Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

S. Campanato

Proprietà di alcuni spazi di distribuzioni e loro applicazione

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 14, nº 4 (1960), p. 363-376
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1960_3_14_4_363_0>

PROPRIETÀ DI ALCUNI SPAZI DI DISTRIBUZIONI E LORO APPLICAZIONE

di S. CAMPANATO (Genova)

In questa nota si introducono alcuni particolari spazi di distribuzioni e se ne studiano le proprietà. Questi spazi trovano applicazione, come si osserverà alla fine, nello studio dei problemi al contorno per una certa classe di sistemi differenziali lineari del secondo ordine.

Indichiamo con R_n lo spazio euclideo reale ad n dimensioni ($n \geq 2$) di punto generico $x \equiv (x_1, x_2 \dots x_n)$. Sia Ω un insieme aperto, limitato e connesso di R_n, di frontiera $\partial\Omega$.

Chiameremo vettore, definito in Ω, ogni n-pla ordinata di funzioni o, più in generale, di distribuzioni su Ω. Se $\boldsymbol{u} \equiv (u_1(x), u_2(x) \dots, u_n(x))$ è una di tali n-ple le $u_i(x)$ si diranno le componenti del vettore $\boldsymbol{u}$.

Un vettore si dirà continuo, derivabile, di quadrato sommabile ecc... se sono tali tutte le sue componenti.

Se $A(\Omega)$ è un generico spazio vettoriale topologico su Ω, indicheremo con $[A(\Omega)]^n$ lo spazio (prodotto topologico) $A(\Omega) \times A(\Omega) \times \dots \times A(\Omega)$ n-volte, cioè lo spazio dei vettori $\boldsymbol{u}$ le cui componenti $\in A(\Omega)$. Se in $A(\Omega)$ è stata introdotta una norma $\| \quad \|_{A(\Omega)}$, si assumerà come norma in $[A(\Omega)]^n$ la seguente

$$\| \boldsymbol{u} \|_{[A(\Omega)]^n} = \left\{ \sum_1^n{}_k \| u_k \|^2_{A(\Omega)} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Richiamiamo, per comodità, le definizioni di alcuni spazi di distribuzioni che useremo nel seguito. Le notazioni sono quelle abituali (cfr. ad es. [7] (1)).

---

(1) I numeri tra [ ] si riferiscono alla bibliografia finale.

$L^2(\Omega)$: spazio delle funzioni complesse $g(x)$ di quadrato sommabile in Ω con la norma

$$\| g \|_{L^2(\Omega)} = \left[\int_\Omega | g |^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \qquad dx = dx_1 \, dx_2 \dots dx_n$$

$H^1(\Omega)$: spazio delle funzioni di quadrato sommabile in Ω insieme con le loro derivate prime, le derivate essendo intese, come sempre nel seguito, nel senso delle distribuzioni. La norma di $H^1(\Omega)$ è la seguente

$$\| g \|_{H^1(\Omega)} = \left[\| g \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_1^n {}_i \left\| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$\mathcal{D}(\Omega)$: spazio delle funzioni indefinitamente derivabili in Ω e a supporto compatto contenuto in Ω.

$\mathcal{D}'(\Omega)$: spazio delle distribuzioni su Ω.

$H_0^1(\Omega)$: chiusura di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$.

$BL(\Omega)$: spazio di Beppo Levi su Ω, è lo spazio delle distribuzioni su Ω dotate di derivate prime di quadrato sommabile.

Sia $\boldsymbol{u} \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^n$. Posto

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_h}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_h}\right) = s_{hk}(\boldsymbol{u})$$

e $\qquad\qquad\qquad\qquad (h, k = 1, 2 \dots n)$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_h}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_h}\right) = r_{hk}(\boldsymbol{u})$$

ognuna delle derivate $\dfrac{\partial u_h}{\partial x_k}$ $(h, k = 1, 2 \dots n)$ si può decomporre nel seguente modo

$$\frac{\partial u_h}{\partial x_k} = s_{hk}(\boldsymbol{u}) + r_{hk}(\boldsymbol{u}).$$

Potremo chiamare $s_{hk}(\boldsymbol{u})$ e $r_{hk}(\boldsymbol{u})$ rispettivamente la parte simmetrica ed antisimmetrica della derivata $\dfrac{\partial u_h}{\partial x_k}$ (cfr. [3] p. 441) in quanto $s_{hk}(\boldsymbol{u}) = s_{kh}(\boldsymbol{u})$ e $r_{hk}(\boldsymbol{u}) = - r_{kh}(\boldsymbol{u})$, $(r_{hk}(\boldsymbol{u}) = 0)$.

