ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

J. L. LIONS
E. MAGENES

Problemi ai limiti non omogenei (I)

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 14, nº 3 (1960), p. 269-308
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1960_3_14_3_269_0>

PROBLEMI AI LIMITI NON OMOGENEI. (I)

di J. L. LIONS (a Nancy) e di E. MAGENES (a Pavia)

Introduzione.

Se Au è un operatore differenziale lineare alle derivate parziali in un aperto Ω dello spazio R^n e $B_j u$ $(j = 1, \dots, l)$ sono operatori differenziali lineari sulla frontiera Γ di Ω, intendiamo di chiamare « problema ai limiti non omogeneo » la ricerca di una soluzione di

$$Au = f \tag{I}$$

in Ω, la quale verifichi le condizioni ai limiti non omogenee su Γ

$$B_j u = g_j \qquad j = 1, \dots, l \tag{II}$$

con f e g_j funzioni assegnate, e chiameremo « problema ai limiti omogeneo » corrispondente quello consistente nella ricerca di una soluzione della (I), che verifichi le condizioni ai limiti omogenee

$$B_j u = 0 \qquad j = 1, \dots, l. \tag{II$_0$}$$

Tutto ciò è detto evidentemente in un senso puramente intuitivo, perchè occorre precisare gli spazi dei dati e delle soluzioni, in cui si vuole studiare il problema.

Noi ci proponiamo in questa serie di lavori di studiare dapprima i problemi ai limiti non omogenei *ellittici* e poi quelli *misti*, nel senso di HADAMARD. Si può infatti osservare che in generale sono stati studiati molto più a fondo i problemi omogenei che quelli non omogenei, tant'è che allo stato attuale la teoria è più progredita per i primi che per i secondi. Probabilmente ciò dipende dal fatto che nelle moderne impostazioni dei problemi ai limiti è più facile definire cosa si debba intendere per « annullarsi » su Γ

in senso generalizzato degli operatori $B_j u$, che « assumere » su Γ i valori g_j assegnati per $B_j u$.

Così ad esempio, se si considera il problema di DIRICHLET per l'equazione lineare ellittica di ordine $2m$, di cui proprio ci occuperemo in questo primo lavoro,

$$\text{(I)} \qquad Au = f$$

$$\text{(III)} \qquad u = g_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g_1, \ldots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial n^{m-1}} = g_{m-1}$$

$\frac{\partial}{\partial n}$ indicando la derivazione secondo la normale interna a Γ, e il relativo problema omogeneo

$$\text{(I)} \qquad Au = f$$

$$\text{(III}_0\text{)} \qquad u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \ldots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial n^{m-1}} = 0,$$

è noto che il problema omogeneo è stato studiato assai a fondo da numerosi Autori.

Il primo risultato è quello di L. GÅRDING [16] e M. I. VISHIK [47]; è un risultato di carattere sostanzialmente variazionale che risolve il problema omogeneo in certi spazi hilbertiani, indicati, con nomenclatura assai diffusa, con $H^k(\Omega)$; esso, completato con una osservazione dovuta a L. SCHWARTZ [39 bis], assicura che: in ipotesi generali sui coefficienti di Au, se Au è fortemente ellittico e il coefficiente del termine in u è sufficientemente grande, allora per ogni f appartenente allo spazio $H^{-m}(\Omega)$, esiste una e una sola $u \in H^m(\Omega)$ (dunque a integrale di DIRICHLET d'ordine m finito), che verifica la (I) nel senso delle distribuzioni su Ω e le condizioni ai limiti (III$_0$) nel senso generalizzato dell'appartenenza a $H_0^m(\Omega)$, cioè di essere limite in $H^m(\Omega)$ di funzioni indefinitivamente differenziabili e a supporto compatto in Ω. Più precisamente esso assicura che *l'applicazione* $u \to Au$ *è un isomorfismo di* $H_0^m(\Omega)$ *su* $H^{-m}(\Omega)$.

Ebbene, il corrispondente risultato per il problema non omogeneo (I)-(III) si è potuto formulare in modo esauriente solo di recente, dopo che sono state studiate per le funzioni di $H^m(\Omega)$ da N. ARONSZAJN [4], V. M. BABICH-S. L. SLOBODECHIJ [7], J. L. LIONS [22], G. PRODI [35], [36] gli spazi $H^s(\Gamma)$ delle « tracce » su Γ di u e delle sue derivate; esso si può enunciare, indicando con $\vec{\gamma u}$ il vettore, le cui componenti sono le « tracce » su Γ di u,

$\frac{\partial u}{\partial n}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial n^{m-1}}$ nel modo seguente: $u \to \{Au, \vec{\gamma u}\}$ *è un isomorfismo di* $H^m(\Omega)$ *su* $H^{-m}(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$.

Desideriamo sottilineare che questo è un risultato veramente *esauriente*, nel senso che stabilisce non solo condizioni sufficienti sui dati f e g_j per l'esistenza e l'unicità della soluzione, ma addirittura un *teorema di isomorfismo.*

I lavori successivi a quelli di GÅRDING e VISHIK si sono occupati nella maggior parte del problema di DIRICHLET omogeneo, limitandosi a dare per il problema non omogeneo tutt'al più qualche condizione sufficiente sui dati g_j, perchè esso potesse ricondursi al problema omogeneo: dai risultati di regolarizzazione hilbertiana della soluzione « all'interno » e « sulla frontiera » (FRIEDRICHS, JOHN, C. B. MORREY, SCHWARTZ, GUSEVA, BROWDER, NIRENBERG, ARONSZAJN, SMITH...), ai più recenti studi relativi agli operatori Au ellittici non fortemente e alla regolarizzazione non hilbertiana negli spazi $L^p(\Omega)$ (AGMON [1 bis] [2], BROWDER [12], HORMANDER [19 bis], SLOBODECHIJ [43 bis], KOSELEV [20], SCHECHTER [37] [38] [38 bis], AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG [3], PEETRE [31],... .

Più recentemente però anche il problema non omogeneo di DIRICHLET è stato ripreso in diverse direzioni: una formulazione assai generale nell'ambito della teoria delle distribuzioni, dove le condizioni ai limiti (III) e l'equazione (I) vengono in un certo senso unificate, trovasi nei lavori di SOBOLEV-VISHIK [44], LIONS [23] (si veda anche il n. 14 di MAGENES-STAMPACCHIA [27]); una impostazione nel senso classico, vale a dire negli spazi $C^k(\bar{\Omega})$ delle funzioni continue in $\Omega + \Gamma$, è stata considerata nei lavori di BROWDER [10], PINI [34], AGMON [1], [2 bis], MIRANDA [24], AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG [3]; una trattazione negli spazi $L^p(\Omega)$ si trova in AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG [3], AGMON [2], BROWDER [12]. Anche negli stessi spazi hilbertiani esso è stato ripreso, ma con l'intenzione di ottenere risultati non più a integrale di DIRICHLET finito, cioè con la soluzione $u \in H^m(\Omega)$, bensì risultati in cui la soluzione appartiene a spazi $H^k(\Omega)$ con $k < m$; un risultato di CIMMINO [13] per le equazioni di secondo ordine, esteso successivamente da PINI [32], [33], [34] a certe equazioni del quarto ordine, è stato di recente generalizzato da MAGENES [26], ottenendo un teorema di esistenza e di unicità per il problema (I)-(III) con $f \in H^{-m}(\Omega)$ e $g_j \in H^{m-1-j}(\Gamma)$ e la soluzione appartenente a $H^{m-1}(\Omega)$. Più recentemente ancora un cenno al problema negli spazi $H^k(\Omega)$ con $k < m$ è stato dato anche da PEETRE [31].

Noi vogliamo iniziare questa serie di lavori dedicati ai problemi ai limiti non omogenei proprio prendendo in considerazione il problema di DIRICHLET per l'equazione ellittica d'ordine qualunque. E lo tratteremo anzitutto secondo un ordine di idee vicino all'ultima delle direzioni ora segnalate, vale a dire in spazi hilbertiani, ma a integrale di DIRICHLET anche non finito. In questo primo lavoro prenderemo più precisamente in considerazione il problema (I)-(III), supponendo che Ω sia il semispazio R^n_+ degli x per cui è $x_n > 0$. Il metodo che seguiremo è in sostanza il seguente:

1^0) Anzitutto sarà dimostrato un risultato di regolarizzazione hilbertiana della soluzione del problema omogeneo, rispetto alle sole derivate « tangenziali » (cioè secondo le variabili $x_1, \dots, x_{n-1}$) utilizzando il metodo ormai ben noto di maggiorazione del rapporto incrementale « tangenziale » (NIRENBERG [30], BROWDER [11], STAMPACCHIA [46],...); introdotto quindi lo spazio $T^{k,r}(R^n_+)$, k e r interi e $r \geq 0$, come lo spazio delle u tali che u e tutte le sue derivate tangenziali d'ordine $\leq r$ sono in $H^k(R^n_+)$, sarà ottenuto, sfruttando anche dei teoremi di tracce, il teorema:

Se i coefficienti di Au sono sufficientemente regolari e se $u \to Au$ è un isomorfismo di $H^m_0(R^n_+)$ su $H^{-m}(R^n_+)$, allora $u \to \{Au, \vec{\gamma u}\}$ è un isomorfismo di $T^{m,r}(R^n_+)$ su $T^{-m,r}(R^n_+) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{m+r-j-1/2}(\Gamma)$.

2^0) Il risultato verrà poi esteso con procedimento di « dualizzazione», al caso di r intero negativo, dopo aver opportunamente generalizzato la definizione degli spazi $T^{k,r}(R^n_+)$.

3^0) Infine, utilizzando il recente teorema di interpolazione quadratica di LIONS [24], esso sarà esteso al caso di r reale qualunque.

I risultati qui ottenuti si possono estendere al caso di un aperto Ω sufficientemente regolare dello spazio R^n, sia pure con qualche difficoltà nella definizione degli spazi $T^{k,r}(\Omega)$, data la presenza di *dissimetrie* tra le variabili « tangenziali » e quella « normale » a Γ; è ciò che faremo in un successivo lavoro.

Estenderemo anche la teoria svolta in questo lavoro per $\Omega = R^n_+$ al caso in cui sia $\Omega = R^\mu \times R^\nu_{++}$, $\mu + \nu = n$, dove R^μ è lo spazio a μ dimensioni delle $x' = (x_1, \dots, x_\mu)$ e R^ν_{++} è il sottoinsieme di R^ν delle $t = (t_1, \dots, t_\nu)$ per cui è $t_1 > 0$, $t_2 > 0, \dots, t_\nu > 0$, le variabili privilegiate «tangenziali» essendo in questo caso le $x_1, \dots, x_\mu$ (per $\mu = n - 1$ si riotterrà la teoria qui svolta).

Nei prossimi articoli prenderemo in considerazione anche altri classi di funzioni, in cui il problema di DIRICHLET è ben posto, ottenute tenendo conto anche dei risultati di regolarizzazione « normale » e quindi *simmetriche* rispetto a tutte le variabili, in particolare le classi $H^k(\Omega)$ con *k reale qualunque.*

Un altro modo per affrontare il problema di DIRICHLET non omogeneo si ottiene utilizzando opportunamente la teoria dei potenziali di « strati multipli », recentemente sviluppata da AGMON [1] e perfezionata poi da MIRANDA [29] e da AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG [3]; questo metodo è stato seguito in [26] e sarà da noi anche ripreso e maggiormente sviluppato.

Argomento di successivi lavori saranno poi le estensioni dei procedimenti usati: 1) ad altri problemi ai limiti diversi da quello di DIRICHLET; 2) agli spazi $L^p(\Omega)$, più precisamente del tipo di S. L. SOBOLEV; 3) ad una trattazione dei problemi ai limiti in cui si prendano come operatori elementari non più le derivate parziali, ma operatori differenziali più complessi (per es. sostituendo le classi $H^k(\Omega)$ con le classi delle $u \in L^2(\Omega)$ e tali che $\Delta^k u \in L^2(\Omega)$, si veda in proposito LIONS [21] e MAGENES-STAMPACCHIA [27]); 4) ai problemi misti secondo HADAMARD; 5) alle perturbazioni singolari.

I prossimi articoli appariranno sugli « Annales de l'Institut Fourier » (t. 11) e sui C. R. Acad. Sc., Paris (1960).

I. - IL PROBLEMA DI DIRICHLET NEGLI SPAZI $T^{k,r}(R^n_+)$ CON k E r INTERI.

1. Preliminari.

1.1. Sia R^n lo spazio reale euclideo a n dimensioni, il cui punto indicheremo con $x = (x_1, \dots, x_n)$; in R^n si consideri l'iperpiano π degli x per cui è $x_n = 0$ e il semispazio R^n_+ degli x per cui è $x_n > 0$. Porremo anche a volte $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ e $x_n = t$, sicchè il punto generico di π si potrà indicare con x' e quello di R^n_+ con (x', t), $t > 0$.

