ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ALDO BRESSAN

Incompatibilità dei teoremi di esistenza e di unicità del moto per un tipo molto comune e regolare di sistemi meccanici

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 14, nº 4 (1960), p. 333-348

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1960_3_14_4_333_0>

INCOMPATIBILITÀ DEI TEOREMI DI ESISTENZA E DI UNICITÀ DEL MOTO PER UN TIPO MOLTO COMUNE E REGOLARE DI SISTEMI MECCANICI

(Nota di ALDO BRESSAN a Padova)

PREFAZIONE

Tra le massime aspirazioni della Meccanica Classica vi è certo quella di costruire uno schema nettamente determinista per ogni problema meccanico ristretto (1), il determinismo essendo inteso in un senso stretto per cui oltre alla non esistenza per ogni sistema meccanico di due suoi moti naturali distinti, definiti entrambi in un intervallo $t_0 \vdash t_1$ e verificanti le stesse condizioni iniziali a t_0, è richiesta anche l'esistenza di un moto naturale a partire da condizioni iniziali generiche.

In teoremi molto generali di Meccanica Razionale, come per esempio quelli diretti a stabilire la validità delle equazioni di Lagrange, o ad affermare la validità del principio dei lavori virtuale, comunemente ci si riferisce, più o meno esplicitamente, ad un generico sistema, per esempio olonomo, a vincoli lisci, bilaterali o eventualmente anche unilaterali, *regolare* nel senso che esso è rappresentabile analiticamente mediante funzioni (costituenti la espressione lagrangiana della forza viva, le componenti lagrangiane della sollecitazione attiva e i primi membri delle equazioni dei vincoli unilaterali eventualmente presenti) dotate di talune proprietà (di regolarità) quali l'esser lipschitziane o continue assieme alle derivate sino ad un certo ordine μ.

Mentre per $\mu \geq 2$ nel caso dei vincoli bilaterali valgono come è noto teoremi di esistenza e di unicità del moto, cosicchè in particolare per essi è dimostrabile il principio dei lavori virtuali, se invece ci si riferisce ad un tipo τ di sistemi pei quali possa essere presente anche qualche vincolo unilaterale sia pur molto regolare, a meno di fare nuovi postulati (2) si deve

(1) V. [5] Vol. II, pg. 148 riga 18.

(2) I postulati intesi validi in questo lavoro sono quelli $\overline{P}$ ordinariamente ammessi nei trattati di Meccanica Razionale, esclusi quelli di equilibrio — come per esempio la « regola di equilibrio affermata in [5] a pg. 153 —, I postulati $\overline{P}$ sono essenzialmente la legge fondamentale della dinamica, il principio di azione e reazione, se si vuole il principio del parallelogramma delle forze e qualche postulato di regolarità del moto.

riconoscere, come risulterà dal seguito, che *sono incompatibili per il detto tipo di sistemi i teoremi di esistenza e di unicità del moto.* Più precisamente, si consideri la seguente condizione (che dirò *condizione* Γ_1) sul generico moto $\mathcal{M}$ a priori possibile per un sistema di tipo τ: *gli istanti d'urto non si accumulino a destra di un istante al finito in cui l'atto di moto esiste.*

Con esempi rispettanti tra l'altro il carattere passivo o almeno non attivo dei vincoli, dimostrerò che comunque regolare nel senso anzidetto sia τ, qualora non si aggiungano alla teoria nuovi postulati, sussiste la seguente alternativa: *o si include* Γ_1 *fra le condizioni valide per* $\mathcal{M}$, *è allora anche limitandosi a forze posizionali, non è valido il teorema di esistenza del moto (Es. 1⁰ e 3⁰); o tale inclusione non si ritiene lecita e allora se non si aggiungono nuovi postulati a quelli ordinari* $\overline{P}$ *precisati in nota* (2) *non è dimostrabile l'unicità del moto nemmeno nel caso di forze solo posizionali e, almeno nel caso di forze dipendenti dal tempo, non è dimostrabile la « sufficienza » del principio dei lavori virtuali (es. 2⁰ e 4⁰).*

Se pur non decisivo, è certamente un argomento favorevole alla non ammissione della condizione Γ_1 l'osservazione che il comune fenomeno di una palla da bigliardo che rimbalzi, viene usualmente schematizzato in un punto pesante P rimbalzante su un piano xy orizzontale soddisfacendo alla nota legge di Newton in corrispondenza ad un coefficiente di restituzione $\varrho > 0$ e ≤ 1. Com'è noto, gli istanti d'urto si accumulano a sinistra di un istante finito t_1, a partire dal quale il punto P si mantiene a contatto col piano xy, e nel quale la velocità esiste ed è nulla.

Dunque per i precedenti sistemi regolari di tipo τ la « sufficienza » del principio dei lavori virtuali sarà dimostrabile in generale soltanto aggiungendo opportuni postulati ai sopradetti $\overline{P}$, postulati che non possono consistere nell'imposizione di proprietà di regolarità al generico moto del sistema meccanico considerato del tipo anzidetto.

Mi propongo in altri lavori di stabilire appunto dei criteri di scarto con alcuni dei quali per i considerati sistemi di tipo τ (dotati di qualche vincolo olonomo unilaterale) il moto risulti in molti casi determinato dalle condizioni iniziali e in particolare risultino ricondotte alle attuali [3] complete dimostrazioni del principio dei lavori virtuali e delle varie regole d'equilibrio, fatte con la limitazione Γ_1 (o anche con altre più restrittive).