Si vede immediatamente che condizione necessaria e sufficiente affinchè $\boldsymbol{u} \in [H^1(\Omega)]^n$ è che

$$\text{(I)} \qquad u_i \in L^2(\Omega)$$

$$\text{(II)} \qquad s_{hk}(\boldsymbol{u}) \in L^2(\Omega) \qquad (i, h, k = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{(III)} \qquad r_{hk}(\boldsymbol{u}) \in L^2(\Omega)$$

e che la norma di $[H^1(\Omega)]^n$ è equivalente alla norma $\left[\| u \|^2_{[L^2(\Omega)]^n} + \right.$ $\left. + \sum_1^n {}_{hk} \left(\| s_{hk} \|^2_{L^2(\Omega)} + \| r_{hk} \|^2_{L^2(\Omega)} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$. È chiaro che sopprimendo una delle condizioni (II), (III) o sostituendo una di esse con una condizione d'altro genere il sistema di condizioni che così si ottiene definisce uno spazio di vettori che in generale non coinciderà più con $[H^1(\Omega)]^n$. Può avere interesse studiare quali sono le proprietà degli spazi che così si ottengono, vedere per esempio se è ancora possibile, e in quale senso, parlare di traccia su varietà sufficientemente regolari. Alcuni di questi spazi infatti possono trovare utile applicazione, come ho fatto vedere in [1] (²), nello studio dei problemi al contorno per certe classi di operatori differenziali lineari.

In un precedente lavoro (cfr. [1]) ho già considerato lo spazio $E(\Omega)$ dei vettori $\boldsymbol{u}$ definiti in Ω per i quali

$$u_i \in L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad s_{hk}(\boldsymbol{u}) \in L^2(\Omega). \qquad (i, h, k = 1, 2, \dots, n)$$

Ho dimostrato fra l'altro che i vettori di $E(\Omega)$ appartengono « localmente » ad H^1 e che sotto certe ipotesi si può parlare di traccia per i vettori di $E(\Omega)$ su varietà sufficientemente regolari nello stesso senso ben noto per i vettori di $[H^1(\Omega)]^n$ (cfr. ad es. [7]).

Per analogia si potrebbe considerare anche lo spazio dei vettori $\boldsymbol{u}$ le cui componenti sono di quadrato sommabile in Ω insieme con le parti antisimmetriche r_{hk} delle loro derivate. In questa nota mi limiterò però a studiare dei sottoinsiemi particolari di questo spazio, sottoinsiemi per i quali riuscirò a dimostrare proprietà analoghe a quelle godute dallo spazio $E(\Omega)$.

(²) Quando sarà necessario citare separatamente le due parti di [1] useremo le notazioni [1.I] per la prima parte e [1.II] per la seconda.

1. — DEF. (1.I). *Indichiamo con $F(\Omega)$ lo spazio dei vettori $\boldsymbol{u}$ definiti su Ω per i quali sono verificate le seguenti tre condizioni*

$$u_i(x) \in L^2(\Omega) \tag{1.1}$$

$$r_{hk}(\boldsymbol{u}) \in L^2(\Omega) \qquad (i, h, k = 1, 2, \dots, n) \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \in L^2(\Omega). \tag{1.3}$$

In $F(\Omega)$ introduciamo la norma

$$\| \boldsymbol{u} \|_{F(\Omega)} = \left[\| \boldsymbol{u} \|^2_{[L^2(\Omega)]^n} + \sum_1^n{}_i \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_1^n{}_{hk} \| r_{hk}(\boldsymbol{u}) \|_{L^2(\Omega)} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{1.4}$$

$F(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert completo. Sia infatti $\{\boldsymbol{u}^{(n)}\}$ una successione di Cauchy in $F(\Omega)$ allora, poichè $L^2(\Omega)$ è completo, esisteranno $n(n+1)$ funzioni di quadrato sommabile su Ω, $\{u_i\}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ e $\{v_{ik}\}$ $(i, k = 1, 2, \dots, n)$, tali che $u_i^{(n)} \to u_i$, $r_{hk}(\boldsymbol{u}^{(n)}) \to v_{hk}$, $\dfrac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_i} \to v_{ii}$ in $L^2(\Omega)$. D'altra parte $\dfrac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), \mathcal{D}'(\Omega))$ e $r_{hk} \in \mathcal{L}([L^2(\Omega)]^n, \mathcal{D}'(\Omega))$ e quindi $r_{hk}(\boldsymbol{u}^{(n)}) \to r_{hk}(\boldsymbol{u})$ e $\dfrac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Ne segue che $v_{hk} = r_{hk}(\boldsymbol{u})$ e $v_{ii} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}$ e quindi $\boldsymbol{u} \in F(\Omega)$.

Consideriamo anche due sottoinsiemi di $F(\Omega)$, che indicheremo con $F_0(\Omega)$ e $F_\Gamma(\Omega)$, definiti nel seguente modo.

DEF. (1.II). *$F_0(\Omega)$ è la chiusura di $[\mathcal{D}(\Omega)]^n$ rispetto alla norma* (1.4).

Sia Γ un sottoinsieme fissato di $\partial\Omega$, aperto relativamente a $\partial\Omega$, e $[\mathcal{D}_\Gamma(\overline{\Omega}, R_n)]^n$ l'insieme delle restrizioni ad $\overline{\Omega}$ (4) dei vettori di $[\mathcal{D}(R_n)]^n$ che si annullano in un insieme aperto contenente Γ.

DEF. (1.III). *$F_\Gamma(\Omega)$ è la chiusura di $[\mathcal{D}_\Gamma(\overline{\Omega}, R_n)]^n$ rispetto alla norma* (1.4).

