ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

G. LETTA

Generazione di reticoli normali. Applicazioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 14, nº 4 (1960), p. 377-383
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1960_3_14_4_377_0>

GENERAZIONE DI RETICOLI NORMALI. APPLICAZIONI

Nota di G. LETTA (a Napoli).

Sia E un insieme, $\mathcal{X}$ un reticolo di sottoinsiemi di E, di elemento massimo M, $\mathcal{Y}$ il reticolo complementare di $\mathcal{X}$ (ossia il reticolo costituito dai complementi, rispetto ad M, degli insiemi di $\mathcal{X}$). Il reticolo $\mathcal{X}$ si dice *σ-normale* (risp. *δ-normale*) se

(i) l'insieme vuoto $\varnothing$ appartiene ad $\mathcal{X}$;

(ii) per ogni $X \in \mathcal{X}$, esistono una successione (X_n) di insiemi di $\mathcal{X}$ ed una successione (Y_n) di insiemi di $\mathcal{Y}$ tali che sia

$$X_n \subseteq Y_n \subseteq X_{n+1} \text{ per } n \in N\,(^1) \text{ (risp. } X \supseteq Y_n \supseteq X_{n+1} \text{ per } n \in N)$$
$$\lim_n X_n = X.$$

Un reticolo $\mathcal{X}$ di sottoinsiemi di E si dice *relativamente σ-normale* (risp. *relativamente δ-normale*) se, per ogni $X \in \mathcal{X}$, la traccia di $\mathcal{X}$ su X è σ-normale (risp. δ-normale).

Sul concetto di reticolo relativamente σ-(risp. δ-)normale è basato il seguente teorema di prolungamento, dovuto a F. CAFIERO [4]:

Sia $\mathcal{X}$ un reticolo relativamente σ-(risp. δ-) normale di sottoinsiemi di E, e sia λ una funzione numerica finita, definita in $\mathcal{X}$, ivi monotona, modulare (²) *e σ-(risp. δ-)continua* (³), *con $\lambda(\varnothing) = 0$. Detto $\mathcal{L}$ il più piccolo σ-reticolo booleano di sottoinsiemi di E contenente $\mathcal{X}$, esiste una ed una sola misura σ-finita μ* in *$\mathcal{L}$, avente restrizione ad $\mathcal{X}$ eguale* a *λ.*

(¹) Qui e nel seguito, N denota l'insieme dei numeri interi positivi.

(²) Cioè soddisfacente alla condizione: $\lambda(X_1 \cup X_2) + \lambda(X_1 \cap X_2) = \lambda(X_1) + \lambda(X_2)$ per $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$.

(³) Cioè soddisfacente alla condizione: $\lambda(\lim_n X_n) = \lim_n \lambda(X_n)$ per ogni successione crescente (risp. decrescente) (X_n) di insiemi di $\mathcal{X}$ tale che $\lim_n X_n \in \mathcal{X}$.

Nella presente nota si espone un semplice metodo di generazione di reticoli relativamente σ-(risp. δ-) normali, a partire da speciali classi di funzioni numeriche. Precisamente, si dimostra che, se $\mathcal{R}$ è una classe di funzioni numeriche finite, definite in un insieme E, soddisfacente alle condizioni

(1) $$af + bg \in \mathcal{R} \text{ per } f, g \in \mathcal{R} \text{ ed } a, b \in R\,(^4)\,;$$

(2) $$|f| \in \mathcal{R} \text{ per } f \in \mathcal{R};$$

(3) $$f \cap 1 \in \mathcal{R} \text{ per } f \in \mathcal{R};$$

allora la famiglia dei sottoinsiemi di E della forma $(x : f(x) \geq 1)$ [risp. $(x : f(x) > 1)$], dove f è una funzione di $\mathcal{R}$, è un reticolo relativamente δ-(risp. σ-)normale.

Si applica poi tale risultato, ed il citato teorema di prolungamento di Cafiero, per dare una nuova dimostrazione del notissimo teorema (cfr. [6], p. 454), secondo il quale ogni funzionale lineare positivo e continuo su $\mathcal{R}$ può essere rappresentato mediante un integrale.