Probabilmente, quando sui moti dei sistemi del considerato tipo τ si faccian ipotesi di regolarità così larghe che il teorema di esistenza del moto valga (onde la limitazione Γ_1 non è rispettata), per tali sistemi non c'è alcun criterio generale di discriminazione, fisicamente accattabile, che per-

---

(3) V. [2], [5] Cap. XI N. 16 a pg. 336 e anche [1] § 4 N. 5· Regola di equilibrio.

metta nei casi di pluralità di soluzioni di uno stesso problema dinamico, di scegliere tra queste, quella da ritenersi il moto naturale corrispondente al problema considerato.

Ciò non è in aperto contrasto col carattere determinista della Meccanica classica in quanto per es. non è escluso che sistemi fisici differenti ammettano una schematizzazione meccanica in uno stesso sistema olonomo per cui vi sia un problema dinamico avente più soluzioni, e che ciascuno $\mathcal{S}$ dei precedenti sistemi fisici sia dotato di proprietà per le quali quando $\mathcal{S}$ si trovi nelle condizioni iniziali inerenti al suddetto problema dinamico, il conseguente moto di $\mathcal{S}$ debba coincidere con una determinata $\mathcal{M}$ delle suddette soluzioni, $\mathcal{M}$ potendo anche variare al variare del sistema fisico $\mathcal{S}$.

N. 1. — **Preliminari.**

Sia $f(t)$ una funzione continua nell'intervallo $0 \vdash\!\dashv 1$ assieme alle derivate fino all'ordine $\nu \geq 3$ per la quale valgono le relazioni

$$f(t) > 0 \tag{1}$$

$$f(0) = f(1) = 0 \tag{2}$$

$$f'(0) = -\varrho\, 2^{-(\nu-1)} f^1(1) \tag{3}$$

in corrispondenza ad un $\varrho > 0$, e

$$f^{(k)}(0) = \frac{1}{2^{\nu-k}} f^{(k)}(1) \qquad (k = 2, 3, \dots, \nu - 1). \tag{4}$$

Funzioni di questo tipo esistono certamente, inoltre per la (3) si può pure determinare una funzione $f_1(t)$, definita nella semiretta $t \geq 0$, ivi continua con la derivata ν^{ma}, verificante le condizioni

$$f_1(t) > 0 \qquad \text{per} \quad t > 1 \tag{5}$$

$$f_1(1) = 0, \;\; f_1'(1) = -\frac{\varrho}{2^{\nu-1}} f'(1) > 0\,, \;\; f_1^{(k)}(1) = \frac{1}{2^{\nu-k}} f^{(k)}(1) \;\; (k=2,3,\dots,\nu). \tag{6}$$

Pongo infine

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 0 \;\text{ o }\; t = \dfrac{1}{2^n} \qquad (n = 1, 2, \dots) \\[2ex] \dfrac{1}{2^{\nu n}} f\left[2^n\left(t - \dfrac{1}{2^n}\right)\right] = \dfrac{1}{2^{n\nu}} f(2^n t - 1) & \text{per } \dfrac{1}{2^n} < t < \dfrac{1}{2^{n-1}} \\[2ex] f_1(t) & \text{per } t \geq 1. \end{cases} \tag{7}$$

Sussiste il

TEOREMA I. *Le funzioni*

$$\varphi^0(t) = \varphi(t), \quad \varphi^{(2)}(t), \dots, \varphi^{(\nu-1)}(t)$$

esistono, sono continue e si ha

$$\varphi(t) \geq 0 \qquad -\infty < t < +\infty, \tag{8}$$

ma in particolare

$$\varphi(t) > 0 \quad \text{per} \quad t > 0 \quad i \neq 2^{-n} \qquad (n = 1, 2, \dots). \tag{8'}$$

La $\varphi'(t)$ *esiste ed è continua per ogni* $t \neq 2^{-n}$ $(n = 1, 2, \dots)$, *e si ha* [4]

$$\varphi(2^{-n}+0) = \varphi'(2^{-n+}) = -\varrho\varphi'(2^{-n-}) = -\varrho\varphi'(2^{-n}-0) > 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{9}$$

Infatti per $(7)_2$ è

$$\varphi^{(k)}(t) = (2^n)^k\, 2^{-\nu n} f^{(k)}(2^n t - 1) = 2^{-(\nu-k)n} f^{(k)}(2^n t - 1) \quad \text{per} \quad 2^{-n} < t < 2^{1-n} \tag{10}$$

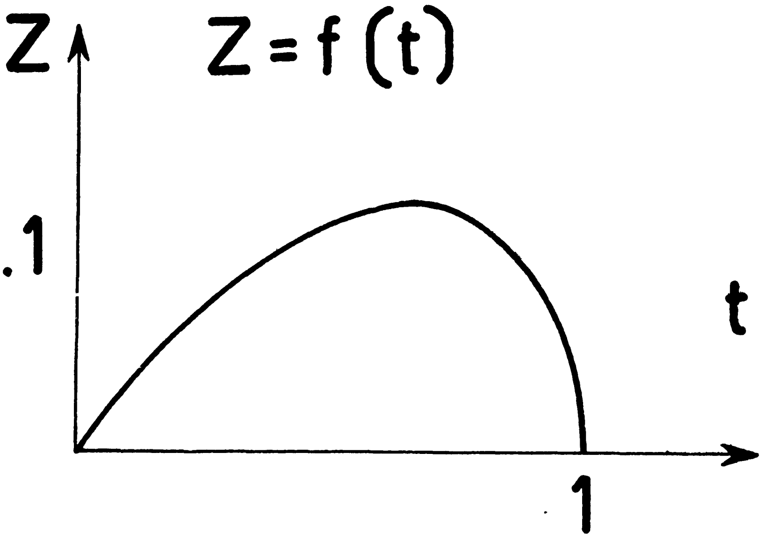


Fig. 1

e per $(7)_{12}$ $\varphi(t)$ coincide con $2^{-\nu n} f(2^n t - 1)$ in tutto $2^{-n} \vdash\!\dashv 2^{1-n}$ onde gli intervalli $2^{-n} \vdash 2^{-n+1}$ $[2^{-n} \dashv 2^{-n+1}]$ $(n = 1, 2, \dots)$ sono insiemi di continuità per le semiderivate destre (sinistre) della $\varphi(1)$, di ordini $0, 1, \dots, \nu$.