$F_0(\Omega)$ e $F_\Gamma(\Omega)$ sono spazi di Hilbert completi con la norma (1.4) e si hanno le inclusioni

$$F_0(\Omega) \subset F_\Gamma(\Omega) \subset F(\Omega)$$

e $F_{\partial\Omega}(\Omega) \equiv F_0(\Omega)$.

---

(3) Se A e B sono due spazi lineari topologici $\mathcal{L}(A, B)$ indica l'insieme delle applicazioni lineari e continue di A in B.

(4) $\overline{\Omega}$ = chiusura di $\Omega = \Omega \cup \partial\Omega$.

Studiamo qualche proprietà di questi spazi.

2. — Introduciamo alcuni simboli. Poniamo

$$\| u \|_{1,\Omega} = \left\{ \sum_1^n {}_{hk} \left\| \frac{\partial u_h}{\partial x_k} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$||| u |||_\Omega = \left\{ \sum_1^n {}_{hk} \| s_{hk}(u) \|^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\| u \|_\Omega = \left\{ \sum_1^n {}_{hk} \| r_{hk}(u) \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_1^n {}_i \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Teorema (2.I) — *$F_0(\Omega)$ è isomorfo algebricamente e topologicamente con* $[H_0^1(\Omega)]^n$.

Per ogni $u \in [BL(\Omega)]^n$ si hanno le maggiorazioni evidenti

$$\| u \|^2_\Omega \leq \| u \|^2_{1,\Omega} \tag{2.1}$$

$$\| \operatorname{div} u \|^2_{L^2(\Omega)} \leq n \sum_1^n {}_i \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq n \| u \|^2_\Omega \tag{2.2}$$

Inoltre se $u \in [\mathcal{D}(\Omega)]^n$, integrando per parti e sfruttando la (2.2), si ha che

$$\| u \|^2_\Omega = \frac{1}{2} \| u \|^2_{1,\Omega} - \frac{1}{2} \| \operatorname{div} u \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_1^n {}_i \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \| u \|^2_{1,\Omega} + \left(1 - \frac{n}{2}\right) \sum_1^n {}_i \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

e poichè $n \geq 2$

$$\| u \|^2_\Omega \geq \frac{1}{2} \| u \|^2_{1,\Omega} + \left(1 - \frac{n}{2}\right) \| u \|^2_\Omega$$

da cui

$$\| u \|^2_\Omega \geq \frac{1}{n} \| u \|^2_{1,\Omega} \tag{2.3}$$

Dalla (2.1) e (2.3), per chiusura, segue la tesi.

Osservazione. — Poichè è noto che in $[H_0^1(\Omega)]^n$ sono equivalenti le norme $\| \ \|_{[H^1(\Omega)]^n}$ e $\| \ \|_{1,\Omega}$, in virtù del teorema precedente si può affermare che in $F_0(\Omega) [\equiv [H_0^1(\Omega)]^n]$ sono equivalenti le norme $\| \ \|_{F(\Omega)}$ e $\| \ \|_\Omega$. La cosa si poteva dimostrare direttamente: se $u \in [\mathcal{D}(\Omega)]^n$ valgono le maggioraziioni

$$\| u_i \|^2_{L^2(\Omega)} \leq c_i \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (c_i > 0) \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Di qui $(c = \max [c_1, \dots, c_n])$

$$\| u \|^2_{[L^2(\Omega)]^n} \leq c \sum_1^n {}_i \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c \, |\!| u |\!|^2_\Omega \tag{2.4}$$

E la (2.4) assicura appunto l'equivalenza in $F_0(\Omega)$ delle norme $\| \ \|_{F(\Omega)}$ e $|\!| \ |\!|_\Omega$.
Un'altra proprietà relativa allo spazio $F(\Omega)$ è la seguente.

TEOREMA (2.II) — *Se $\partial\Omega$ è « localmente lipschitziana »* (5), *$F(\Omega)$ coincide con il completamento rispetto alla norma* (1.4) *della classe dei vettori continui in $\overline{\Omega}$ con le derivate di tutti gli ordini.*

La dimostrazione di questo teorema è analoga a quella con cui in [4] è dimostrato il teorema [2.I] per cui sorvolerò sui dettagli. Per l'ipotesi fatta su $\partial\Omega$ esisterà un numero $\delta_0 > 0$ e un numero finito di sfere aperte $S_1, S_2 \dots S_N$ che ricoprono $\overline{\Omega}$ e tali che le intersezioni $I_k = \overline{\Omega} \cap \overline{S}_k$ o sono interne ad Ω o possono essere trasformate in regioni interne ad Ω mediante traslazioni $\{x \to x + h^{(k)}\}$ di ampiezza $|h^{(k)}| \leq \delta_0$ (6). Sia $u \in F(\Omega)$. Per ogni $\delta > 0$ e $\leq \delta_0$ indichiamo con $\mathcal{I}_{k,\delta}$ il trasformato dell'insieme I_k mediante la traslazione $x \to x + h^{(k)}$ di ampiezza $\leq \delta$. In I_k definiamo un vettore $u^{(k,\delta)}$ ponendo

$$u^{(k,\delta)}(x) = u(x + h^{(k)}) \qquad \text{per} \qquad x \in I_k$$

da cui segue che

$$\frac{\partial u_i^{(k,\delta)}(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i(x + h^{(k)})}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad r_{hk}(u^{(k,\delta)}(x)) = r_{hk}(u(x + h^{(k)})) \quad (i, h, k = 1, \dots, n)$$

---

(5) Cioè nell'intorno di ogni suo punto x ammette, rispetto ad un opportuno sistema di assi $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ con l'origine in x, una rappresentazione del tipo

$$\xi_n = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$$

con f funzione definita in un intorno del punto $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{n-1} = 0$ e ivi lipschitziana.