Sia E un insieme, $\mathcal{R}$ una classe di funzioni numeriche finite, definite in E, soddisfacente alle condizioni (1), (2), (3) [vedi sopra].

Le condizioni (1), (2) esprimono che $\mathcal{R}$ è un sottoreticolo vèttoriale del reticolo vettoriale R^E di tutte le funzioni numeriche finite definite in E (cfr. [3], p. 18). Le condizioni (1), (2), (3) sono in particolare verificate qualora $\mathcal{R}$ sia la classe delle funzioni continue a supporto compatto in uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto.

Designeremo con $\mathcal{R}^+$ l'insieme degli elementi ≥ 0 di $\mathcal{R}$.

Per ogni $I \subseteq E$, designeremo con χ_I la funzione caratteristica di I rispetto ad E. Porremo, infine:

$$\mathcal{F} = ((x : f(x) \geq 1) : f \in \mathcal{R}), \quad \mathcal{G} = ((x : f(x) > 1) : f \in \mathcal{R}).$$

1. *$\mathcal{F}$ (risp. $\mathcal{G}$) è un reticolo relativamente δ-(risp. σ-)normale di sottoinsiemi di E, e si ha*

(4) $$F - G \in \mathcal{F}, \quad G - F \in \mathcal{G} \quad \text{per } F \in \mathcal{F}, \quad G \in \mathcal{G}.$$

(^{4}) Qui e nel seguito, R denota il corpo dei numeri reali.

DIM. È evidente che $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono reticoli di sottoinsiemi di E e che $\emptyset \in \mathcal{F}$, $\emptyset \in \mathcal{G}$. Se $F = (x : f(x) \geq 1)$, $G = (x : g(x) > 1)$, $f, g \in \mathcal{R}$, allora

$$F - G = F \cap (x : 2[f(x) \cap 1] - g(x) \geq 1) \in \mathcal{F},$$

$$G - F = G \cap (x : 2[g(x) \cap 1] - f(x) > 1) \in \mathcal{G}.$$

Se $F = (x : f(x) \geq 1)$, $f \in \mathcal{R}$, allora, posto

$$F_n = (x : f(x) \geq n/(n+1)), \qquad G_n = (x : f(x) > n/(n+1)) \text{ per } n \in N,$$

si ha

$$F_n \supseteq G_n \supseteq F_{n+1} \text{ per } n \in N, \qquad \lim_n F_n = F.$$

Ciò, in virtù di (4), dimostra che $\mathcal{F}$ è relativamente δ-normale. Analogamente si prova che $\mathcal{G}$ è relativamente σ-normale.

2. *Se* $f \in \mathcal{R}$, $a, b \in R$, $a > b$, $F = (x : f(x) \geq a)$, $G = (x : f(x) > b)$, *allora esiste* $g \in \mathcal{R}$ *tale che* $\chi_F \leq g \leq \chi_G$ (*cfr.* [2], 1.2).

DIM. Posto $g = [(f \cap a) - (f \cap b)]/(a - b)$, si ha, per ogni $x \in E$,

$$x \notin G \implies (f(x) \leq b < a) \implies (g(x) = 0),$$

$$x \in G - F \implies (b < f(x) < a) \implies (0 < g(x) < 1),$$

$$x \in F \implies (b < a \leq f(x)) \implies (g(x) = 1).$$

3. *Se* $f \in \mathcal{R}$, $F = \overset{-1}{f}(C)$, $G = \overset{-1}{f}(A)$, *dove* C (*risp.* A) *è un intervallo chiuso* (*risp. aperto*) *della retta numerica, con* $C \subseteq A$, *allora esiste* $g \in \mathcal{R}$ *tale che* $\chi_F \leq g \leq \chi_G$.