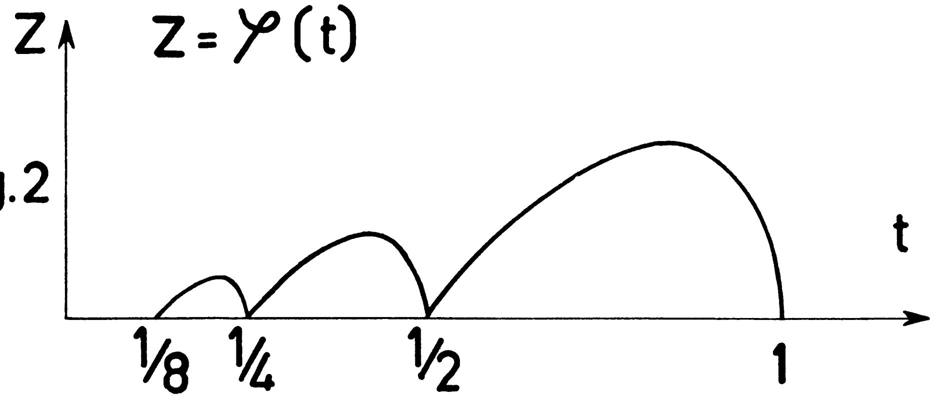
---

(4) Convengo di usare per la generica funzione reale $F(x)$ le notazioni $F'(x^+)$ e $F'(x+0)$ definite dalle eguaglianze

$$F'(x^+) = \lim_{t \to x^+} F'(t), \quad F'(x+0) = \lim_{t \to x^+} \frac{F(t) - F(x)}{t - x}.$$

Il diagramma l_n della $f(t)$ nell'intervallo $2^{-n} \overline{} 2^{1-n}$ si ottiene per (7) da quello l della $f(t)$, riducendo le ascisse e le ordinate nei rapporti da 1 a 2^{-n} e rispettivamente da 1 a $2^{-\nu n}$, quindi assoggettandolo alla traslazione

Fig. 2



lungo l'asse x che porta $0 \overline{} 2^{-n}$ in $2^{-n} \overline{} 2^{-n+1}$. Ad esempio se il diagramma della $f(t)$ è quello disegnato in Fig. 1, quello della $\varphi(t)$ nell'intervallo $1/8 \vert\overline{}\vert 1$ è necessariamente quello indicato in Fig. 2.

Le (10) danno subito

$$(11) \begin{cases} \varphi^{(k)}(2^{-n}+0) = 2^{-(\nu-k)n} f^{(k)}(2^n \cdot 2^{-n}-1) = 2^{-(\nu-k)n} f^{(k)}(0) & \\ & (n=1,2...) \\ \varphi^{(k)}(2^{1-n}-0) = 2^{-(\nu-k)n} f^{(k)}(2^n \cdot 2^{1-n}-1) = 2^{-(\nu-k)n} f^{(k)}(1) & k=(0,1,2,...,\nu), \end{cases}$$

onde per $(11)_1$, (3) e poi per $(11)_2$, è

$$(12) \qquad \varphi'(2^{-n}+0) = 2^{-(\nu-1)n} f'(0) = -2^{-(\nu-1)n} \varrho 2^{1-\nu} f'(1) =$$

$$= 2^{-(\nu-1)(n+1)} \varrho f'(1) = -\varrho\varphi'(2^{-n}-0) > 0$$

e per $(11)_1$, (4), $(11)_2$

$$(12') \qquad \varphi^{(k)}(2^{-n}+0) = 2^{-(\nu-k)n} f^{(k)}(0) = 2^{-(\nu-k)n} \cdot 2^{-\nu+k} f^{(k)}(1) =$$

$$= 2^{-(\nu-k)(n+1)} f^{(k)}(1) = \varphi^{(k)}(2^{-n}-0)$$

$$(k = 2, \dots, \nu-1) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Per $(7)_3$ e $(6)_2$ [rispettivamente $(6)_3$] e $(7)_2$ con $n = 1$, si ha:

$$(13) \qquad \varphi'(1^+) = f_1'(1) = -2^{-(\nu-1)1} \varrho f'(1) = -\varrho\varphi'(1^{1-1} - 0) = -\varrho\varphi'(1-0)$$

e rispettivamente

$$(13') \qquad \varphi^{(k)}(1+0) = f_1^{(k)}(1) = 2^{-(\nu-k)1} f^{(k)}(1) = \varphi^{(k)}(1-0)$$
$$(k = 0, 2, 3, \ldots, \nu - 1).$$

Le (10), (12′) e (13′) dicono intanto che *le* $\varphi(t)$, $\varphi^{(2)}(t), \ldots, \varphi^{(\nu-1)}(t)$ *esistono e sono continue per ogni* $t > 0$, *e le* (10), (12) *e* (13) *che, per* $t > 0$ *la* $\varphi'(t)$ *è continua o ha una discontinuità di 1ª specie espressa dalla* (9) *a seconda che t è o non è differente da* 2^{-n} $(n = 0, 1, \ldots)$.

Per (1), (2) e per la definizione di $\varphi(t)$ segue la validità ovunque delle (8).