(6) $x + h = (x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n)$ e $|h| = \{\Sigma_i h_i^2\}^{\frac{1}{2}}$.

Fissato allora un $\varepsilon > 0$ è possibile determinare un numero positivo $\bar{\delta} \leq \delta_0$ tale che, per $\delta < \bar{\delta}$ (7)

$$\| \boldsymbol{u}^{(k,\delta)}(x) - \boldsymbol{u}(x) \|_{F(I_k)} < \varepsilon \qquad (k = 1, 2 \dots N).$$

Fissato δ in questo modo è possibile determinare in $\mathcal{I}_{k,\delta}$ (per esempio ricorrendo alle medie integrali) un vettore $\boldsymbol{v}$ indefinitamente derivabile tale che

$$\| \boldsymbol{u}(x) - \boldsymbol{v}(x) \|_{F(\mathcal{I}_{k,\delta})} < \varepsilon.$$

Posto allora

$$\boldsymbol{v}^{(k,\delta)}(x) = \boldsymbol{v}(x + h^{(k)}) \qquad x \in I_k$$

$\boldsymbol{v}^{(k,\delta)}$ è un vettore indefinitamente derivabile in I_k e tale che

$$\| \boldsymbol{u}(x) - \boldsymbol{v}^{(k,\delta)}(x) \|_{F(I_k)} < 2\varepsilon.$$

Sia $\{\alpha_i\}$ $(i = 1, 2 \dots N)$ un sistema di funzioni di $\mathcal{D}(R_n)$ tali che α_i ha supporto contenuto in S_i e $\sum_{1}^{N} {}_i\, \alpha_i = 1$ in Ω. Il vettore

$$\boldsymbol{v}^{(\delta)}(x) = \sum_{1}^{N} {}_k\, \alpha_k(x)\, \boldsymbol{v}^{(k,\delta)}(x) \qquad [x \in \Omega]$$

è indefinitamente derivabile in $\bar{\Omega}$ ed è tale che

$$\lim_{\delta \to 0} \| \boldsymbol{u}(x) - \boldsymbol{v}^{(\delta)}(x) \|_{F(\Omega)} = 0$$

e ciò dimostra la tesi.

Dai teoremi (2.I) e (2.II) si deduce che i vettori di $F(\Omega)$ appartengono localmente ad H^1 nel senso che per ogni punto $x \in \Omega$ esiste un intorno I di x, $I \subset \Omega$, tale che la restrizione di $\boldsymbol{u}$ ad I appartiene ad $[H^1(I)]^n$. Infatti sia $\boldsymbol{u} \in F(\Omega)$ e $x_0 \in \Omega$. Supponiamo che $\partial\Omega$ sia localmente lipschitziana, in caso contrario basterà considerare anzichè $\boldsymbol{u}$ la sua restrizione ad una sfera di centro x_0 e interna ad Ω. Per il teorema (2.II) esiste una succes-

---

(7) Si sfrutta questa proprietà delle funzioni sommabili (cfr. [8] pag. 16): se $f \in L^2(I)$, I misurabile, posto $f = 0$ in $\complement I$ si ha che

$$\lim_{|h| \to 0} \int_I | f(x + h) - f(x) |^2 \, dx = 0.$$

sione $\{u^n\}$ di vettori indefinitamente derivabili in $\bar{\Omega}$ la quale converge ad u in $F(\Omega)$. Sia $\alpha(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\alpha(x) \geq 0$, $\alpha(x) = 1$ in un intorno I di x_0. Sarà $\alpha u^{(n)} \in [\mathcal{D}(\Omega)]^n$ e $\alpha u^{(n)} \to \alpha u$ in $F(\Omega)$ come segue dalla disuguaglianza

$$\| \alpha (u^{(n)} - u) \|_{F(\Omega)} \leq \| \alpha (u^{(n)} - u) \|^2_{[L^2(\Omega)]^n} + \sum_1^n{}_{hk} \| \alpha r_{hk} (u^{(n)} - u) \|^2_{L^2(\Omega)} +$$
$$+ \sum_1^n{}_{hk} \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial x_k} (u_h^{(n)} - u_h) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c \| u^{(n)} - u \|^2_{F(\Omega)}$$

c cost. > 0 indipendente da n. Quindi $\alpha u \in F_0(\Omega) \equiv [H_0^1(\Omega)]^n$, per cui

$$\| u \|^2_{[H^1(I)]^n} \leq \| \alpha u \|^2_{[H^1(\Omega)]^n} < + \infty .$$

Di conseguenza se Σ è una varietà $(n-1)$-dimensionale contenuta in Ω, sufficientemente regolare, per es. di classe 1, i vettori u di $F(\Omega)$ hanno traccia su Σ nel senso noto per i vettori di $[H^1(\Omega)]^n$.

