ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

FERNANDO BERTOLINI

Le funzioni misurabili di ultrafiltro come elementi di un reticolo lineare numerabilmente completo

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 15, nº 1-2 (1961), p. 115-127

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1961_3_15_1-2_115_0>

LE FUNZIONI MISURABILI DI ULTRAFILTRO COME ELEMENTI DI UN RETICOLO LINEARE NUMERABILMENTE COMPLETO

Nota di FERNANDO BERTOLINI (a Roma)

Sono noti parecchi teoremi di rappresentazione per reticoli lineari, tra i quali uno dei più significativi è il seguente:

I. *Qualunque reticolo lineare archimedeo* (in particolare, $\aleph_0$-*completo*) *e dotato d'unità di* FREUDENTHAL *può esser immerso, a meno d'isomorfismi, nel reticolo lineare costituito dalla totalità delle applicazioni di un opportuno insieme nell'insieme dei numeri reali impropri* (1).

Nella presente nota, dopo aver osservato che:

II. *Dato un reticolo booleano* $\aleph$-*completo* (*con* $\aleph \geq \aleph_0$), *la totalità delle funzioni misurabili d'ultrafiltro «finite» relative ad esso costituisce un reticolo relativamente* $\aleph$-*completo e dotato d'unità di* FREUDENTHAL (reticolo lineare *generato* dal dato reticolo booleano),

dimostriamo che, viceversa,

III. *Qualunque reticolo lineare relativamente* $\aleph$-*completo e dotato di unità di* FREUDENTHAL (*con* $\aleph \geq \aleph_0$) *è isomorfo al reticolo lineare generato da un opportuno reticolo booleano* $\aleph$-*completo.*

I due teoremi II e III rappresentano, assieme, un perfezionamento del teorema I, e vanno confrontati con risultati di BIRKHOFF, PEIRCE, GOFFMAN ed altri, relativi ad *anelli* o, più in generale a *gruppi*, dotati d'ordinamento reticolare (lattice-ordered rings, lattice-ordered groups) (2). Il teorema II è dimostrato al n. 3, il III al n. 4; al n. 1 si dimostra tra l'altro co-

(1) Cfr. [12], teor. 2.23 a pag. 515, e teor. 3.11 a pag. 519; altri teoremi di rappresentazione sono dimostrati in [18], [13], [14], [1]; vedi anche [7], cap. IV, pp. 96-110. Per reticoli lineari normati, vedi [11] e [10].

(2) Cfr. [4], [8], [9].

me, introducendo una opportuna topologia nell'insieme $\mathcal{C}$ degli ultrafiltri d'un reticolo booleano $\mathcal{A}$ $\aleph_0$-completo, le funzioni misurabili «finite» d'ultrafiltro relative ad $\mathcal{A}$ risultano esser null'altro che le applicazioni continue dello spazio $\mathcal{C}$ nello spazio dei numeri reali impropri, per le quali l'immagine inversa di $\pm\infty$ è ovunque non densa (3); ai nn. 1, 2 si introducono nozioni sussidiarie.

1. Generalità sui reticoli booleani. Per reticolo *booleano* s'intende un reticolo distributivo e complementato, dotato di minimo e di massimo elemento. In un tale reticolo, come in qualunque altro, indicheremo con $\leqq$ la relazione d'ordine, con O l'elemento minimo, con I l'elemento massimo, con $\wedge$ e con $\bigwedge$ l'operazione d'interferenza ($=$ massimo comune minorante), con $\vee$ e con $\bigvee$ l'operazione di congiunzione ($=$ minimo comune maggiorante), con $\llcorner\!\_$ l'operazione di complemento relativo, $x \llcorner\!\_\, y$ essendo un elemento z verificante le condizioni: $z \wedge y = O$, $z \vee y = x \vee y$ (4); quando occorra distinguere tra reticoli diversi, questi simboli verranno contrassegnati con il nome del reticolo cui si riferiscono, a guisa di indice. Dato un numero cardinale $\aleph \geqq \aleph_0$, si dice che un reticolo è [relativamente] $\aleph$-completo, o che è un $\aleph$-reticolo, quando risulta dotata d'interferenza e congiunzione qualunque famiglia [limitata] d'elementi del reticolo, purchè di potenza non superiore a $\aleph$ (5).

Per *ultrafiltro* d'un dato reticolo booleano s'intende un insieme a di elementi del reticolo, verificante le condizioni seguenti:

$O \notin a$; $I \in a$; se è $A_1 \in a$ ed $A_2 \in a$, allora è anche $A_1 \wedge A_2 \in a$, e viceversa; se è $A_1 \in a$ od $A_2 \in a$, allora è anche $A_1 \vee A_2 \in a$, e viceversa (A_1, A_2 essendo due elementi arbitrari del reticolo) (6).

Dato un reticolo boleano $\mathcal{A}$, indicheremo con $\mathcal{C}$ l'insieme degli ultrafiltri di $\mathcal{A}$, con ω l'applicazione $\omega : A \rightarrow \{a : A \in a \in \mathcal{C}\}$ per $A \in \mathcal{A}$, con $\omega\mathcal{A}$ la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathcal{C}$ descritta da ωA al variar di A in $\mathcal{A}$; tale famiglia risulta ovviamente chiusa rispetto alle operazioni (binarie) d'intersezione, unione e differenza: essa verrà assunta come base d'aperti per l'ambiente $\mathcal{C}$. Si ha il classico teorema di STONE:

1.1. *L'applicazione ω è un isomorfismo della struttura $\langle \mathcal{A}, \leqq, O, I, \wedge, \vee, \llcorner\!\_ \rangle$ sulla struttura $\langle \omega\mathcal{A}, \subset, \emptyset, \mathcal{C}, \cap, \cup, - \rangle$; l'insieme $\mathcal{C}$ risulta uno*

(3) Cfr. con [19].