Si osservi ora che per la supposta continuità delle $f^{(k)}(t)$ nell'intervallo chiuso $0 \vdash\!\dashv 1$ $(k = 0, 1, \ldots, \nu)$ esiste una costante M per cui si ha

$$(14) \qquad |f^{(k)}(t)| \leq M \quad \text{per} \quad 0 \leq t \leq 1 \qquad (k = 0, 1, \ldots, \nu)$$

onde per (10) e (11) è

$$(15) \qquad |\varphi^{(k)}(t \pm 0)| \leq 2^{-(\nu-k)n} M \quad \text{per } 2^{-n} \leq t < 2^{1-n}, \quad (k = 1, \ldots, \nu - 1).$$

Fissato t in $0 \overline{} 1$, sia n tale da aversi

$$2^{-n} \leq t < 2^{1-n}.$$

Segue allora da (15)

$$\left| \frac{\varphi^{(k-1)}(t \pm 0)}{t} \right| \leq 2^n |\varphi^{(k-1)}(t \pm 0)| < \frac{2^n M}{2^{(\nu-k+1)n}} = \frac{M}{2^{(\nu-k)n}} \leq \frac{M}{2^n}$$

ossia *per* $t = 0$ *la* $\varphi(t)$ *e le sue derivate di ordini* $1, 2, \ldots, \nu - 1$ *esistono e sono continue e nulle.* Per $(7)_1$ il teorema risulta allora completamente dimostrato.

N. 2. **Alcuni significativi esempi dinamici.**

Sia P un punto di massa unitaria, riferito a coordinate cartesiane ortogonali x, y, z, soggetto al vincolo unilaterale liscio

$$(16) \qquad z \geq 0$$

e alla forza di componenti

$$X \equiv Y \equiv 0 \qquad Z = Z(t) = \varphi^{(2)}(t), \tag{17}$$

la $\varphi^{(2)}$ essendo la funzione continua coincidente con la derivata 2^a della $\varphi(t)$ espressa dalla (7) quando nella (3) si assuma la costante ϱ eguale al coefficiente di restituzione relativo agli urti di P contro il piano xy.

È ormai quasi evidente il

TEOREMA II^0. *Le funzioni*

$$Z(t), \quad Z'(t), \dots, \quad Z^{(\nu-3)}(t) \tag{18}$$

sono ovunque continue. Inoltre per $t_0 \leq 0$. *il moto*

$$x(t) = y(t) = 0 \qquad z(t) = \varphi(t) \qquad -\infty < t < \infty \tag{19}$$

verifica le condizioni iniziali

$$x(t_0) = y(t_0) = z(t_0) = 0 \qquad \dot{x}(t_0) = \dot{y}(t_0) = \dot{z}(t_0) = 0 \tag{20}$$

e, in corrispondenza al valore nullo della reazione vincolare, l'equazione fondamentale della Meccanica in ogni istante distinto da 2^{-n} $(n = 0, 1, 2, \dots)$. *In tali istanti esso soddisfa la legge d'urto di Newton*

$$\dot{z}(t^+) = -\varrho\, \dot{z}(t^-) \qquad (0 < \varrho \leq 1). \tag{21}$$

Infatti dal teorema I e dalle (17) segue la continuità delle funzioni $Z(t), \dots$ $\dots, Z^{(-3)}(t)$. Il moto (19) per (8) rispetta il vincolo (16) e per (7), (17) e (9 è un moto dinamico pel punto P.

Esempio I° — Mi propongo ora di considerare un caso in cui la *componente della forza normale al vincolo unilaterale cambi segno infinite volte in un intorno destro dello zero* ([5]). Precisamente la forza (17) derivi, in base alle (7), da una funzione $f(t)$ soddisfacente le seguenti condizioni, compati-

---

([5]) In [3] a pg. 245, riga 27, si enunciano due « assiomi di finitezza (finitude), validi in meccanica razionale » dei quali riporto il secondo, ove μ è un moto svolgentesi nel lasso δ di tempo e realizzabile nel dominio C della meccanica razionale:

F. 2. La force $\vec{F}(t)$, qui produit le mouvement μ en δ ne peut changer d'orientation une infinité de fois, en aucune suite indéfinie σ (croissante, resp. décroissante) d'instants successifs.

Siccome l'esempio I è incompatibile con F. 2. a causa del modo in cui la forza varia in tale esempio, a prima vista potrebbe sembrare che l'accettazione della teoria meccanica proposta in [3] sia un comodo mezzo con cui poter trascurare le conseguenze che nel presente lavoro son tratte da tale esempio. Si osservi a tal proposito che può esser interessante ricercare un sottotipo τ' di τ magari non molto generale ma tale che i sistemi di tipo τ' godano dei requisiti di esistenza ed unicità; può essere di una certa ubili tra loro e con le (1), (2), (3), (4):

$$
(22) \qquad f''(t) \begin{cases} < 0 & 0 \leq t < \frac{1}{3} \\ > 0 & \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3} \\ < 0 & \frac{2}{3} < t \leq 1 \end{cases}
$$

---

tilità fare tale ricerca imponendo alle funzioni (f) che rappresentano analiticamente tali sistemi, condizioni analitiche esplicite e implicanti opportune modificazioni di $F2$. (Si potrebbe cominciare per esempio col vedere se un particolare tipo τ^0si può ottenere identificando le precedenti (f) con i polinomi).

Si osservi però che conseguenze tratte da affermazioni fatte nello stesso lavoro [3] fanno pensare che tali condizioni vadano scelte con prudenza e che il sottotipo τ' di sistemi da esse determinato non sia molto generale. Infatti *dalle stesse affermazioni segue l'esistenza di un certo moto μ la cui realizzabilità può provarsi con un metodo costruttivo. Ma tale moto risulta poi prodotto da forze la cui orientazione cambia infinite volte nell'intervallo finito* $0 \vdash\!\dashv 1$ *(il che è incompatibile con $F2$).*

Anzi, per tale deduzione, nel dominio C della Mecc. Raz. il problema della realizzabilità degli esempi considerati nel presente lavoro, con metodi in certo senso costruttivi sembrerebbe solubile. L'esistenza del precedente moto μ può dedursi come segue:

In [3] a pg. 255 riga 6, è detto: « Nous pouvons énoncer pourtant des conditions suffisantes pour que certains mouvements soient réalisables en C. Les voici, sous forme de propositions que l'on peut démontrer *sans faire appel aux axiomes de la mécanique rationelle; mais par une méthode constructive* ».

