

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

A. ANDREOTTI

E. VESENTINI

Sopra un teorema di Kodaira

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 15, n° 4 (1961), p. 283-309

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1961_3_15_4_283_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOPRA UN TEOREMA DI KODAIRA

di A. ANDREOTTI ed E. VESENTINI (Pisa)

Questo lavoro è nato dal desiderio di estendere al caso di varietà non compatte il teorema di Kodaira [8] secondo il quale ogni varietà complessa compatta dotata di una metrica kähleriana a periodi interi è una varietà algebrica proiettiva.

Lo strumento essenziale nella dimostrazione di Kodaira è un « vanishing theorem » in base al quale la coomologia a valori in un fibrato olomorfo in rette complesse è nulla nelle dimensioni positive, qualora la classe di Chern del fibrato contenga una (1,1) forma « sufficientemente positiva ». Nel caso di una varietà complessa non compatta, tale teorema — nella forma enunciata — non è più valido. Tuttavia sotto ipotesi convenienti si può dimostrare che è nulla l'applicazione naturale della coomologia a supporti compatti in quella a supporti chiusi. La dimostrazione di questo fatto (Teorema 9 e Corollario) occupa la prima parte del lavoro. Il risultato che si ottiene fornisce il « vanishing theorem » di Kodaira nel caso compatto.

La seconda parte del lavoro estende il teorema di immersione citato sopra nella forma del Teorema 13 e del Corollario 14. Il procedimento dimostrativo ricalca quello di Kodaira.

G. Stampacchia e R. Narasimhan ci sono stati di grande aiuto nella preparazione del lavoro. Al primo dobbiamo l'idea essenziale della dimostrazione del lemma 6. Al secondo la segnalazione di una lacuna esistente nella prima redazione del manoscritto e la dimostrazione della proposizione 7. Ci è gradito esprimere qui ad entrambi la nostra viva riconoscenza.

§ 1. Coomologia nei fibrati lineari olomorfi.

1. GENERALITÀ. *a)* Sia X una varietà complessa connessa di dimensione complessa n ⁽¹⁾. Sia F un fibrato localmente banale su X , a gruppo strut-

(1) In questo lavoro tutte le varietà saranno supposte di Hausdorff ed a base numerabile.

turale \mathbf{C}^* ed a fibra \mathbf{C} . Su di un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di X , tale che $F|_{U_i}$ sia banale per ogni $i \in I$, F è rappresentato da un cociclo strutturale

$$f_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbf{C}^*, \quad f_{ij} f_{jk} = f_{ik} \quad \text{su } U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Il fibrato F si dice olomorfo se le f_{ij} sono olomorfe.

Sia Θ il fibrato dei vettori tangenti olomorfi su X . Se $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ è un sistema di carte su X , e se (z_i^1, \dots, z_i^n) sono coordinate locali complesse su U_i , Θ è il fibrato a fibra \mathbf{C}^n e cociclo strutturale

$$J_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(n, \mathbf{C}),$$

dato da $J_{ij} = \frac{\partial(z_i^1, \dots, z_i^n)}{\partial(z_j^1, \dots, z_j^n)}$. Sia Θ^* il fibrato duale di Θ . Esso è definito dal cociclo strutturale $J_{ij} = {}^t J_{ij}^{-1}$.

Dato il fibrato lineare olomorfo F , si consideri il fibrato $F \otimes \Theta^{*p} \otimes \overline{\Theta^{*q}}$, ove $\Theta^{*p} = \bigwedge_1^p \Theta^*$, ed ove la sopralineatura denota il passaggio al complesso coniugato. Una sezione C^∞ in questo fibrato si chiama una forma C^∞ di tipo (p, q) a valori in F . Localmente, sulla carta U_i , una tale sezione si rappresenta mediante una forma

$$\varphi_i = \sum_{\substack{\alpha_1 < \dots < \alpha_p \\ \beta_1 < \dots < \beta_q}} \varphi_{i\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q} dz_i^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dz_i^{\alpha_p} \wedge \overline{dz_i^{\beta_1}} \wedge \dots \wedge \overline{dz_i^{\beta_q}},$$

le $\varphi_{i\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q}$ essendo funzioni C^∞ in U_i . Su $U_i \cap U_j$ deve aversi

$$\varphi_i = f_{ij} \varphi_j.$$

Lo spazio vettoriale su \mathbf{C} delle forme C^∞ di tipo (p, q) a valori in F si indicherà con $C^{p,q}(X, F)$. Quello delle forme di $C^{p,q}(X, F)$ a supporto compatto si indicherà con $\mathcal{D}^{p,q}(X, F)$.

b) Definiamo l'operatore

$$\bar{\partial} : C^{p,q}(X, F) \rightarrow C^{p,q+1}(X, F)$$

localmente mediante le formule

$$\bar{\partial} \varphi_i = \sum_{\substack{\alpha_1 < \dots < \alpha_p \\ \beta_1 < \dots < \beta_{q+1}}} \left(\sum_h (-1)^{p+h} \frac{\partial \varphi_{i\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_h \dots \bar{\beta}_{q+1}}}{\partial z_i^{\beta_h}} \right) \cdot dz_i^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dz_i^{\alpha_p} \wedge \overline{dz_i^{\beta_1}} \wedge \dots \wedge \overline{dz_i^{\beta_{q+1}}}.$$

Questa definizione è coerente poichè F è olomorfo. Poichè $\bar{\partial} \bar{\partial} = 0$, si ha su $C^p(X, F) = \bigoplus_q C^{p,q}(X, F)$ una struttura di complesso, i cui gruppi di coomologia si indicano con $H^{p,q}(X, F)$.

Sia $\mathcal{A}^{p,q}(F)$ il fascio dei germi di forme di $C^{p,q}(X, F)$, e sia $\Omega^p(F)$ il fascio dei germi di p -forme olomorfe su X a valori in F . Dal lemma di Dolbeault-Grothendieck [6, p. 115] segue che la successione

$$0 \rightarrow \Omega^p(F) \rightarrow \mathcal{A}^{p,0}(F) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p,1}(F) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots$$

è una successione esatta di fasci; onde l'isomorfismo di Dolbeault.

$$H_{\Phi}^{p,q}(X, F) \approx H_{\Phi}^q(X, \Omega^p(F)),$$

ove Φ è la famiglia dei chiusi o dei compatti di X .

c) Introduciamo per ogni coppia di vettori v, w appartenenti alla fibra C_x ($x \in X$) di F , un prodotto scalare hermitiano $h(v, w)$ che dipenda differenziabilmente da x . Se sulla carta U_i ξ_i e η_i sono le coordinate-fibra di v e w , sarà $h(v, w) = h_i(x) \xi_i \bar{\eta}_i$ con $h_i(x) > 0$, di classe C^∞ su U_i , e tale che in $U_i \cap U_j$ risulti

$$h_j = |f_{ij}|^2 h_i.$$

Introduciamo inoltre una metrica hermitiana C^∞ in X ,

$$ds^2 = \sum g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \bar{dz}^\beta,$$

e sia

$$* : C^{p,q}(X, F) \rightarrow C^{n-q, n-p}(X, F)$$

l'operatore definito localmente da

$$\begin{aligned} * \varphi_i = c \cdot \det(g_{\lambda\bar{\mu}}) \sum_{\substack{\alpha_1 < \dots < \alpha_{n-q} \\ \beta_1 < \dots < \beta_{n-p} \\ \mu_1 < \dots < \mu_q \\ \gamma_1 < \dots < \gamma_p}} \text{sgn}(\mu_1 \dots \mu_q \alpha_1 \dots \alpha_{n-q}) \text{sgn}(\gamma_1 \dots \gamma_p \beta_1 \dots \beta_{n-p}) \cdot \\ \cdot \varphi^{\gamma_1 \dots \gamma_p \mu_1 \dots \mu_q} dz^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dz^{\alpha_{n-q}} \wedge \bar{dz}^{\beta_1} \wedge \dots \wedge \bar{dz}^{\beta_{n-p}}, \end{aligned}$$

ove $c = (-1)^{np} (\sqrt{-1})^n / 2^{n-p-q}$ è scelto in modo che

$$** \varphi = (-1)^{p+q} \varphi.$$

Date due forme $\varphi, \psi \in C^{p,q}(X, F)$, le forme locali

$$h_i \varphi_i \wedge * \bar{\psi}_i$$

definiscono su X una (n, n) forma globale scalare (cioè a valori nel fibrato banale \mathbb{C}), $A(\varphi, \psi) dX$, ove dX è l'elemento di volume della metrica. Risulta:

$$A(\varphi, \psi) = \overline{A(\psi, \varphi)}, \quad A(\varphi, \varphi) \geq 0,$$

essendo $A(\varphi, \varphi) = 0$ se, e soltanto se, $\varphi = 0$; infine A è una forma sesquilineare.

Sia

$$\mathcal{L}^{p,q}(X, F) = \left\{ \varphi \in C^{p,q}(X, F) \mid \int_X A(\varphi, \varphi) dX < \infty \right\},$$

l'integrale essendo inteso nel senso di Lebesgue.

Nello spazio $\mathcal{L}^{p,q}(X, F)$ è definito il prodotto scalare

$$(\varphi, \psi) = \int_X A(\varphi, \psi) dX,$$

in virtù della disuguaglianza di Schwarz. Per ogni $\varphi \in \mathcal{L}^{p,q}(X, F)$ porremo $\|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi)$. Ovviamente $\mathcal{D}^{p,q}(X, F) \subset \mathcal{L}^{p,q}(X, F)$.

d) Definiamo l'operatore

$$\vartheta : C^{p,q}(X, F) \rightarrow C^{p,q-1}(X, F)$$

localmente mediante la formula

$$\vartheta \varphi_i = -\frac{1}{h_i} * \partial (h_i * \varphi_i),$$

ove ∂ è l'operazione di differenziazione esterna rispetto alle coordinate locali complesse. Questa definizione è coerente, e risulta $\vartheta \vartheta = 0$.