DIM. Se si pone $C = [c_1, c_2]$, $A = (a_1, a_2)$, $F_1 = (x : f(x) \geq c_1)$, $G_1 = (x : f(x) > a_1)$, $F_2 (x : f(x) \geq a_2)$, $G_2 = (x : f(x) > c_2)$, esistono (prop. 2) g_1, $g_2 \in \mathcal{R}$ tali che $\chi_{F_i} \leq g_i \leq \chi_{G_i}$ per $i = 1, 2$. Posto $g = g_1 - g_2$, riesce

$$F = F_1 - G_2, \qquad G = G_1 - F_2, \qquad \chi_F = \chi_{F_1} - \chi_{G_2} \leq g \leq \chi_{G_1} - \chi_{F_2} = \chi_G.$$

4. *Se* $f \in \mathcal{R}$ *e* $(C_i)_{i \in I}$ *è una successione finita d'intervalli chiusi della retta numerica, a due a due disgiunti, allora esiste una successione finita* $(g_i)_{i \in I}$ *di funzioni di* $\mathcal{R}$, *tale che*

$$(5) \qquad 0 \leq g_i \leq 1, \quad g_i \cap g_j = 0 \text{ per } i \neq j, \quad g_i(x) = 1 \text{ per } x \in \overset{-1}{f}(C_i).$$

DIM. Sia $(A_i)_{i\in I}$ una successione finita di intervalli aperti, a due a due disgiunti, tali che $C_i \subseteq A_i$ per $i \in I$. Posto $F_i = \overset{-1}{f}(C_i)$, $G_i = \overset{-1}{f}(A_i)$ per $i \in I$, esiste (prop. 3), per ogni $i \in I$, $g_i \in \mathcal{R}$ tale che $\chi_{F_i} \leq g_i \leq \chi_{G_i}$. La successione finita $(g_i)_{i\in I}$ verifica le (5).

5. *Se $F \in \mathcal{F}$, allora esiste (g_n) tale che $g_n \in \mathcal{R}$, $\inf\limits_n g_n = \chi_F$.*

DIM. Se $F = (x : f(x) \geq 1)$, $f \in \mathcal{R}$, allora, posto $G_n = (x : f(x) > n/(n+1))$ per $n \in N$, esiste (prop. 2) (g_n) tale che $g_n \in \mathcal{R}$ e $\chi_F \leq g_n \leq \chi_{G_n}$ per $n \in N$. Risulta $F = \bigcap\limits_n G_n$ e quindi $\chi_F = \inf\limits_n \chi_{G_n} = \inf\limits_n g_n$.

6. *Sia $F \subseteq E$. Se esiste (g_n) tale che $g_n \in \mathcal{R}$, $\inf\limits_n g_n = \chi_F$, allora $F \in \mathcal{F}_\delta$* (5).

DIM. Si ha $F = (x : \chi_F(x) \geq 1) = (x : \inf\limits_n g_n(x) \geq 1) = \bigcap\limits_n (x : g_n(x) \geq 1) \in \mathcal{F}_\delta$.

7. *Riesce $\mathcal{F}_\delta = (F : \chi_F \in \mathcal{R}_\delta)$* (6).

DIM. Si ha (prop. 5 e 6) $\mathcal{F} \subseteq (F : \chi_F \in \mathcal{R}_\delta) \subseteq \mathcal{F}_\delta$. Poichè $(F : \chi_F \in \mathcal{R}_\delta)$ è un δ-reticolo, ne segue la tesi.

Designeremo con $\mathcal{R}_0$ (cfr. [2], 1.2) l'insieme delle funzioni di $\mathcal{R}$ limitate e nulle fuori di un insieme di $\mathcal{F}$, cioè l'insieme delle funzioni f di $\mathcal{R}$ limitate e godenti della seguente proprietà: esiste $g \in \mathcal{R}$ tale che, per ogni $x \in E$, $(g(x) < 1) \Longrightarrow (f(x) = 0)$.

Designeremo con $\mathcal{R}_0^+$ l'insieme degli elementi ≥ 0 di $\mathcal{R}_0$.