Riporto la terza di tali proposizioni:

« III. Lorsqu'un mouvement μ d'un point matériel M, defini cinématiquement en un laps de temps $\delta = [t_0, t_1]$ possède une accélération prospective $\vec{a}(t)$ continue et qui ne change pas une infinité de fois son orientation dans l'espace, le mouvement μ est réalisable en C ».

In [3] pg. 241 quart'ultima riga, è poi accettato — e detto R_c — l'ovvio assioma affermante che *è realizzabile il moto ottenuto componendo due moti realizzabili.*

Siano ora $x_1(t)$ e $x_2(t)$, $x(t)$ le funzioni continue con le derivate 1^a e 2^a, e definite per $|t| \leq 1$ dalle condizioni:

$$
(i) \qquad x_1(t) = x_2(t) = x(t) = 0, \qquad \text{per} \qquad -1 \leq t \leq 0
$$

$$
(ii) \qquad \ddot{x}_1(t) = t^5\left(1 + \cos\frac{1}{t}\right), \quad \dot{x}_2(t) = -t^5 \quad \text{e} \quad x(t) = t^5 \cos\frac{1}{t} \quad \text{per} \quad 0 \leq t \leq 1.
$$

E siano $\mu_1 \mu_2$ e μ i moti di un punto lungo un asse x, rappresentati in $-1 \vdash\!\dashv 1$ da $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x(t)$ rispettivamente. Per $(i)_{1,2}$ e $(ii)_{1,2}$ e la riportata proposizione III, μ_1 e μ_2 sono realizzabili. Per (i) e (ii) il moto μ si può ottenere componendo μ_1 e μ_2 onde per l'assioma R_c è realizzabile.

Infine per $(ii)_3$ vale la precedente affermazione sul modo di variare della forza producente μ nell'intervallo $0 \vdash\!\dashv 1$, in contrasto con l'assieme $F2$. c. d. d.

Mi sembra che avrbebe un certo interesse sostituire la proposizione III con una più restrittiva, compatibile con $F2$ e R_c.

$$f'\left(\frac{1}{3}\right)=0 \quad f'\left(\frac{2}{3}\right)<f'(0). \tag{23}$$

Da (23) e $(22)_2$ segue

$$0<f'(t)<f'(0) \qquad 1/3<t\leq 2/3 \tag{24}$$

onde, per $(22)_{1,3}$

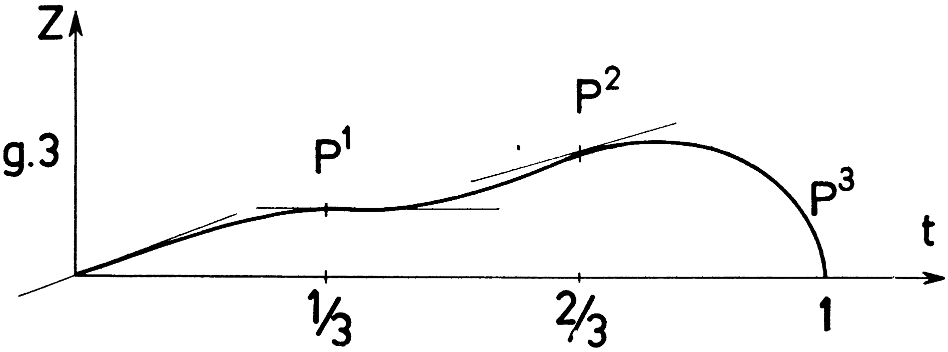
$$f'(t)-f'(0)=\int_0^t f''(t)\,dt<0 \qquad 0<t\leq 1 \tag*{$(25)_1$}$$

Per $(22)_3$ è inoltre

$$f'(1)-f'(t)<0 \qquad 1/3\leq t\leq 2/3. \tag*{$(25)_2$}$$

Osservo che (22), (23) e (24) si realizzano, assumendo per diagramma di $y=\varphi(t)$ [vedi fig. 3] una curva l tale che, presi su essa i punti P_0,

Fig. 3



P_1, P_2, P_3 di ascisse 0, 1/3, 2/3, 1, nei tratti $P_0 \frown P_1$ e $P_2 \frown P_3$ la concavità sia rivolta verso il basso e i massimi siano raggiunti in $t=1/3$ e $t=2/3+\varepsilon$ $(0<\varepsilon<1/3)$ mentre nel tratto $P_1 \frown P_2$ la concavità sia verso l'alto e l'inclinazione sull'asse sia minore che in P_0. (Di conseguenza i flessi sono in P_1 e P_2).