Ci interesseranno alcuni spazi, ormai assai noti, di distribuzioni su R^n, su R^n_+ e su π che ora richiameremo seguendo il simbolismo più abituale (1).

Spazio $H^k(R^n)$: Per k *intero* ≥ 0 esso suole definirsi come lo spazio (di HILBERT) delle funzioni complesse $u(x) \in L^2(R^n)$ tali che $D^p u \in L^2(R^n)$ per $|p| \leq k$, nel senso delle distribuzioni su R^n, normalizzato da

$$\| u \|_{H^k(R^n)} = \Big(\sum_{|p| \leq k} \| D^p u \|^2_{L^2(R^n)} \Big)^{1/2} \ (2). \tag{1.1}$$

(1) Per ulteriori precisazioni si veda ad es. SOBOLEV [44 bis], DENY-LIONS [14], STAMPACCHIA [45], ARONSZAJN [4], LIONS [22] [21 bis], MAGENES-STAMPACCHIA [27], PRODI [35] [36], PEETRE [31], SCHWARTZ [40] [41]...

(2) $D^p = \dfrac{\partial^{|p|} u}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}$ dove $p = (p_1, \dots, p_n)$ è una n-pla di numeri interi ≥ 0 e $|p| = p_1 + \dots + p_n$; se $p = (0, \dots, 0)$, $D^p u = u$. Se Ω è un aperto di R^n, $L^2(\Omega)$ è lo spazio hilbertiano delle funzioni complesse di quadrato sommabile in Ω normalizzato da

$$\| u \|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega | u(x) |^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

È noto ed è immediato per trasformata di FOURIER che $H^k(R^n)$ coincide algebricamente anche con lo spazio delle distribuzioni « temperate » su R^n $u(x)$, nel senso di L. SCHWARTZ [39], tali che

$$(1.2) \qquad (1 + |\xi|^2)^{k/2} \mathcal{F} u \in L^2(R^n)$$

dove $\mathcal{F}u$ è la trasformata di FOURIER di $u(x)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ è la variabile duale di x, $|\xi| = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{1/2}$. Ciò ha portato ad introdurre la definizione dello spazio $H^k(R^n)$ per *k reale qualunque* come lo spazio delle distribuzioni $u(x)$ temperate su R^n che verificano la (1.2), normalizzato da

$$(1.3) \qquad \| u \|_{H^k(R^n)} = \left(\int_{R^n} (1 + |\xi|^2)^k |\mathcal{F}u|^2 \, d\xi \right)^{1/2}.$$

Per k intero ≥ 0 la norma (1.3) è equivalente alla norma (1.1) e si ottiene così uno spazio identificabile sia algebricamente sia topologicamente con quello sopra introdotto; salvo avviso contrario noi intenderemo riferirci a questa definizione generale.

Ricordiamo anche che per $k' < k$ si ha: $H^k(R^n) \subset H^{k'}(R^n)$, l'inclusione essendo da intendere sia algebricamente che topologicamente, e che $\mathcal{D}(R^n)$ è denso in $H^k(R^n)$, sicchè $H^k(R^n)$ è uno *spazio normale di distribuzioni su* R^n; il suo duale (forte) è allora uno *spazio di distribuzioni su* R^n ed è precisamente identificabile con $H^{-k}(R^n)$ (3).

Spazio $H^k(\pi)$, *k reale qualunque*: definizione analoga a quella di $H^k(R^n)$ tenendo conto che $\pi \simeq R^{n-1}$.

---

(3) Se Ω è un aperto di R^n, eventualmente coincidente con R^n, $\mathcal{D}(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni indefinitamente differenziabili e a supporto compatto in Ω, munito della topologia di L. SCHWARTZ [39]; $\mathcal{D}'(\Omega)$ è lo spazio delle distribuzioni su Ω, cioè il duale (forte) di $\mathcal{D}(\Omega)$. Ricordiamo anche che, seguendo SCHWARTZ (v. ad es. [41]), dicesi *spazio di distribuzioni* su Ω ogni sottospazio vettoriale topologico di $\mathcal{D}'(\Omega)$, munito di una topologia più fine di quella indottavi da $\mathcal{D}'(\Omega)$; dicesi poi *spazio normale di distribuzioni su* Ω uno spazio E di distribuzioni su Ω tale che: 1) $\mathcal{D}(\Omega) \subset E \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, 2) le iniezioni di E in $\mathcal{D}'(\Omega)$ e di $\mathcal{D}(\Omega)$ in E sono continue, 3) $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in E. Si ha allora che il duale di uno spazio normale di distribuzioni si può identificare algebricamente con uno spazio di distribuzioni su Ω, l'identificazione intendendosi fatta per « restrizione » (cioè un elemento del duale di E definisce per restrizione a $\mathcal{D}(\Omega)$ una forma lineare continua su $\mathcal{D}(\Omega)$ e dunque una distribuzione su Ω). Avvertiamo una volta per sempre che, quando parleremo di spazio duale di uno spazio normale di distribuzioni, lo intenderemo sempre come spazio di distribuzioni, considerando eseguita l'identificazione di cui sopra.

Spazio $H^k(R^n_+)$, *k intero* ≥ 0: si definisce come lo spazio (di HILBERT) delle funzioni complesse $u(x) \in L^2(R^n_+)$ tali che $D^p u \in L^2(R^n_+)$ per $|p| \leq k$, nel senso delle distribuzioni su R^n_+, normalizzato ponendo

$$\| u \|_{H^k(R^n_+)} = (\sum_{|p|\leq k} \| D^p u \|^2_{L^2(R^n_+)})^{1/2} .$$

È noto che lo spazio $H^k(R^n_+)$, k intero ≥ 0, coincide con l'insieme delle restrizioni a R^n_+ degli elementi di $H^k(R^n)$.

È anche noto che per ogni funzione di $H^k(R^n_+)$ (o anche di $H^k(R^n)$) con $k \geq 1$ si può definire la «traccia» su π della u e delle sue derivate fino all'ordine $k-1$; se indichiamo con $\gamma_j u$ la traccia di $D^j_t u$ (4), $0 \leq j \leq k-1$, $\gamma_j u$ appartiene allo spazio $H^{k-j-1/2}(\pi)$ e l'applicazione $u \to \vec{\gamma u}$, dove $\vec{\gamma u} = (\gamma_0 u, \ldots, \gamma_{k-1} u)$, è lineare e continua da $H^k(R^n_+)$ sullo spazio $\prod_{j=0}^{k-1} H^{k-j-1/2}(\pi)$. Se π_t è l'iperpiano $x_n = t$, $t > 0$, si può analogamente parlare di traccia di ogni $u \in H^k(R^n_+)$ e delle sue derivate d'ordine $k-1$ anche su π_t; in particolare se $\gamma_{j,t} u$ indica la traccia su π_t di u e delle sue derivate $D^j_t u$, $j = 0, \ldots, k-1$, $\gamma_{j,t} u$ è funzione continua di t in $[0, +\infty)$ (5) a valori in $H^{k-j-1/2}(\pi)$ e $\gamma_t \vec{u} = (\gamma_{0,t} u, \ldots, \gamma_{k-1,t} u)$ è funzione continua di t in $[0, +\infty)$ a valori in $\prod_{j=1}^{k-1} H^{k-j-1/2}(\pi)$.

Spazio $H^k_0(R^n_+)$, *k intero* ≥ 0: è il sottospazio di $H^k(R^n_+)$ costituito dalla chiusura in $H^k(R^n_+)$ di $\mathcal{D}(R^n_+)$; per $k=0$ esso coincide con $H^0(R^n_+) = L^2(R^n_+)$. È anche noto che $H^k_0(R^n_+)$, per $k \geq 1$, coincide con il sottospazio delle u di $H^k(R^n_+)$ per cui è $\gamma_j u = 0, \ldots, k-1$; e coincide anche con l'insieme delle restrizioni a R^n_+ degli elementi di $H^k(R^n)$ nulli sul complementare di R^n_+.

Spazio $H^k(R^n_+)$, *k intero* < 0: è il duale forte di $H^{-k}_0(R^n_+)$. Essendo ovviamente $H^{-k}_0(R^n_+)$ uno spazio normale di distribuzioni su R^n_+, $H^k(R^n_+)$ è anch'esso uno spazio di distribuzioni su R^n_+. Ricordiamo anche che le distribuzioni appartenenti a $H^k(R^n_+)$ sono tutte e sole quelle aventi la forma

$$u = \sum_{|p|\leq k} D^p f_p \qquad \text{con} \qquad f_p \in L^2(R^n_+) .$$

---

(4) $D^j_t u = \dfrac{\partial^j u}{\partial t^j}$.

(5) Con (a, b), $[a, b)$, $[a, b]$ intenderemo rispettivamente gli intervalli $a < t < b$, $a \leq t < b$, $a \leq t \leq b$.

E infine ricordiamo che anche per k intero < 0 si ha che $H^k(R_+^n)$ coincide con l'insieme delle restrizioni a R_+^n degli elementi di $H^k(R^n)$.

1.2. Ciò premesso, sia dato in R_+^n un operatore differenziale lineare di ordine $2m$ di tipo ellittico (6)

$$Au = \sum_{|p|,|q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (a_{pq} D^q u) \tag{1.4}$$

i cui coefficienti a_{pq} supporremo che verificano l'ipotesi

α) sono le restrizioni a R_+^n di funzioni complesse appartenenti allo spazio $\mathcal{B}(\overline{R_+^n})$, cioè indefinitamente differenziabili e limitate in $\overline{R_+^n} = R_+^n + \pi$, insieme a ciascuna delle derivate.

Osserviamo subito che l'*ipotesi fatta sui coefficienti a_{pq} potrebbe, per tutto quanto diremo in seguito, essere generalizzata,* come risulterà evidente nel corso delle dimostrazioni; in particolare basterebbe che le derivate degli a_{pq} di un ordine sufficientemente elevato fossero continue e limitate in $\overline{R_+^n}$.

Ad Au resta associata la forma sesquilineare

$$a(u, v) = \int_{R_+^n} \sum_{|p|,|q| \leq m} a_{pq} D^q u \overline{D^p v}\, dx.$$

Supporremo *che Au sia $H_0^m(R_+^n)$-ellittico, vale a dire che esista una costante $c > 0$ tale che*

$$|a(u, u)| \geq c \| u \|^2_{H^m(R_+^n)} \qquad \textit{per ogni} \quad u \in H_0^m(R_+^n). \tag{1.5}$$

Anche l'ipotesi (1.5) può essere sostituita da altre condizioni più generali (si veda la Osservazione II del n. 10).

Ricordiamo che l'ipotesi (1.5) *comporta necessariamente l'ellitticità di Au* in R_+^n e che per un noto teorema di L. GÅRDING [16] essa è senz'altro verificata, per esempio, se

1) *Au è uniformemente fortemente ellittico in R_+^n, cioè se*

$$\operatorname{Re} \sum_{|p|,|q| = m} a_{pq}(x)\, \xi^{p+q} \geq c\, |\xi|^{2m} \qquad c \text{ costante} > 0$$

per ogni x di R_+^m e per ogni vettore reale $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ (7).

---

(6) Per tutto quanto riguarda gli operatori ellittici e i risultati che ora richiameremo, rinviamo per es. a LIONS [21] e [21 bis] e a MAGENES-STAMPACCHIA [27].

(7) $\xi^{p+q} = \xi_1^{p_1+q_1} \dots \xi_n^{p_n+q_n}$.

2) *i coefficienti* $a_{pq}(x)$ *sono convergenti per* $|x| \to \infty$.

3) *il coefficiente del termine in* u, $a_{(0,\dots,0)(0,\dots,0)}$ *è sufficientemente grande* (maggiore di una costante $\lambda > 0$, che dipende dagli altri coefficienti).

Indicheremo anche con A^*w l'operatore aggiunto formale di Au, cioè

$$A^*w = \sum_{|p|,|q|\leq m} (-1)^{|p|} D^p (\overline{a}_{qp} D^q w)$$

e porremo $a^*(u, v) = \overline{a(v, u)}$. Anche A^*w è $\overset{\circ}{H}{}^m_0(R^n_+)$-ellittico poichè tale è Au.

Nelle ipotesi finora fatte, *e precisamente l'ipotesi* α) *sugli* a_{pq} *e la* (1.5), è noto che si ha il seguente risultato esistenziale (GÅRDING, VISHIK, SCHWARTZ):

TEOREMA 1.1: *L'applicazione* $u \to Au$ *è un isomorfismo algebrico e topologico* (8) *di* $H^m_0(R^n_+)$ *su* $H^{-m}(R^n_+)$.