$\mathcal{R}_0$ è un sottoreticolo vettoriale di $\mathcal{R}$, tale che $f \cap 1 \in \mathcal{R}_0$ per $f \in \mathcal{R}_0$. Inoltre (cfr. [2], 1.2):

8. *Se $f \in \mathcal{R}^+$, esiste (g_n) tale che $g_n \in \mathcal{R}_0$, $g_n \uparrow f$.*

DIM. Posto

$$F_n = \overset{-1}{f}\left[\frac{1}{n}, n\right], \quad G_n = \overset{-1}{f}\left(\frac{1}{n+1}, n+1\right) \text{ per } n \in N,$$

esiste (prop. 3), per ogni $n \in N$, $h_n \in \mathcal{R}$ tale che $\chi_{F_n} \leq h_n \leq \chi_{G_n}$. Essendo $G_n \subseteq F_{n+1}$, risulta $h_n \leq h_{n+1}$. Posto $g_n = (nh_n) \cap f$, si ha

$$g_n \in \mathcal{R}_0, \quad 0 \leq g_n \leq f, \quad g_n \leq g_{n+1}, \quad g_n(x) = f(x) \quad \text{per } x \in F_n.$$

Poichè $\lim\limits_n F_n = (x : f(x) > 0)$, ne segue $\lim\limits_n g_n = f$.

---

(5) Denotiamo con $\mathcal{F}_\delta$ il più piccolo δ-reticolo di sottoinsiemi di E contenente $\mathcal{F}$: notoriamente, $\mathcal{F}_\delta$ è costituito dalle intersezioni numerabili di insiemi di $\mathcal{F}$.

(6) Denotiamo con $\mathcal{R}_\delta$ il più piccolo sottoreticolo condizionatamente δ-completo di R^E contenente $\mathcal{R}$: $\mathcal{R}_\delta$ è costituito dagli inviluppi inferiori di successioni di funzioni di $\mathcal{R}$ tutte minorate da una medesima funzione di $\mathcal{R}$.

Sia ora Λ una forma lineare positiva su $\mathcal{R}$, soddisfacente ad una delle seguenti condizioni equivalenti di continuità (7):

$$(6) \qquad (f_n \uparrow f, \quad f_n \in \mathcal{R}, \quad f \in \mathcal{R}) \Longrightarrow (\Lambda(f_n) \uparrow \Lambda(f));$$

$$(7) \qquad (f_n \downarrow f, \quad f_n \in \mathcal{R}, \quad f \in \mathcal{R}) \Longrightarrow (\Lambda(f_n) \downarrow \Lambda(f)).$$

Vogliamo dimostrare che, nelle ipotesi poste, si possono costruire un σ-reticolo booleano $\mathcal{L}$ di sottoinsiemi di E ed una σ-misura σ-finita μ in $\mathcal{L}$, in modo tale che ogni funzione di $\mathcal{R}$ risulti sommabile in $(E, \mathcal{L}, \mu)$ e che si abbia

$$(8) \qquad \Lambda(f) = \int_E f \, d\mu \quad \text{per} \quad f \in \mathcal{R}.$$

Posto:

$$\Lambda_\delta(h) = \inf(\Lambda(f) : h \leq f \in \mathcal{R}) \text{ per } h \in \mathcal{R}_\delta, \quad \lambda(F) = \Lambda_\delta(\chi_F) \text{ per } F \in \mathcal{F}_\delta,$$

Λ_δ è (cfr. [5], prop. 1.1 e 1.2) monotona, modulare e δ-continua in $\mathcal{R}_\delta$, e, conseguentemente, λ è monotona, modulare e δ-continua in $\mathcal{F}_\delta$. Riesce, inoltre, $\lambda(\emptyset) = 0$. Poichè (prop. 1) $\mathcal{F}$ è un reticolo relativamente δ-normale, tale è anche (cfr. [4], p. 288) $\mathcal{F}_\delta$; pertanto, detto $\mathcal{L}$ il più piccolo σ-reticolo booleano di sottoinsiemi di E contenente $\mathcal{F}_\delta$, esiste, in virtù del teorema di prolungamento di Cafiero, citato in principio, una (ed una sola) σ-misura σ-finita μ in $\mathcal{L}$, avente restrizione ad $\mathcal{F}_\delta$ eguale a λ.