Conviene osservare che la similitudine di equazione

$$\eta=2^m t-1$$

muta l'intervallo $2^{-m} \vdash\!\dashv 2^{1-m}$ nello $0 \vdash\!\dashv 1$ e per $(7)_2$, le proprietà (22), (24) e $(25)_{1,2}$ di $f(t)$ implicano le analoghe proprietà della $\varphi(t)$ in $2^{-m} \vdash\!\dashv 2^{1-m}$, ossia

$$
(26) \qquad \varphi^{(2)}(t) \begin{cases} < 0 & 2^{-m} \leq t < 2^{-m} \cdot 4/3 \\ > 0 & 2^{-m}\, 4/3 < t < 2^{-m} \cdot 5/3 \\ < 0 & 2^{-m}\, 5/3 < t \leq 2^{1-m} \end{cases}
$$

$$
(27) \qquad \begin{cases} 0 \leq \varphi'(t) \leq \varphi'[(2^{-m})^+] & 2^{-m}\, 4/3 \leq t \leq 2^{-m}\, 5/3 \\ \varphi'(t) - \varphi'[(2^{-m})^+] < 0 & 2^{-m} < t < 2^{1-m} \\ \varphi'[(2^{1-m})^-] - \varphi'(t) < 0 & 2^{-m}\, 4/3 < t \leq 2^{-m}\, 5/3 . \end{cases}
$$

Per $(27)_2$ e la continuità di $\varphi'(t)$ per $t \neq 2^{-n}$ $(n = 0, 1, ..)$, si ha

$$
(28) \qquad \varphi'[(2^{1-m})^-] - \varphi'[(2^{-m})^+] < 0 \qquad (m = 1, 2, ...).
$$

È facile riconoscere in base alle (17) e (26) che la *forza é rivolta verso il basso negli intervalli* $2^{-m}\, 5/6 \vdash\!\dashv 2^{-m}\, 4/3$ *e verso l'alto negli intervalli* $2^{-m}\, 4/3 \vdash\!\dashv 2^{-m}\, 5/3$ $(m = 1, 2, ...)$.

Il moto (19), dinamicamente possibile per P e verificante le condizioni iniziali (20), rappresenta la quiete di P nell'origine da $t_0 \leq 0$ all'istante 0 (che naturalmente è effettiva solo per $t_0 < 0$), e, per $t = 0$, un distacco di P dal piano xy *non semplice*, nel senso che *non esiste un intorno destro* $0 \vdash\!\dashv \varepsilon$ *di tale istante in cui* P *non riprenda mai contatto col piano* xy.

Anzi se, le condizioni iniziali (20) son verificate da più di un moto dinamico per P, *per ciascuno di essi l'istante* $t = 0$ *è punto di accumulazione destra di istanti di urto effettivo.*

Infatti intanto il generico moto dinamico per P in $t_0 \vdash\!\dashv +\infty$ e verificante le (20), per (17), (16) e (7) è certo rappresentabile nella forma

$$
(29) \qquad x \equiv y \equiv 0 \quad z = \psi(t) \qquad t_0 \leq t < +\infty
$$

con

$$
(30) \qquad z = \psi(t) \equiv 0 \quad \text{per} \quad t_0 \leq t \leq 0
$$

ove, se sussiste un teorema di unicità in relazione alle condizioni iniziali (20), la $\psi(t)$ necessariamente si identifica con la $\varphi(t)$.

Inoltre per $t = 0$ deve esservi un distacco perchè altrimenti a causa di $(26)_2$ e (17), per m abbastanza grande, in $2^{-m}\, 4/3 \vdash\!\dashv 2^{-m}\, 5/3$ sarebbe negativa la relazione Φ_z espressa da

$$
(30') \qquad \Phi_z = \ddot{z} - Z(t) = 0 - \varphi^{(2)}(t).
$$

Si supponga ora, per assurdo, che tale distacco sia semplice. Esiste allora un istante $\xi > 0$ e < 1 con

$$\dot{z} = \dot{\psi}(\xi) > 0, \qquad z = \psi(t) > 0 \qquad (0 < t < \xi). \tag{31}$$

Si determini ora m con le

$$2^{-m} \leq \xi < 2^{1-m} \tag{32}$$

Poichè per $(31)_2$ la $\psi(t)$ è continua in $0 \overline{\quad} \zeta$ e ivi nella equazione fondamentale della dinamica del punto P (di massa unitaria) non figura la reazione, per (17) e (32) è:

$$\left\{\begin{aligned} &\dot{\psi}(\xi) - \dot{\psi}(0+) = \int_0^{\xi} \ddot{z}(t)\,dt = \int_{2^{-m}}^{\xi} \varphi''(t)\,dt + \sum_{n=m}^{+\infty} \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \varphi''(t)\,dt = \\ &= \varphi'(\xi^+) - \varphi'(2^{-m}) + \sum_{n=m+1} [\varphi'(2^{-n} - 0) - \varphi'(2^{-n-1} + 0)]. \end{aligned}\right. \tag{33}$$

Per la legge d'urto, e per la $\dot{\psi}(0 - 0) = 0$ — conseguente alla (30) per $t_0 < 0$ e alla $(20)_6$ per $t = 0$ — e per l'assurda ipotesi che all'istante 0 si abbia un distacco non semplice risulta

$$\dot{\psi}(0^+) = \dot{\psi}(0 + 0) = 0.$$

Di conseguenza, per (32), $(27)_1$ e (28), da (33) segue

$$\dot{\psi}(\xi) < 0,$$

in contrasto con $(31)_1$. Dunque il distacco per $t = 0$ non è semplice. Supponiamo infine, per assurdo, che $t = 0$ non sia d'accumulazione destra di istanti d'urto effettivo [6]. Comunque si fissi $\varepsilon > 0$ e < 1, esiste qualche intervallo $\alpha \vdash\!\dashv \beta$ con

$$\left\{\begin{aligned} &0 < \alpha < \beta < \varepsilon \\ &\psi(\alpha) = \psi(\beta) = 0 \qquad \dot{\psi}(\alpha) = \dot{\psi}(\beta) = 0 \\ &\psi(t) > 0 \qquad\qquad \text{per } \alpha < t < \beta. \end{aligned}\right. \tag{34}$$

---

[6] Nei quali cioè la velocità abbia una effettiva discontinuità di prima specie.