Il problema della traccia dei vettori di $F(\Omega)$ su Σ, quando $\Sigma \subset \partial\Omega$, è legato allo studio delle proprietà degli spazi $F_\Gamma(\Omega)$ e più precisamente delle condizioni atte ad assicurare che $F_\Gamma(\Omega)$ è isomorfo algebricamente e topologicamente con un sottoinsieme di $[H^1(\Omega)]^n$.

3. — Indichiamo con $[H_\Gamma^1(\Omega)]^n$ la chiusura di $[\mathcal{D}_\Gamma(\bar{\Omega}, R_n)]^n$ in $[H^1(\Omega)]^n$. In generale $[H_\Gamma^1(\Omega)]^n \not\equiv F_\Gamma(\Omega)$ come si può vedere con un esempio analogo all'esempio I di [1.I] (8). Si possono però dare delle condizioni su Ω sufficienti affinchè $[H_\Gamma^1(\Omega)]^n \equiv F_\Gamma(\Omega)$ (algebricamente e topologicamente). Introduciamo due classi di aperti.

DEF. (3.I). *Fissato il sottoinsieme Γ di $\partial\Omega$, diremo che Ω è di tipo (α) se per ogni vettore $u \in [\mathcal{D}_\Gamma(\bar{\Omega}, R_n)]^n$ sussiste la maggiorazione*

$$\| u \|_{[L^2(\Omega)]^n} \leq c \| u \|_{1,\Omega} \tag{3.1}$$

con c costante > 0 indipendente da u.

---

(8) Detti Ω e v l'aperto e il vettore introdotti nell'esempio citato, si consideri lo stesso aperto Ω e il vettore u così definito

$$u_1 = \quad v_1$$
$$u_2 = - v_2$$

I calcoli fatti in [1.I] provano che $u \in F_\Gamma(\Omega)$ ma non $\in [H_\Gamma^1(\Omega)]^n$.

DEF. (3.II). *Diremo che Ω è di tipo (β) se esiste un compatto $K \subset \Omega$ e una costante $c > 0$ tale che per ogni vettore $u \in [BL(\Omega)]^n$ soluzione del sistema:*

$$\sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial r_{hk}(u)}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 u_h}{\partial x_h^2} = 0 \qquad (h = 1, 2, \dots, n) \tag{3.2}$$

si ha che

$$|||\, u \,|||_{\Omega}^2 \leq c \{|||\, u \,|||_K^2 + \| u \|_{\Omega}^2\}. \tag{3.3}$$

TEOREMA (3.I). *Fissato il sottoinsieme Γ di $\partial\Omega$, se Ω è un aperto di tipo (α) e (β), per ogni vettore $u \in [\mathcal{D}_\Gamma(\overline{\Omega}, R_n)]^n$ vale la maggiorazione*

$$\|\, u \,\|_{1,\Omega} \leq c \,\| u \|_{\Omega}$$

$c > 0$ indipendente da u, e di conseguenza $[H_\Gamma^1(\Omega)]^n \equiv F_\Gamma(\Omega)$.

La dimostrazione di questo teorema è del tutto analoga a quella con cui in [6] è dimostrato il teorema fondamentale del n. 5, tenuto conto, nel nostro caso, che poichè Ω è di tipo (α), $[H_\Gamma^1(\Omega)]^n$ è uno spazio di Hilbert completo rispetto alla norma $\|\, u \,\|_1$.

Per rendere meno formali le ipotesi del teorema (3.I) osserviamo che condizioni sufficienti affinchè Ω sia di tipo (α) sono già state date nel n. 2 di [1.I]. Sempre in quel numero, per dimostrare relativamente allo spazio $E(\Omega)$ un teorema analogo al teorema (3.I), è stata introdotta la classe degli aperti di Friedrichs la quale si definisce in questo modo: *Ω è un aperto di Friedrichs se esiste una costante $c > 0$ e un compatto $K \subset \Omega$ tali che per ogni $u \in [BL(\Omega)]^n$ soluzione del sistema*

$$\sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial s_{hk}(u)}{\partial x_k} = 0 \qquad (h = 1, 2, \dots, n)$$

vale la maggiorazione

$$\sum_{1}^{n}{}_{hk} \|\, r_{hk}(u) \,\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \left\{ \sum_{1}^{n}{}_{hk} \|\, r_{hk}(u) \,\|_{L^2(K)}^2 + |||\, u \,|||_{\Omega}^2 \right\}. \tag{3.4}$$

Ebbene si dimostra, almeno nel caso piano ($n = 2$), che c'è coincidenza tra la classe degli aperti di Friedrichs e quella degli aperti di tipo (β) e quindi i vari criteri sufficienti dati nel n. 2 di [1.I] (cfr. anche [3]) relativamente agli aperti di Friedrichs rimangono validi anche per gli aperti di tipo (β).