Introduciamo infine l'operatore

$$\square : C^{p,q}(X, F) \rightarrow C^{p,q}(X, F)$$

espresso dalla

$$\square = \bar{\partial} \vartheta + \vartheta \bar{\partial}$$

e) Siano $\varphi, \psi \in \bigcup_{p,q} C^{p,q}(X, F)$, e supponiamo che $\text{Supp}(\varphi) \cap \text{Supp}(\psi)$ sia compatto. Per conseguenza sono definiti i prodotti scalari $(\bar{\partial}\varphi, \psi)$, $(\varphi, \partial\psi)$, $(\varphi, \square\psi)$, $(\square\varphi, \psi)$ purchè φ e ψ abbiano gradi convenienti. Dalla formula di Stokes seguono allora le identità seguenti

$$(0) \quad (\bar{\partial}\varphi, \psi) = (\varphi, \partial\psi),$$

$$(1) \quad (\varphi, \square\psi) = (\square\varphi, \psi) = (\bar{\partial}\varphi, \bar{\partial}\psi) + (\partial\varphi, \partial\psi).$$

In particolare valgono queste formole se $\varphi, \psi \in \bigcup_{p,q} \mathcal{D}^{p,q}(X, F)$.

OSSERVAZIONE. La formola (0) è basata sull'identità

$$(\bar{\partial}\varphi, \psi)_Y - (\varphi, \partial\psi)_Y = \int_Y d(\varphi \wedge * \bar{h}\psi)$$

ove Y è un aperto di X , e sul fatto che — quando Y è un $2n$ -simpleso differenziabile di X e ω una $(2n - 1)$ -forma scalare — vale la formula

$$\text{di Stokes} \quad \int_Y d\omega = \int_{\partial Y} \omega.$$

Poichè quest'ultima formula sussiste anche nella sola ipotesi che ω sia una $(2n - 1)$ -forma a coefficienti (localmente) Lipschitziani in un intorno di \bar{Y} , la (0) vale anche nelle sole ipotesi che φ e ψ siano forme a coefficienti lipschitziani (e che naturalmente $\text{Supp}(\varphi) \cap \text{Supp}(\psi)$ sia compatto).

f) Consideriamo la successione esatta di fasci su X

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \Omega \rightarrow e^\Omega \rightarrow 0.$$

Dalla corrispondente successione esatta di coomologia si ottiene un omomorfismo $c: H^1(X, e^\Omega) \rightarrow H^2(X, \mathbf{Z})$.

Dato un fibrato olomorfo in rette complesse F su X , questo definisce una classe di coomologia $\xi \in H^1(X, e^\Omega)$ rappresentata dal cociclo strutturale di F . La classe $c(\xi) \in H^2(X, \mathbf{Z})$ si chiama la *classe di Chern* di F .

L'immagine di $c(\xi)$ in $H^2(X, \mathbf{R})$ per l'omomorfismo naturale $H^2(X, \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbf{R})$ prende il nome di *classe di Chern reale* di F e viene indicata con $c_{\mathbf{R}}(F)$. Per l'omomorfismo di de Rham, questa si può rappresentare con una 2-forma reale chiusa su X . Esplicitando gli omomorfismi precedenti si ottiene il

LEMMA 0. Se $\{h_i(x) \xi_i \bar{\eta}_i\}$ è una metrica hermitiana sulle fibre di F , la classe $c_{\mathbb{R}}(F)$ ⁽²⁾ è rappresentata dalla 2-forma chiusa $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \chi$ espressa localmente dalla

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \chi = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \bar{\partial} \partial \log h_i.$$

Osserviamo che, siccome su $U_i \cap U_j$ $h_i = h_j f_{ji} \bar{f}_{ji}$, risulta $\bar{\partial} \partial \log h_i = \bar{\partial} \partial \log h_j$. Cioè le $\bar{\partial} \partial \log h_i$ sono le componenti locali di una (1, 1)-forma globale scalare χ su X . La forma $\chi = \{\bar{\partial} \partial \log h_i\}$ si chiama la *forma di curvatura* del fibrato F per la metrica scelta sulle fibre ⁽³⁾.

2. GLI SPAZI $L^{p,q}(X, F)$ E $W^{p,q}(X, F)$. a) Introduciamo in $\mathcal{D}^{p,q}(X, F)$ le forme hermitiane sesquilineari (φ, ψ) e

$$(2) \quad a(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi) + (\bar{\partial}\varphi, \bar{\partial}\psi) + (\partial\varphi, \partial\psi).$$

Entrambe danno a $\mathcal{D}^{p,q}(X, F)$ una struttura di spazio prehilbertiano. Indicheremo con $L^{p,q}(X, F)$ e con $W^{p,q}(X, F)$ gli spazi hilbertiani ottenuti come completamenti di $\mathcal{D}^{p,q}(X, F)$ rispetto alle norme $\|\varphi\|$ e $N(\varphi) = a(\varphi, \varphi)^{1/2}$. Lo spazio $L^{p,q}(X, F)$ coincide con lo spazio delle forme φ di tipo p, q , per le quali $\int_X A(\varphi, \varphi) dX < \infty$. Infatti quest'ultimo spazio, com'è noto, è completo.

Esiste un'applicazione naturale $i: W^{p,q}(X, F) \rightarrow L^{p,q}(X, F)$, definita nel modo seguente. Sia $w \in W^{p,q}(X, F)$. Rappresentiamo w con una successione di Cauchy $\{\varphi_\nu\}$ in $W^{p,q}(X, F)$ ($\varphi_\nu \in \mathcal{D}^{p,q}(X, F)$). Poichè $N(\varphi_\nu - \varphi_\mu) \rightarrow 0$, risulta $\|\varphi_\nu - \varphi_\mu\| \rightarrow 0$. Quindi $\{\varphi_\nu\}$ è una successione di Cauchy in $L^{p,q}(X, F)$, e pertanto definisce un elemento $i(w) \in L^{p,q}(X, F)$. Se $\{\psi_\nu\}$ ($\psi_\nu \in \mathcal{D}^{p,q}(X, F)$) è una seconda successione di Cauchy equivalente alla precedente in $W^{p,q}(X, F)$, cioè tale che $N(\varphi_\nu - \psi_\nu) \rightarrow 0$, $\{\psi_\nu\}$ definisce una successione di Cauchy in $L^{p,q}(X, F)$ per la quale $\|\varphi_\nu - \psi_\nu\| \rightarrow 0$, e quindi è equivalente alla precedente in $L^{p,q}(X, F)$. Dunque l'elemento $i(w)$ non dipende dalla successione di Cauchy utilizzata per definirlo.

⁽²⁾ Il segno di $c_{\mathbb{R}}(F)$ differisce da quello introdotto da Kodaira in [7]; cfr. anche [2, pp. 370-371].

⁽³⁾ Kodaira ha dimostrato in [7] che — se la varietà kähleriana X è compatta — ogni forma $\bar{\partial}$ -chiusa di tipo (1, 1) appartenente a $c_{\mathbb{R}}(F)$ proviene da una metrica in F . Si può dimostrare con esempi che ciò non accade in generale se X non è compatta.

PROPOSIZIONE 1. *L'applicazione naturale $i: W^{p,q}(X, F) \rightarrow L^{p,q}(X, F)$ è una iniezione.*

b) Prima di procedere alla dimostrazione conviene ricordare la definizione di operatore generalizzato secondo K. O. Friedrichs [5].

Consideriamo due operatori

$$D: \mathcal{D}^{p,q}(X, F) \rightarrow \mathcal{D}^{p+r,q+s}(X, F),$$

$$D^*: \mathcal{D}^{p+r,q+s}(X, F) \rightarrow \mathcal{D}^{p,q}(X, F),$$

tali che

$$(D\varphi, \psi) = (\varphi, D^*\psi).$$

LEMMA 2. *Se $\{\varphi_\nu\} \subset \mathcal{D}^{p,q}(X, F)$, se $\|\varphi_\nu\| \rightarrow 0$ e se esiste $\psi \in L^{p+r,q+s}(X, F)$ tale che $\|\psi - D\varphi_\nu\| \rightarrow 0$, allora $\psi = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $u \in \mathcal{D}^{p+r,q+s}(X, F)$ risulta

$$(u, D\varphi_\nu) = (D^*u, \varphi_\nu) \rightarrow 0, \quad \text{poichè } \|\varphi_\nu\| \rightarrow 0.$$

Quindi

$$(u, \psi) = (u, \psi - D\varphi_\nu) + (u, D\varphi_\nu) \rightarrow 0,$$

ossia $(u, \psi) = 0$, ed essendo $\mathcal{D}^{p+r,q+s}(X, F)$ ovunque denso in $L^{p+r,q+s}(X, F)$, ne segue che $\psi = 0$.

Dato un $\varphi \in L^{p,q}(X, F)$, un elemento $\psi \in L^{p+r,q+s}(X, F)$ si chiamerà il D generalizzato di φ se esiste una successione $\{u_\nu\}$ ($u_\nu \in \mathcal{D}^{p,q}(X, F)$) tale che

$$\|\varphi - u_\nu\| \rightarrow 0, \quad \|\psi - Du_\nu\| \rightarrow 0.$$

Se ψ esiste, esso è unico, in virtù del lemma.

c) Veniamo alla dimostrazione della proposizione. Sia $w \in W^{p,q}(X, F)$ rappresentato dalla successione di Cauchy $\{\varphi_\nu\} \subset \mathcal{D}^{p,q}(X, F)$. Per ipotesi le successioni $\{\varphi_\nu\}$, $\{\bar{\partial}\varphi_\nu\}$, $\{\partial\varphi_\nu\}$ sono successioni di Cauchy, rispettivamente, in $L^{p,q}(X, F)$, $L^{p,q+1}(X, F)$, $L^{p,q-1}(X, F)$. Ma, se $i(w) = 0$, risulta $\|\varphi_\nu\| \rightarrow 0$ e quindi, per il lemma, $\|\bar{\partial}\varphi_\nu\| \rightarrow 0$, $\|\partial\varphi_\nu\| \rightarrow 0$, onde $w = 0$.