(4) In un reticolo la relazione $\leqq$ è transitiva, riflessiva, antisimmetrica, le due operazioni $\wedge$ e $\vee$ sono commutative, associative, e verificano l'identità: $x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$; in un reticolo distributivo le due operazioni (binarie) $\vee$ e $\wedge$ sono anche distributive l'una rispetto all'altra; in un reticolo booleano il complemento relativo tra due elementi esiste sempre ed è unico.

(5) Un reticolo è detto *completo*, quando è $\aleph$-completo quale che sia $\aleph$.

(6) Cfr. [3], pag. 166.

spazio topologico normale, compatto, totalmente sconnesso, nel quale $\omega \mathcal{A}$ rappresenta la totalità degli insiemi che sono simultaneamente aperti e chiusi (7).

Dato un reticolo booleano $\mathcal{A}$, chiamiamo $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ l'insieme delle funzioni a valori reali impropri, continue nell'insieme $\mathfrak{A}$, infinite al più su un sottoinsieme ovunque non-denso di $\mathfrak{A}$; chiamiamo $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ l'insieme delle funzioni a valori reali impropri definite in $\mathfrak{A}$, e verificanti la seguente condizione: per ciascuna di esse, f, e per ciascun numero reale λ, esiste un elemento $A_f(\lambda)$ di $\mathcal{A}$ tale che sia $\{a : f(a) < \lambda\} \subset \omega A_f(\lambda) \subset \{a : f(a) \leqq \lambda\}$, con $O = \bigwedge_{k=1}^{\infty} A_f(-k)$, $I = \bigvee_{k=1}^{\infty} A_f(k)$ [*funzioni misurabili finite d'ultrafiltro*]; è chiaro che, se è $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, è pure, per ogni $a \in \mathfrak{A}$, $f(a) = \inf\{\lambda : A_f(\lambda) \in a\}$ (8).

Tra le due classi di funzioni $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ sussistono le relazioni seguenti:

1.2. $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Data una funzione f della classe $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, per ogni numero reale λ si ha: $\bigcup_{k=1}^{\infty} \omega A_f\left(\lambda - \frac{1}{k}\right) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{a : f(a) \leqq \lambda - \frac{1}{k}\right\} = \{a : f(a) < \lambda\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{a : f(a) < \lambda - \frac{1}{k}\right\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \omega A_f\left(\lambda - \frac{1}{k}\right)$, da cui risulta che l'insieme $\{a : f(a) < \lambda\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \omega A_f\left(\lambda - \frac{1}{k}\right)$ è aperto; ciò dimostra che la funzione f è continua in $\mathfrak{A}$. In secondo luogo, se si ha $A \in \mathcal{A}$, $\omega A \subset \{a : f(a) = -\infty\}$, si avrà anche $\omega A \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \omega A_f(-k)$, quindi $A \leqq A_f(-k)$ per $k = 1, 2, \ldots$, quindi $O \leqq A \leqq \bigwedge_{k=1}^{\infty} A_f(-k) = O$, $\omega A = \varnothing$; ne segue che l'insieme $\{a : f(a) = -\infty\}$ non contiene aperti non vuoti, e quindi è ovunque non denso. In modo analogo si vede che anche l'insieme $\{a : f(a) = +\infty\}$ è ovunque non denso, e ciò completa la dimostrazione (9).

Reciprocamente:

1.3. *Se il reticolo booleano $\mathcal{A}$ è $\aleph_0$-completo, allora è:* $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

(i) Sia una funzione $f \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ ed un numero reale λ. L'insieme $\{a : f(a) < \lambda\}$ è aperto, quindi è unione di certi elementi della famiglia $\omega \mathcal{A}$, i quali, comunque si fissi il numero naturale k, costituiscono un ricopri-

(7) Cfr. [16], pag. 155, teor. 18.6; in quel contesto *vollkompakt*, da me tradotto *compatto* secondo l'uso più recente, è equivalente al *bicompatto* di P. ALEXANDROFF e P. URYSOHN, com'è dimostrato in [16], pag. 99, teor. 12.4.

(8) Cfr. [2], pag. 244, [3], pag. 172; cfr. anche *Ortsfunktion*, in [5].

(9) Questo risultato è, sostanzialmente, dimostrato in [2], pag. 237, teor. VI.

mento aperto dell'insieme $\left\{a : f(a) \leqq \lambda - \frac{1}{k}\right\}$; ma quest'ultimo è compatto, dunque è ricoperto anche da un numero finito di tali elementi di $\omega \mathcal{A}$, la cui unione sarà ancora un elemento di $\omega \mathcal{A}$, chiamiamolo $\omega A_f^{(k)}(\lambda)$, verificante la relazione: $\left\{a : f(a) \leqq \lambda - \frac{1}{k}\right\} \subset \omega A_f^{(k)}(\lambda) \subset \{a : f(a) < \lambda\}$. Pertanto, posto $A_f(\lambda) = \bigvee_{k=1}^{\infty} A_f^{(k)}(\lambda)$, avremo: $\{a : f(a) < \lambda\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \omega A_f^{(k)}(\lambda) \subset \omega A_f(\lambda)$.

Analogamente, per ogni numero naturale k, si costruisce un elemento $B_f^{(k)}(\lambda)$ di $\mathcal{A}$, verificante la condizione: $\left\{a : f(a) \geqq \lambda + \frac{1}{k}\right\} \subset \omega B_f^{(k)}(\lambda) \subset \{a : f(a) > \lambda\}$; pertanto, posto $B_f(\lambda) = \bigvee_{k=1}^{\infty} B_f^{(k)}(\lambda)$, avremo $\{a : f(a) > \lambda\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \omega B_f^{(k)}(\lambda) \subset \subset \omega B_f(\lambda)$.

D'altra parte, dati ad arbitrio due numeri naturali h e k, si ha $\omega A_f^{(h)}(\lambda) \cap \omega B_f^{(k)}(\lambda) \subset \{a : f(a) < \lambda\} \cap \{a : f(a) > \lambda\} = \emptyset$, quindi $A_f^{(h)}(\lambda) \wedge B_f^{(k)}(\lambda) = O$, da cui $A_f(\lambda) \wedge B_f(\lambda) = \bigvee_{h=1}^{\infty} \bigvee_{k=1}^{\infty} [A_f^{(h)}(\lambda) \wedge B_f^{(k)}(\lambda)] = O$, e pertanto $\omega A_f(\lambda) \cap \omega B_f(\lambda) = \emptyset$.

