1}{\lambda^{2s}} \det \| \tilde{g}_{hm}(\lambda, y) \|$$

sono equilimitate in T per $\lambda > 1$, dalle (29) e (30) segue la (20).

TEOREMA 3.5. — *Sia* $\mathcal{V} = [T, f, V]$ *una varietà regolare k-dimensionale di* R^n; s *un intero verificante le limitazioni* $1 \leq s \leq k \leq n$, $s < n$; $S^{n-s}(t)$ *il sottospazio di* R^n *di cui alla definizione* 3.1. *Esistono: un insieme* M *soddisfacente, per quasi ogni* $t \in R^s$, *l'uguaglianza:*

$$\mathcal{H}_{k-s}[M \cap S^{n-s}(t)] = 0 \tag{31}$$

ed una successione $\{\mathcal{Z}_h\}_{h=1,2,\dots}$ *di varietà regolari k-dimensionali di* R^n: $\mathcal{Z}_h = [Q_h, \varphi^{(h)}, Z_h]$, *ove la funzione vettoriale* $\varphi^{(h)}(\eta) = \varphi^{(h)}(\eta_1, \dots, \eta_k)$ *ha come componenti le funzioni:*

$$\eta_1, \dots, \eta_s, \quad \varphi^{(h)}_{s+1}(\eta), \dots, \varphi^{(h)}_n(\eta), \tag{32}$$

tali che abbia luogo l'uguaglianza:

$$V = \left(\bigcup_{h=1}^{\infty} Z_h \right) \cup M. \tag{33}$$

DIMOSTRAZIONE. — Siano:

$$f_1(y), \dots, f_n(y) \tag{34}$$

le componenti della funzione vettoriale f; consideriamo la varietà regolare k-dimensionale di R^{k+s}: $\mathcal{W} = [T, \psi, W]$, dove la funzione vettoriale ψ ha come componenti le funzioni:

$$y_1, \dots, y_k, f_1(y), \dots, f_s(y). \tag{35}$$

La varietà $\mathcal{W}$ si trova nelle ipotesi del teorema 3.4 e pertanto ha luogo la disuguaglianza (20) dove le funzioni $g_{pq}(y)$ sono definite dalle (19).

Sia $G \subset T$ l'insieme chiuso dei punti $y \in T$ per i quali è: $\det \| g_{pq}(y) \| = 0$; per la (20) è:

$$\overline{\int_{R^s}} \mathcal{H}_{k-s}[\psi(G) \cap S^k(t)]\, dt = 0 \tag{36}$$

da cui segue che, per quasi ogni $t \in R^s$, è:

$$\mathcal{H}_{k-s}[\psi(Q) \cap S^k(t)] = 0 \tag{37}$$

Sia $G(t)$ l'insieme dei punti $y \in T$ tali che $y \in G$ e $\psi(y) \in S^k(t)$. Quando $y = (y_1, \dots, y_k)$ descrive $G(t)$, il punto $(y_1, \dots, y_k, t_1, \dots, t_s)$ descrive l'insieme $\psi(Q) \cap S^k(t)$ e perciò dalla (37) segue:

$$\mathcal{H}_{k-s}[G(t)] = 0 \tag{38}$$

per quasi ogni $t \in R^s$. Prendiamo ora in considerazione la funzione vettoriale $f = (f_1, \dots, f_n)$; dalla (38) e dal teorema 1.3 si ha, sempre per quasi ogni $t \in R^s$:

$$\mathcal{H}_{k-s}\{f[G(t)]\} = 0 \tag{39}$$

ed anche, per l'uguaglianza:

$$f[G(t)] = f(G) \cap S^{n-s}(t), \tag{40}$$

segue l'altra uguaglianza valevole per quasi ogni $t \in R^s$:

$$\mathcal{H}_{k-s}\{f(G) \cap S^{n-s}(t)\} = 0. \tag{41}$$

Essendo inoltre $\mathcal{H}_k(\mathcal{F}T) = 0$, per il teorema 1.3 è: $\mathcal{H}_k[f(\mathcal{F}T)] = 0$ e, dal teorema 3.3 segue l'uguaglianza:

$$\mathcal{H}_{k-s}[f(\mathcal{F}T) \cap S^{n-s}(t)] = 0 \tag{42}$$

per quasi ogni $t \in R^s$. Posto $M = f(G) \cup f(\mathcal{F}T)$, dalle (41), (42) segue la (31) per quasi ogni $t \in R^s$.

Mostriamo che, dato un punto $\bar{y} \in T - (G \cup \mathcal{F}T)$ esistono: un insieme aperto $A \subset T - (G \cup \mathcal{F}T)$ al quale $\bar{y}$ è interno e una varietà regolare k-dimensionale $\mathcal{Z} = [Q, \varphi, Z]$, tale che la funzione vettoriale φ ha come componenti le funzioni, analoghe alle (32):

$$\eta_1, \dots, \eta_s, \varphi_{s+1}(\eta), \dots, \varphi_n(\eta) \tag{43}$$

e siano verificate le relazioni:

$$f(A) \subset Z \tag{44}$$

$$Z \subset f[T - (G \cup \mathcal{F}T)]. \tag{45}$$

Infatti se $\bar{y}$ è un punto di $T - (G \cup \mathcal{F}T)$, si ha: $det \, \| g_{pq}(\bar{y}) \| \neq 0$ e, per la definizione (19) di $g_{pq}(y)$, esiste una s-upla di numeri interi $(r_1, \dots, r_s)$ ed un intervallo $T' \subset T - (G \cup \mathcal{F}T)$ al quale $\bar{y}$ è interno, tale che in tutti i punti di T' sia verificata la relazione:

$$(46) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_{r_1}} & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial f_s}{\partial y_{r_1}} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_{r_s}} & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial f_s}{\partial y_{r_s}} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Senza sostanziali restrizioni possiamo supporre: $r_1 = 1, \ldots, r_s = s$, e quindi scrivere la (46) nella forma:

$$(47) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial f_s}{\partial y_1} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_s} & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial f_s}{\partial y_s} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Esaminiamo dapprima il caso $s < k$.

Per noti teoremi sulle funzioni implicite esistono per la (47): un insieme aperto $A_1 \subset R^s$; un insieme aperto $A_2 \subset R^{k-s}$; un insieme aperto $A_3 \subset T' \subset R^k$; s funzioni reali $v_1, \ldots, v_s$ definite in $A_1 \times A_2$, ed ivi continue con le derivate parziali prime, tali che ogni $(k+s)$-upla di numeri $(t_1, \ldots, t_s, y_1, \ldots, y_k)$ verificante le relazioni:

$$(48) \qquad \begin{cases} (t_1, \ldots, t_s) \in A_1 \\ (y_{s+1}, \ldots, y_k) \in A_2 \\ y_i = v_i(y_{s+1}, \ldots, y_k, t_1, \ldots, t_s) & (i = 1, 2, \ldots s) \end{cases}$$

verifichi pure le relazioni:

$$(49) \qquad \begin{cases} (y_1, \ldots, y_k) \in A_3 \\ t_i = f_i(y_1 \ldots, y_k) & (i = 1, 2, \ldots, s) \end{cases}$$

e viceversa, ogni $(k+s)$-upla di numeri $(t_1, \ldots, t_s, y_1, \ldots, y_k)$ verificante le (49) verifichi pure le (48). Indichiamo per semplicità con $(\eta_1, \ldots, \eta_k)$, anzichè con $(t_1, \ldots, t_s, y_{s+1}, \ldots, y_k)$, le coordinate di un generico punto $\eta \in A_1 \times A_2$. Le (48), (49) sono le equazioni di una corrispondenza biunivoca $\mathcal{C}$ tra i punti y dell'insieme $A_3 \subset T - (G \cup \mathcal{F}T) \subset R^k$ e i punti η dell'insieme $A_1 \times A_2$.