È facile provare che nell'istante α di distacco [o in quello β di presa di contatto] senza urto effettivo, non può esistere un intervallino $\alpha \frown \alpha + \eta$ [$\beta - \eta \frown \beta$] in cui la forza sia diretta verso la parte non consentita dal vincolo, cioè sia

$$z(t) = \varphi^{(2)}(t) < 0.$$

Deve essere dunque per (27)

$$(35) \qquad 2^{-n}\, 4/3 \leq \alpha < 2^{-n}\, 5/3, \quad 2^{-m}\, 4/3 \leq \beta < 2^{-m}\, 5/3, \quad m \leq n.$$

Non può essere $m = n$, perchè allora in $\alpha \frown \beta$ la

$$z(t) = \varphi^{(2)}(t)$$

sarebbe < 0 in contrasto con la

$$(36) \qquad 0 = \dot{\psi}(\beta) - \dot{\psi}(\alpha) = \int_\alpha^\beta \varphi^{(2)}(t)\, dt$$

che segue da $(34)_2$ e la $\psi(t) = Z(t) = \varphi^{(2)}(t)$. Per $n > m$ abbiamo, per (35)

$$\int_\alpha^\beta \varphi^{(2)}(t)\, dt = \int_\alpha^{2^{1-n}} \varphi^{(2)}\, dt + \left(\int_{2^{1-n}}^{2^{2-n}} \varphi^{(2)}\, dt + \dots + \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} \varphi^{(2)}\, dt\right) + \int_{2^{-m}}^\beta \varphi^{(2)}\, dt =$$

$$= \varphi'[(2^{1-n})-] - \varphi'(\alpha) + \sum_{r=m+1}^{n-1} [\varphi'(2^{1-r}-) - \varphi'(2^{-r}+)] + \varphi'(\beta) - \varphi'(2^{-m}+)$$

che è in contrasto con (36) in quanto le $(27)_3$, (28) e $(27)_2$ dicono che l'integrale a 1° membro è proprio < 0.

Dunque, *a destra dell'istante* 0 *si accumulano istanti di urto effettivo.*

Esempio 2° — Circostanze analoghe si possono presentare con forze puramente posizionali. Si consideri infatti il seguente secondo esempio ottenuto sostituendo nel precedente alle determinazioni (17) e (20) della forza e delle condizioni iniziali, le

$$(37) \qquad X \equiv Y \equiv 0 \qquad Z = Z(x) \equiv \varphi^{(2)}(x)$$

e rispettivamente

$$(38) \qquad x(t_0) = t_0, \quad y(t_0) = z(t_0) = 0, \quad \dot{x}(t_0) = 1, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{z}(t_0) = 0$$

ove è come prima $t_0 < 0$.

Da $(37)_1$, e (38) si deduce

$$x \equiv t \tag{39}$$

È facile riconoscere che i moti dinamicamente possibili in questo secondo esempio sono tutti e soli quelli che si ottengono componendo quelli rappresentati dalle (29) dell'esempio primo con la traslazione uniforme (39) sull'asse delle x.

In particolare è ora dinamicamente possibile il moto

$$x(t) = t \quad y(t) = 0 \quad z(t) = \varphi(t) \tag{40}$$

Per tale moto, come pel generico moto dinamico di P verificante le (38), sono ovviamente valide tutte le proprietà attribuite ai loro corrispondenti nell'esempio primo eccetto che nell'intervallo di tempo $t_0 \vdash\!\!\dashv 0$, il punto P, invece di permanere in quiete nell'origine 0, vi giunge movendosi di moto rettilineo uniforme lungo l'asse x.

Esempio 3° — Si supponga ora che nel primo esempio considerato la forza non sia mai diretta verso la parte consentita dal vincolo. Tale scopo si raggiunge sostituendo (come è lecito) alle condizioni 22), 23) sulla f, la

$$f''(t) < 0 \qquad 0 \leq t \leq 1 \tag{41}$$

ed imponendo l'analoga

$$f_1''(t) \leq 0 \qquad 1 \leq t \leq +\infty \tag{42}$$

alla funzione $f_1(t)$ anch'essa figurante nell'espressione (7) di $\varphi(t)$ e quindi influente per (17) sulla forza.

Imporre la (42) è lecito in quanto, come è facile riconoscere, essa è compatibile con tutte le condizioni di regolarità imposte alla $f_1(t)$ e con le (5) e (6). Ma per le (41) e (42) il moto

$$x(t) \equiv y(t) \equiv z(t) \equiv 0 \tag{43}$$

ossia la quiete di P in 0, soddisfa tutte le equazioni del moto del primo esempio, in corrispondenza ad una reazione data dalla (30') che per le (41) e (42) stesse e (7) è sempre suscettibile di essere esplicata dal vincolo (16).

Dunque *il punto* 0 *é posizione di equilibrio* e tuttavia, *oltre la quiete in* 0 *é dinamico il moto* (19) *nel quale il punto* P *rimane in* 0 *solo per* $t_0 \leq t \leq 0$ *mentre per* $t = 0$ *esso si distacca dal piano* xy *in modo non semplice.*

Esempio 4° — Come ultimo esempio si consideri la forza espressa dalle (37) in cui la φ derivi mediante le (7) da dalle f e f_1 soddisfacenti le condizioni (41) e (42) [oltre le (1), (2)... (6)], e si assumano, come condizioni iniziali, le (38).