Si conclude che è $\{a : f(a) < \lambda\} \subset \omega A_f(\lambda) \subset \{a : f(a) \leqq \lambda\}$, ossia che f è una funzione misurabile d'ultrafiltro.

(ii) Nell'insieme aperto $\omega \bigwedge_{k=1}^{\infty} A_f(-k) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \omega A_f(-k)$ si avrà poi identicamente $f(a) = -\infty$, e quindi dovrà essere $\omega \bigwedge_{k=1}^{\infty} A_f(-k) = \emptyset$ (l'unico insieme aperto e ovunque non denso è appunto l'insieme vuoto), da cui segue $\bigwedge_{k=1}^{\infty} A_f(-k) = O$. In modo analogo si dimostra che è $\bigvee_{k=1}^{\infty} A_f(k) = \mathrm{I}$, e ciò completa la dimostrazione del teorema [10].

Aggiungiamo ancora le seguenti osservazioni, supponendo $\mathcal{A}$ un reticolo booleano $\aleph_0$-completo. In primo luogo, se è $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, è anche $-f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, con $A_{-f}(\lambda) = \mathrm{I} \mathbin{\lfloor\!\!\underline{\ \ }} A_f(-\lambda)$ [11]. In secondo luogo, se è $f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ed α è un numero reale positivo, è anche $\alpha f \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, con $A_{\alpha f}(\lambda) = A_f\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$ [12]. In terzo luogo, se è f, $g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, si ha anche $f + g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, $f \cup g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, $f \cap g \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, potendosi porre $A_{f+g}(\lambda) = \bigvee_{r+s<\lambda} [A_f(r) \wedge A_g(s)]$, ovvero anche

---

(10) Un risultato analogo è enunciato in [17] a proposito degli « omomorfismi reali », a pag. 155.

(11) Cfr. [2], teor. IV (1), pag. 233.

(12) Dimostrazione immediata, in quanto $\alpha f(a) < \lambda$ quando e solo quando $f(a) < \lambda/\alpha$.

$A_{f+g}(\lambda) = \bigwedge_{r+s>\lambda} [A_f(r) \vee A_g(s)]$, dove gl'indici r ed s sono da prender razionali, $A_{f\cup g}(\lambda) = A_f(\lambda) \wedge A_g(\lambda)$, $A_{f\cap g}(\lambda) = A_f(\lambda) \vee A_g(\lambda)$ ([13]).

2. Generalità sui reticoli lineari. Per reticolo *lineare* s'intende un insieme lineare sul corpo reale, che contemporaneamente sia un reticolo, e verifichi le condizioni seguenti:

(i) se è $x \leqq y$, allora è anche $x + z \leqq y + z$, e viceversa,

(ii) se è $x \geqq 0$ ed $\alpha \geqq 0$, allora è anche $\alpha x \geqq 0$,

dove x, y, z sono vettori ed α uno scalare arbitrari. In generale indicheremo con 0 sia lo zero scalare che il vettore nullo; inoltre, per ogni vettore x, si pone: $x^+ = x \vee 0$, $x^- = (-x) \vee 0$, $|x| = x^+ + x^-$, risultando $x = x^+ - x^-$, $x^+ \wedge x^- = 0$. Due vettori x ed y verranno detti *tra loro ortogonali* (in simboli $x \perp y$) quando è $|x| \wedge |y| = 0$ ([14]).

Per *unità di* FREUDENTHAL, o semplicemente *unità*, d'un reticolo lineare si intende un vettore positivo (ossia > 0) che sia ortogonale al solo vettore nullo; una tale unità verrà indicata con 1 (coerentemente, con uno stesso simbolo s'indicherà sia un numero reale, sia il prodotto di questo numero per la data unità ([15])). Si chiama *base* d'un reticolo lineare dotato d'unità 1 l'insieme dei vettori u verificanti la condizione: $u \wedge (1 - u) = 0$; è chiaro che tale condizione è verificata dai vettori 0 ed 1, e che qualunque vettore u la verifichi dev'essere intermedio fra questi: $0 \leqq u \leqq 1$.

Sui reticoli lineari son ben noti i seguenti teoremi elementari:

2.1. *Ogni reticolo lineare è un reticolo distribuitivo* ([16]).

2.2. *La base $\mathcal{A}$ d'un reticolo lineare $\mathcal{L}$, dotato d'unità* 1, *è sempre un reticolo booleano, ove si assuma in $\mathcal{A}$ come relazione d'ordine $\leqq_{\mathcal{A}}$ quella*

---

(13) Cfr. [2], teor. III e teor. IV (3), pag. 232-233. Da notare che *direttamente* la funzione $f + g$ è definita solo dove f e g non siano simultaneamente infinite e di segno opposto, quindi in un insieme denso su $\mathcal{Q}$ ed aperto; tuttavia, ponendo $(f + g)(a) = \inf\{\lambda : \bigvee_{r+s<\lambda} [A_f(r) \wedge A_g(s)] \in a\}$, la definizione di $f + g$ si prolunga in modo coerente su tutto l'insieme $\mathcal{Q}$, ed invariante rispetto alle possibili scelte delle «scale» $\{A_f(\lambda)\}$, $\{A_g(\lambda)\}$. Notiamo che $f \cup g\ [f \cap g]$ rappresenta la funzione che nel generico ultrafiltro a ha valore eguale al maggiore [al minore] dei due valori $f(a)$ e $g(a)$.

(14) Cfr. ad es. [6] — testo scolastico, a cui rinviamo per tutte le nozioni elementari sui reticoli lineari — pag. 52 e sgg.