Detto Q un intervallo contenuto in $A_1 \times A_2$ e contenente nel suo interno il punto $\bar{\eta}$ di coordinate $\{f_1(\bar{y}), \dots, f_s(\bar{y}), \bar{y}_{s+1}, \dots, \bar{y}_k\}$, l'immagine dell'insieme $Q - \mathcal{F}Q$ nella corrispondenza $\mathcal{T}$ è un insieme aperto A al quale appartiene il punto $\bar{y}$.

Poniamo, per $\eta \in Q$:

$$(50)\quad \begin{cases} \varphi_i(\eta) = \eta_i & \text{per } i = 1, \dots, s \\ \varphi_{s+j}(\eta) = f_{s+j}[v_1(\eta), \dots, v_s(\eta), \eta_{s+1}, \dots, \eta_k] & \text{per } j = 1, \dots, n-s \end{cases}$$

Le φ_{s+j} sono funzioni continue in Q con le loro derivate parziali prime e, tenendo conto delle (47), (48), (49) e del fatto che $\mathcal{V}$ era per ipotesi varietà regolare, con semplici considerazioni si verifica che la matrice:

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \eta_1} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial \eta_1} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \eta_k} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial \eta_k} \end{matrix} \right\|$$

ha caratteristica k e che la corrispondenza $\varphi: Q \to \varphi(Q)$ è biunivoca. Consideriamo la funzione vettoriale φ di componenti:

$$(51)\qquad \eta_1, \dots, \eta_s, \varphi_{s+1}(\eta), \dots, \varphi_n(\eta),$$

che sono della forma (43); la varietà regolare k-dimensionale $\mathcal{Z} = [Q, \varphi, Z]$ verifica le condizioni espresse dalle (44) e (45).

Esaminiamo ora il caso $s = k$. Per la (47) esistono: un insieme aperto $A_1 \subset R^s$; un insieme aperto $A_3 \subset T' \subset R^k$; s funzioni reali $v_1, \dots, v_s$ definite in A_1 tali che ogni $(2k)$-upla di numeri $(t_1, \dots, t_s, y_1, \dots, y_k)$ verificante la relazione:

$$(48')\qquad \begin{cases} (t_1, \dots, t_s) \in A_1 \\ y_i = v_i(t_1, \dots, t_s) & (i = 1, \dots, s) \end{cases}$$

verifichi pure le relazioni:

$$(49')\qquad \begin{cases} (y_1, \dots, y_k) \in A_3 \\ t_i = f_i(y_1, \dots, y_k) & (i = 1, 2, \dots, s) \end{cases}$$

e viceversa. Come nel caso precedente, dalle (48′) e (49′) segue l'esistenza di una varietà regolare k-dimensionale $\mathscr{Z} = [Q, \varphi, Z]$ dove la funzione φ è della forma (51) e la varietà $\mathscr{Z}$ verifica le condizioni espresse dalle (44) e (45).

Data l'arbitrarietà con cui è stato fissato $\bar{y}$, possiamo concludere che per ogni $y \in T - (G \cup \mathcal{F} T)$ esistono un insieme aperto A_y ed una varietà regolare k-dimensionale $\mathscr{Z}_y = [Q_y, f^{(y)}, Z_y]$ verificante le:

$$f[A_y] \subset Z_y \tag{44′}$$

$$Z_y \subset f[T - (G \cup \mathcal{F} T)]. \tag{45′}$$

Consideriamo la famiglia di insiemi aperti $\mathscr{A} = \{ A_y \}_{y \in T - G \cup \mathcal{F} T}$. Esistono: una successione $\{A_h\}_h$ di insiemi aperti della famiglia $\mathscr{A}$ tali che:

$$\bigcup_{h=1}^{\infty} A_h = T - (G \cup \mathcal{F} T) \tag{52}$$

e, di conseguenza, una successione $\{\mathscr{Z}_h\}_h$ di varietà regolari: $\mathscr{Z}_h = [Q_h, \varphi^{(h)}, Z_h]$, dove la funzione vettoriale $\varphi^{(h)}$ ha la forma (32), verificanti le relazioni analoghe alle (43) e (44):

$$f(A_h) \subset Z_h \,; \quad Z_h \subset f[T - (G \cup \mathcal{F} T)] \tag{53}$$

Dalle (53) segue:

$$f[T - (G \cup \mathcal{F} T)] = f\left(\bigcup_{h=1}^{\infty} A_h\right) = \bigcup_{h=1}^{\infty} Z_h \tag{54}$$

e, ricordando che si è posto: $M = f(G \cup \mathcal{F} T)$, dalla (54) si ottiene la (33). Tenuto poi presente che M verifica la (31) per quasi ogni $t \in R^s$, il teorema risulta dimostrato.

TEOREMA 3.6. — *Sia E un insieme della famiglia $\mathcal{E}_{h,n}$; s un intero soddisfacente alle limitazioni: $1 \leq s \leq k \leq n$; $s < n$. Per quasi ogni $t \in R^s$ l'insieme* $[E \cap S^{n-s}(t)]$ (cfr. def. 3.1) *appartiene alla famiglia $\mathcal{E}_{k-s,n}$.*

DIMOSTRAZIONE. — Sia E un insieme della famiglia $\mathcal{E}_{k,n}$. Per il teorema 2.8 esistono un insieme di Borel B e un insieme N' di misura $\mathcal{H}_k$ nulla tali che si abbia: $E = B \cup N'$. L'intersezione $B \cap S^{n-s}(t)$ è un insieme di Borel e pertanto è $\mathcal{H}_{k-s}$-misurabile per ogni $t \in R^s$; l'insieme $N' \cap S^{n-s}(t)$ è di misura $\mathcal{H}_{k-s}$ nulla per quasi ogni $t \in R^s$ per il teorema 3.3. L'insieme $E \cap S^{n-s}(t) = (B \cap S^{n-s}(t)) \cup (N' \cap S^{n-s}(t))$ è pertanto misurabile rispetto a $\mathcal{H}_{k-s}$ per quasi ogni $t \in R^s$. Per la (7) della def. 2.4 esistono una successione $\{V_h\}_h$ di supporti di varietà regolari $\mathcal{V}_h$ e un insieme N di misura $\mathcal{H}_k$ nulla, tali che:

$$E \cap S^{n-s}(t) \subset \left\{\bigcup_{h=1}^{\infty} (V_h \cap S^{n-s}(t))\right\} \cup \{N \cap S^{n-s}(t)\}. \tag{55}$$

L'insieme $N \cap S^{n-s}(t)$ è di misura $\mathcal{H}_{k-s}$ nulla per quasi ogni $t \in R^s$ per il teorema 3.3 e pertanto appartiene a $\mathcal{E}_{k-s,n}$ per quasi ogni $t \in R^s$. Pertanto, per la (55) e per il teorema 2.6 per dimostrare il presente teorema sarà sufficiente provare che ciascun insieme $V_h \cap S^{n-s}(t)$ appartiene alla famiglia $\mathcal{E}_{k-s,n}$ per quasi ogni $t \in R^s$.

Considerata infatti una varietà regolare k-dimensionale $\mathcal{V} = [T, f, V]$, dimostriamo che l'insieme $V \cap S^{n-s}(t)$ appartiene a $\mathcal{E}_{k-s,n}$ per quasi ogni $t \in R^s$.