Il teor. 1.1 risolve dunque in $H^m_0(R^n_+)$ il problema di DIRICHLET omogeneo

$$(1.6) \qquad Au = f; \quad \gamma_j u = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

per ogni $f \in H^{-m}(R^n_+)$.

Ed è anche noto che, come conseguenza di procedimenti di regolarizzazione hilbertiana della soluzione di (1.6) (NIRENBERG, BROWDER, GUSEVA, ...), *in ipotesi leggermente più restrittive, per es. se valgono le* α) *e le* 1), 2) *e* 3), si ha di più il

TEOR. 1.2: *L'applicazione* $u \to Au$ *è un isomorfismo di*

$$H^{k+2m}(R^n_+) \cap H^m_0(R^n_+) \text{ (9)} \quad su \quad H^k(R^n_+)$$

per k *intero* $\geq -m$.

Il teorema 1.2 assicura dunque l'esistenza di una formula di maggiorazione del tipo

$$\| u \|_{H^{k+2m}(R^n_+)} \leq c \, \| Au \|_{H^k(R^n_+)}$$

per ogni $u \in H^{k+2m}(R^n_+) \cap H^m_0(R^n_+)$.

---

(8) Se non è esplicitamente dato avviso contrario, parlando di isomorfismi intenderemo sempre che essi siano tali algebricamente e topologicamente.

(9) Si intende con ciò il sottospazio di $H^{k+2m}(R^n_+)$ delle u appartenenti anche a $H^m_0(R^n_+)$; si veda anche più avanti la nota (17) per la definizione di spazio intersezione $A \cap B$ di due spazi di HILBERT A e B.

2. Un risultato di regolarità e il problema di Dirichlet omogeneo.

Nel procedimento di « regolarizzazione » citato a proposito del teor. 1.2 si possono distinguere sostanzialmente due fasi: una prima fase in cui si regolarizzano le derivate « tangenziali » $D_{x'}^p u$ [10] della soluzione e una seconda fase in cui si passa alle derivate « normali » utilizzando nuovi strumenti. Noi desideriamo qui esplicitare un risultato di regolarizzazione in cui viene messo in evidenza particolarmente il ruolo delle derivate tangenziali; esso si ottiene, partendo dal teor. 1.2, proprio mediante gli strumenti che vengono utilizzati nella prima fase del procedimento sopracitato. Si tratta in sostanza di un risultato di regolarizzazione « parziale », che si collega quindi con i risultati di ipoelletticità parziale di L. GÅRDING-B. MALGRANGE [17] e di I. PEETRE [31].

Introduciamo anzitutto una nuova classe di spazi:

DEF. 2.1: *Indicheremo con $T^{k,r}(R_+^n)$ (k intero qualunque, r intero ≥ 0) lo spazio delle distribuzioni su R_+^n per le quali è $D_{x'}^p u \in H^k(R_+^n)$ per ogni derivata tangenziale con $|p| \leq r$, la norma essendo definita da*

$$\| u \|_{T^{k,r}(R_+^n)} = \Big(\sum_{|p| \leq r} \| D_{x'}^p u \|^2_{H^k(R_+^n)} \Big)^{1/2} . \tag{2.1}$$

Ovviamente detta norma può ritenersi indotta da un prodotto scalare, rispetto al quale, per le proprietà degli spazi $H^k(R_+^n)$, $T^{k,r}(R_+^n)$ risulta uno spazio di HILBERT complesso.

Si osserva subito la seguente proposizione immediata

PROP. 2.1:

$$T^{k,r}(R_+^n) \subset H^k(R_+^n), \quad T^{k,0}(R_+^n) = H^k(R_+^n)$$

le inclusioni essendo da intendersi sia algebricamente che topologicamente.

Con ragionamento abituale (si veda ad es. SCHWARTZ [41, teor. 5.3]), si ha poi

PROP. 2.2: *Il prodotto αu di una funzione $\alpha \in \mathcal{B}(\overline{R_+^n})$ per una $u \in T^{k,r}(R_+^n)$ appartiene ancora a $T^{k,r}(R_+^n)$ e l'applicazione $u \to \alpha u$ è lineare e continua.*

Fondamentale per il seguito è il

LEMMA 2.1: *Nelle ipotesi fatte per i teoremi 1.1 e 1.2, sia u soluzione del problema di* DIRICHLET

$$Au = f, \quad u \in H_0^m(R_+^n)$$

---

[10] Scrivendo $D_{x'}^p u$ intendiamo che p abbia la forma $p = (p_1, \dots, p_{n-1}, 0)$.

con f assegnata in $T^{k,r}(R^n_+)$, k fissato $\geq -m$, r fissato ≥ 0; allora $u \in T^{k+2m,r}(R^n_+)$ ed esiste una costante c (indipendente da u) tale che

$$\| u \|_{T^{k+2m,r}(R^n_+)} \leq c \, \| f \|_{T^{k,r}(R^n_+)} . \tag{2.2}$$

Dimostrazione. Per $r = 0$ la cosa è nota (teor. 1.1 per $k = -m$, teor. 1.2 per $k > -m$); ragioniamo quindi per induzione ammettendo il teorema per $r - 1$ e dimostrandolo per r. Con la lettera c indicheremo sempre delle costanti diverse anche tra loro.

Se $f \in T^{k,r}(R^n_+)$, allora $f \in T^{k,r-1}(R^n_+)$ e quindi $u \in T^{k+2m,r-1}(R^n_+)$ e inoltre

$$\| u \|_{T^{k+2m,r-1}(R^n_+)} \leq c \, \| f \|_{T^{k,r-1}(R^n_+)} . \tag{2.3}$$

Sia $D^q_{x'} u$ una qualunque derivata tangenziale di u d'ordine $|q| \leq r - 1$, poniamo $v = D^q_{x'} u$; sarà $v \in H^{k+2m}(R^n_+) \subset H^m(R^n_+)$ poichè $k \geq -m$; di più, poichè $u \in H^m_0(R^n_+)$, si ha anche per note proprietà (v. ad es. SCHWARTZ [40, exposé 12, Prop. 1]): $\gamma_0 v = \dots = \gamma_{m-1} v = 0$ e quindi $v \in H^m_0(R^n_+)$.

Calcoliamo ora Av; sarà $Av = D^q_{x'} f + v_1$, con $v_1 = A(D^q_{x'} u) - D^q_{x'}(Au)$. Possiamo scrivere Au nella forma $Au = \sum_{|p| \leq 2m} \alpha_p D^p u$, dove gli $\alpha_p \in \mathcal{B}(R^n_+)$.

Si ha allora

$$v_1 = \sum_{|p| \leq 2m} \alpha_p D^p (D^q_{x'} u) - \sum_{|p| \leq 2m} D^q_{x'} (\alpha_p D^p u) = \sum_{|p| \leq 2m} \sum_{|q'| \leq r-2} \beta_{pq} D^{q'}_{x'} (D^p u)$$

dove i $\beta_{p,q'}$ sono opportuni coefficienti calcolati mediante gli α_p e anche essi appartenenti a $\mathcal{B}(R^n_+)$. In virtù della Prop. 2.2 e del fatto che $u \in T^{k+2m,r-1}(R^n_+)$ si ha allora che le derivate $\dfrac{\partial v_1}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n-1$ appartengono a $H^k(R^n_+)$ e dunque $v_1 \in T^{k,1}(R^n_+)$, e inoltre per la (2.3) si ha $\| v_1 \|_{T^{k,1}(R^n_+)} \leq c \| f \|_{T^{k,r-1}(R^n_+)}$.

Poichè $f \in T^{k,r}(R^n_+)$ anche $D^q_{x'} f \in T^{k,1}(R^n_+)$; dunque $Av \in T^{k,1}(R^n_+)$, e naturalmente $v \in H^{k+2m}(R^n_+) \cap H^m_0(R^n_+)$; e inoltre si ha $\| Av \|_{T^{k,1}(R^n_+)} \leq c \| f \|_{T^{k,r}(R^n_+)}$.

Dimostriamo ora che $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in H^{k+2m}(R^n_+)$, $i = 1, \dots, n-1$.

Fissato i tra 1 e $n-1$ indichiamo con $\tau_h w$ l'operatore traslazione di w rispetto a x_i, $\tau_h w(x) = w(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n)$ e con $\varrho_h w$ l'operatore « rapporto incrementale » $\varrho_h w = \dfrac{\tau_h w - w}{h}$.

Si ha allora che $\varrho_h v \in H^m_0(R^n_+)$, poichè $v \in H^m_0(R^n_+)$. Inoltre si ha $A \varrho_h v = \varrho_h (Av) + [A \varrho_h v - \varrho_h (Av)]$. Per l'ipotesi che $Av \in T^{k,1}(R^n_+)$, $\varrho_h(Av)$ è limitato in $H^k(R^n_+)$, quando $h \to 0$.

D'altra parte

$$A\varrho_h v - \varrho_h(Av) = \sum_{|p|\leq 2m} \alpha_p D^p(\varrho_h v) + \varrho_h\Big(\sum_{|p|\leq 2m} \alpha_p D^p v\Big) = - \sum_{|p|\leq 2m} (\varrho_h \alpha_p)\, \tau_h(D^p v)$$

e quindi, in virtù della Prop. 2.2 e del fatto che $v \in H^{k+2m}(R^n_+)$, anche $A\varrho_h v - \varrho_h(Av)$ è limitato in $H^k(R^n_+)$ al tendere di h a zero; e si ha $\| A\varrho_h v \|_{H^k(R^n_+)} \leq c \, \| f \|_{T^{k,r}(R^n_+)}$.

Applicando allora il teor. 1.2 a $\varrho_h v$, si ha che $\varrho_h v$ è limitato in $H^{k+2m}(R^n_+)$ al variare di h, da cui $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in H^{k+2m}(R^n_+)$ e $\left\| \dfrac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{H^{k+2m}(R^n_+)} \leq c \, \| f \|_{T^{k,r}(R^n_+)}$; il lemma è dimostrato.

OSSERVAZIONE I: Il lemma 2.1 vale indipendentemente dalla ipotesi che Au sia $H_0^m(R^n_+)$-ellittico; risulta infatti chiaramente dalla dimostrazione che esso vale non appena sia verificata la seguente ipotesi: per $u \in H_0^m(R^n_+)$, tale che $Au \in H^k(R^n_+)$, segue che $u \in H^{k+2m}(R^n_+)$ e si ha

$$\| u \|_{H^{k+2m}(R^n_+)} \leq c \, \| Au \|_{H^k(R^n_+)}.$$

Dunque esso vale anche per certi operatori ellittici, non fortemente, considerati di recenti da M. SCHECHTER [37] [38], S. AGMON [2], S. AGMON-A. DOUGLIS-L. NIRENBERG [3], F. E. BROWDER [12]. Si vedano del resto, come si è già detto, i lavori di GÅRDING-MALGRANGE [17] e di PEETRE [31]; per $k = -m$ il lemma è contenuto anche in una immediata estensione al caso R^n_+ del teor. 10.2 di MAGENES-STAMPACCHIA [27].

Dal lemma 2.1 si ha poi facilmente il

TEOR. 2.1: *Nelle ipotesi fatte per i teor.* 1.1 *e* 1.2, *indicato con* $T^{k+2m,r}(R^n_+) \cap H_0^m(R^n_+)$ *il sottospazio di* $T^{k+2m,r}(R^n_+)$ *delle* u *appartenenti anche a* $H_0^m(R^n_+)$, *si ha che l'applicazione* $u \rightarrow Au$ *è un isomorfismo di* $T^{k+2m,r}(R^n_+) \cap H_0^m(R^n_+)$ *su* $T^{k,r}(R^n_+)$ *per* k *intero* $\geq -m$ *e* r *intero* ≥ 0.

DIM. Si osservi infatti che l'operazione $u \rightarrow D^p u$ è ovviamente continua da $T^{k,r}(R^n_+)$ in $T^{k-|p|,r}(R^n_+)$; per la Prop. 2.2 si ha allora che $u \rightarrow Au$ è continua da $T^{k+2m,r}(R^n_+)$ in $T^{k,r}(R^n_+)$. Il teorema si ottiene allora dal lemma 2.1 e dal teor. 1.1.

COROLLARIO ($k = -m$): *Nelle ipotesi fatte per il teor.* 1.1, *l'applicazione* $u \rightarrow Au$ *è un isomorfismo di* $T^{m,r}(R^n_+) \cap H_0^m(R^n_+)$ *su* $T^{-m,r}(R^n_+)$, *per* $r \geq 0$.