(15) Si noti che l'applicazione $\alpha \to \alpha \cdot 1$ è un isomorfismo dell'insieme dei numeri reali (pensato come reticolo lineare, in modo ovvio) sulla varietà lineare generata dal vettore 1, pensata anch'essa come reticolo lineare, immerso a quello dato: perciò dalla identificazione tra α e $\alpha \cdot 1$ non può sorgere equivoco.

(16) Cfr. [6], pag. 55, teor. 2.1.6.

subordinata dalla relazione $\leqq_{\mathcal{L}}$ *definita in* $\mathcal{L}$; *per il reticolo* $\mathcal{A}$ *si ha poi:* $O_{\mathcal{A}} = 0_{\mathcal{L}}$, $I_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{L}}$, $u \wedge_{\mathcal{A}} v = u \wedge_{\mathcal{L}} v$, $u \vee_{\mathcal{A}} v = u \vee_{\mathcal{L}} v$, $I_{\mathcal{A}} \,|\!\!-_{\mathcal{A}} u = 1_{\mathcal{L}} - u$, *dove* u *e* v *sono due arbitrari elementi di* $\mathcal{A}$ (17).

2.3. *Due basi d'un medesimo reticolo lineare* $\aleph_0$*-completo, relative a due diverse unità, sono sempre reticoli tra loro isomorfi* (18).

Si ha inoltre:

2.4. *La base d'un reticolo lineare relativamente* $\aleph$*-completo e dotato d'unità è un reticolo booleano* $\aleph$*-completo.*

Sia $\mathcal{L}$ il reticolo lineare in esame, 1 una sua unità, $\mathcal{A}$ la base ad essa relativa; sia $\{u_\iota\}$ una famiglia d'elementi di $\mathcal{A}$, avente potenza non superiore a $\aleph$, e poniamo $v_\iota = 1 - u_\iota$ per ogni indice ι; ovviamente anche la famiglia $\{v_\iota\}$ è contenuta in $\mathcal{A}$ ed ha potenza non superiore a $\aleph$. Ponendo poi $u = \bigvee_\iota u_\iota$, $v = \bigwedge_\iota v_\iota$ avremo $0 \leqq u \wedge v = \bigvee_\iota u_\iota \wedge \bigwedge_\varkappa v_\varkappa = \bigvee_\iota [u_\iota \wedge \bigwedge_\varkappa v_\varkappa] \leqq \bigvee_\iota (u_\iota \wedge v_\iota) = 0$, $1 \geqq u \vee v = \bigvee_\iota u_\iota \vee \bigwedge_\varkappa v_\varkappa = \bigwedge_\varkappa [v_\varkappa \vee \bigvee_\iota u_\iota] \geqq \bigwedge_\varkappa (v_\varkappa \vee u_\varkappa) = 1$, quindi $u \wedge v = 0$, $u + v = u \vee v = 1$; ne segue $u \in \mathcal{A}$, $v \in \mathcal{A}$. Ciò basta a provare l'asserto, in quanto la relazione tra le due famiglie $\{u_\iota\}$ e $\{v_\iota\}$ è simmetrica (16).

3. **Il reticolo lineare generato da un $\aleph$-reticolo booleano**. Sia dato ora un reticolo booleano $\mathcal{A}$, l'insieme dei suoi ultrafiltri $\mathcal{C}$, l'insieme $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ delle sue funzioni misurabili finite d'ultrafiltro. Si ha:

3.1. *Se il reticolo booleano* $\mathcal{A}$ *è* $\aleph$*-completo, con* $\aleph \geqq \aleph_0$*, allora la classe di funzioni* $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ *costituisce un reticolo lineare relativamente* $\aleph$*-completo e dotato d'unità.*

Che $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ sia un reticolo lineare è conseguenza immediata delle 1.2, 1.3, e delle osservazioni finali del n. 1; dimostriamo ch'esso è relativamente $\aleph$-completo. Sia $\{f_\iota\}$ una famiglia di funzioni della classe $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, di potenza non superiore a $\aleph$, minorata dalla funzione f' e maggiorata dalla f'', entrambe appartenenti ad $\mathcal{M}(\mathcal{A})$; poniamo: $B^*(\lambda) = \bigwedge_\iota A_{f_\iota}(\lambda)$, $B_*(\lambda) = \bigvee_\iota A_{f_\iota}(\lambda)$, $f^*(a) = \inf\{\lambda : B^*(\lambda) \in a\}$, $f_*(a) = \inf\{\lambda : B_*(\lambda) \in a\}$, per ogni $a \in \mathcal{C}$. Con queste posizioni si ha $B^*(\lambda) \leqq A_{f_\iota}(\lambda)$ per ogni ι e per ogni numero reale λ, da cui segue $f^*(a) \geqq f_\iota(a)$ per ogni ι e per ogni $a \in \mathcal{C}$; viceversa, detta g una funzione della classe $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ che maggiori la famiglia $\{f_\iota\}$, avremo, per ogni ι e per ogni coppia λ, μ di numeri reali con $\lambda < \mu$, $A_g(\lambda) \leqq A_{f_\iota}(\mu)$, quindi $A_g(\lambda) \leqq B^*(\mu)$, quindi ancora $f^*(a) \leqq g(a)$ per ogni $a \in \mathcal{C}$; è banale infine che

(17) Cfr. [6], pag. 106, teor. 1.1.3.
(18) Cfr. [6] pag. 109, teor. 1.2.2.

sia $\{a : f^*(a) < \lambda\} \subset \omega\, B^*(\lambda) \subset \{a : f^*(a) \leqq \lambda\}$. Analogamente si dimostra che f_* è la massima funzione misurabile d'ultrafiltro che minori la famiglia di funzioni $\{f_\iota\}$; la limitazione $f' \leqq f_* \leqq f^* \leqq f''$ assicura poi che gl'insiemi $\{a : |f^*(a)| = +\infty\}$ e $\{a : |f_*(a)| = +\infty\}$ sono ovunque non-densi.