Dimostriamo innanzitutto un lemma.

LEMMA (3.I) — *In $[BL(\Omega)]^n$ la disuguaglianza (3.4) e la disuguaglianza*

$$\| u \|_{\Omega}^2 \leq c_1 \{\| u \|_K^2 + |||\, u \,|||_{\Omega}^2\} \qquad c_1 > 0 \tag{3.5}$$

sono equivalenti.

Infatti se $\boldsymbol{u} \in [BL(\Omega)]^n$ verifica la (3.4), allora

$$\mathbf{|}\, \boldsymbol{u}\, \mathbf{|}^2_\Omega \leq c\, \{ \mathbf{|}\, \boldsymbol{u}\, \mathbf{|}^2_K + |||\, \boldsymbol{u}\, |||^2_\Omega \} + \Sigma_i \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (c+1)\, \{ \mathbf{|}\, \boldsymbol{u}\, \mathbf{|}^2_K + |||\, \boldsymbol{u}\, |||^2_\Omega \}.$$

Viceversa se $\boldsymbol{u} \in [BL(\Omega)]^n$ verifica la (3.5) allora, supposto, come è lecito, $c_1 > \frac{1}{2}$

$$\sum_1^n{}_{hk} \, \| r_{hk}(\boldsymbol{u}) \|^2_{L^2(\Omega)} \leq c_1 \left\{ \sum_1^n{}_{hk} \, \| r_{hk}(\boldsymbol{u}) \|^2_{L^2(K)} + \sum_1^n{}_h \left\| \frac{\partial u_h}{\partial x_h} \right\|^2_{L^2(K)} + |||\, \boldsymbol{u}\, |||^2_\Omega \right\} -$$

$$- \sum_1^n{}_h \left\| \frac{\partial u_h}{\partial x_h} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (2c_1 - 1) \left\{ \sum_1^n{}_{hk} \, \| r_{hk}(\boldsymbol{u}) \|^2_{L^2(K)} + |||\, u\, |||^2_\Omega \right\}.$$

TEOREMA (3.II) — *Per $n = 2$ la classe degli aperti di Friedrichs e la classe degli aperti di tipo (β) coincidono.*

Sia Ω un aperto di Friedrichs del piano e $\boldsymbol{u} \equiv (u_1, u_2)$ un vettore di $[BL(\Omega)]^2$ soluzione del sistema (3.2). Consideriamo il vettore $\boldsymbol{v} \equiv (v_1, v_2) \equiv (u_1, -u_2) \in [BL(\Omega)]^2$. $\boldsymbol{v}$ è soluzione del sistema

$$\sum_1^2{}_k \frac{\partial s_{hk}(\boldsymbol{v})}{\partial x_k} = 0 \qquad (h = 1, 2).$$

Per cui, essendo Ω un aperto di Friedrichs e per il lemma (3.I), si avrà

$$\mathbf{|}\, \boldsymbol{v}\, \mathbf{|}^2_\Omega \leq c\, \{ \mathbf{|}\, \boldsymbol{v}\, \mathbf{|}^2_K + |||\, \boldsymbol{v}\, |||^2_\Omega \} \qquad (c > 0) \tag{3.6}$$

con K compatto opportuno $\subset \Omega$. D'altra parte, qualunque sia l'insieme I,

$$\mathbf{|}\, \boldsymbol{v}\, \mathbf{|}_I \equiv |||\, \boldsymbol{u}\, |||_I \,, \; |||\, \boldsymbol{v}\, |||_I = \mathbf{|}\, \boldsymbol{u}\, \mathbf{|}_I$$

Dalla (3.6) segue allora la (3.3) e quindi Ω è di tipo (β). Il viceversa è ormai immediato.

Probabilmente questa equivalenza sussiste anche per $n > 2$ ma la dimostrazione precedente non si estende a questo caso.

Dal teorema (3.I) discende in particolare che se Ω è di tipo (α) e (β), per esempio nel caso piano se $\partial\Omega$ è di classe 1 o, più in generale, se $\partial\Omega$ è costituita da archi di curve di classe 1, potendo avere anche punti angolosi purchè non di tipo cuspidale [cfr. [1.I] n. 2], allora i vettori $\boldsymbol{u} \in F_\Gamma(\Omega)$ sono dotati di traccia su $\partial\Omega$ nel senso noto per i vettori di $[H^1(\Omega)]^n$.

Per quanto riguarda la traccia di vettori di $F(\Omega)$ su varietà $\Sigma \subset \partial\Omega$ sufficientemente regolari, poichè si può ragionare localmente ricoprendo Σ

con un numero finito di sfere, ci si riconduce al caso precedente di vettori nulli su un sottoinsieme di $\partial\Omega$ e si conclude che la traccia su Σ esiste nel senso visto per i vettori di $[H^1(\Omega)]^n$.