OSSERVAZIONE. Lo spazio $W^{p,q}(X, F)$ può interpretarsi come il sottospazio di $L^{p,q}(X, F)$ degli elementi che ammettono « contemporaneamente » il $\bar{\partial}$ ed il ∂ generalizzati. Le applicazioni $i: W^{p,q}(X, F) \rightarrow L^{p,q}(X, F)$, $\bar{\partial}: W^{p,q}(X, F) \rightarrow L^{p,q+1}(X, F)$, $\partial: W^{p,q}(X, F) \rightarrow L^{p,q-1}(X, F)$ sono continue.

d) Sia $\varphi \in L^{p,p-1}(X, F)$, $\psi \in L^{p,q}(X, F)$, e supponiamo che esista il $\bar{\partial}$ generalizzato, $\bar{\partial}\varphi$, di φ , ed il ∂ generalizzato, $\partial\psi$, di ψ . Vale la formula di aggiunzione

$$(\bar{\partial}\varphi, \psi) = (\varphi, \partial\psi).$$

e) Nello spazio $W^{p,q}(X, F)$ consideriamo la forma sesquilineare

$$(3) \quad \mathcal{A}(\varphi, \psi) = (\bar{\partial}\varphi, \bar{\partial}\psi) + (\partial\varphi, \partial\psi) \quad (\varphi, \psi \in W^{p,q}(X, F)).$$

L'espressione $\mathcal{A}(\varphi, \varphi)^{\frac{1}{2}}$ è una seminorma in $W^{p,q}(X, F)$, ma in generale non è una norma.

DEFINIZIONE. Diremo che il fibrato F è *W-ellittico* nel grado (p, q) se, per una conveniente scelta delle metriche hermitiane su X e sulle fibre di F , esiste una costante $c > 0$ tale che, per ogni $\varphi \in W^{p,q}(X, F)$ si abbia

$$(\varphi, \varphi) \leq c \mathcal{A}(\varphi, \varphi).$$

In tal caso $\mathcal{A}(\varphi, \varphi)^{\frac{1}{2}}$ è una norma su $W^{p,q}(X, F)$, che definisce la stessa topologia della norma $a(\varphi, \varphi)^{\frac{1}{2}}$. Invero risulta

$$\mathcal{A}(\varphi, \varphi) \leq a(\varphi, \varphi) \leq (c + 1) \mathcal{A}(\varphi, \varphi).$$

PROPOSIZIONE 3. *Supponiamo di poter scegliere le metriche su X e sulle fibre di F in modo che F risulti W-ellittico nel grado (p, q) . Data allora una qualsiasi forma $\alpha \in L^{p,q}(X, F)$, esiste una forma $x \in W^{p,q}(X, F)$ che dà una soluzione debole dell'equazione*

$$\square x = \alpha,$$

ossia è tale che

$$(\bar{\partial}x, \bar{\partial}u) + (\partial x, \partial u) = (\alpha, u)$$

per ogni $u \in \mathcal{D}^{p,q}(X, F)$.

DIMOSTRAZIONE. Il funzionale lineare

$$F(v) = (\alpha, v) \quad (v \in W^{p,q}(X, F))$$

è continuo su $W^{p,q}(X, F)$. Consideriamo $W^{p,q}(X, F)$ come spazio hilbertiano rispetto alla forma sesquilineare $\mathcal{A}(\varphi, \psi)$; ciò che è lecito in virtù dell'ipotesi di W-ellitticità. Esiste pertanto una $x \in W^{p,q}(X, F)$ tale che

$$F(v) = \mathcal{A}(x, v)$$

per ogni $v \in W^{p,q}(X, F)$. Di qui l'asserto.

Dal teorema di regolarizzazione per i sistemi fortemente ellittici si deduce che, se α è C^∞ , anche $x \in W^{p,q}(X, F)$ può assumersi C^∞ , cioè: $x \in W^{p,q}(X, F) \cap C^{p,q}(X, F)$.

3. OPERATORI KÄHLERIANI. a) Supporremo da ora in poi che la metrica hermitiana fissata in X sia kähleriana. Indicheremo con

$$\omega = \sqrt{-1} \cdot \sum g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge \bar{d}z^\beta$$

la forma esterna della metrica. Per ipotesi $d\omega = 0$.

Sia

$$L : C^{p,q}(X, F) \rightarrow C^{p+1,q+1}(X, F)$$

l'operatore definito da

$$L\varphi = \omega \wedge \varphi \quad (\varphi \in C^{p,q}(X, F)),$$

e sia

$$A : C^{p,q}(X, F) \rightarrow C^{p-1,q-1}(X, F)$$

definito dalla

$$A = (-1)^{p+q} * L *.$$

Poichè L e A sono di natura locale, essi applicano forme a supporto compatto in forme a supporto compatto. Per ogni $\varphi \in C^{p,q}(X, F)$ si ha l'identità⁽⁴⁾

$$(4) \quad (AL - LA)\varphi = (n - p - q)\varphi.$$

Se $u \in \mathcal{D}^{p,q}(X, F)$, $v \in \mathcal{D}^{p+1,q+1}(X, F)$ si ha

$$(Lu, v) = (u, Av).$$

b) Introduciamo gli operatori

$$\tilde{\partial} : C^{p,q}(X, F) \rightarrow C^{p+1,q}(X, F),$$

$$\tilde{\partial} : C^{p,q}(X, F) \rightarrow C^{p-1,q}(X, F),$$

definiti localmente dalle formule

$$\tilde{\partial}\varphi_i = \frac{1}{h_i} \partial(h_i\varphi_i), \quad \tilde{\partial}\varphi_i = - * \bar{\partial} * \varphi_i,$$

e poniamo $\tilde{\square} = \tilde{\partial}\tilde{\partial} + \tilde{\partial}\tilde{\partial}$.

(4) Cfr. ad es. [11] p. 21.

Se $u \in \mathcal{D}^{p,q}(X, F)$, $v \in \mathcal{D}^{p-1,q}(X, F)$, risulta ⁽⁵⁾

$$(u, \tilde{\partial}v) = (\tilde{\partial}u, v);$$

per $u, v \in \mathcal{D}^{p,q}(X, F)$ si ha perciò

$$(5) \quad (u, \tilde{\square}v) = (\tilde{\square}u, v) = (\tilde{\partial}u, \tilde{\partial}v) + (\tilde{\partial}u, \tilde{\partial}v).$$

Vale infine l'identità seguente

$$(6) \quad (\tilde{\square} - \square)\varphi = \sqrt{-1}(\Delta(\chi \wedge \varphi) - \chi \wedge \Delta\varphi)$$

per ogni $\varphi \in C^{p,q}(X, F)$ ⁽⁶⁾.

4. UN CRITERIO DI *W*-ELLITTICITÀ. *a)* Si è osservato che, scelta una metrica $\{h_i(x) \xi_i, \bar{\eta}_i\}$ sulle fibre di F , $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\chi \in c_R(F)$, essendo χ la forma esterna $\{\bar{\partial} \log h_i\}$.

Diremo che il fibrato F è *positivo* se, per un'opportuna scelta della metrica sulle fibre, la forma $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\chi \in c_R(F)$ può assumersi come forma esterna di una metrica kähleriana su X . Ciò significa che, posto localmente $\chi = \sum \chi_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge \bar{d}z^\beta$ la forma hermitiana $\sum \chi_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \bar{d}z^\beta$ è definita positiva. Scriveremo brevemente $\chi > 0$.

PROPOSIZIONE 4. *Sia F positivo, ed assumiamo come metrica kähleriana su X quella definita dalla forma esterna $\omega = \sqrt{-1}\chi$. Per ogni $\varphi \in W^{p,q}(X, F)$ vale la disuguaglianza*

$$(n - p - q)(\varphi, \varphi) + (\bar{\partial}\varphi, \bar{\partial}\varphi) + (\partial\varphi, \partial\varphi) \geq 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $u \in C^{p,q}(X, F)$ risulta

$$Lu = \sqrt{-1}\chi \wedge u,$$

sicchè, per le (4) e (6),

$$(\tilde{\square} - \square)u = (n - p - q)u.$$

⁽⁵⁾ Cfr. [4] (formula (2.9) p. 481), ove gli operatori $\tilde{\partial}, \tilde{\partial}', \tilde{\square}, \square$ sono indicati con i simboli $\partial, \partial', \square'', \square'$.

⁽⁶⁾ Cfr. [4] formula (2.17), p. 483.

Supponiamo ora u a supporto compatto. Dalle (1) e (5) otteniamo

$$(\tilde{\partial}u, \tilde{\partial}u) + (\tilde{\partial}u, \tilde{\partial}u) = (n - p - q)(u, u) + (\bar{\partial}u, \bar{\partial}u) + (\partial u, \partial u).$$

Ne segue che

$$(n - p - q)(u, u) + (\bar{\partial}u, \bar{\partial}u) + (\partial u, \partial u) \geq 0$$

per ogni $u \in \mathcal{D}^{p,q}(X, F)$. Poichè $\mathcal{D}^{p,q}(X, F)$ è ovunque denso in $W^{p,q}(X, F)$, si ha la tesi.