È poi immediato che la funzione identica ad uno in $\mathcal{C}$ sia una unità per il reticolo lineare $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, e che la funzione identica a zero sia il vettore nullo dello stesso reticolo; coerentemente, le indicheremo con 1 e 0, rispettivamente; diremo che $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ è il reticolo lineare *generato* dal reticolo booleano $\mathcal{A}$, ed indicheremo con $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ la base di $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ relativa alla unità 1. Si ha inoltre:

3.2. *Qualunque $\aleph_0$-reticolo booleano è isomorfo alla base del reticolo lineare ch'esso genera* (19).

Questa proprietà è conseguenza immediata della seguente:

3.3. *Gli elementi della base $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ sono tutte e sole le funzioni caratteristiche, entro l'ambiente $\mathcal{C}$, degli insiemi della classe $\omega\,\mathcal{A}$.*

(i) Se u è la funzione caratteristica d'un insieme della classe $\omega\,\mathcal{A}$, $1 - u$ risulta la funzione caratteristica dell'insieme complementare, anch'esso della classe $\omega\,\mathcal{A}$, e quindi $u \wedge (1 - u) = 0$; dunque $u \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$.

(ii) Sia, viceversa, $u \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$, e poniamo $v = 1 - u \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$; la condizione $u \wedge v = 0$ si traduce nella seguente:

$$A_u(\lambda) \vee A_v(\lambda) = O \quad \text{per} \quad \lambda < 0\,, \qquad A_u(\lambda) \vee A_v(\lambda) = I \quad \text{per} \quad \lambda > 0\,,$$

mentre la condizione $u + v = 1$ si traduce prima nella $u \vee v = 1$, poi nella

$$A_u(\lambda) \wedge A_v(\lambda) = O \quad \text{per} \quad \lambda < 1\,, \qquad A_u(\lambda) \wedge A_v(\lambda) = I \quad \text{per} \quad \lambda > 1\,.$$

Da queste relazioni si deduce che: per $\lambda < 0$ si ha $A_u(\lambda) = A_v(\lambda) = O$; per $\lambda > 1$ si ha $A_u(\lambda) = A_v(\lambda) = I$; per $0 < \lambda < 1$ si ha $A_u(\lambda) = I \,\llcorner\, A_v(\lambda)$ e quindi, dovendo tanto $A_u(\lambda)$ che $A_v(\lambda)$ essere non decrescenti rispetto a λ, $A_u(\lambda) = A_u\left(\frac{1}{2}\right)$. Si conclude che u è la funzione caratteristica dello insieme $\omega\, A_u\left(\frac{1}{2}\right)$.

4. Il teorema di rappresentazione.

Sia ora $\mathcal{L}$ un reticolo lineare relativamente $\aleph$-completo, con $\aleph \geqq \aleph_0$, e dotato d'unità 1; sia $\mathcal{A}$ la base del

(19) Per il teorema 2.3, è inutile specificare di *quale* base concreta si tratti.

reticolo $\mathcal{L}$, relativa alla unità menzionata, $\mathcal{a}$ la totalità degli ultrafiltri di $\mathcal{A}$, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ il reticolo lineare generato da $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ la base del reticolo $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ definita al n. 3. In base ai lemmi 2.4 e 3.1, si ha:

4.1. *Il reticolo lineare $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ è relativamente $\aleph$-completo.*

In secondo luogo, dato un elemento x del reticolo $\mathcal{L}$ ed un numero reale λ, consideriamo l'elemento $L(x, \lambda) = \bigvee_{k=1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - x)^+] \in \mathcal{L}$, nonchè l'elemento $M(x, \lambda) = 1 - L(x, \lambda)$; in base alla dimostrazione del teorema 3.3 a pag. 13 di [15] si ha $L(x, \lambda) \wedge M(x, \lambda) = 0$, e quindi $L(x, \lambda) \in \mathcal{A}$. Perciò, ponendo

$$(\tau x)(a) = \inf\{\lambda : \bigvee_{k=1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - x)^+] \in a\} \quad \text{per} \quad a \in \mathcal{a},$$

si definisce una funzione τx misurabile d'ultrafiltro relativa ad $\mathcal{A}$. D'altronde, in base alla dimostrazione del teor. 1.3.2. (1), (2) a pag. 114 di [6], si ha $L(x, \lambda) \leqq L(x, \mu)$ per $\lambda < \mu$, ed inoltre $0 = \bigwedge_{h=1}^{\infty} L(x, -h)$, $1 = \bigvee_{h=1}^{\infty} L(x, h)$ [20]; pertanto:

4.2. *Dato in $\mathcal{L}$ l'elemento x, la funzione τx appartiene alla classe $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, con $A_{\tau x}(\lambda) = \bigvee_{k=1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - x)^+]$ per ogni numero reale λ.*

Dimostriamo ora che:

4.3 *Dati in $\mathcal{L}$ gli elementi x e y, si ha: $\tau x + \tau y = \tau(x + y)$.*

(i) Dato ad arbitrio un numero reale λ, siano r ed s due numeri razionali aventi somma maggiore di λ. Avremo, successivamente,

$$(\lambda - x - y)^+ \leqq (r + s - x - y)^+ = [(r - x) + (s - y]^+ =$$

$$= \{[(r - x) \wedge (s - y)] + [(r - x) \vee (s - y)]\}^+ \leqq 2\,[(r - x) \vee (s - y)]^+ \text{ [21]},$$

quindi

$$\bigvee_{k=1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - x - y)^+] \leqq \bigvee_{k=1}^{\infty} \{1 \wedge 2k\,[(r - x) \vee (s - y)]^+\},$$

---

[20] In base alla 1.3.1., pag. 113, di [6], $'L(x, \lambda)$ coincide con l'elemento ivi chiamato e_λ^x.