4. — Sia $\boldsymbol{u}$ un vettore di $F(\Omega)$. Ad $\boldsymbol{u}$ si può associare una n-pla di vettori $\{T_k(\boldsymbol{u})\}$ definiti nel seguente modo

$$(4.1)\qquad T_k(\boldsymbol{u}) = \left\{ r_{k1}(\boldsymbol{u}), \dots, r_{k(k-1)}(\boldsymbol{u}), \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, r_{k(k+1)}(\boldsymbol{u}), \dots, r_{kn}(\boldsymbol{u}) \right\} \quad (k = 1, \dots, n)$$

e risulta $T_k(\boldsymbol{u}) \in [L^2(\Omega)]^n$ $(k = 1, 2, \dots, n)$. Viceversa, se $\boldsymbol{u}$ è tale che $\boldsymbol{u} \in [L^2(\Omega)]^n$ e $T_k(\boldsymbol{u}) \in [L^2(\Omega)]^n$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ allora $\boldsymbol{u} \in F(\Omega)$; si ha inoltre che

$$\| \boldsymbol{u} \|_{F(\Omega)} = \left\{ \sum_1^n {}_k \| T_k(\boldsymbol{u}) \|^2_{[L^2(\Omega)]^n} + \| \boldsymbol{u} \|^2_{[L^2(\Omega)]^n} \right\}^{1/2}$$

$\{T_k\}$ costituisce quindi un sistema di « operatori elementari » che caratterizza lo spazio $F(\Omega)$ nello stesso senso in cui il sistema delle derivate prime $\{D_k\}$ caratterizza lo spazio $[H^1(\Omega)]^n$.

Indichiamo con T_k^* l'aggiunto formale di T_k; si verifica che

$$T_k^*(\boldsymbol{u}) = \left\{ \frac{1}{2}\frac{\partial u_1}{\partial x_k}, \frac{1}{2}\frac{\partial u_2}{\partial x_k}, \dots, -\frac{1}{2}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\operatorname{div}\boldsymbol{u}, \dots, \frac{1}{2}\frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right\}.$$

Sia $\{C_{hk}\}$ $(h, k = 1, 2, \dots n)$ un sistema di matrici $n \times n$ definite in Ω e, per esempio, ivi misurabili e limitate, e λ un parametro complesso. Consideriamo gli operatori differenziali lineari del secondo ordine che sono del tipo

$$(4.2)\qquad A(\boldsymbol{u}) = -\sum_1^n {}_{hk} T_h^* (C_{hk}\, T_k(\boldsymbol{u})) + \lambda \boldsymbol{u}$$

i quali ammettono una decomposizione negli operatori elementari T_k e relativi aggiunti. Lo spazio che si presenta spontaneamente per studiare, in un senso generalizzato, i problemi al contorno (9) per operatori del tipo (4.2) è lo spazio $F(\Omega)$. Anche in questo caso, come ho già osservato in [1] per i sistemi del tipo dell'elasticità, da un'impostazione dei problemi al contorno nello spazio $F(\Omega)$ [non ad integrale di Dirichlet finito] anzichè, come d'abitudine, in $[H^1(\Omega)]^n$, deriva una maggiore generalità della trattazione e una maggiore generalità circa le ipotesi sull'operatore $A(\boldsymbol{u})$ e l'aperto Ω

(9) La formulazione astratta di questi problemi è ormai nota; cfr. ad es. [7] n. 5 pag. 272-3 e [1.I] n. 3.

nelle quali si riescono a stabilire i teoremi esistenziali (cfr. (1.I] n.n. 3 e 4)

Si può svolgere anche per i sistemi del tipo (4.2) uno studio dei problemi al contorno analogo a quello fatto in [1] per i sistemi del tipo dell'elasticità, studio che qui ritengo superfluo sviluppare.

Anche per quanto riguarda la regolarizzazione delle soluzioni deboli dei problemi al contorno per i sistemi (4.2), soluzioni che appartengono a $F(\Omega)$, si possono sfruttare i procedimenti in uso quando si sa già che la soluzione è in $[H^1(\Omega)]^n$; questo in virtù del carattere locale di questi procedimenti e delle proprietà degli spazi $F(\Omega)$, $F_0(\Omega)$, $F_\Gamma(\Omega)$ messe in luce nei n.n. precedenti.

5. — Concludiamo con qualche osservazione.

Accanto ad $F(\Omega)$ si può considerare anche lo spazio $G(\Omega)$ definito da queste tre condizioni:

DEF. (5.I). — $\boldsymbol{u} \in G(\Omega)$ *se:*

$$u_i \in L^2(\Omega) \tag{5.1}$$

$$r_{hk}(\boldsymbol{u}) \in L^2(\Omega) \qquad (i, h, k = 1, 2, \ldots n) \tag{5.2}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} \in L^2(\Omega) \tag{5.3}$$

In $G(\Omega)$ si può considerare la norma

$$\| \boldsymbol{u} \|_{G(\Omega)} = \left[\| \boldsymbol{u} \|^2_{[L^2(\Omega)]^n} + n \| \operatorname{div} \boldsymbol{u} \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{1}^{n}{}_{hk} \| r_{hk}(\boldsymbol{u}) \|^2_{L^2(\Omega)} \right]^{1/2} \tag{5.4}$$

con la quale $G(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert completo (cfr. n. 1).