OSSERVAZIONE II: È importante osservare che in questo caso, ($k = -m$); il lemma 2.1 e il teor. 2.1 dipendono, esclusivamente dal teor. 1.1 e non dal teor. 1.2; possiamo allora affermare che in questo caso i risultati si ottengono solo *usando procedimenti di regolarizzazione tangenziale* oltre al teorema 1.1. Questa osservazione va tenuta presente perchè sarà proprio il corollario ora indicato, che noi useremo in questo primo lavoro. Inoltre l'idea di utilizzare solo procedimenti dl regolarizzazione tangenziale, per studiare il problema di DIRICHLET non omogeneo, può essere anche ulteriormente generalizzata, come faremo in un successivo lavoro, sostituendo al semispazio R^n_+ il sottoinsieme di R^n costituito da $R^\mu \times R^\nu_{++}$, $\mu + \nu = n$, dove R^μ è lo spazio a μ dimensioni delle $x' = (x_1, \dots, x_\mu)$ e R^ν_{++} è il sottoinsieme di R^ν delle $t = (t_1, \dots, t_\nu)$ per cui è $t_1 > 0, \dots, t_\nu > 0$ (per $\mu = n - 1$ si riottiene R^n_+); le variabili previlegiati « tangenziali » sono allora le $x_1, \dots, x_\mu$ e gli spazi $T^{k,r}(R^n_+)$ sono sostituiti dagli spazi $T^{k,r}(R^\mu \times R^\nu_{++})$ delle u tali che $D^p_{x'} u \in H^k(R^\mu \times R^\nu_{++})$ per $|p| \leq r$.

Terminiamo questo numero con alcune considerazioni che serviranno a introdurre i numeri successivi. Come è noto, da teoremi di isomorfismo quali i teor. 1.2 e 2.1 si possono per « dualità », applicando la definizione stessa di *operatore aggiunto,* ottenere nuovi teoremi dello stesso tipo per l'operatore aggiunto negli spazi duali. Ciò è stato fatto partendo proprio dal teor. 1.2 da SOBOLEV-VISHIK [47] e da LIONS [23] (si veda anche MAGENES-STAMPACCHIA [27] e PEETRE [31]. Cosa può ottenersi allora dal teor. 2.1? È essenziale qui distinguere due casi, a seconda che $\mathcal{D}(R^n_+)$ è denso o no nello spazio $T^{k+2m,r}(R^n_+) \cap H^m_0(R^n_+)$. Nel primo caso infatti il duale di $T^{k+2m,r}(R^n_+) \cap H^m_0(R^n_+)$ è ancora uno spazio di distribuzione su R^n_+ nel secondo caso no e ciò dà luogo a risultati di tipo diverso.

Questa distinzione è praticamente inutile quando si voglia far uso del solo teor. 1.2, cioè degli spazi $H^{k+2m}(R^n_+) \cap H^m_0(R^n_+)$, poichè il solo caso in cui $\mathcal{D}(R^n_+)$ è denso in detti spazi è quello $k = -m$, caso del teor. 1.1; e allora per dualità non si ottiene altro che lo stesso teor. 1.1.

Ma una volta in possesso del teor. 2.1 la distinzione è significativa. Noi vogliamo occuparci in questo primo lavoro del caso in cui $\mathcal{D}(R^n_+)$ è denso in $T^{k+2m,r}(R^n_+) \cap H^m_0(R^n_+)$, rinviando ai successivi lavori l'esame dell'altro caso.

Osserviamo subito che se $k > -m$, $\mathcal{D}(R^n_+)$ non è denso in $T^{k+2m,r}(R^n_+) \cap H^m_0(R^n_+)$; la cosa è nota già per gli $H^{k+2m}(R^n_+) \cap H^m_0(R^n_+)$.

Rimane dunque da esaminare, poichè per il teor. 2.1 deve essere $k \geq -m$, il caso $k = -m$; e si tratta dunque di studiare anzitutto gli spazi $T^{m,r}(R^n_+) \cap H^m_0(R^n_+)$ e $T^{-m,r}(R^n_+)$ e i loro duali, cosa che faremo infatti nei prossimi numeri.

3. Gli spazi $T^{k,r}(R^n)$ e $T^{k,r}(R^n_+)$.

3.1. Iniziamo con lo studio di alcuni spazi di distribuzioni su R^n e su R^n_+, che generalizzano gli spazi $T^{k,r}(R^n_+)$ introdotti nel n. 2.

Per k e r *interi e* $r \geq 0$ si può evidentemente introdurre lo spazio $T^{k,r}(R^n)$, conformemente alla definizione 2.1, come lo spazio delle $u \in H^k(R^n)$ tali che $D^p_{x'} u \in H^k(R^n)$ per $|p| \leq r$ con la norma data da

$$\| u \|_{T^{k,r}(R^n)} = (\sum_{|p| \leq r} \| D^p_{x'} u \|^2_{H^k(R^n)})^{1/2}. \tag{3.1}$$

Ma se si fa uso della trasformata di FOURIER e si pone $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ e $|\xi'| = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2\right)^{1/2}$ si vede subito che la condizione necessaria e sufficiente perchè u sia in $T^{k,r}(R^n)$ è che

$$(1 + |\xi'|^2)^{r/2} (1 + |\xi|^2)^{k/2} \mathcal{F} u \in L^2(R^n). \tag{3.2}$$

Ma allora attraverso la (3.2) si può definire $T^{k,r}(R^n)$ per k e r *reali qualunque*; e infatti noi così faremo ponendo la

DEF. 3.1: *Indicheremo con $T^{k,r}(R^n)$, k e r reali qualunque, lo spazio delle distribuzioni temperate su R^n per le quali valga la* (3.2), *normalizzato da*

$$\| u \|_{T^{k,r}(R^n)} = \left(\int_{R^n} (1 + |\xi'|^2)^r (1 + |\xi|^2)^k |\mathcal{F} u|^2 d\xi \right)^{1/2}. \tag{3.3}$$

Esso risulta una spazio di HILBERT, il prodotto scalare essendo definito in modo ovvio rispetto alla (3.3).

Spazi di questo tipo sono già stati introdotti da MALGRANGE [28], HORMANDER [19], SCHWARTZ [40], GÅRDING MALGRANGE [27], PEETRE [31]. Si osservi subito che nel caso di k e r interi e $r \geq 0$ la norma (3.3) è equivalente alla norma (3.1), sicchè i due modi di introdurre lo spazio $T^{k,r}(R^n)$ si possono usare indifferentemente; noi assumeremo di regola, salvo avviso contrario, come norma la (3.3).

Si osservi che $T^{k,0}(R^n) = H^k(R^n)$ e che valgono le

PROP. 3.1: *Per $k \geq k'$ e $r \geq r'$ si ha $T^{k,r}(R^n) \subset T^{k',r'}(R^n)$. Per $r \geq 0$ si ha $H^{k+r}(R^n) \subset T^{k,r}(R^n) \subset H^k(R^n)$. Per $r < 0$ si ha: $H^k(R^n) \subset T^{k,r}(R^n) \subset H^{k+r}(R^n)$ le inclusioni essendo da intendersi sia algebricamente sia topologicamente; inoltre ciascun spazio è denso nel successivo.*

PROP. 3.2: *$T^{k,r}(R^n)$ è uno spazio normale di distribuzioni su R^n ed il suo duale è identificabile con $T^{-k,-r}(R^n)$.*

3.2. Veniamo ora ad estendere la definizione degli spazi $T^{k,r}(R^n_+)$ data nel n. 2.

Indichiamo con $\mathcal{F}_{x'}$ la trasformazione di FOURIER in x', isomorfismo dello spazio $\mathcal{S}'_{x'}$ (spazio delle distribuzioni temperate su π, v. [39]) su se stesso; con $\mathcal{F}^{-1}_{x'}$ indicheremo l'isomorfismo inverso; e consideriamo la trasformazione definita da

$$\mathcal{G}^r = \mathcal{F}^{-1}_{x'}((1+|\xi'|^2)^{r/2}\mathcal{F}_{x'}), \quad r \text{ intero qualunque } (^{11}) \tag{3.4}$$

$\mathcal{G}^r$ è un isomorfismo di $\mathcal{S}'_{x'}$ su se stesso, il cui inverso coincide con $\mathcal{G}^{-r}$.

Consideriamo poi lo spazio $\mathcal{D}'(0,+\infty;\mathcal{S}'_{x'})$ delle distribuzioni su $(0,+\infty)$ a valori in $\mathcal{S}'_{x'}$ ($\mathcal{D}'(0,+\infty;\mathcal{S}'_{x'}) = \mathcal{D}'(0,+\infty)\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{S}'_{x'}$; seguiamo qui la teoria di SCHWARTZ [43]). L'operatore $I \otimes \mathcal{G}^r$, che per semplicità indicheremo ancora con $\mathcal{G}^r$, è un isomorfismo di $\mathcal{D}'(0,+\infty;\mathcal{S}'_{x'})$ su se stesso; il suo inverso coincide ovviamente con $I \otimes \mathcal{G}^{-r} = \mathcal{G}^{-r}$.

Poniamo ora la seguente

DEF. 3.1: *Per k e r interi qualunque indicheremo con $T^{k,r}(R^n_+)$ lo spazio delle distribuzioni $u \in \mathcal{D}'(0,+\infty;\mathcal{S}'_{x'})$ tali che*

$$\mathcal{G}^r u \in H^k(R^n_+)$$

normalizzato da

$$\| u \|_{T^{k,r}(R^n_+)} = \| \mathcal{G}^r u \|_{H^k(R^n_+)} . \tag{3.5}$$

La (3.5) può considerarsi indotta da un prodotto scalare rispetto al quale $T^{k,r}(R^n_+)$ risulta uno spazio di HILBERT.

Vediamo ora di collegare la definizione ora data con la def. 2.1 ($r \geq 0$) e con la def. 3.1 (caso R^n), onde giustificarla. E dimostriamo perciò anzitutto la

PROP. 3.3: *Per k e r interi e $r \geq 0$ gli spazi $T^{k,r}(R^n_+)$ definiti attraverso le def. 2.1 e 3.1 sono identificabilii, le norme (2.1) e (3.5) essendo equivalenti.*

---

(11) L'operatore $\mathcal{G}^r$ si può considerare anche per r reale; e di conseguenza la successiva def. 3.2 può essere data anche per r reale; su ciò torneremo infatti nel n. 9.

Dimostriamo dunque che la condizione $\mathcal{G}^r u \in H^r(R^n_+)$ equivale alle condizioni $D^p_{x'} u \in H^k(R^n_+)$ per $|p| \leq r$. Supponiamo anzitutto che $\mathcal{G}^r u \in H^k(R^n_+)$; se indichiamo con $\mathcal{F}_{x'} H^k(R^n_+)$ lo spazio delle trasformate di FOURIER in x' delle u di $H^k(R^n_+)$, l'ipotesi fatta equivale al fatto che $(1 + |\xi'|^2)^{r/2} \mathcal{F}_{x'} u \in \in \mathcal{F}_{x'} H^k(R^n_+)$ e poichè si ha $|\xi'|^p \mathcal{F}_{x'} u = \dfrac{|\xi'|^p}{(1 + |\xi'|^2)^{r/2}} ((1 + |\xi'|^2)^{r/2} \mathcal{F}_{x'} u)$ sarà anche $|\xi'|^p \mathcal{F}_{x'} u \in \mathcal{F}_{x'} H^k(R^n_+)$, cioè $D^p_{x'} u \in H^k(R^n_+)$, se si dimostrerà che $\dfrac{|\xi'|^p}{(1 + |\xi'|^2)^{r/2}}$ è un *moltiplicatore* su $\mathcal{F}_{x'} H^k(R^n_+)$. Ciò si può ottenere nel seguente modo. Se k è ≥ 0, si consideri dapprima una applicazione lineare e continua $g \to Pg = G$ di $H^k(R^n_+)$ in $H^k(R^n)$; essa esiste, come si è ricordato nel n. 1. Allora

$$\mathcal{F}^{-1}_{x'} \left(\frac{|\xi'|^p}{(1 + |\xi'|^2)^{r/2}} \mathcal{F}_{x'} g \right) = \left(\mathcal{F}^{-1}_{x'} \left(\frac{|\xi'|^p}{(1 + |\xi'|^2)^{r/2}} \mathcal{F}_{x'} G \right) \right)_+ \text{ [12]}.$$

Ma $G \to \mathcal{F}^{-1}_{x'} \left(\dfrac{|\xi'|^p}{(1 + |\xi'|^2)^{r/2}} \cdot \mathcal{F}_{x'} G \right)$ è continua da $H^k(R^n)$ in $H^k(R^n)$; dunque $g \to \mathcal{F}^{-1}_{x'} \left(\dfrac{|\xi'|^p}{(1 + |\xi'|^2)^{r/2}} \cdot \mathcal{F}_{x'} g \right)$ è continua da $H^k(R^n_+)$ in $H^k(R^n_+)$ e quindi $\dfrac{|\xi'|^p}{(1 + |\xi'|^2)^{r/2}}$ è un moltiplicatore su $\mathcal{F}_{x'} H^k(R^n_+)$. Se invece $k < 0$, si dimostra dapprima che $g \to \mathcal{F}^{-1}_{x'} \left(\dfrac{|\xi'|^p}{(1 + |\xi'|^p)^{r/2}} \mathcal{F}_{x'} g \right)$ è continua da $H_0^{-k}(R^n_+)$ in $H_0^{-k}(R^n_+)$, con dimostrazione analoga, prima per le $g \in \mathcal{D}(R^n_+)$ attraverso la trasformazione di FOURIER e poi per prolungamento per continuità, tenuto conto che $\mathcal{D}(R^n_+)$ è denso in $H_0^{-k}(R^n_+)$. Allora per dualità si ha anche che $g \to \mathcal{F}^{-1}_{x'} \left(\dfrac{|\xi'|^p}{(1 + |\xi'|^2)^{r/2}} \mathcal{F}_{x'} g \right)$ è continua da $H^k(R^n_+)$ in $H^k(R^n_+)$, e dunque anche ora $\dfrac{|\xi'|^p}{(1 + |\xi'|^2)^{r/2}}$ è un moltiplicatore su $\mathcal{F}_{x'} H^k(R^n_+)$.