[21] In ogni reticolo lineare si ha: $p + q = (p \wedge q) + (p \vee q)$, $2(p^+) = (2p)^+$; cfr. [6], pag. 53, teor. 2.1.3 (3), e pag. 56, teor. 2.1.7 (5).

quindi

$$\bigvee_{k=1}^{\infty}[1\wedge k(\lambda-x-y)^+]\leqq\bigwedge_{r+s>\lambda}\bigvee_{k=1}^{\infty}\{1\wedge 2k[(r-x)\vee(s-y)]^+\}=$$

$$=\bigwedge_{r+s>\lambda}\bigvee_{k=1}^{\infty}\{1\wedge k[(r-x)\vee(s-y)]^+\}=\bigwedge_{r+s>\lambda}\{\bigvee_{h=1}^{\infty}[1\wedge h(r-x)^+]\vee\bigvee_{k=1}^{\infty}[1\wedge k(s-y)^+]\}\ (^{22}),$$

quindi

$$A_{\tau(x+y)}(\lambda)\leqq\bigwedge_{r+s>\lambda}[A_{\tau x}(r)\vee A_{\tau y}(s)]=A_{\tau x+\tau y}(\lambda),$$

ed infine

$$\tau x+\tau y\leqq\tau(x+y).$$

(ii) Dato ad arbitrio un numero reale λ, siano r ed s due numeri razionali aventi somma minore di λ. Avremo, successivamente,

$$[(r-x)\wedge(s-y)]^+\leqq 2[(r-x)\wedge(s-y)]^+=\{[(r-x)\wedge(s-y)]+[(r-x)\wedge(s-y)]\}^+\leqq$$

$$\leqq\{[(r-x)\wedge(s-y)]+[(r-x)\vee(s-y)]\}^+=[(r-x)+(s-y)]^+=$$

$$=(r+s-x-y)^+\leqq(\lambda-x-y)^+\ (^{21}),$$

quindi

$$\bigvee_{k=1}^{\infty}[1\wedge k(\lambda-x-y)^+]\geqq\bigvee_{k=1}^{\infty}\{1\wedge k[(r-x)\wedge(s-y)]^+\},$$

quindi

$$\bigvee_{k=1}^{\infty}[1\wedge k(\lambda-x-y)^+]\geqq\bigvee_{r+s<\lambda}\bigvee_{k=1}^{\infty}\{1\wedge k[(r-x)\wedge(s-y)]^+\}=$$

$$=\bigvee_{r+s<\lambda}\bigvee_{k=1}^{\infty}\{[1\wedge k(r-x)^+]\wedge[1\wedge k(s-y)^+]\}=$$

$$=\bigvee_{r+s<\lambda}\bigvee_{k=1}^{\infty}\bigvee_{h=1}^{\infty}\{[1\wedge k(r-x)^+]\wedge[1\wedge h(s-y)^+]\}=$$

$$=\bigvee_{r+s<\lambda}\{\bigvee_{k=1}^{\infty}[1\wedge k(r-x)^+]\wedge\bigvee_{h=1}^{\infty}[1\wedge h(s-y)^+]\}\ (^{23}),$$

---

(22) In qualunque $\aleph_0$-reticolo si ha: $\bigvee_{k=1}^{\infty}p_k\vee\bigvee_{k=1}^{\infty}q_k=\bigvee_{k=1}^{\infty}(p_k\vee q_k)$; cfr. [16], pag. 6, teor. 1.4.

(23) Si tenga presente che in qualunque $\aleph_0$-reticolo distributivo, se le due successioni $\{p_k\}$ e $\{q_k\}$ sono non decrescenti, si ha $p_h\wedge q_k\leqq p_{h+k}\wedge q_{h+k}$, e quindi $\bigvee_{h=1}^{\infty}p_h\wedge\bigvee_{k=1}^{\infty}q_k=$ $=\bigvee_{h=1}^{\infty}\bigvee_{k=1}^{\infty}(p_h\wedge q_k)\leqq\bigvee_{n=1}^{\infty}(p_n\wedge q_n)$, mentre è ovviamente $\bigvee_{h=1}^{\infty}\bigvee_{k=1}^{\infty}(p_h\wedge q_k)\geqq\bigvee_{n=1}^{\infty}(p_n\wedge q_n)$; pertanto è $\bigvee_{h=1}^{\infty}p_h\wedge\bigvee_{k=1}^{\infty}q_k=\bigvee_{n=1}^{\infty}(p_n\wedge q_n)$.

quindi

$$A_{\tau(x+y)}(\lambda) \geqq \bigvee_{r+s<\lambda} [A_{\tau x}(r) \wedge A_{\tau y}(s)] = A_{\tau x+\tau y}(\lambda),$$

ed infine

$$\tau x + \tau y \geqq \tau(x+y).$$

4.4. *Dato un elemento x di $\mathcal{L}$ ed un numero reale α, si ha: $\alpha(\tau x) = \tau(\alpha x)$.*

(i) Se α è positivo, si ha $\bigvee_{k=1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - \alpha x)^+] = \bigvee_{k=1}^{\infty} \left[1 \wedge k\alpha\left(\frac{\lambda}{\alpha} - x\right)^+\right] =$ $= \bigvee_{k=1}^{\infty} \left[1 \wedge k\left(\frac{\lambda}{\alpha} - x\right)^+\right]$, quindi $A_{\tau(\alpha x)}(\lambda) = A_{\tau x}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$, per ogni numero reale λ, ed infine la tesi.

(ii) Sia ora $\alpha = 0$. Poichè è $\bigvee_{k=1}^{\infty} (1 \wedge k\lambda^+) = \bigvee_{k=1}^{\infty} (1 \wedge k\lambda) = 1$ per ogni valore positivo di λ, ed è $\bigvee_{k=1}^{\infty} (1 \wedge k\lambda^+) = \bigvee_{k=1}^{\infty} (1 \wedge 0) = 0$ per ogni valore negativo di λ, si avrà $(\tau 0)(a) = \inf\{\lambda : \bigvee_{k=1}^{\infty} (1 \wedge k\lambda^+) \in a\} = 0$ per $a \in \mathcal{A}$.