COROLLARIO 5. *Se F è positivo, esso è W -ellittico nei gradi (p, q) tali che $p + q > n$, rispetto alla metrica kähleriana definita dalla $\omega = \sqrt{-1} \chi$.*

Risulta infatti, per ogni $\varphi \in W^{p,q}(X, F)$,

$$(\varphi, \varphi) \leq \frac{1}{p + q - n} \mathcal{L}(\varphi, \varphi).$$

5. UNA DISUGUAGLIANZA INTEGRALE. *a)* Supponiamo che sulla varietà complessa connessa X sia data una metrica hermitiana completa. Indichiamo con $d(p, q)$ la distanza, per la metrica considerata, dei due punti p e q di X .

Sia o un punto fissato una volta per sempre su X , e sia

$$B(c) = \{x \in X \mid d(o, x) < c\}$$

la palla di centro o e raggio c .

LEMMA 6. *Esiste una costante « universale » $A > 0$ tale che — fissati comunque tre numeri reali positivi σ , r e R , con $0 < r < R$ — per ogni $\varphi \in \mathcal{O}^{p,q}(X, F)$ vale la disuguaglianza*

$$(\bar{\partial}\varphi, \bar{\partial}\varphi)_{B(r)} + (\partial\varphi, \partial\varphi)_{B(r)} \leq \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{A}{(R-r)^2} \right) (\varphi, \varphi)_{B(R)} + \sigma (\square\varphi, \square\varphi)_{B(R)}.$$

DIMOSTRAZIONE. $\alpha)$ Pongasi $\varrho(x) = d(o, x)$. La funzione $\varrho(x)$ è continua e localmente lipschtziana. Invero, considerato un aperto coordinato convesso U , ove le z^α siano coordinate locali complesse, si scelga un $k > 0$ tale che in U risulti $ds^2 \leq k^2 \sum dz^\alpha \overline{dz^\alpha}$. Se $x, y \in U$ si ha

$$|\varrho(x) - \varrho(y)| \leq d(x, y) \leq \int_\sigma ds \leq k|x - y|,$$

ove σ è il segmento euclideo di estremi x ed y in U .

β) Sia $\mu(t)$ una funzione C^∞ definita su \mathbf{R} e tale che

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \leq 1 \\ 0 & \text{per } t \geq 2 \end{cases}, \quad 0 \leq \mu(t) \leq 1.$$

La funzione

$$\omega(\varrho) = \mu\left(\frac{\varrho + R - 2r}{R - r}\right).$$

verifica le seguenti condizioni

$$\omega(\varrho) = \begin{cases} 1 & \text{per } \varrho \leq r \\ 0 & \text{per } \varrho \geq R \end{cases}, \quad 0 \leq \omega(\varrho) \leq 1.$$

Posto $M = \sup \left| \frac{d\mu}{dt} \right|$, si ha inoltre

$$\left| \frac{d\omega}{d\varrho} \right| \leq \frac{M}{R - r}.$$

γ) Sia α una forma di tipo (p, q) , a coefficienti lipschitziani, a valori in F ed a supporto contenuto in $B(R)$. Per ogni forma $\varphi \in C^{p,q}(X, F)$ si ha dalle formule di aggiunzione

$$(\bar{\partial}\varphi, \bar{\partial}\alpha)_{B(R)} + (\vartheta\varphi, \vartheta\alpha)_{B(R)} = (\square\varphi, \alpha)_{B(R)}.$$

Poniamo $\alpha = \omega^2(\varrho)\varphi$ e teniamo conto che risulta quasi dappertutto

$$\bar{\partial}\omega^2\varphi = \bar{\partial}\omega^2 \wedge \varphi + \omega^2\bar{\partial}\varphi, \quad \vartheta\omega^2\varphi = - *(\partial\omega^2 \wedge * \varphi) + \omega^2\vartheta\varphi.$$

Sostituendo, otteniamo la disuguaglianza

$$\begin{aligned} (\omega \bar{\partial}\varphi, \omega \bar{\partial}\varphi)_{B(R)} + (\omega \vartheta\varphi, \omega \vartheta\varphi)_{B(R)} &\leq |(\square\varphi, \omega^2\varphi)_{B(R)}| + \\ &+ |(\bar{\partial}\varphi, \bar{\partial}\omega^2 \wedge \varphi)_{B(R)}| + |(\vartheta\varphi, *(\partial\omega^2 \wedge * \varphi))_{B(R)}|. \end{aligned}$$

Dalla disuguaglianza di Schwarz otteniamo le seguenti disuguaglianze

$$|(\square\varphi, \omega^2\varphi)_{B(R)}| \leq \frac{1}{2} \left\{ \sigma(\square\varphi, \square\varphi)_{B(R)} + \frac{1}{\sigma}(\omega^2\varphi, \omega^2\varphi)_{B(R)} \right\},$$

$$\begin{aligned} |(\bar{\partial}\varphi, \bar{\partial}\omega^2 \wedge \varphi)_{B(R)}| &= |(\omega \bar{\partial}\varphi, 2\bar{\partial}\omega \wedge \varphi)_{B(R)}| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left\{ (\omega \bar{\partial}\varphi, \omega \bar{\partial}\varphi)_{B(R)} + 4(\bar{\partial}\omega \wedge \varphi, \bar{\partial}\omega \wedge \varphi)_{B(R)} \right\}, \\ |(\vartheta\varphi, * \partial\omega^2 \wedge * \varphi)_{B(R)}| &= |(\omega \vartheta\varphi, *(2\partial\omega \wedge * \varphi))_{B(R)}| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left\{ (\omega \vartheta\varphi, \omega \vartheta\varphi)_{B(R)} + 4(\partial\omega \wedge * \varphi, \partial\omega \wedge * \varphi)_{B(R)} \right\}. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi che

$$(7) \quad (\omega \bar{\partial}\varphi, \omega \bar{\partial}\varphi)_{B(R)} + (\omega \vartheta\varphi, \omega \vartheta\varphi)_{B(R)} \leq \sigma(\square\varphi, \square\varphi)_{B(R)} + \frac{1}{\sigma}(\bar{\omega}^2\varphi, \omega^2\varphi)_{B(R)} + 4(\bar{\partial}\omega \wedge \varphi, \bar{\partial}\omega \wedge \varphi)_{B(R)} + 4(\partial\omega \wedge * \varphi, \partial\omega \wedge * \varphi)_{B(R)}.$$

δ) Sia $u = \sum u_{\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q} dz^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dz^{\alpha_p} \wedge \overline{dz^{\beta_1}} \wedge \dots \wedge \overline{dz^{\beta_q}}$ una (p, q) -forma a coefficienti costanti su \mathbb{C}^n . Poniamo $|u|^2 = \sum |u_{\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q}|^2$. Esiste una costante $c_0 > 0$ tale che, per ogni coppia u e v di forme non nulle di tipo (p, q) e (r, s) , a coefficienti costanti su \mathbb{C}^n , risulti

$$\frac{|u \wedge v|^2}{|u|^2 |v|^2} \leq c_0.$$

Ne consegue che, se $\eta = \sum \eta_{\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q} dz^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dz^{\alpha_p} \wedge \overline{dz^{\beta_1}} \wedge \dots \wedge \overline{dz^{\beta_q}}$ è una (p, q) -forma scalare su X , tale che

$$\sum \eta_{\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q} \overline{\eta_{\alpha_1 \dots \alpha_p \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_q}} \leq 1,$$

e se ψ è una (r, s) -forma a valori in F , si ha su ogni aperto B relativamente compatto in X

$$(\eta \wedge \psi, \eta \wedge \psi)_B \leq c'_0 (\psi, \psi)_B,$$

ove c'_0 è una costante universale.

Ciò premesso, osserviamo che quasi dappertutto risulta $\bar{\partial}\omega = \frac{d\omega}{d\varrho} \bar{\partial}\varrho$, $\partial\omega = \frac{d\omega}{d\varrho} \partial\varrho$, e che, d'altra parte, ove $\varrho(x)$ è differenziabile si ha

$$\sum g^{ij} \frac{\partial\varrho}{\partial x^i} \frac{\partial\varrho}{\partial x^j} \leq 2n \quad (n = \dim_{\mathbb{C}} X),$$

le x^i essendo coordinate locali reali e le g^{ij} le componenti controvarianti reali del tensore della metrica (7).

Tenendo conto di quanto detto e delle disuguaglianze alle quali soddisfano ω e $\left| \frac{d\omega}{d\rho} \right|$, otteniamo

$$(\omega^2 \varphi, \bar{\omega}^2 \varphi)_{B(R)} \leq (\varphi, \varphi)_{B(R)},$$

$$(\bar{\partial} \omega \wedge \varphi, \bar{\partial} \omega \wedge \varphi)_{B(R)} \leq \frac{M^2}{(R-r)^2} c_0'' (\varphi, \varphi)_{B(R)} \quad (c_0'' = 2n c_0'),$$

$$(\partial \omega \wedge * \varphi, \partial \omega \wedge * \varphi)_{B(R)} \leq \frac{M^2}{(R-r)^2} c_0'' (\varphi, \varphi)_{B(R)},$$

onde, sostituendo nella (7) otteniamo

$$(\bar{\partial} \varphi, \bar{\partial} \varphi)_{B(r)} + (\partial \varphi, \partial \varphi)_{B(r)} \leq \sigma (\square \varphi, \square \varphi)_{B(R)} + c_1 (\varphi, \varphi)_{B(R)}$$

con

$$c_1 = \frac{1}{\sigma} + \frac{8 M^2 c_0''}{(R-r)^2}.$$

Posto $R=2r$, e facendo tendere r e σ all'infinito, dal lemma 6 discende la

PROPOSIZIONE 7. *Sia $\varphi \in C^{p,q}(X, F) \cap L^{p,q}(X, F)$, e sia la metrica hermitiana fissata su X completa. Se $\square \varphi = 0$, risulta anche $\bar{\partial} \varphi = 0$ e $\partial \varphi = 0$.*