La condizione (1.3) implica ovviamente la (5.3) ma non è vero il contrario e quindi l'iniezione di $F(\Omega)$ in $G(\Omega)$ è un isomorfismo algebrico di $F(\Omega)$ in, e non su, $G(\Omega)$; in questo senso si può dire che $G(\Omega)$ è uno spazio più generale di $F(\Omega)$.

Per lo spazio $G(\Omega)$ si possono dare teoremi analoghi ai teoremi (2.I) e (2.II).

TEOREMA (5.I). *Se $\partial\Omega$ è localmente lipschitziana, $G(\Omega)$ coincide con il completamento rispetto alla norma* (5.4) *della classe dei vettori continui in $\overline{\Omega}$ con le derivate di tutti gli ordini.*

Ritengo superfluo sviluppare la dimostrazione che è del tutto analoga a quella data per il teorema (2.I).

Definito $G_0(\Omega)$ come chiusura di $[\mathcal{D}(\Omega)]^n$ in $G(\Omega)$, si ha il teorema:

TEOREMA (5.II). *$G_0(\Omega)$ è isomorfo algebricamente e topologicamente con $[H_0^1(\Omega)]^n$ e quindi anche con $F_0(\Omega)$.*

Basterà far vedere che in $[\mathcal{D}(\Omega)]^n$ sono equivalenti le norme $\| \ \|_{G(\Omega)}$ e $\| \ \|_{[H^1(\Omega)]^n}$. Supposto $\boldsymbol{u} \in [\mathcal{D}(\Omega)]^n$ si ha la maggiorazione ovvia

$$\| \boldsymbol{u} \|_{G(\Omega)} \leq \| \boldsymbol{u} \|_{[H^1(\Omega)]^n} . \tag{5.5}$$

Inoltre integrando per parti si ottiene

$$\| \boldsymbol{u} \|^2_{G(\Omega)} = \| \boldsymbol{u} \|^2_{[L^2(\Omega)]^n} + \frac{1}{2} \| \boldsymbol{u} \|^2_{1,\Omega} + \left(n - \frac{1}{2} \right) \| \operatorname{div} \boldsymbol{u} \|^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{2} \| \boldsymbol{u} \|^2_{[H^1(\Omega)]^n} . \tag{5.6}$$

Dalla (5.5) e (5.6) segue la tesi.

Quindi anche per $G(\Omega)$ si ripetono i discorsi fatti per $F(\Omega)$ circa la regolarità locale in Ω e la possibilità di definire la traccia su varietà sufficientemente regolari interne ad Ω. Più difficile si presenta la questione di precisare, in un modo concreto e non soltanto formale, le condizioni di regolarità su Ω e su Γ sufficienti ad assicurare una maggiorazione del tipo

$$\| \boldsymbol{u} \|^2_{1,\Omega} \leq c \left\{ \sum_1^n {}_{hk} \| z_{hk}(\boldsymbol{u}) \|^2_{L^2(\Omega)} + n \| \operatorname{div} \boldsymbol{u} \|^2_{L^2(\Omega)} \right\}$$

per tutti i vettori di $[\mathcal{D}_\Gamma(\overline{\Omega}, R_n)]^n$, risultato che sarebbe l'equivalente del teorema (3.I).

Osserviamo per concludere che il sistema di operatori elementari che caratterizza lo spazio $G(\Omega)$ è il seguente:

$$U_h(\boldsymbol{u}) = \{ r_{h1}(\boldsymbol{u}), \dots , r_{h(h-1)}(\boldsymbol{u}), \operatorname{div} \boldsymbol{u}, r_{h(h+1)}(\boldsymbol{u}), \dots , r_{hn}(\boldsymbol{u}) \} \qquad (h = 1, 2, \dots , n)$$

E si hanno così dei nuovi sistemi per i quali si può svolgere almeno in parte (a meno della questione delle tracce su $\partial\Omega$) la teoria dei problemi al limiti.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. CAMPANATO - « *Sui problemi al contorno per sistemi di equazioni differenziali lineari del tipo dell'elasticità.* Parte I e II » Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa, serie III, vol. XIII, fasc. II - (1959) p. 223-258 e 275-302.

[2] J. DENY-J. L. LIONS - « *Les espaces du type de Beppo Levi* » - Ann. de l'Inst. Fourier 5 (1953-54) p. 305-370.

[3] K. O. FRIEDRICHS - « *On the boundary-value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality* » - Ann. of Mathem., serie III, vol. 48 (1947) p. 441-471.

[4] E. GAGLIARDO - « *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili* » - Ricerche di Mat., vol. VII (1958) p. 102-137.

[5] J. L. LIONS - « *Problèmes aux limites en théorie des distributions* » - Acta Matem. 494 (1955) p. 13-153.

[6] J. L. LIONS - « *Contributions à un problème de M. M. Picone* » - Ann. di Mat. pura e appl., serie IV, t. XLI (1955) p. 201-219.

[7] E. MAGENES-G. STAMPACCHIA - « *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico* » - Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa serie III, vol. XII, fasc. III (1958) p. 247-358.

[8] S. L. SOBOLEV - « *Alcune applicazioni dell'analisi funzionale alla fisica matematica* » - (in russo) Len. Gos. Universitet, Leningrad 1950.