(iii) Se α è negativo, si ha: $\tau(\alpha x) + \tau(|\alpha| x) = \tau 0 = 0$, quindi $\tau(\alpha x) = -\tau(|\alpha| x) = -|\alpha|(\tau x) = \alpha(\tau x)$.

4.5. *Dato un elemento x di $\mathcal{L}$, se è $\tau x = 0$ è anche $x = 0$.*

(i) Se $\tau x \geqq 0$, allora è $\inf\{\lambda : \bigvee_{k=1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - x)^+] \in a\} \geqq 0$, per ogni $a \in \mathcal{A}$; quindi, per $\lambda < 0$, l'elemento $\bigvee_{k=1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - x)^+]$ non appartiene ad alcun ultrafiltro di $\mathcal{A}$; ne segue $0 \leqq 1 \wedge (\lambda - x)^+ \leqq \bigvee_{k=1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - x)^+] = 0$, quindi $(\lambda - x)^+ = 0$, quindi $x \geqq \lambda$ per ogni $\lambda < 0$; si conclude: $x \geqq 0$ [24].

(ii) D'altra parte, dalla $\tau x \leqq 0$ segue $\tau(-x) = -\tau x \geqq 0$, da cui $-x \geqq 0$, e quindi $x \leqq 0$.

4.6. *Dati due elementi x ed y di $\mathcal{L}$, si ha $\tau x \leqq \tau y$ quando e solo quando è $x \leqq y$.*

Dalla ipotesi $x \leqq y$ segue, per ogni numero reale λ, $(\lambda - x)^+ \geqq (\lambda - y)^+$, da cui $\bigvee_{k=1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - x)^+] \geqq \bigvee_{k=1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - y)^+]$, da cui $\tau x \leqq \tau y$. Viceversa, dalla $\tau x \leqq \tau y$ segue $\tau(y - x) = \tau y - \tau x \geqq 0$, da cui $y - x \geqq 0$ in virtù della 4.5 (i), e quindi $y \geqq x$.

---

[24] $\mathcal{L}$ è archimedeo, essendo $\aleph_0$-completo (cfr. [6], pag. 69, teor. 3.1.3), dunque dalla condizione: $x \geqq -1/k$ (che implica $k(-x) \leqq 1$) per ogni $k = 1, 2, \ldots$, si deduce $-x \leqq 0$ (cfr. [6], pag. 51, teor. 1.2.19).

4.7. *Dato un elemento u di $\mathcal{A}$, τu è la funzione caratteristica dell'insieme ωu nell'ambiente $\mathfrak{A}$.*

(i) Sia λ un numero negativo; allora si ha: $\lambda - u < 0$, quindi $(\lambda - u)^+ = 0$, quindi $\bigvee_{k=1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - u)^+] = 0 \notin a$, quale che sia $a \in \mathfrak{A}$.

(ii) Sia λ un numero maggiore di uno, e k un numero naturale maggiore di $1/(\lambda - 1)$; allora si ha: $k(\lambda - u)^+ = k(\lambda - u) \geqq k(\lambda - 1) > 1$, e quindi $\bigvee_{k=1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - u)^+] = 1 \in a$, quale che sia $a \in \mathfrak{A}$.

(iii) Sia λ un numero positivo e minor d'uno, sia $v = 1 - u$; avremo allora: $v \in \mathcal{A}$, $u \wedge v = 0$, $u \vee v = u + v = 1$; perciò: $(\lambda - u)^+ = [(\lambda - 1)u + \lambda v]^+ = 0 \vee (\lambda - 1) u \vee \lambda v = 0 \vee \lambda v = \lambda v$, da cui segue subito

$$\bigvee_{k=1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - u)^+] = \bigvee_{k=1}^{\infty} (1 \wedge k \lambda v) = v \quad \begin{cases} \in a & \text{per} \quad u \notin a \\ \notin a & \text{per} \quad u \in a \text{ (25)}. \end{cases}$$

In conclusione si ha

$$(\tau u)(a) = \inf \{\lambda : \bigvee_{k=1}^{\infty} [1 \wedge k(\lambda - u)^+] \in a\} = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad a \in \omega u \\ 0 & \text{per} \quad a \notin \omega u \end{cases} \quad \text{c.d.d.}.$$

4.8. *Tutti quegli elementi di $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ che sono «funzioni semplici» (ossia combinazioni lineari di funzioni caratteristiche d'insiemi della classe $\omega \mathcal{A}$) appartengono a $\tau \mathcal{L}$.*

Sia $f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$, dove α_k è un numero reale ed f_k la funzione caratteristica (entro l'ambiente $\mathfrak{A}$) dell'insieme ωu_k, con $u_k \in \mathcal{A}$; posto $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k$, avremo $\tau x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \tau u_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k = f$, per i lemmi 4.6, 4.3, 4.4.

4.9. *Tutti gli elementi positivi di $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ appartengono a $\tau \mathcal{L}$* (26).

---

(25) Da notare che, per $k > 1/\lambda$, si ha $1 \wedge k \lambda v = v$, in quanto è $(1 \wedge k \lambda v) - v = (1 - v) \wedge [(\lambda k - 1) v] = u \wedge [(k \lambda - 1) v] = 0$, essendo $u \perp v$; quindi è $v = \bigvee_{k=1}^{\infty} (1 \wedge k \lambda v)$.

(26) Per elemento positivo s'intende, ovviamente, un elemento che maggiori quello nullo, senza coincidere con esso; in questo caso, una funzione non negativa e non identicamente nulla.

(i) Sia f un elemento positivo di $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, sia $\{f_k\}$ una successione di funzioni semplici della classe $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, tali da aversi: $0 \leqq f_k \leqq f$, $f = \bigvee_{k=1}^{\infty} f_k$ (27); sia x_k un elemento di $\mathcal{L}$ tale da aversi $\tau x_k = f_k$ per $k = 1, 2, \ldots$, (lemma 4.8); sia $x = \bigvee_{k=1}^{\infty} x_k$, sia $g = \tau x$.