6. UN CRITERIO DI ANNULLAMENTO PER I GRUPPI DI COOMOLOGIA.

a) **LEMMA 8.** *Sia F positivo, ed assumiamo come metrica su X la metrica kähleriana della forma esterna $\omega = \sqrt{-1} \chi$. Se questa metrica è completa, per ogni forma $\varphi \in L^{p,q}(X, F) \cap C^{p,q}(X, F)$ tale che $\bar{\partial} \varphi = 0$ e che $p + q > n$,*

(7) Invero sia $p \in X$ ed U' un intorno di p in cui sceglieremo coordinate normali geodetiche $x^i = l \theta^i$ — ove l è la distanza geodetica di x da p e le θ^i sono le componenti del vettore unitario tangente in p alla geodetica px — rispetto alle quali si abbia $g^{ij} = \delta^{ij}$ in p . L'asse delle x^i è dato da $\theta^i = 1$, $\theta^j = 0$ per $j \neq i$; inoltre $\left(\frac{\partial l}{\partial x^i} \right)_p = 1$. Poichè

$$\frac{| \varrho(0, \dots, x^i, \dots, 0) - \varrho(0, \dots, 0, \dots, 0) |}{|x^i|} \leq \frac{l(0, \dots, x^i, \dots, 0)}{|x^i|},$$

risulta $\Sigma \left| \left(\frac{\partial \varrho}{\partial x^i} \right)_p \right|^2 \leq 2n$.

esiste una forma $\psi \in L^{p,q-1}(C, F) \cap C^{p,q-1}(X, F)$ per la quale si ha

$$\varphi = \bar{\partial}\psi.$$

DIMOSTRAZIONE. Poichè F è W -ellittico nel grado (p, q) , si può trovare una forma $x \in C^{p,q}(X, F) \cap W^{p,q}(X, F)$ tale che

$$(8) \quad \square x = \varphi.$$

ossia

$$\bar{\partial} \vartheta x + \vartheta \bar{\partial} x = \varphi.$$

Basterà provare che $\vartheta \bar{\partial} x = 0$.

Poichè $x \in C^{p,q}(X, F) \cap W^{p,q}(X, F)$, risulta $\bar{\partial} x \in C^{p,q+1}(X, F) \cap L^{p,q+1}(X, F)$. D'altra parte si ha

$$\square \bar{\partial} x = \bar{\partial} \square x = \bar{\partial} \varphi = 0.$$

Dalla proposizione 7 discende pertanto che $\vartheta \bar{\partial} x = 0$, sicchè risulta

$$\varphi = \bar{\partial}\psi,$$

ove si ponga $\psi = \vartheta x \in L^{p,q-1}(X, F) \cap C^{p,q-1}(X, F)$.

Poichè $\mathcal{D}^{p,q}(X, F) \subset L^{p,q}(X, F) \cap C^{p,q}(X, F)$, tenuto conto del teorema di Dolbeault, dal lemma precedente segue il

TEOREMA 9. *Sia F positivo, ed assumiamo come metrica su X la metrica kähleriana della forma esterna $\omega = \sqrt{-1} \chi$. Se questa metrica è completa, l'omomorfismo naturale*

$$H_k^q(X, \Omega^p(F)) \rightarrow H^q(X, \Omega^p(F))$$

della coomologia a supporti compatti in quella a supporti chiusi è nullo per $p + q > n$.

b) Se K è il fibrato canonico su X , si ha un isomorfismo naturale

$$\Omega^n(F) \approx \Omega(F \otimes K).$$

Applicando il teorema precedente al fibrato $F \otimes K^{-1}$ si ottiene il

COROLLARIO. *Se $F \otimes K^{-1}$ è positivo e la forma corrispondente $\omega = \sqrt{-1} \chi$ definisce una metrica completa su X , l'omomorfismo naturale*

$$H_k^q(X, \Omega(F)) \rightarrow H^q(X, \Omega(F))$$

è nullo per $q > 0$.

Per semplicità di linguaggio, nel seguito diremo che un fibrato F è *positivo e completo* se la forma

$$\omega = \sqrt{-1} \chi \varepsilon - 2\pi c_{\mathbb{R}}(F)$$

è la forma esterna di una metrica kähleriana completa su X (per un'opportuna scelta di una metrica sulle fibre di F).

c) Diremo che un fibrato F è *negativo e completo* se il fibrato F^{-1} è positivo e completo. Se $\{h_i(x) \xi_i \bar{\eta}_i\}$ è una metrica hermitiana sulle fibre di F , $\{h_i^{-1}(x) \xi_i \bar{\eta}_i\}$ è una metrica hermitiana sulle fibre di F^{-1} . Pertanto, se $\chi = \{\bar{\partial} \partial \log h_i\}$ denota la forma di curvatura per la metrica scelta su F , $-\chi$ è la forma di curvatura per la metrica $\{h_i^{-1}(x) \xi_i \bar{\eta}_i\}$ su F^{-1} . Assumendo $\omega = -\sqrt{-1} \chi$ come forma esterna di una metrica kähleriana su X , e ripetendo le considerazioni precedenti, si dimostra il

LEMMA 8'. *Sia F negativo e completo, ed assumiamo come metrica su X la metrica kähleriana della forma esterna $\omega = -\sqrt{-1} \chi$. Per ogni forma $\varphi \in L^{p,q}(X, F) \cap C^{p,q}(X, F)$ tale che $\bar{\partial} \varphi = 0$ e $p + q < n$, esiste una forma $\psi \in L^{p,q-1}(X, F) \cap C^{p,q-1}(X, F)$ per la quale si ha*

$$\partial \psi = \varphi.$$

Ne consegue il

TEOREMA 9'. *Se F è negativo e completo, l'omomorfismo naturale*

$$H_k^q(X, \Omega^p(F)) \rightarrow H^q(X, \Omega^p(F))$$

è nullo per $p + q < n$.

OSSERVAZIONE. Qualora X sia compatta, si conclude direttamente — senza fare ricorso al Lemma 6 ed alla Proposizione 7 — che la soluzione x della (8) soddisfa alla $\partial \bar{\partial} x = 0$, sicchè i teoremi 9 e 9' danno luogo al seguente teorema di Y. Akizuki e S. Nakano [1]:

Sia dato sulla varietà complessa compatta X un fibrato olomorfo di rette complesse F , il quale sia positivo. In questa ipotesi, risulta

$$H^q(X, \Omega^p(F)) = 0 \quad \text{per } p + q > n.$$

Se invece F è negativo, risulta

$$H^q(X, \Omega^p(F)) = 0 \quad \text{per } p + q < n.$$

Da esso discende il « vanishing theorem » di K. Kodaira [7].

§ 2. Un teorema d'immersione.

7. PRELIMINARI. a) Sia U una palla di centro nell'origine e raggio quattro, in \mathbb{C}^n riferito alle coordinate z^1, \dots, z^n .

Consideriamo la sottovarietà di $U \times P_{n-1}(\mathbb{C})$

$$W = \{(z, t) \in U \times P_{n-1}(\mathbb{C}) \mid z^i t^j = z^j t^i \quad (i, j = 1, \dots, n)\},$$

le t^1, \dots, t^n essendo coordinate omogenee in $P_{n-1}(\mathbb{C})$. La W è non singolare, e la proiezione $\pi: W \rightarrow U$ è biolomorfa al di fuori dell'origine $\{o\}$ in U e di $\pi^{-1}(o) = S$ in W . La fibra S è isomorfa a $P_{n-1}(\mathbb{C})$, ed è un divisore su W . Vogliamo calcolare la classe di Chern $c_{\mathbb{R}}(\{S\})$ del fibrato $\{S\}$ definito da S in W .

LEMMA 10. Sia $\varrho(r)$ una funzione C^∞ definita su \mathbb{R} e tale che $\varrho(r) = 1$ per $r \leq 2$, $1 \geq \varrho(r) \geq 0$ per $2 \leq r \leq 3$, $\varrho(r) = 0$ per $r \geq 3$. Sia $|z| = (\sum z^\alpha \bar{z}^\alpha)^{\frac{1}{2}}$ e consideriamo la forma

$$-\sigma_0 = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \partial \bar{\partial} \{ \varrho(|z|) \log |z|^2 \}$$

su $U - \{o\}$. La forma $-\tilde{\sigma}_0 = -\pi^* \sigma_0$ estesa per continuità su S in W è una forma C^∞ chiusa, a supporto compatto, ed appartenente a $c_{\mathbb{R}}(\{S\})$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo su W gli aperti coordinati

$$W_i = \{(z, t) \in W \mid t^i \neq 0, |z| < 2\} \quad (i = 1, \dots, n),$$

e l'aperto

$$W_0 = \pi^{-1} \{z \in U \mid |z| > 1\}.$$

Nei W_i ($i = 1, \dots, n$) assumeremo come coordinate $z^i, t^1/t^i, \dots, t^n/t^i$ rispettivamente. Ivi S ha equazione $z^i = 0$. Riferiremo i punti di W_0 alle coordinate z^1, \dots, z^n . Poichè S non incontra W_0 , assumeremo come equazione di S in W_0 la $1 = 0$.

Pertanto le funzioni di transizione del fibrato $\{S\}$ sono espresse dalle $g_{ij} = z^i/z^j$ in $W_i \cap W_j$ ($i, j = 1, \dots, n$) e dalle $g_{i0} = z^i$ in $W_i \cap W_0$.