La dimostrazione è immediata nel caso $1 \leq s = k < n$, in quanto, per il teorema 3.3 la misura $\mathcal{H}_0[V \cap S^{n-s}(t)]$, che dà il numero dei punti dell'insieme $V \cap S^{n-s}(t)$ (cfr. def. 1.1), risulta finita per quasi ogni $t \in R^s$; e pertanto l'insieme $V \cap S^{n-s}(t)$ appartiene a $\mathcal{E}_{0,n}$ per quasi ogni $t \in R^s$.

Sia invece: $1 \leq s < k \leq n$. Per il teorema 3.5 esiste una successione di varietà regolari $\mathcal{Z}_h = [Q_h, \varphi^{(h)}, Z_h]$ verificanti le (32) e (33) e un insieme M verificante la (31). Consideriamo l'intersezione dei due membri della (33) con $S^{n-s}(t)$:

$$V \cap S^{n-s}(t) = \left\{\bigcup_{h=1}^{\infty} (Z_h \cap S^{n-s}(t)\right\} \cup \{M \cap S^{n-s}(t)\}. \tag{56}$$

Dimostriamo che, comunque si fissi $\bar{t} \in R^s$ e l'intero h, l'insieme $Z_h \cap S^{n-s}(t)$ è il supporto di una varietà regolare $(k - s)$-dimensionale. Infatti, indicato con $S^{k-s}(t)$ il sottospazio di R^k di equazioni: $\{\eta_1 = t_1, \dots, \eta_s = t_s\}$ poniamo:

$$Q_{ht} = Q_h \cap S^{k-s}(t)$$

e consideriamo la funzione vettoriale $\chi^{(h,t)}(\eta_{s+1}, \dots, \eta_k)$, definita in Q_{ht} e ottenuta dalla $\varphi^{(h)}(\eta_1, \dots, \eta_k)$ ponendo: $\eta_1 = t_1, \dots, \eta_s = t_s$. Si ha:

$$\chi^{(h,t)}(Q_{ht}) = Z_h \cap S^{n-s}(t). \tag{57}$$

Il supporto della varietà regolare $(k - s)$-dimensionale $\mathcal{Z}_{ht} = [Q_{ht}, \chi^{(ht)}, Z_{ht}]$ è uguale, per la (57) all'insieme $Z_h \cap S^{k-s}(t)$. Dalla (56) e dalla (31) segue il teorema.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. CACCIOPPOLI : *Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati.* Rend. Acc. Naz. Lincei, S. VIII, vol. 12 (1952) ; nota I a pag. 3 e nota II a pag. 137.

[2] C. CARATHÉODORY : *Vorlesungen über reellen Funktionen,* 2 ed. 1927.

[3] S. EILENBERG : *On φ measures.* Annales Soc. Pol. Math. vol. 17 (1938) pag. 251.

[4] H. FEDERER : *The (Φ, k) rectifiable subsets of n space.* Transactions of the American Math. Soc. vol. 62 (1947) pp. 114-192.

[5] H. FEDERER : *Measure and area.* Bull. of the American Mathem. Soc. vol. 58 (1952); pp. 306-378.

[6] H. FEDERER : *Normal and integral currents* : Annals of Mathematics. vol. 72 (1960); pp. 458-520.

[7] M. D. KIRSZBRAUN : *Über die zusammenziehende und Lipschitzsche Transformationen.* Fundamenta Mathematicae, vol. 22. (1934), pp. 77-108.

[8] A. P. MORSE and J. F. RANDOLPH : *The Φ rectifiable subsets of the plane.* Transactions of the American Math. Soc. vol. 55 (1944) pp. 236-305.

[9] S. SAKS : *Theory of the integral.* Varsavia, 1937.

[10] J. SCHAUDER : *The theory of surface measure.* Fundamenta Mathematicae, VIII (1926), pp. 1-40.

[11] H. WHITNEY : *On totally differentiable and smooth functions.* Pacific Journal of Mathematics, vol. I (1951), pp. 143-159.