(ii) Si ha, per ogni numero naturale k, $g = \tau x \geqq \tau x_k = f_k$, e quindi $g \geqq \bigvee_{k=1}^{\infty} f_k = f$.

(iii) Supponiamo, per assurda ipotesi, che in un certo ultrafiltro $\ddot{a}$ sia $f(\ddot{a}) < g(\ddot{a})$, e quindi anche $f(\ddot{a}) < \lambda < \mu < g(\ddot{a})$, per due opportuni valori reali λ, μ. Allora esiste un elemento di $\mathcal{A}$, v, tale aversi $v \in \ddot{a}$ ed $f(a) < \lambda < \mu < g(a)$ per ogni $a \in \omega v$ (28); di qui segue subito, per il lemma 4.7, $(\mu - \lambda) \cdot \tau v \leqq g - f \leqq g - f_k = \tau x - \tau x_k =$ (per il lemma 4.3) $= \tau(x - x_k)$, e quindi, per il lemma 4.6 e 4.4, $(\mu - \lambda) \cdot v \leqq x - x_k$ per ogni numero naturale k, ed infine $(\mu - \lambda) \cdot v \leqq \bigwedge_{k=1}^{\infty} (x - x_k) = x - \bigvee_{k=1}^{\infty} x_k = 0$, il che è assurdo, perchè dalla $v \in \ddot{a} \in \mathcal{O}$ segue invece $v \neq 0$. Dunque dev'essere $f(a) = g(a)$ su tutto $\mathcal{O}$, e ciò prova che è $f = \tau x$.

4.10. *Tutti gli elementi di $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ appartengono a $\tau \mathcal{L}$.*

Sia f un elemento di $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, f^+ ed f^- rispettivamente la parte positiva e la parte negativa di f, anch'esse elementi di $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, x' ed x'' due elementi di $\mathcal{L}$, tali di aversi $\tau x' = f^+$, $\tau x'' = f^-$ (lemma 4.9); sia $x = x' - x''$. Avremo allora: $\tau x = \tau(x' - x'') = \tau x' - \tau x'' = f^+ - f^- = f$, per il lemma 4.3, 4.4, e pertanto $f \in \tau \mathcal{L}$.

Il lemma 4.10 dimostra che τ è un'applicazione di $\mathcal{L}$ su $\mathcal{M}(\mathcal{A})$; i lemmi 4.3 e 4.4 provano che tale applicazione è un omomorfismo lineare, il lemma 4.5 che, di più, è un isomorfismo lineare; ciò premesso, il lemma 4.6 dimostra che τ è anche un isomorfismo reticolare: il teorema III è provato.

---

(27) Sia $\{\lambda_k\}$ una successione di numeri reali, densa nell'intervallo $(0, +\infty)$, e poniamo $f_k(a) = 0$ per $a \in \omega A_f(\lambda_k)$, $f_k(a) = \lambda_k$ per $a \notin \omega A_f(\lambda_k)$; è subito visto che la successione $\{f_k\}$ soddisfa le condizioni enunciate (cfr. [2], dimostrazione del teorema VII, pagg. 237-238).

(28) Teorema detto « della permanenza del segno », per le funzioni (continue) f e g.

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDERSON-BLAIR, *Characterisation of certain lattices of functions,* in « Pacific J. Math. », 9 (1959), 335-364.

[2] F. BERTOLINI, *La teoria algebrica della misura e della integrazione, e suo rapporto con la teoria classica,* in « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », serie III, vol. XI, fasc. III-IV, 1957.

[3] F. BERTOLINI, *Le funzioni misurabili di punto (d'ultrafiltro) e la derivazione delle funzioni d'insieme (di soma) nella teoria algebrica della misura,* in « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », serie III, vol. XII, fasc. III, 1958.

[4] G. BIRKHOFF, R. S. PEIRCE, *Lattice ordered rings,* in « An. Acad. Brasil. Ci. », 28 (1956), 41-69.

[5] C. CARATHÉODORY, *Mass und Integral und ihre Algebraisierung,* Birkhäuser, Basel 1956.

[6] R. CRISTESCU, *Spatii liniare ordonate,* Editura Academiei R. P. R., Bucuresti 1959.

[7] M. M. DAY, *Normed linear spaces,* Springer, Berlin 1958.

[8] C. GOFFMANN, *A class of lattice ordered algebras,* in « Bull. Amer. Math. Soc. », 64 (1958), 170-173.

[9] C. GOFFMANN, *Remarks on lattice-ordered groups and vector lattices-I Carathéodory functions,* in « Trans. Amer. Math. Soc. », 88 (1958), 107-120.

[10] S. KAKUTANI, *Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem,* in « Annals of Mathematics », (2), 42 (1941), 523-537.

[11] S. KAKUTANI, *Concrete representation of abstract (M)-spaces,* in « Annals of Mathematics », (2), 42 (1941), 994-1024.

[12] L. V. KANTOROVIČ, B. Z. VULIH, A. G. PINSKER, *Funkcional'nyj analiz v poluuporjadočennyh prostranstvah,* Gostehizdat, Moskva-Leningrad 1950.

[13] M. G. KREJN, S. G. KREJN, *On an internal characterisation of the set of all continuous functions defined on a bicompact Hausdorff Space,* in « Doklady Akademii Nauk. S. S. S. R. », 27, (1940), 427-430.

[14] M. G. KREJN, S. G. KREJN, *Sur l'espace des fonctions continues definies sur un bicompact de Hausdorff et ses sousespaces semiordonnés,* in « Matematičeski Sbornik », 13 (1943), 3-38.

[15] H. NAKANO, *Semi-ordered linear spaces,* Maruzen, Tokyo 1955.

[16] G. NÖBELING, *Grundlagen der analytischen Topologie,* Springer, Berlin 1954.

[17] R. SIKORSKI, *Boolean algebras,* Springer, Berlin 1960.

[18] B. Z. VULIH, *Nekotorje voprosy teorii linejnyh poluuporjadočennyh množestv,* in « Izvestija Akad. Nauk S. S. S. R. », 17 (1953).