In modo del tutto analogo si dimostra che se $D^p_{x'} u \in H^k(R^n_+)$ per $|p| \leq r$, allora $\mathcal{G}^r u \in H^k(R^n_+)$.

E risulta dalla dimostrazione stessa che le due norme (2.1) e (3.5) sono equivalenti.

In virtù della Proposizione ora dimostrata, è dunque indifferente, nel caso $r \geq 0$, introdurre lo spazio $T^{k,r}(R^n_+)$ con la def. 2.1 o con la def. 3.2. Sarà bene tener presente però che le norme (2.1) e (3.5) non sono le stesse ma sono solo equivalenti.

---

[12] Con v_+ o $(v)_+$ intenderemo la restrizione a R^n_+ di una distribuzione v su R^n.

Passiamo ora a confrontare $T^{k,r}(R^n_+)$ con $T^{k,r}(R^n)$; si ha in proposito la

PROP. 3.4: *Per k e r interi qualunque lo spazio $T^{k,r}(R^n_+)$ coincide con l'insieme delle restrizioni a R^n_+ degli elementi di $T^{k,r}(R^n)$.*

DIMOSTRAZIONE. Si dimostra facilmente e direttamente che $T^{k,r}(R^n)$ coincide con lo spazio delle distribuzioni $u \in \mathcal{D}'(-\infty, +\infty; \mathcal{S}'_{x'})$ tali che $\mathcal{G}^r u \in H^k(R^n)$.

L'applicazione $u \to u_+$ (v. nota (12)) è lineare e continua da $\mathcal{D}'(-\infty, +\infty; \mathcal{S}'_{x'})$ in $\mathcal{D}'(0, +\infty; \mathcal{S}'_{x'})$ e da $H^k(R^n)$ in $H^k(R^n_+)$. Se u è una distribuzione di $\mathcal{D}'(-\infty, +\infty; \mathcal{S}'_{x'})$, si ha

$$(\mathcal{G}^r u)_+ = \mathcal{G}^r u_+ \tag{3.6}$$

Infatti (3.6) è vera se per esempio u è una funzione continua di t a valori in $\mathcal{S}'_{x'}$; quindi si dimostra in generale, prolungando per continuità.

Se dunque $u \in T^{k,r}(R^n)$, si vede che u_+ è in $T^{k,r}(R^n_+)$, l'applicazione $u \to u_+$ essendo continua.

Resta ancora da vedere che l'applicazione $u \to u_+$ è *su* $T^{k,r}(R^n_+)$. Per questo, sia $u \to Pu$ una applicazione lineare continua di $H^k(R^n_+)$ in $H^k(R^n)$ tale che $(Pu)_+ = u$. Tale applicazione esiste certamente per $k \geq 0$, come si è già osservato. Nel caso che k è < 0, si costruisce dapprima una applicazione lineare e continua R di $H^{-k}(R^n)$ in $H_0^{-k}(R^n_+)$, tale che $Ru = u_+$ se u è nulla per $x_n < 0$. L'applicazione aggiunta P è allora lineare e continua da $H^k(R^n_+)$ in $H^k(R^n)$ e verifica la relazione $(Pu)_+ = u$, come volevasi.

Si utilizza ora P nel modo seguente: se $u \subset T^{k,r}(R^n_+)$, allora $Pu \in T^{k,r}(R^n)$, l'applicazione $u \to Pu$ essendo continua; e infatti $\mathcal{G}^r(Pu) = P(\mathcal{G}^r u)$ e $P(\mathcal{G}^r u) \in H^k(R^n)$; da cui la Proposizione.

4. Gli spazi $T_0^{k,r}(R^n_+)$.

Passiamo ora a considerare un sottospazio importante di $T^{k,r}(R^n_+)$. Poniamo la

DEF. 4.1: *Indicheremo con $T_0^{k,r}(R^n_+)$, k e r interi qualunque, il sottospazio di $T^{k,r}(R^n_+)$ chiusura in $T^{k,r}(R^n_+)$ di $\mathcal{D}(R^n_+)$.*

Sarà bene osservare subito che nel caso $k \leq 0$ e $r \geq 0$, $T_0^{k,r}(R^n_+)$ coincide con $T^{k,r}(R^n_+)$: si ha infatti la

PROP. 4.1: *$\mathcal{D}(R^n_+)$ è denso in $T^{k,r}(R^n_+)$ se $k \leq 0$ e $r \geq 0$*

Si osservi anzitutto che è sempre possibile costruire una opportuna successione di compatti K_ν $(\nu = 1, ...)$ di R^n_+ crescente e invadente R^n_+ e una successione di funzioni $\vartheta_\nu \in \mathcal{D}(R^n_+)$, uguali ad 1 rispettivamente su K_ν e tali che per ogni funzione $\varphi \in H_0^{-k}(R^n_+)$ si abbia $\lim\limits_{\nu\to\infty} \vartheta_\nu \varphi = \varphi$ in $H_0^{-k}(R^n_+)$ e $\lim\limits_{\nu\to\infty} (D^p_{x'} \vartheta_\nu)\varphi = 0$ in $H_0^{-k}(R^n_+)$ per $|p| \leq r$. Se si tiene allora conto della definizione del prodotto moltiplicativo tra distribuzioni (definito per trasposizione, $\langle \vartheta w, \varphi \rangle = \langle w, \vartheta\varphi \rangle$, v. SCHWARTZ [39]), si ha subito che la successione ϑ_ν gode della proprietà che per ogni elemento w di $H^k(R^n_+)$ si ha

$$\lim_{\nu\to\infty} \vartheta_\nu w = w \ \text{ in } \ H^k(R^n_+) \ \text{ e } \ \lim_{\nu\to\infty} (D^p_{x'} \vartheta_\nu) w = 0 \ \text{ in } \ H^k(R^n_+) \ \text{ per } \ |p| \leq r .$$

Ne segue allora che per ogni u di $T^{k,r}(R^n_+)$ è anche

$$\lim_{\nu\to\infty} \vartheta_\nu u = u \ \text{ in } \ T^{k,r}(R^n_+).$$

La prop. 4.1 è dunque ricondotta a dimostrare che, per ν fissato, $v = \vartheta_\nu u$ si può approssimare in $T^{k,r}(R^n_+)$ con funzioni di $\mathcal{D}(R^n_+)$.

Ora v ha supporto compatto in R^n_+; posto $\tilde{v} = v$ in R^n_+ e $\tilde{v} = 0$ nel complementare di R^n_+, si consideri allora una successione di « regolarizzanti » $\{\alpha_i\}$ (13) e si faccia il prodotto di composizione $\tilde{v} * \alpha_i$; allora, per proprietà note, per i sufficientemente grande $(\tilde{v} * \alpha_i)_+ \in \mathcal{D}(R^n_+)$ e inoltre $D^p_{x'}(\tilde{v} * \alpha_i) = ((D^p_{x'} \tilde{v}) * \alpha_i)_+ \to D^p_{x'} v$ in $H^k(R^n_+)$ per $i \to \infty$, per ogni $|p| \leq r$. Dunque $(\tilde{v} * \alpha_i)_+ \to v$ per $i \to \infty$ in $T^{k,r}(R^n_+)$.

Passiamo ora a dire qualcosa di $T_0^{k,r}(R^n_+)$ nel caso che sia $k > 0$. Si ha in proposito la seguente utile proposizione

PROP. 4.2: *Per k intero ≥ 0 e r intero qualunque $T_0^{k,r}(R^n_+)$ coincide con il sottospazio di $T^{k,r}(R^n_+)$, che indicheremo con $\mathcal{T}_0^{k,r}(R^n_+)$, costituito dalle u di $T^{k,r}(R^n_+)$ tali che*

$$\mathcal{G}^r u \in H_0^k(R^n_+).$$

Dimostriamo anzitutto che $\mathcal{D}(R^n_+)$ è denso in $\mathcal{T}_0^{k,r}(R^n_+)$(14). Infatti sia $u \in \mathcal{T}_0^{k,r}(R^n_+)$; poichè per ipotesi $\mathcal{G}^r u \in H_0^k(R^n_+)$ esiste una successione di funzioni $\{\varphi_h\}$ appartenenti a $\mathcal{D}(R^n_+)$, tale che $\varphi_h \to \mathcal{G}^r u$ in $H_0^k(R^n_+)$ per $h \to \infty$; allora si ha, posto $\psi_h = \mathcal{G}^{-r} \varphi_h$, che $\psi_h \to u$ in $\mathcal{T}_0^{k,r}(R^n_+)$ per $h \to \infty$. D'altra parte

(13) O « mollifiers »; per la definizione si veda ad es. [39].

(14) In $\mathcal{T}_0^{k,r}(R^n_+)$ si intende definita la norma di $T^{k,r}(R^n_+)$, in quanto sottospazio di $T^{k,r}(R^n_+)$.

per x_n fissato $\mathcal{G}^{-r}$ applica $\mathcal{D}(\pi)$ in $\mathcal{S}_{x'} = \mathcal{S}(\pi)$ [15] e dunque $\psi_h \in \mathcal{D}(0, +\infty; \mathcal{S}_{x'})$; ma allora, poichè $\mathcal{D}(R^n_+)$ è denso in $\mathcal{D}(0, +\infty; \mathcal{S}_{x'})$ — come è subito visto con ragionamenti abituali — si ha che $\mathcal{D}(R^n_+)$ è denso in $\mathcal{T}^{k,r}_0(R^n_+)$.

La Prop. 4.2 risulta allora subito dimostrata, per la definizione di $T^{k,r}_0(R^n_+)$, quando si osservi che la norma indotta su $\mathcal{D}(R^n_+)$ da $T^{k,r}(R^n_+)$ è la stessa di quella di $\mathcal{T}^{k,r}_0(R^n_+)$.

Dalla Proposizione precedente si ha, come corollario, la seguente precisazione dello spazio $T^{m,r}(R^n_+) \cap H^m_0(R^n_+)$, che interviene nel Corollario del Teor. 2.1

PROP. 4.3: *Per ogni r intero ≥ 0 $T^{m,r}(R^n_+) \cap H^m_0(R^n_+)$ coincide con $T^{m,r}_0(R^n_+)$.*

Infatti se $u \in T^{m,r}(R^n_+) \cap H^m_0(R^n_+)$, poichè $D^{p'}_x u \in H^m(R^n_+)$ per $|p| \leq r$ (v. anche la Prop. 3.3) devono esistere le tracce $\gamma_j(D^p_{x'} u), j = 0, \dots, m-1$; e per una nota proposizione (v. ad es. SCHWARTZ [40 exposé 12, Prop. 1]) deve essere $\gamma_j(D^p_{x'} u) = 0, j = 0, \dots, m-1$; dunque $D^p_{x'} u \in H^m_0(R^n_+)$ per $|p| \leq r$ e quindi (Prop. 3.3 e Prop. 4.2) $u \in T^{m,r}_0(R^n_+)$.

E veniamo ora al risultato più importante di questo numero.