Ogni funzione di $\mathcal{R}$ è misurabile in $(E, \mathcal{L})$; ogni funzione di $\mathcal{R}_0$, in quanto limitata e nulla fuori di un insieme di misura finita, è anche sommabile in $(E, \mathcal{L}, \mu)$. Per dimostrare la (8), basta, in virtù della prop. 8 e della condizione (6), dimostrare che è

$$\Lambda(f) = \int_E f \, d\mu \quad \text{per} \quad f \in \mathcal{R}_0.$$

Per questo, avendosi

$$\Lambda(-f) = -\Lambda(f), \quad \int_E (-f) \, d\mu = -\int_E f \, d\mu \quad \text{per} \quad f \in \mathcal{R}_0,$$

---

(7) Tali condizioni sono automaticamente soddisfatte nel caso particolare (vedi sopra) in cui $\mathcal{R}$ sia la classe delle funzioni continue a supporto compatto in uno spazio localmente compatto.

è sufficiente far vedere che riesce :

$$\Lambda(f) \geq \int_E f\, d\mu \quad \text{per} \quad f \in \mathcal{R}_0 .$$

Si supponga dapprima $f \in \mathcal{R}_0^+$. Posto $l = \sup f(E)$, basta allora dimostrare che, se $(T_i)_{i \in I}$ è una partizione finita dell'intervallo $(0, l]$, costituita di intervalli inferiormente semiaperti, ed è $a_i = \inf T_i$ per $i \in I$, allora si ha

$$\Lambda(f) \geq \sum_i a_i \, \mu(\overset{-1}{f}(T_i)).$$

o, ciò che è lo stesso,

$$\Lambda(f) \geq \sum_i a_i \, \mu(\overset{-1}{f}(C_i))$$

per ogni successione finita $(C_i)_{i \in I}$ d'intervalli chiusi, con $C_i \subseteq T_i$ per $i \in I$.

Esiste invero (prop. 4) una successione finita $(g_i)_{i \in I}$ di funzioni di $\mathcal{R}_0$ verificante le (5). Posto

$$h_i = g_i \cap (a_i^{-1} f) \quad \text{per} \quad i \in I,$$

riesce $f \geq \sum_i a_i h_i$ e quindi, essendo $\overset{-1}{f}(C_i) \in \mathcal{F}$ per $i \in I$,

$$\Lambda(f) \geq \sum_i a_i \, \Lambda(h_i) \geq \sum_i a_i \, \mu(\overset{-1}{f}(C_i)).$$

Sia ora $f \in \mathcal{R}_0$. Sia $F \in \mathcal{F}$ tale che $(x : f(x) \neq 0) \subseteq F$ e sia (prop. 5) (g_n) tale che $g_n \in \mathcal{R}_0$, $g_n \downarrow \chi_F$. Detta c una costante positiva tale che sia $f + c \geq 0$, risulta anche $f + c g_n \geq 0$ per $n \in N$, e quindi (per quanto già dimostrato)

$$\Lambda(f) + c\,\Lambda(g_n) = \Lambda(f + c g_n) \geq \int_E (f + c g_n)\, d\mu \geq \int_E f\, d\mu + c\mu(F) \quad \text{per} \quad n \in N.$$

Ne segue, passando al limite, la relazione da dimostrare.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. BAUER, *Über die Beziehungen einer abstrakten Theorie des Riemann-Integrals zur Theorie Radonscher Masse*. Math. Zeitschr. 65, 448-482 (1956).

[2] H. BAUER, *Sur l'equivalence des théories de l'intégration selon N. Bourbaki et selon M. H. Stone*. Bull. Soc. Math. France, 85, 51-57 (1957).

[3] N. BOURBAKI, *Intégration*, chap. I-IV. Actual. scient. et ind. n^0 1175, Paris, Hermann, 1952.

[4] F. CAFIERO, *Teoremi di prolungamento per le misure relative in particolari reticoli d'insiemi*. Ricerche di Matematica, 5, 273-312 (1956).

[5] G. LETTA, *Teoremi di prolungamento per misure in reticoli algebrici*. Ricerche di Matematica, 8, 300-319 (1959).

[6] M. H. STONE, *Notes on Integration*, II, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 34, 447-455 (1948).