Poniamo

$$h_i = (t^i \bar{t}^i)^{-1} \sum_{\alpha}^n t^\alpha \bar{t}^\alpha \quad \text{in } W_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

e $h_0 = |z|^{2\rho(|z|)}$ in W_0 . Avendosi $h_i > 0$ e $h_i = |g_{ji}|^2 h_j$ in $W_i \cap W_j$, per $i, j = 0, 1, \dots, n$, le h_i definiscono una metrica sulle fibre di $\{S\}$.

Le forme

$$\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \partial \bar{\partial} \{ \rho(|z|) \log |z|^2 \} \quad \text{su } W_0,$$

$$\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \partial \bar{\partial} \log \left(1 + \sum_{\alpha \neq i} \left| \frac{t^\alpha}{t^i} \right|^2 \right) \quad \text{su } W_i$$

sono le componenti locali di una forma globale su W , appartenente alla classe $c_{\mathbb{R}}(\{S\})$. Di qui segue agevolmente l'asserto.

OSSERVAZIONE La forma considerata $-\pi^* \sigma_0$ ristretta a S coincide con la forma esterna della metrica di Fubini di S .

b) Sia U un intorno coordinato di un punto \mathfrak{p} di una varietà complessa connessa X , di dimensione n . Sostituendo in X , U con W , per identificazione dei punti di $W - S$ e $U - \mathfrak{p}$ mediante la proiezione π , si ottiene una varietà complessa connessa \tilde{X} che indicheremo con $Q_{\mathfrak{p}}(X)$. Indicheremo con $\sigma_{\mathfrak{p}}$, $\tilde{\sigma}_{\mathfrak{p}}$ le forme ottenute dalle omonime di $U - \mathfrak{p}$, W , estendole col porle eguali a zero al di fuori di $U - \mathfrak{p}$ e W .

Indichiamo ora con π la proiezione naturale $\tilde{X} \rightarrow X$, con $K = K(X)$ e $K(\tilde{X})$ i fibrati canonici su X e su \tilde{X} , risulta

$$K(\tilde{X}) = \{ \pi^* K(X) \} \otimes \{ S \}^{n-1} \quad (8).$$

8. L'ANELLO $\mathfrak{A}(F)$. a) Sia F un fibrato lineare olomorfo sulla varietà complessa connessa X , e sia F^h la h -esima potenza tensoriale di F . Indicheremo con $\mathfrak{A}(F)$ l'anello graduato $\mathfrak{A}(F) = \bigoplus_{h=1}^{\infty} H^0(X, \Omega(F^h))$. Poichè X è connessa, $\mathfrak{A}(F)$ è un anello d'integrità.

Diremo che l'anello $\mathfrak{A}(F)$ fornisce coordinate locali in un punto $\mathfrak{p} \in X$ se esistono un intero $h_0 = h_0(\mathfrak{p})$ positivo, ed $n+1$ elementi $s^0, s^1, \dots, s^n \in H^0(X, \Omega(F^{h_0}))$ tali che

$$\left(\sum_0^n (-1)^i s^i ds^0 \wedge \dots \wedge \widehat{ds^i} \wedge \dots \wedge ds^n \right)_{\mathfrak{p}} \neq 0.$$

(8) Per quest'ultima formula e per tutti gli sviluppi precedenti, cfr. [8], pp. 30-31.

Ciò implica che una almeno, ad esempio s^0 , delle sezioni s^i sia non nulla in \mathfrak{p} , $s^0(\mathfrak{p}) \neq 0$, e che le funzioni $s^1/s^0, \dots, s^n/s^0$, meromorfe su X ed olomorfe in un intorno di \mathfrak{p} , siano analiticamente indipendenti: $(d(s^1/s^0) \wedge \dots \wedge d(s^n/s^0))_{\mathfrak{p}} \neq 0$.

Diremo che $\mathfrak{A}(F)$ separa i punti \mathfrak{p} e $\mathfrak{q} \in X$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, se esiste un intero positivo $h_1 = h_1(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ e due sezioni $s^0, s^1 \in H^0(X, \Omega(F^{h_1}))$ tali che

$$\det \begin{pmatrix} s^0(\mathfrak{p}) & s^0(\mathfrak{q}) \\ s^1(\mathfrak{p}) & s^1(\mathfrak{q}) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Ciò significa che la funzione meromorfa s^1/s^0 non ha indeterminazioni nei punti \mathfrak{p} e \mathfrak{q} ed assume in essi due valori distinti.

b) Vale la seguente

PROPOSIZIONE 11. *Se F è positivo e se $F \otimes K^{-1}$ è positivo e completo, l'anello $\mathfrak{A}(F)$ fornisce coordinate locali in ogni punto di X e separa ogni coppia di punti distinti di X .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{h_i \xi_i \bar{\eta}_i\}$ una metrica hermitiana sulle fibre di F , tale che $\chi(F) = \{\bar{\partial} \partial \log h_i\} > 0$. Sia $\{h'_i \xi_i \bar{\eta}_i\}$ una metrica hermitiana sulle fibre di $F \otimes K^{-1}$, tale che $\chi(F \otimes K^{-1}) = \{\bar{\partial} \partial \log h'_i\}$ sia > 0 e completa.

α) Fissato $\mathfrak{p} \in X$, sia $h_0 = h_0(\mathfrak{p})$ il minimo intero positivo tale che

$$(h_0 - 1) \chi(F) + \chi(F \otimes K^{-1}) - n\sigma_{\mathfrak{p}} > 0 \quad \text{su } X - \mathfrak{p}.$$

Per $h \geq h_0$ il fibrato F^h ammette una sezione olomorfa s^0 non nulla in \mathfrak{p} , $s^0(\mathfrak{p}) \neq 0$.

DIMOSTRAZIONE DI α). Sia $\tilde{F} = \pi^* F$ l'immagine inversa di F su X . Consideriamo su X la successione esatta di fasci coerenti

$$0 \rightarrow \Omega(\tilde{F}^h \otimes \{S\}^{-1}) \xrightarrow{\iota} \Omega(\tilde{F}^h) \xrightarrow{r} \Omega(\tilde{F}^h)|_S \rightarrow 0,$$

ove r è l'omomorfismo di restrizione. Ker r è dato dai germi di sezioni olomorfe di \tilde{F}^h nulle su S . Se s_i è la rappresentazione locale in U_i di una tale sezione, e $z_i = 0$ l'equazione in U_i di $S \cap U_i$, s_i/z_i è olomorfa in U_i . Posto $\sigma_i = s_i/z_i$ si ha in $U_i \cap U_j$ $\sigma_i = f_{ij}^h (z_i/z_j)^{-1} \sigma_j$, ove le f_{ij} sono le funzioni di transizione di \tilde{F} . Quindi σ_i definisce un elemento di $\Omega(\tilde{F}^h \otimes \{S\}^{-1})$. Se $\sigma_i \in \Omega(\tilde{F}^h \otimes \{S\}^{-1})$, risulta $\iota(\sigma_i) = z_i s_i \in \Omega(\tilde{F}^h)$. Ciò prova l'esattezza della successione precedente.

Poichè F è banale su U , \tilde{F} è banale su $\pi^{-1}(U)$. In particolare $\Omega(\tilde{F}^h)|_S \approx \Omega_S$. La successione esatta di coomologia dà perciò

$$0 \rightarrow H^0(X, \Omega(\tilde{F}^h \otimes \{S\}^{-1})) \rightarrow H^0(X, \Omega(F)) \rightarrow H^0(S, \Omega_S) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \Omega(\tilde{F}^h \otimes \{S\}^{-1})) \rightarrow \dots,$$

ove $H^0(S, \Omega_S) = \mathbb{C}$.

Proviamo che $\delta = 0$. Osserviamo anzitutto che δ può fattorizzarsi nel prodotto dei due omomorfismi

$$H^0(S, \Omega_S) \rightarrow H^1_k(X, \Omega(\tilde{F}^k \otimes \{S\}^{-1})) \rightarrow H^1(X, \Omega(\tilde{F}^k \otimes \{S\}^{-1}))$$

il primo dei quali è l'omomorfismo δ per la successione di coomologia a supporti compatti, ed il secondo è l'omomorfismo naturale della coomologia a supporti compatti in quella a supporti chiusi. In virtù del corollario del n. 6, basta dimostrare che $\tilde{F}^h \otimes \{S\}^{-1} \otimes K(X)^{-1}$ è positivo e completo.

Al di fuori di S la positività discende dalla scelta di h_0 . In W , $-\pi^* \sigma_p$ induce — come abbiamo già osservato — la metrica di Fubini su S . D'altra parte $(h-1)\chi(F) + \chi(F \otimes K^{-1})$ determina una metrica Kähleriana su U . Poichè W è una sottovarietà analitica di $U \times P_{n-1}(\mathbb{C})$, si ha su W una metrica kähleriana determinata da $(h-1)\chi(F) + \chi(F \otimes K^{-1}) - n\pi^* \sigma_p$. Quindi il fibrato in esame è positivo. Essendo $\pi^* \sigma_p$ a supporto compatto, la metrica considerata è anche completa.

In conclusione si ha la successione esatta

$$0 \rightarrow H^0(\tilde{X}, \Omega(\tilde{F}^h \otimes \{S\}^{-1})) \rightarrow H^0(\tilde{X}, \Omega(F^h)) \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0.$$

Si riconosce che $\pi^* : H^0(X, \Omega(F^h)) \rightarrow H^0(\tilde{X}, \Omega(\tilde{F}^h))$ è un isomorfismo (se $n > 1$ ciò discende dal fatto che una funzione continua e olomorfa nel complementare di un punto è olomorfa in quel punto⁽⁹⁾). Da qui segue agevolmente la tesi.