TEOR. 4.1: *Per k intero ≥ 0 e r intero qualunque il duale di $T^{k,r}_0(R^n_+)$ coincide con $T^{-k,-r}(R^n_+)$:*

$$(T^{k,r}_0(R^n_+))' = T^{-k,-r}(R^n_+), \quad k \geq 0. \tag{4.1}$$

DIM. Prendiamo $T^{k,r}_0(R^n_+)$ nella forma $\mathcal{T}^{k,r}_0(R^n_+)$ (Prop. 4.2); allora ogni elemento L di $(T^{k,r}_0(R^n_+))'$ è una forma lineare e continua $L(\varphi)$ su $\mathcal{T}^{k,r}_0(R^n_+)$ e per un noto teorema sugli spazi vettoriali topologici (v. ad es. [8] pag. 76) si può scrivere nella forma

$$L(\varphi) = \langle S, \mathcal{G}^r \varphi \rangle \quad \text{con} \quad S \in H^{-k}(R^n_+) \cdot$$

Poichè $\mathcal{D}(R^n_+)$ è denso in $T^{k,r}_0(R^n_+)$, $L(\varphi)$ è individuato dalla sua restrizione a $\mathcal{D}(R^n_+)$; ma per $\varphi \in \mathcal{D}(R^n_+)$ si ha, per la stessa definizione di $\mathcal{G}^r$, di $\mathcal{F}_{x'}$ e di $\mathcal{F}^{-1}_{x'}$

$$L(\varphi) = \langle S, \mathcal{G}^r \varphi \rangle = \langle \mathcal{G}^r S, \varphi \rangle$$

e dunque L è identificabile con $\mathcal{G}^r S$. Allora per le proprietà di $\mathcal{G}^r$ e poichè $S \in H^{-k}(R^n_+) \subset \mathcal{D}'(0, +\infty; \mathcal{S}'_{x'})$, si ha che $L \in \mathcal{D}'(0, +\infty; \mathcal{S}'_{x'})$ e che $\mathcal{G}^{-r} L = S \in H^{-k}(R^n_+)$; cioè $L \in T^{-k,-r}(R^n_+)$.

---

(15) $S(\pi)$ è lo spazio delle funzioni a decrescenza rapida su π secondo SCHWARTZ; per maggiori precisazioni su $S(\pi)$ e $S'_{x'}$ si veda appunto SCHWARTZ [39, t. II].

Viceversa se $L \in T^{-k,-r}(R^n_+)$, allora $\mathcal{G}^{-r} L = S \in H^{-k}(R^n_+)$, dunque $L = \mathcal{G}^r S$ e quindi per $\varphi \in \mathcal{D}(R^n_+)$ si ha: $L(\varphi) = \langle \mathcal{G}^r S, \varphi \rangle = \langle S, \mathcal{G}^r \varphi \rangle$ cioè $L(\varphi)$ è una forma lineare e continua su $T_0^{k,r}(R^n_+)$.

Dal Teor. 4.2 si ha poi evidentemente, trattandosi di spazi riflessivi:

$$T_0^{k,r}(R^n_+) = (T^{-k,-r}(R^n_+))' \qquad k \geq 0 \tag{4.2}$$

Le (4.1) e (4.2) permettono anche di ottenere le seguenti

Prop. 4.4: *Se k e r sono interi positivi le distribuzioni di $T^{-k,-r}(R^n_+)$ sono tutte e sole quelle aventi la forma*

$$u = \sum_{|p| \leq r} D^p_{x'} f_p \qquad \text{con } f_p \in H^{-k}(R^n_+).$$

Prop. 4.5: *Se k e r sono interi positivi le distribuzioni di $T_0^{k,-r}(R^n_+)$ sono tutte e sole quelle aventi la forma*

$$u = \sum_{|p| \leq r} D^p_{x'} f_p \qquad \text{con } f_p \in H_0^k(R^n_+)$$

Le dimostrazioni si ottengono con ragionamenti di tipo noto, analoghi a quelli del Teor. 4.1. Dimostriamo ad es. la Prop. 4.4.

In virtù della (4.1) se $u \in T^{-k,-r}(R^n_+)$ essa è una forma lineare e continua su $T_0^{k,r}(R^n_+)$; ma dalla Prop. 4.2 e dalla Prop. 3.3, tenuto conto del teorema già usato più sopra, si ha che u può scriversi nella forma $\langle u, \varphi \rangle = \sum_{|p| \leq r} (-1)^{|p|} \langle f_p, D^p_{x'} \varphi \rangle$ con $f_p \in H^{-k}(R^n_+)$

Ma per $\varphi \in \mathcal{D}(R^n_+)$ si ha

$$\sum_{|p| \leq r} (-1)^{|p|} \langle f_p, D^p_{x'} \varphi \rangle = \sum_{|p| \leq r} \langle D^p_{x'} f_p, \varphi \rangle$$

dunque $u = \sum_{|p| \leq r} D^p_{x'} f_p$.

Viceversa se $u = \sum_{|p| \leq r} D^p_{x'} f_p$ si ha per $\varphi \in \mathcal{D}(R^n_+)$

$$|\langle u, \varphi \rangle| = \Big|\sum_{|p| \leq r} \langle D^p_{x'} f_p, \varphi \rangle\Big| = \Big|\sum_{|p| \leq r} (-1)^{|p|} \langle f_p, D^p_{x'} \varphi \rangle\Big| \leq$$

$$\leq c \sum_{|p| \leq r} \| D^p_{x'} \varphi \|_{H^k(R^n_+)} \leq c \, \| \varphi \|_{T_0^{k,r}(R^n_+)}$$

e dunque $u \in (T_0^{k,r}(R^n_+))' = T^{-k,-r}(R^n_+)$.

5. Altre considerazioni sugli spazi $T^{k,r}(R^n_+)$ e $T_0^{k,r}(R_+)$.

5.1. Ci interesseremo ora di mettere in luce alcune proprietà di struttura degli spazi $T^{k,r}(R^n_+)$ e $T_0^{k,r}(R^n_+)$ utili per il seguito.

Introdurremo perciò alcuni altri spazi di distribuzioni a valori vettoriali nel senso di SCHWARTZ.

Ricordiamo anzitutto che se E è uno spazio di HILBERT, si suole indicare con $L^2(0, +\infty; E)$ lo spazio delle (classi di) funzioni $u(t)$ di quadrato sommabile in $(0, +\infty)$ a valori in E rispetto alla misura dt su $(0, +\infty)$; se $(u, v)_E$ indica il prodotto scalare in E, allora lo spazio $L^2(0, +\infty; E)$ risulta esso pure hilbertiano rispetto al prodotto scalare così definito

$$(5.1) \qquad (u, v)_{L^2(0,+\infty;E)} = \int_0^{+\infty} (u(t), v(t))_E \, dt.$$

Ciò detto porremo la seguente

DEF. 5.1: *Se k è intero positivo, indicheremo con $H^k(0, +\infty; E)$ lo spazio delle $u(t)$ tali che $D_t^j u(t) \in L^2(0, +\infty; E), j = 0, 1, \ldots, k$, la derivazione essendo intesa nel senso delle distribuzioni vettoriali su $(0, +\infty)$ a valori in E; e in $H^k(0, +\infty; E)$ introdurremo il prodotto scalare*

$$(5.2) \qquad (u, v)_{H^k(0,+\infty E)} = \sum_{j=0}^{k} (D_t^j u, D_t^j v)_{L^2(0,+\infty;E)}$$

rispetto al quale esso risulta uno spazio di Hilbert.

Indicheremo anche a volte per comodità con $H^0(0, +\infty; E)$ lo spazio $L^2(0, +\infty; E)$.

È forse utile ricordare il significato della derivazione nel senso delle distribuzioni vettoriali, almeno nel caso che ci interessa: la condizione $D_t' u \in L^2(0, +\infty; E)$ equivale al fatto che la forma semilineare

$$\varphi \to \int_0^{+\infty} (u(t), D_t' \varphi(t))_E \, dt \qquad \text{per } \varphi \in \mathcal{D}^1(0, +\infty; E),$$

dove $\mathcal{D}^1(0, +\infty; E)$ è lo spazio delle funzioni una volta differenziabili con continuità in $(0, +\infty)$ a valori in E, con $\varphi(0) = 0$ e a supporto compatto, è continua su $\mathcal{D}^1(0, +\infty, E)$ per la topologia indottavi da $L^2(0, +\infty, E)$; e poichè $\mathcal{D}^1(0, +\infty; E)$ è denso in $L^2(0, +\infty; E)$ e $L^2(0, +\infty; E)$ è uno spazio di HILBERT, il teorema di rappresentazione dei funzionali semilineari ci assicura che esiste $F \in L^2(0, +\infty; E)$ tale che

$$\int_0^{+\infty} (u(t), D_t' \varphi(t))_E \, dt = \int_0^{+\infty} (F(t), \varphi(t))_E \, dt.$$

$D_t' u$ è allora per definizione uguale a $-F$.

Ricordiamo ancora che per note proprietà si ha la

Prop. 5.10: *Se $u(t) \in H^k(0, +\infty; E)$, k intero positivo, allora $u(t)$ coincide q. — d. in $(0, +\infty)$ con una funzione che indicheremo ancora con $u(t)$ e con la quale la identificheremo, continua in $[0, +\infty)$ a valori in E, insieme alle sue derivate $D_t^j(t)$ per $j = 1, \dots, k-1$; hanno dunque senso $u(0)$, $D_t' u(0)$, $, \dots, D_t^{k-1} u(0)$ come elementi di E.*

Porremo allora la

Def. 5.1: *Per k intero positivo indicheremo con $H_0^k(0, +\infty; E)$ il sottospazio di $H^k(0, +\infty; E)$ chiusura in $H^k(0, +\infty; E)$ dello spazio $\mathcal{D}(0, +\infty; E)$ delle funzioni indefinitamente differenziabili e a support ocompatto in $(0, +\infty)$ a valori in E.*

Esso coincide con il sottospazio di $H^k(0, +\infty; E)$ costituito dalle u per cui è $u(0) = D_t' u(0) = \dots = D_t^{k-1} u(0) = 0$. Converremo anche di porre $H_0^0(0, +\infty; E) = L^2(0, +\infty; E)$.

Dopo aver richiamato queste nozioni generali, applichiamole ai casi che ci interessano, precisamente ponendo $E = H^s(\pi)$ con s intero qualunque.

Osservato anzitutto che $\mathcal{D}(R_+^n)$ può ovviamente identificarsi con una varietà di $\mathcal{D}(0, +\infty; H^s(\pi))$ e quindi anche di $H_0^k(0, +\infty; H^s(\pi))$, si ha la

Prop. 5.2: *$\mathcal{D}(R_+^n)$ è denso in $H_0^k(0, +\infty, H^s(\pi))$, k intero ≥ 0, s intero qualunque.*

Poichè $\mathcal{D}(0, +\infty; H^s(\pi))$ è denso in $H_0^k(0, +\infty; H^s(\pi))$ basterà approssimare in $H^k(0, +\infty; H^s(\pi))$ ogni elemento di $\mathcal{D}(0, +\infty; H^s(\pi))$ con funzioni di $\mathcal{D}(R_+^n)$.

Sia allora $\{\alpha_i(x')\}$ una successione di « regolarizzanti » su π, cioè di funzioni « regolarizzanti » dipendenti dalle sole variabili $x_1, \dots, x_{n-1}$. Se $u(x', t)) \in \mathcal{D}(0, +\infty; H^s(\pi))$, indichiamo per ogni t con $u(x', t) * \alpha_i(x')$ il prodotto di composizione di $u(x', t)$ e $\alpha_i(x')$ fatto rispetto ad $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Risulta che $u(x', t) * \alpha_i(x') \in \mathcal{D}(R_+^n)$ e che $\lim_{i \to \infty} u(x', t) * \alpha_i(x') = u(x', t)$ in $H^k(0, +\infty; H^s(\pi))$.

Per la Prop. 5.2 lo spazio $H_0^k(0, +\infty; H^s(\pi))$ è dunque identificabile con uno spazio normale di distribuzioni su R_+^n; il suo duale sarà dunque identificabile con uno spazio di distribuzioni su R_+^n. Lo indicheremo con $H^{-k}(0, +\infty; H^{-s}(\pi))$, porremo cioè la

Def. 5.3: *$H^{-k}(0, +\infty; H^{-s}(\pi)) = (H_0^k(0, +\infty, H^s(\pi))'$ per k intero ≥ 0 e s intero qualunque.*

Abbiamo dunque così definito gli spazi $H^k(0, +\infty; H^s(\pi))$ per k e s interi qualunque e lo spazio $H_0^k(0, +\infty; H^s(\pi))$ per k intero ≥ 0 e s intero qualunque; e abbiamo anche visto come $H_0^k(0, +\infty; H^s(\pi))$ ($k \geq 0$, s qualunque) e $H^k(0, +\infty; H^s(\pi))$ (k negativo, s qualunque) sono spazi di distribuzioni su R_+^n.