Si riconosce subito che *si può avere sia il moto uniforme sull'asse* x *dato da* (39) *come pure quello che si ottiene componendolo con un qualunque moto dell'esempio terzo.*

III CONCLUSIONI

Sia $\mathcal{T}_\mu$ una teoria trattante il tipo τ_μ di sistemi olonomi a vincoli lisci, anche unilaterali, esprimibili mediante le disequazioni

$$q_{m+1} \geq 0, \ldots, q_N \geq 0$$

(ove $m < N$ e N è il numero di gradi di libertà), per i quali la espressione lagrangiana della forza viva e le componenti lagrangiane della sollecitazione siano funzioni delle $q, \dot{q}, t$ continue con le loro derivate fino all'ordine μ, fissato ad arbitrio. Per $\mu = \nu - 3 \geq 2$ in assenza di vincoli unilaterali valgono certo i teoremi di esistenza ed unicità del moto, quindi, in particolare, è dimostrabile la «sufficienza» del principio dei lavori virtuali. Invece gli esempi terzo e quarto mostrano che, comunque elevato sia μ, appartiene sempre al tipo $\mathcal{T}_\mu$ un sistema olonomo con vincoli anche unilaterali pel quale non vale l'unicità del moto, in corrispondenza ad opportune condizioni iniziali, nella classe C dei moti risolventi le equazioni di Lagrange in ogni intervallo di tempo privo d'urti, e soddisfacenti, negli istanti d'urto, ad una opportuna legge d'urto, per esempio, nel caso di un punto, a quella (21) di Newton.

Nel terzo esempio appartengono a C sia la quiete perenne in una posizione P^*, sia un moto coincidente con essa solo fino ad un certo istante $t_1 (= 0)$ che risulta di distacco non semplice, ossia punto di accumulazione destra di istanti d'urto. Ciò dimostra che la «sufficienza» del principio dei lavori virtuali non si può dimostrare se non si ammette la validità di di qualche opportuno criterio di scarto. Ad esempio, un tentativo del genere è stato fatto dal Professor Sbrana per rendere determinati dalle condizioni iniziali i moti di certi sistemi olonomi bilaterali pei quali le equazioni del moto non soddisfano le condizioni di Lipschitz (7).

Forse può sembrare opportuno effettuare questo scarto escludendo distacchi non semplici indotti a ciò dal fatto che in realtà un distacco non semplice è da ritenersi fisicamente poco plausibile. Si noti però che dal

(7) V. [4], N. 4.

punto di vista fisico è altrettanto poco plausibile ritenere che un sistema ad un istante t_1 possa mettersi in moto in modo che l'energia cinetica si annulli in istanti accumulantisi a destra di t_1. Tuttavia tale possibilità mentre è solo implicitamente esclusa da qualche Autore, è invece giudicata da altri un'ipotesi restrittiva [8] da evitarsi nella dimostrazione del principio dei lavori virtuali.

A mio avviso c'è un motivo importante che fa apparire insoddisfacente per i sistemi di tipo τ_μ l'esclusione a priori dei moti che presentano distacchi non semplici o di quelli per i quali il sistema si mette in movimento ad un istante t_1, in modo che non esista un suo intorno destro $t_1 \overline{}| \; t_{1+\varepsilon}$ in cui l'energia cinetica è sempre positiva.

Infatti *ciascuna di queste due esclusioni, comunque elevato sia μ priva il tipo τ_μ del requisito di esistenza, nel senso precedentemente detto che appartiene a τ_μ un sistema per il quale in corrispondenza ad opportune condizioni iniziali non esisterebbe alcun moto dinamico.*

Nel caso di vincoli unilaterali ciò risulta chiaramente dagli esempi I^0 e II^0.

Per provare che anche *in una teoria riguardante solo i sistemi a vincoli bilaterali, il suddetto requisito di esistenza perde la validità quando si ammette che se un sistema si mette in moto a t_0, in un conveniente intorno $t_0 \overline{}\; t_0 + \varepsilon$ di esso* (con $\varepsilon > 0$) *l'energia cinetica é positiva*, basta considerare il caso del sistema olonomo ad un grado di libertà (di tipo τ_μ), di forza viva e componente lagrangiana della sollecitazione espresse da:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\dot{q}^2 \qquad Q(q, t) = \frac{d^2}{dt^2} q^*(t)$$

con

$$q^*(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t^{\mu+5}\left(\operatorname{sen}\dfrac{1}{t} + 1\right) & 0 < t. \end{cases}$$

Per tale sistema l'unico moto soddisfacente le condizioni iniziali

$$q(0) = 0 \qquad \dot{q}(0) = 0$$

è rappresentato da

$$q = q^*(t)$$

---

[8] V. [2] e, in particolare, la nota 4 a pag. 211 di tale lavoro.

e per esso si ha

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\left[t^{\mu+4}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{t} + 1\right) - t^{\mu+3}\cos\frac{1}{t}\right]^2$$

onde è $\mathcal{T} = 0$ negli istanti

$$t_k = \frac{2}{(3 + 4k)\,\pi} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

che si accumulano a destra di $t = 0$.

È dunque provato che l'esclusione dei moti per cui si presenta tale circostanza, come è stato sopradetto, priva il tipo τ_μ del requisito di esistenza per $n = 1, 2, \ldots$ anche limitandosi a considerare solo vincoli bilaterali.

BIBLIOGRAFIA

[1] BRESSAN A. *Questioni di regolarità e di unicità del moto...* Rend. Sem. Mat. Università di Padova, 1959.

[2] CATTANEO C. *Sulla «sufficienza» del principio dei lavori virtuali...* Rend. di Mat. dell'Univ. di Roma, serie V. XIV, fascicolo 1-2 luglio-Dicembre 1954, pag. 209.

[3] FRODA A. *La finitude en mécanique classique, ses axiomes et leurs implications.* Proceedings of the International Symposium on The axiomatic method of Berkeley, 1957-1958. North Holland Publishing Company. Amsterdam 1959, pg. 260.

[4] SBRANA F. *Sul teorema di unicità per le equazioni differenziali della Meccanica.* Boll. U. M. I., serie III, anno VIII, N. 2, giugno 1953, pag. 126.

[5] SIGNORINI A. *Meccanica Razionale,* seconda ediz. Perella Roma, vol. II.