(β) Fissato $p \in X$, sia $h_1 = h_1(p)$ il minimo intero $\geq h_0(p)$ tale che

$$(h_1 - 1)\chi(F) + \chi(F \otimes K^{-1}) - (n+1)\sigma_p > 0 \quad \text{su } X - p.$$

Per $h \geq h_1$ il fibrato F^h ammette $n+1$ sezioni olomorfe s^0, \dots, s^n tali che $\left(\sum_0^n (-1)^i s^i ds^0 \wedge \dots \wedge \widehat{ds^i} \wedge \dots \wedge ds^n \right)_p \neq 0$.

(⁹) Cfr. anche [8], p. 36.

DIMOSTRAZIONE DI (β). Dalle successioni esatte:

$$0 \rightarrow \Omega(\tilde{F}^h \otimes \{S\}^{-1}) \rightarrow \Omega(\tilde{F}^h) \rightarrow \Omega_S \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \Omega(\tilde{F}^h \otimes \{S\}^{-2}) \rightarrow \Omega(\tilde{F}^h \otimes S^{-1}) \rightarrow \Omega(\{S\}^{-1})|_S \rightarrow 0,$$

si deducono, in modo analogo a quello seguito in (α), le successioni esatte

$$0 \rightarrow H^0(\tilde{X}, \Omega(\tilde{F}^h \otimes \{S\}^{-1})) \xrightarrow{t} H^0(\tilde{X}, \Omega(\tilde{F}^h)) \rightarrow \mathbf{C} \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow H^0(\tilde{X}, \Omega(\tilde{F}^h \otimes \{S\}^{-2})) \rightarrow H^0(\tilde{X}, \Omega(\tilde{F}^h \otimes \{S\}^{-1})) \rightarrow H^0(S, \Omega(\{S\}^{-1})|_S) \rightarrow 0.$$

Indicando con e il fibrato lineare definito da una sezione iperpiana di $S = P_{n-1}(\mathbf{C})$, si riconosce che $\{S\}^{-1}|_S = e$. Ora $H^0(S, \Omega(e))$ non è altro che lo spazio delle forme lineari omogenee $\sum_1^n a_i t^i$ su $S = P_{n-1}(\mathbf{C})$. Perciò esso ha dimensione n ed è generato dalle sezioni t^i . Dunque $H^0(\tilde{X}, \Omega(\tilde{F}^h \otimes \{S\}^{-1}))$ ha dimensione $\geq n$, e $H^0(\tilde{X}, \Omega(\tilde{F}^h))$ ha dimensione $\geq n + 1$.

Siano $\sigma^1, \dots, \sigma^n$ n sezioni di $H^0(\tilde{X}, \Omega(\tilde{F}^h \otimes \{S\}^{-1}))$ che diano per immagini rispettive t^1, \dots, t^n in $H^0(S, \Omega(e))$, e sia s una sezione di $H^0(\tilde{X}, \Omega(\tilde{F}^h))$ che dia per immagine 1. Su W_i le $n + 1$ sezioni $s, \iota(\sigma^1), \dots, \iota(\sigma^n)$ sono espresse da funzioni olomorfe. Poichè $s|_S \neq 0$, si avrà:

$$\frac{\iota(\sigma^1)}{s} = \frac{z^i t^1 h^1}{t^i}, \dots, \frac{\iota(\sigma^i)}{s} = z^i h^i, \dots, \frac{\iota(\sigma^n)}{s} = \frac{z^i t^n h^n}{t^i}$$

ove $z^i = 0$ è l'equazione locale di S in W_i , ed ove le h^a sono olomorfe e non nulle su S .

Calcoliamo su S lo jacobiano

$$\left(\frac{d \left(z^i \frac{t^1}{t^i} h^1 \right) \wedge \dots \wedge d \left(z^i h^i \right) \wedge \dots \wedge d \left(z^i \frac{t^n}{t^i} h^n \right)}{dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n} \right)_S.$$

Esso risulta eguale a $(h^1 \dots h^n)_S$, ciò che prova l'asserto.

(γ) Fissati $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in X$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$, sia $h_2 = h_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ il minimo intero $\geq h_1(\mathbf{p})$ tale che

$$(h_2 - 1) \chi(F) + \chi(F \otimes K^{-1}) - n \sigma_{\mathbf{p}} - (n - 1) \sigma_{\mathbf{q}} > 0$$

$$(h_2 - 1) \chi(F) + \chi(F \otimes K^{-1}) - n(\sigma_{\mathbf{p}} + \sigma_{\mathbf{q}}) > 0 \quad \text{su } X - \mathbf{p} - \mathbf{q}.$$

Per $h \geq h_2$ il fibrato F^h ammette due sezioni olomorfe, s^0, s^1 , tali che $s^0(\mathfrak{p}) \neq 0, s^1(\mathfrak{p}) = 0, s^1(\mathfrak{q}) \neq 0$.

DIMOSTRAZIONE DI (γ). Sia $\tilde{X} = Q_{\mathfrak{p}} Q_{\mathfrak{q}}(X)$, e sia \tilde{F} l'immagine inversa di F su \tilde{X} . Siano S e T le fibre di \tilde{X} su \mathfrak{p} e su \mathfrak{q} .

Dalla successione esatta

$$0 \rightarrow \Omega(\tilde{F}^h \otimes \{S\}^{-1} \otimes \{T\}^{-1}) \xrightarrow{i} \Omega(\tilde{F}^h \otimes \{S\}^{-1}) \xrightarrow{r_T} \Omega_T \rightarrow 0$$

si deduce la successione esatta

$$0 \rightarrow H^0(\tilde{X}, \Omega(\tilde{F}^h \otimes \{S\}^{-1} \otimes \{T\}^{-1})) \xrightarrow{j^*} H^0(\tilde{X}, \Omega(\tilde{F}^h \otimes \{S\}^{-1})) \xrightarrow{r_T^*} \mathbf{C}_T \rightarrow 0.$$

Scegliamo $\tau^1 \in H^0(\tilde{X}, \Omega(\tilde{F}^h \otimes \{S\}^{-1}))$ tale che $r_T^*(\tau^1) = 1$.

Se s è la sezione di $\{S\}$ nulla su S di ordine 1, e poniamo $\sigma^1 = s\tau^1$, risulta

$$\sigma^1 \in H^0(\tilde{X}, \Omega(\tilde{F}^h)), \quad \text{e} \quad \sigma^1|_S = 0, \quad \sigma^1|_T = 1,$$

onde la tesi.

9. FIBRATI UNIFORMEMENTE POSITIVI. Chiameremo *forma maggiorante* una (1,1) forma γ su X (non necessariamente chiusa) la quale verifichi le condizioni seguenti:

i) per ogni punto $\mathfrak{p} \in X$ si può scegliere la forma $\sigma_{\mathfrak{p}}$ in modo che $\gamma - \sigma_{\mathfrak{p}}$ sia definita positiva su $X - \mathfrak{p}$;

ii) esiste una metrica hermitiana sul fibrato canonico K tale che, se $\chi(K)$ è la forma di curvatura corrispondente, $\gamma - \chi(K)$ sia definita positiva;

iii) la metrica definita su X dalla $\gamma - \chi(K)$ è completa.

LEMMA 12. *Su ogni varietà complessa connessa X (a base numerabile) esiste almeno una forma maggiorante.*

DIMOSTRAZIONE. Poichè X è a base numerabile, si può determinare una successione di compatti $\{B_i\}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) tali che

$$B_i \subset \overset{\circ}{B}_{i+1}, \quad \bigcup B_i = X.$$

Sia f_i una funzione C^∞ su X soddisfacente alle condizioni seguenti

$$0 \leq f_i \leq 1 \text{ su } X, f_i = 1 \text{ su } B_{i+1} - B_i, \text{ Supp}(f_i) \subset \overline{B_{i+2}} - \overline{B_{i-1}}.$$

Fissata su X una qualsiasi metrica hermitiana ds^2 , sia $d(p, q)$ ($p, q \in X$) la funzione distanza determinata da tale metrica, e sia $\varepsilon_i = \inf_{\substack{p \in B_i \\ q \in \partial B_{i+1}}} d(p, q)$. Risultata $\varepsilon_i > 0$.

Per il modo con cui sono stati scelti i compatti B_i , le funzioni f_i ed i numeri positivi ε_i , l'espressione $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{f_i}{\varepsilon_i} ds^2$ definisce in ogni punto di X una forma hermitiana definita positiva che può essere assunta come elemento lineare di una metrica completa su X .

Scegliamo un $a(i) \geq 1$ tale che, posto $ds_i^2 = \frac{a(i)}{\varepsilon_i} f_i ds^2$, la forma hermitiana $ds_i^2 - \chi(K)$ sia definita positiva su $\overline{B_{i+1}} - B_i$.

Fissato un punto $p_0 \in \overline{B_{i+1}} - B_i$, costruiamo una forma σ_{p_0} con supporto contenuto in $B_{i+2} - B_{i-1}$. È possibile determinare un $b_i^0 > 1$ tale che, posto

$$ds_i'^2 = b_i^0 (ds_{i-1}^2 + ds_i^2 + ds_{i+1}^2 + ds_{i+2}^2),$$

la forma hermitiana $ds_i'^2 - \sigma_{p_0}$ sia definita positiva in $B_{i+2} - B_{i-1} - p_0$. Possiamo determinare un intorno U di p_0 ed una forma σ_p per ogni $p \in U$, tali che la forma $ds_i'^2 - \sigma_p$ sia definita positiva in $B_{i+2} - B_{i-1} - p$. Poichè $\overline{B_{i+1}} - B_i$ è compatto, esistono un $c_i > 1$ e delle forme σ_p , per ogni $p \in \overline{B_{i+1}} - B_i$, tali che, posto

$$ds_i''^2 = c_i (ds_{i-1}^2 + ds_i^2 + ds_{i+1}^2 + ds_{i+2}^2),$$

la forma $ds_i''^2 - \sigma_p$ sia definita positiva in $B_{i+2} - B_{i-1} - p$.