Quanto a $H^k(0, +\infty; H^s(\pi))$, con $k > 0$ e s qualunque, possiamo anche identificarlo con uno spazio di distribuzioni su R_+^n in base alle seguenti osservazioni. Si ha infatti (v. LIONS [24] Prop. 3.1) che ogni elemento u di $H^k(0, +\infty, H^s(\pi))$, $k > 0$, è la restrizione a $(0, +\infty)$ di un elemento di $H^k(-\infty, \infty, H^s(\pi))$, dove con $H^k(-\infty, +\infty, H^s(\pi))$ si intende lo spazio dello $u(t)$ tali che $D_t^j u \in L^2(-\infty, +\infty; H^s(\pi))$, $j = 0, \ldots, k$ [16]. In modo analogo a quanto si è fatto ora per $H_0^k(0, +\infty, H(\pi))$ si può allora dimostrare che $H^k(-\infty, +\infty, H^s(\pi))$ è uno spazio (normale) di distribuzioni su R^n; la restrizione di un elemento di $H^k(-\infty, +\infty, H^s(\pi))$ a R_+^n è dunque una distribuzione su R_+^n. Con questa precisazione anche $H^k(0, +\infty; H^s(\pi))$, $k > 0$ e s qualunque, può identificarsi con uno spazio di distribuzioni su R_+^n e noi intenderemo sempre eseguita tale identificazione.

Si osservi anche che se $u \in H^k(0, +\infty; H^s(\pi))$ le sue derivate nel senso delle distribuzioni su R_+^n appartengono ancora a spazi dello stesso tipo: si hanno precisamente le seguenti regole

PROP. 5.3: *Se $u \in H^k(0, +\infty, H^s(\pi))$ k e s interi qualunque allora*

$$D_t^j u \in H^{k-j}(0, +\infty; H^s(\pi)) \tag{5.3}$$

$$D_{x'}^p u \in H^k(0, +\infty; H^{s-|p|}(\pi)) \tag{5.4}$$

La (5.3) è ovvia conseguenza della stessa definizione di $H^k(0, +\infty; H^s(\pi))$.

La (5.4) segue dal fatto che $D_{x'}^p$ è un operatore lineare e continuo da $H^s(\pi)$ in $H^{s-|p|}(\pi)$; più in generale è noto che se $P \in \mathcal{L}(E; F)$ allora $I \otimes P \in \mathcal{L}(H^k(0, +\infty; E); H^k(0, +\infty; F))$, dove con $\mathcal{L}(E; F)$ si indica lo spazio delle applicazioni lineari e continue di E in F.

5.2. Veniamo ora ad applicare i risultati precedenti agli spazi $T^{k,r}(R_+^n)$.

---

[16] La nomenclatura è ovvia, basta sostituire nella definizione data di $L^2(0, +\infty; E)$ $(0, +\infty)$ con $(-\infty, +\infty)$.

PROP. 5.4: *Se k è intero positivo e r intero qualunque, lo spazio $T^{k,r}(R^n_+)$ è identificabile con lo spazio*

$$\bigcap_{i=0}^{k} H^i(0, +\infty\,;\, H^{k+r-i}(\pi))\ (^{17})$$

DIMOSTRAZIONE. Si verifica dapprima facilmente per la stessa definizione che

$$H^k(R^n_+) = \bigcap_{i=0}^{k} H^i(0, +\infty\,;\, H^{k-i}(\pi)), \qquad k > 0 \tag{5.5}$$

Si osservi poi che l'operatore $\mathcal{G}^e$ è un isomorfismo di $H^i(0, +\infty\,;\, H^{k-i}(\pi))$ su $H^i(0, +\infty\,;\, H^{k-e-i}(\pi))$ e quindi di $\bigcap_{i=0}^{k} H^i(0, +\infty\,;\, H^{k-i}(\pi))$ su $\bigcap_{i=0}^{k} H^i(0, +\infty\,;\, H^{k-e-i}(\pi))$. Di qui la Prop. 5.4 segue, tenendo conto della (5.5) e della definizione stessa di $T^{k,r}(R^n_+)$.

In modo analogo si ha

PROP. 5.5: *Se k è intero positivo e r intero qualunque si ha*

$$T^{k,r}_0(R^n_+) = \bigcap_{i=0}^{k} H^i_0(0, +\infty\,;\, H^{k+r-i}(\pi))$$

A proposito delle Prop. 5.4 e 5.5 si può osservare, anche se la cosa non servirà per il seguito, che risulta, come conseguenza del théor. 3.3, 1) di [24]:

$$\bigcap_{i=0}^{k} H^i(0, +\infty\,;\, H^{k+r-i}(\pi)) = H^0(0, +\infty\,;\, H^{k+r}(\pi)) \cap H^k(0, +\infty\,;\, H^r(\pi))$$

$$\bigcap_{i=0}^{k} H^i_0(0, +\infty\,;\, H^{k+r-i}(\pi)) = H^0(0, +\infty\,;\, H^{k+r}(\pi)) \cap H^k_0(0, +\infty\,;\, H^r(\pi))$$

Utilizzando la Prop. 5.4 si può ottenere la

PROP. 5.6: *Se k e r sono interi positivi, le distribuzioni di $T^{k,-r}(R^n_+)$ sono tutte e sole quelle aventi la forma*

$$u = \sum_{|p|\leq r} D^p_{x'} f_p \qquad \text{con } f_p \in H^k(R^n_+)$$

---

(17) Se $A_1 \dots A_\nu$ sono spazi di HILBERT tutti contenuti in uno stesso spazio vettoriale topologico W più ampio, indicheremo con $\bigcap_{i=1}^{\nu} A_\nu$ lo spazio di HILBERT costituito dagli elementi comuni a tutti gli A_i, normalizzato ponendo $\| u \| = \left(\sum_{i=1}^{\nu} \| u \|^2_{A_i}\right)^{\frac{1}{2}}$. Nel caso da noi considerato può prendersi $W = \mathcal{D}'(R^n_+)$.

DIMOSTRAZIONE. Si scriva infatti $u=\mathcal{G}^{2r}(\mathcal{G}^{-2r}u)$ e si osservi che dalla definizione stessa di $\mathcal{G}^r$ per r intero positivo, si ha $\mathcal{G}^{2r}=\left(1-\dfrac{\Delta_{x'}}{4\pi^2}\right)^r$ dove $\Delta_{x'}=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Si ricordi poi che $\mathcal{G}^{-2r}$ è un isomorfismo di $\bigcap\limits_{i=0}^{k} H^i(0,+\infty\,;H^{k-r-i}(\pi))$ su $\bigcap\limits_{i=0}^{k} H^i(0,+\infty\,;H^{k+r-i}(\pi))$.

Si ha allora per la Prop. 5.4 che, se $u\in T^{k,-r}(R^n_+)$, è

$$u=\left(1-\frac{\Delta_{x'}}{4\pi^2}\right)^r\mathcal{G}^{-2r}\,u=\sum_{|p|,|q|\leq r}\alpha_{p,q}\,D^p_{x'}(D^q_{x'}\,\mathcal{G}^{-2r}\,u)$$

con gli α_{pq} costanti opportune e con $D^q_{x'}\,\mathcal{G}^{-2r}\,u\in\bigcap\limits_{i=0}^{k}H^i(0,+\infty;H^{k-i}(\pi))=$ $=H^k(R^n_+)$, cioè la Prop. 5.6.

Ci sarà utile in seguito anche la

PROP. 5.7: *Il prodotto αu di una funzione $\alpha\in\mathcal{B}(\overline{R}^n_+)$ per una distribuzione $u\in T^{k,r}(R^n_+)$, k e r interi qualunque, appartiene a $T^{k,r}(R^n_+)$ e l'applicazione $u\to\alpha u$ è lineare e continua.*

Per $r\geq 0$ la Proposizione è infatti una conseguenza immediata della Def. 2.1 di $T^{k,r}(R^n_+)$ e della analoga proprietà per gli spazi $H^k(R^n_+)$. Per $r<0$ e $k<0$ segue per dualità dal Teor. 4.1, dopo aver osservato che essa vale per $T_0^{-k,-r}(R^n_+)$. Infine per $r<0$ e $k>0$ si può ricavare ad es. dalla Prop. 5.4, poichè essa vale per gli spazi $H^k(0,+\infty\,;H^s(\pi))$.

Terminiamo questo numero riassumendo le principali relazioni di inclusione (algebrica e topologica) che intercorrono tra gli spazi $T^{k,r}(R^n_+)$ e $H^k(R^n_+)$:

(5.6) $\qquad T^{k,r}(R^n_+)\subset T^{k',r'}(R^n_+)\qquad$ per $k\geq k'$ e $r\geq r'$

(5.7) $\qquad H^{k+r}(R^n_+)\subset T^{k,r}(R^n_+)\subset H^k(R^n_+)\qquad$ per $r\geq 0$

(5.8) $\qquad H^k(R^n_+)\subset T^{k,r}(R^n_+)\subset H^{k+r}(R^n_+)\qquad$ per $r\leq 0$

6. Il problema di Dirichlet omogeneo.

Le ipotesi su Au che utilizzeremo d'ora innanzi sono, come si è detto nell'Osservazione II *del n.* 2, *quelle enunciate per il teor.* 1.1 *e precisamente la* α) *e la* (1.5) (per altre ipotesi v. l'Osservazione II del n. 10).

Abbiamo portato a termine nei n. precedenti lo studio delle proprietà degli spazi $T^{k,r}(R^n_+)$, che ci serviranno; possiamo ora tornare al problema di DIRICHLET e veniamo anzitutto a «dualizzare» il Corollario del Teor. 2.1;

questo Corollario, se applicato all'operatore A^*, ci assicura che per r intero > 0 $w \to A^* w$ è un isomorfismo di $T_0^{m,r}(R_+^n)$ su $T^{-m,r}(R_+^n)$ e quindi per dualità ([17] bis) si ottiene il

TEOR. 6.1 : *Nelle ipotesi* α) *e* (1.5) *l'applicazione* $u \to Au$ *è un isomorfismo di* $T_0^{m,r}(R_+^n)$ *su* $T^{-m,r}(R_+^n)$, *per ogni intero negativo* r.

Possiamo dunque enunciare complessivamente il Corollario del Teor. 2.1 e il Teor. 6.1 nel seguente

TEOR. 6.2 : *Nelle ipotesi* α) *e* (1.5) *per* r *intero qualunque l'applicazione* $u \to Au$ *é un isomorfismo di* $T_0^{m,r}(R_+^n)$ *su* $T^{-m,r}(R_+^n)$.

Il teorema precedente risolve dunque in $T_0^{m,r}(R_+^n)$ il problema di DIRICHLET omogeneo

$$Au = f; \ \gamma_j u = 0, j = 0, \dots, m-1$$

per ogni $f \in T^{-m,r}(R_+^n)$.

Sarà bene osservare anche che le condizioni al contorno sono verificate nel senso seguente:

Per $r \geq 0$, in virtù di quanto si é ricordato nel n. 1 circa lo spazio $H^k(R_+^n)$ si ha

$$\lim_{t \to 0} \gamma_{j,t} u = 0 \quad \text{in } H^{m+r-j-1/2}(\pi), \ j = 0, \dots, m-1. \tag{6.1}$$

Per $r < 0$ in virtù della Prop. 5.1 possiamo per ora dire che si ha

$$\lim_{t \to 0} \gamma_{j,t} u = 0 \quad \text{in } H^{m+r-j-1}(\pi), \ j = 0, \dots, m-1. \tag{6.2}$$

Tuttavia anche in questo caso é possibile sostituire lo spazio $H^{m+r-j-1}(\pi)$ con lo spazio $H^{m+r-j-1/2}(\pi)$, cioé verificare la (6.1), come sarà visto nel prossimo numero.

7. Il problema di Dirichlet non omogeneo.

7.1. Veniamo ora al problema non omogeneo. Lo scopo è di dimostrare che $u \to \{Au, \vec{\gamma u}\}$ è un isomorfismo di $T^{m,r}(R_+^n)$ su $T^{-m,r}(R_+^n) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{m+r-j-1/2}(\pi)$.

Incominciamo perciò dal caso più complesso, precisamente per $r < 0$; e diciamo subito qualcosa sulla traccia $\vec{\gamma u}$ delle $u \in T^{m,r}(R_+^n)$ su π, per $r < 0$.

([17] bis) Si fa uso qui semplicemente della definizione di operatore aggiunto secondo la teoria degli operatori lineari negli spazi di HILBERT. Si tenga anche presente che l'aggiunto di A^*, inteso come operatore da $T_0^{m,r}(R_+^n)$ su $T^{-m,r}(R_+^n)$, concide con il suo aggiunto *formale*, cioè con A.