La forma hermitiana relativa alla metrica $ds''^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} ds_i''^2$ soddisfa a tutte e tre le condizioni i), ii), iii), ed è quindi una forma maggiorante.

Diremo che il fibrato lineare olomorfo F è *uniformemente positivo* se è possibile scegliere una forma maggiorante γ su X , un intero $h_0 > 0$ ed una metrica sulle fibre di F tale che, essendo $\chi(F)$ la corrispondente forma di curvatura, la forma hermitiana $h_0 \chi(F) - \gamma$ sia definita positiva in ogni punto di X .

TEOREMA 13. *Se F è uniformemente positivo, esiste un sottoanello a generazione finita in $\mathfrak{A}(F)$ che fornisce coordinate locali in ogni punto di X e separa ogni coppia di punti distinti di X .*

DIMOSTRAZIONE. α) Posto $h = (2n + 1) h_0$, qualunque siano i punti p e q distinti di X , risultano verificate le condizioni (α) , (β) e (γ) della dimo-

strazione della proposizione 11. Ne consegue che nello spazio vettoriale $E = H^0(X, \Omega(F^h))$ è possibile scegliere: (a) per ogni punto $p \in X$, $n + 1$ sezioni s^0, \dots, s^n tali che

$$\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i s^i ds^0 \wedge \dots \wedge \widehat{ds^i} \wedge \dots \wedge ds^n \right)_p \neq 0;$$

(b) per ogni coppia di punti distinti p e q di X , due sezioni s' e s'' tali che

$$\det \begin{pmatrix} s'(p) & s'(q) \\ s''(p) & s''(q) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Basterà provare che si possono soddisfare le infinite condizioni (a) e (b) scegliendo di volta in volta le s in un insieme finito $\{s^0, \dots, s^N\}$ di elementi di E .

β) Introduciamo nello spazio vettoriale E una topologia di spazio di Fréchet nel modo seguente. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X tale che $F|_{U_i}$ sia banale. Sia $\varphi_i: F|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}$ un isomorfismo di $F|_{U_i}$ sul prodotto $U_i \times \mathbb{C}$. Per ogni sezione $s \in E$, indichiamo con s_i la funzione olografica $s_i = pr_{\mathbb{C}} \circ \varphi_i \circ s$.

Per ogni compatto $B_i \subset U_i$, introduciamo in E la seminorma

$$p_{B_i, \varphi_i}(s) = \sup_{x \in B_i} |s(x)|.$$

La topologia definita su E da questo insieme di seminorme dà ad E una struttura di spazio vettoriale topologico localmente convesso e completo (in base al teorema di Vitali). In particolare E è uno spazio di Baire.

γ) Cominciamo a dimostrare la condizione (b). Sia $Y = X \times X - \Delta$, Δ essendo la diagonale di $X \times X$. Per ogni $(p, q) \in Y$ consideriamo in $E \times E$ l'insieme

$$A(p, q) = \left\{ (s^1, s^2) \in E \times E \mid \det \begin{pmatrix} s^1(p) & s^1(q) \\ s^2(p) & s^2(q) \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

Proveremo che questo insieme è chiuso e che il suo complementare è ovunque denso. Scegliamo all'uopo due elementi $\lambda, \tau \in E$ tali che

$$\det \begin{pmatrix} \lambda(p) & \lambda(q) \\ \tau(p) & \tau(q) \end{pmatrix} \neq 0,$$

e consideriamo la funzione $f: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ espressa dalla

$$f(s^1, s^2) = \left(\det \begin{pmatrix} \lambda(\mathbf{p}) & \lambda(\mathbf{q}) \\ \tau(\mathbf{p}) & \tau(\mathbf{q}) \end{pmatrix} \right)^{-1} \det \begin{pmatrix} s^1(\mathbf{p}) & s^1(\mathbf{q}) \\ s^2(\mathbf{p}) & s^2(\mathbf{q}) \end{pmatrix}.$$

Questa funzione è continua, onde $A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = f^{-1}(0)$ è chiuso.

Sia $d(x, y)$ una distanza in E invariante per traslazioni, la quale definisca in E la topologia considerata. Sia $(s_0^1, s_0^2) \in A(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, e supponiamo che per un opportuno $\varepsilon > 0$, l'aperto

$$U = \{(s^1, s^2) \in E \times E \mid d(s^1, s_0^1) < \varepsilon, d(s^2, s_0^2) < \varepsilon\}$$

sia contenuto in $A(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.

Consideriamo il punto $(s_0^1 + \xi\lambda, s_0^2 + \eta\tau)$ ($\xi, \eta \in \mathbb{C}$). Esiste un $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che per $|\xi| < \delta(\varepsilon)$, $|\eta| < \delta(\varepsilon)$ il punto considerato appartenga a U . Ma

$$f(s_0^1 + \xi\lambda, s_0^2 + \eta\tau) = a_0 + \xi a_1 + \eta a_2 + \xi\eta a_3.$$

Questo polinomio in ξ, η , essendo nullo in un intorno dell'origine, è identicamente nullo. In particolare $a_3 = f(\lambda, \tau) = 0$, e ciò è impossibile. Dunque il complementare $\mathfrak{C}(A(\mathbf{p}, \mathbf{q}))$ di $A(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ è ovunque denso in $E \times E$.

γ) Fissati $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in Y$, sia $(s^0, s^1) \in \mathfrak{C}(A(\mathbf{p}, \mathbf{q}))$. Su Y consideriamo l'insieme analitico

$$D = \left\{ \det \begin{pmatrix} s^0(x) & s^0(y) \\ s^1(x) & s^1(y) \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

Per costruzione $\text{codim } D \geq 1$. Sia $D = \sum D_i$ la decomposizione di D in insiemi analitici irriducibili⁽¹⁰⁾. Per ogni D_i scegliamo un punto $(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i) \in D_i$, $(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i) \notin D_j$ ($j \neq i$). Poichè $E \times E$ è di Baire, $\mathfrak{C}(\cup A(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i))$ è ovunque denso, e si può scegliere $(s^2, s^3) \in \mathfrak{C}(\cup A(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i))$.

Sia

$$D' = \left\{ \det \begin{pmatrix} s^2(x) & s^2(y) \\ s^3(x) & s^3(y) \end{pmatrix} = 0 \right\} \text{ in } Y.$$

Per costruzione $\text{codim. } (D \cap D') \geq 2$. Decomponiamo $D \cap D'$ in parti irriducibili, e ripetiamo la costruzione precedente. Iterando $2n + 1$ volte il procedimento indicato, si ha l'asserto (b).

⁽¹⁰⁾ Sono al più un'infinità numerabile.

e) Per la condizione (a) si ragiona in modo analogo al precedente, considerando, per ogni $p \in X$, il sottoinsieme di $E \times E \times \dots \times E$ ($n+1$ volte)

$$A(p) = \left\{ (s^0, \dots, s^n) \in E \times \dots \times E \mid \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i s^i ds^0 \wedge \dots \wedge \widehat{ds^i} \wedge \dots \wedge ds^n \right)_p = 0 \right\}.$$

Esso è il luogo degli zeri della funzione

$$f: E \times \dots \times E \rightarrow \mathbb{C}$$

definita da

$$f(s^0, \dots, s^n) = \frac{\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i s^i ds^0 \wedge \dots \wedge \widehat{ds^i} \wedge \dots \wedge ds^n \right)_p}{\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \lambda^i d\lambda^0 \wedge \dots \wedge \widehat{d\lambda^i} \wedge \dots \wedge d\lambda^n \right)_p}$$

ove le λ^i sono scelte una volta per tutte in E in guisa che il denominatore non sia nullo. La continuità di f segue dal teorema di derivazione per serie di funzioni olomorfe. Che $\mathbb{C}(A(p))$ sia ovunque denso in $E \times \dots \times E$ discende dalla stessa argomentazione svolta in δ). Ed anche l'ultima parte della dimostrazione è una semplice trasposizione del ragionamento sviluppato in δ).

COROLLARIO 14. *Ogni varietà complessa connessa X , sulla quale esista un fibrato lineare olomorfo uniformemente positivo può rappresentarsi in uno spazio proiettivo complesso di dimensione finita $P_N(\mathbb{C})$ mediante un'applicazione $f: X \rightarrow P_N(\mathbb{C})$ biunivoca e biolomorfa fra X e $f(X)$.*

BIBLIOGRAFIA.

- [1] Y. AKIZUKI-S. NAKANO, *Note on Kodaira-Spencer's proof of Lefschetz theorems*, Proc. of the Jap. Acad., 30 (1954), 266-272.
- [2] A. BOREL-F. HIRZEBRUCH, *Characteristic classes and homogeneous spaces, II*, Am. J. Math., 81 (1959), 315-381.
- [3] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, Hermann, Paris.
- [4] E. CALABI-E. VISENTINI, *On compact, locally symmetric Kähler manifolds*, Ann. of Math., 71, (1960), 472-507.
- [5] K. O. FRIEDRICHS, *Differential forms on Riemannian manifolds*, Comm. Pure Appl. Math., 8 (1955), 551-590.
- [6] F. HIRZEBRUCH, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, Springer, Berlin, 1956.
- [7] K. KODAIRA, *On a differential geometric method in the theory of analytic stacks*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 39 (1953), 1268-1273.
- [8] K. KODAIRA, *On Kähler varieties of restricted type*, Ann. of Math., 60 (1954) 28-48.
- [9] E. MAGENES-G. STAMPACCHIA, *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, (3) 12 (1958), 247-358.
- [10] G. DE RHAM, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.
- [11] A. WEIL, *Introduction à l'étude des variétés kählériennes*, Hermann, Paris, 1958.