La sua esistenza segue già dalla Prop. 5.1; è essenziale però per il seguito precisare meglio le cose, e a ciò serve appunto un recente risultato di LIONS [24, Théor. 3.3]. L'appartenenza di u a $T^{m,r}(R_+^n)$ equivale al fatto che $D_t^j u \in L^2(0, +\infty; H^{m+r-j}(\pi))$ per $j = 0, 1, \dots, m-1$. Basta allora applicare il risultato citato per ottenere la

PROP. 7.1: *Se $u \in T^{m,r}(R_+^n)$, r intero < 0, allora $\gamma_j u = D_t^j u(0)$ appartiene allo spazio $H^{m+r-j-1/2}(\pi)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$ e l'applicazione $u \to \vec{\gamma u}$ è lineare e continua da $T^{m,r}(R_+^n)$ su $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m+r-j-1/2}(\pi)$. Di più $\gamma_{j,t} u = D_t^j u(t)$ esiste per $t > 0$ ed è funzione continua di t in $[0, +\infty)$ a valori in $H^{m+r-j-1/2}(\pi)$ cosicchè si ha*

$$\lim_{t\to 0} \gamma_{j,t} u = \gamma_j u \qquad \text{in } H^{m+r-j-1/2}(\pi),\ j = 0, 1, \dots, m-1. \tag{7.1}$$

OSSERVAZIONE I: La Prop. 7.1, poichè $T_0^{m,r}(R_+^n) \subset T^{m,r}(R_+^n)$, precisa anche, come si è già detto a proposito del teor. 6.2, il significato di $\vec{\gamma u}$ per le u di $T_0^{m,r}(R_+^n)$, nel caso $r < 0$.

Dalla Prop. 7.1 e dal teor. 6.1 si può ora ottenere il risultato fondamentale di questo paragrafo.

TEOR. 7.1: *Nelle ipotesi α) e (1.5) per ogni intero $r < 0$, l'applicazione $u \to \{Au, \vec{\gamma u}\}$ è un isomorfismo di $T^{m,r}(R_+^n)$ su $T^{-m,r}(R_+^n) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{m+r-j-1/2}(\pi)$.*

DIM. — Incominciamo col dimostrare che $u \to D_t^j D_{x'}^q u$ è lineare e continua da $T^{m,r}(R_+^n)$ in $T^{-m,r}(R_+^n)$ per $j + |q| \le 2m$ [18]. Infatti per la Prop. 5.4, se $u \in T^{m,r}(R_+^n)$, $u \in \bigcap_{i=0}^{m} H^i(0, +\infty; H^{m+r-i}(\pi))$ e allora si ha che $D_t^j D_{x'}^q u \in \bigcap_{i=0}^{m} H^{i-j}(0, +\infty; H^{m+r-i-|q|}(\pi))$; in particolare quindi, poichè $j - |q| \le 2m$, si ha che $D_t^j D_{x'}^q u \in \bigcap_{i=0}^{m} H^{i-j}(0, +\infty; H^{m+r-i-(2m-j)}(\pi))$. Se ne deduce, poichè $0 \le j \le 2m$, che $D_t^j D_{x'}^q u$ appartiene ad almeno uno degli spazi $H^{-s}(0, +\infty; H^{-m+r+s}(\pi))$ con $s = 0, \dots, m$. Si osservi infatti che, ad es., $D_t^j D_{x'}^q u \in H^{-m}(0, +\infty; H^r(\pi))$ se $j = m+1, \dots, 2m$ (basta prendere rispettivamente $i = 0, 1, \dots, m$) e che $D_t^j D_{x'}^q u \in H^{-j}(0, +\infty, H^{-m+r+j}(\pi))$ se $j = 0, \dots, m$ (basta prendere $i = 0$).

---

[18] La dimostrazione che faremo può più precisamente dare che $u \to D_t^j D_{x'}^q u$ è continua da $T^{m,r}(R_+^n)$ in $T^{m-j-|q|,r}(R_+^n)$.

D'altra parte per $s = 0, \ldots, m$ si ha

$$H^{-s}(0, +\infty\,;\, H^{-m+r-s}(\pi)) \subset T^{-m,r}(R_+^n). \tag{7.2}$$

Infatti in virtù della Prop. 5.5 si ha

$$T_0^{m,r}(R_+^n) \subset H_0^s(0, +\infty\,;\, H^{m+r-s}(\pi)).$$

e quindi passando agli spazi duali per il teor. 4.1 si ha la (7.2).

Dunque se $u \in T^{m,r}(R_+^n)$, allora $D_t^j D_{x'}^q u \in T^{-m,r}(R_+^n)$, $j + |q| \leq 2m$; e scende anche subito da quanto si è detto che se $u \to 0$ in $T^{m,r}(R_+^n)$, allora $D_t^j D_{x'}^q u \to 0$ in $T^{-m,r}(R_+^n)$.

Ricordando allora la Prop. 5.7, in virtù dell'ipotesi α) fatta sui coefficienti di Au, possiamo concludere che l'applicazione $u \to Au$ è lineare e continua da $T^{m,r}(R_+^n)$ in $T^{-m,r}(R_+^n)$.

Siano ora assegnati $f \in T^{-m,r}(R_+^n)$ e $g_j \in H^{m+r-j-1/2}(\pi)$, $j = 0, \ldots, m-1$. Per la Prop. 7.1 esiste almeno una $v \in T^{m,r}(R_+^n)$ tale che $\gamma_j v = g_j$, $j = 0, \ldots$ $\ldots, m-1$; risulta inoltre, per quanto si è ora visto, che $Av \in T^{-m,r}(R_+^n)$.

Risolviamo allora col teor. 6.1 il problema di DIRICHLET omogeneo

$$Aw = f - Av\,; \qquad \gamma_j w = 0, \qquad j = , 0, \ldots, m-1.$$

Detta w la sua soluzione essa appartiene a $T_0^{m,r}(R_+^n)$ e, posto $u = v + w$ si ha che u è soluzione in $T^{m,r}(R_+^n)$ del problema non omogeneo:

$$Au = f, \qquad \gamma_j u = g_j \qquad j = 0, \ldots, m-1. \tag{7.3}$$

Essa è poi l'unica soluzione in $T^{m,r}(R_+^n)$ di (7.3) perchè, se ce ne fosse un'altra u^* allora $u - u^*$ per il teor. 6.1 dovrebbe essere uguale a zero.

In virtù del teor. 6.1 e della Prop. 7.1 è poi facile dedurre che

$$\| u \|_{T^{m,r}(R_+^n)} \leq c \left\{ \| f \|_{T^{-m,r}(R_+^n)} + \sum_{j=0}^{m-1} \| g_j \|_{H^{m+r-j-1/2}(\pi)} \right\}$$

con c indipendente da f e delle g_j; e dunque il teorema è dimostrato.

COROLLARIO: *La soluzione u del problema* (7.3) *di cui al teorema precedente soddisfa anche la condizione*

$$\lim_{t \to 0} \gamma_{j,t}\, u = g_j \qquad \textit{in } H^{m+r-j-1/2}(\pi) \qquad j = 0, \ldots, m-1.$$

Ciò segue ovviamente dalle (7.1) della Prop. 7.1

7.2. Passiamo ora a prendere in considerazione anche il caso degli spazi $T^{m,r}(R^n_+)$ con r intero ≥ 0.

È noto, come si è già richiamato nell'introduzione, che vale il seguente risultato: $u \to \{Au, \vec{\gamma u}\}$ è un isomorfismo di $H^m(R^n_+)$ su $H^{-m}(R^n_+) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\pi)$. Poichè $T^{k,0}(R^n_+) = H^k(R^n_+)$, questo risultato risolve il problema che stiamo studiando nel caso $r = 0$.

Si consideri ora lo spazio $T^{m,r}(R^n_+)$ con $r > 0$. Dalla def. 2.1 stessa e dalle proprietà note degli spazi $H^m(R^n_+)$ richiamate anche nel n. 1, si ha:

PROP. 7.2: *L'applicazione $u \to \vec{\gamma u}$ è lineare e continua da $T^{m,r}(R^n_+)$, r intero positivo, su $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m+r-j-1/2}(\pi)$; e di più si ha*

$$\lim_{t\to 0} \gamma_{j,t}\, u = \gamma_j\, u \qquad \text{in } H^{m+r-j-1/2}(\pi) \qquad j = 0, \dots, m-1.$$

Si ottiene allora anche il

TEOR. 7.2: *Nelle ipotesi α) e (1.5) l'applicazione $u \to \{Au, \vec{\gamma u}\}$ è un isomorfismo di $T^{m,r}(R^n_+)$, r intero positivo, su $T^{-m,r}(R^n_+) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{m+r-j-1/2}(\pi)$.*

Basta infatti procedere in modo analogo a quello usato per il teor. 7.1, utilizzando le proprietà degli spazi $H^m(R^n_+)$ (da cui si ha subito che $u \to Au$ è lineare e continua da $T^{m,r}(R^n_+)$ in $T^{-m,r}(R^n_+)$), la Prop. 7.2 e il teor. 6.2 (nel caso $r > 0$).

Possiamo dunque concludere, riassumendo i teor. 7.1 e 7.2 con il seguente teorema, il quale estende al caso non omogeneo il teor. 6.2:

TEOR. 7.3: *Nelle ipotesi α) e (1.5) per r intero qualunque l'applicazione $u \to \{Au, \vec{\gamma u}\}$ è un isomorfismo di $T^{m,r}(R^n_+)$ su $T^{-m,r}(R^n_+) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{m+r-j-1/2}(\pi)$; e si ha inoltre che le condizioni al contorno sono precisate nel senso che risulta*

$$\lim_{t\to 0} \gamma_{j,t}\, u = \gamma_j\, u \qquad \text{in } H^{m+r-j-1/2}(\pi) \qquad j = 0, \dots, m-1.$$

Il teor. 7.3 risolve dunque in $T^{m,r}(R^n_+)$ il problema di DIRICHLET

$$Au = f, \qquad \gamma_j\, u = g_j \qquad\qquad j = 0, \dots, m-1$$

per ogni $f \in T^{-m,r}(R^n_+)$ e ogni $g_j \in H^{m+r-j-1/2}(\pi)$, $j = 0, \dots, m-1$.

OSSERVAZIONE II: Ci sembra utile mettere in evidenza la notevole generalità del risultato ottenuto. I dati f e g_j possono diventare infiniti di ordine assai elevato. Si ha in proposito il seguente lemma che può essere utile nelle applicazioni (per un lemma analogo si veda [26, n.5]):

LEMMA 7.1: *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di* HILBERT *e sia $t \to f(t)$ una funzione continua di t in $(0, +\infty)$ a valori in $\mathcal{H}$, nulla per $t \geq t^*$ e tale che per i intero ≥ 0 sia*

$$\int_t^{t^*} (\sigma - t)^{i-1} \| f(\sigma) \|_{\mathcal{H}} \, d\sigma \in L^2(0, t). \tag{7.4}$$

Allora $f \in H^{-i}(0, +\infty; \mathcal{H})$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\varphi \in \mathcal{D}(0, +\infty); \mathcal{H})$; si ha $\varphi(\sigma) = \int_0^\sigma \frac{(\sigma - t)^{i-1}}{(i-1)!} \varphi^{(i)}(t) \, dt$ dunque

$$\int_0^{+\infty} (f(\sigma), \varphi(\sigma))_{\mathcal{H}} \, d\sigma = \frac{1}{(i-1)!} \int_0^{t^*} \left(\int_t^{t^*} (\sigma - t)^{i-1} f(\sigma) \, d\sigma, \varphi^{(i)}(t) \right)_{\mathcal{H}} dt$$

e allora $\varphi \to \int_0^{+\infty} (f(\sigma), \varphi(\sigma))_{\mathcal{H}} \, d\sigma$ è continua rispetto alla norma di $H_0^i(0, +\infty; \mathcal{H})$ se $\int_t^{t^*} (\sigma - t)^{i-1} f(\sigma) \, d\sigma \in L^2(0, t^*; \mathcal{H})$ dunque a maggior ragione se vale la (7.4).

ESEMPIO: sia $\mathcal{H} = H^{-m+r+i}(\pi), 0 \leq i \leq m, \| f(t) \|_{\mathcal{H}} = O\left(\frac{1}{t^\lambda}\right)$ con $\lambda = i + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ e $f(t)$ nulla per $t \geq t^*$. Allora vale la (7.4) poiché

$$\int_t^{t^*} \frac{(\sigma - t)^{i-1}}{\sigma^\lambda} \, d\sigma = \int_1^{t^*/t} \frac{t^{i-1} (y-1)^{i-1}}{t^\lambda y^\lambda} \, t \, dt = \frac{1}{t^{\lambda - i}} \int_1^{t^*/t} \frac{(y-1)^{i-1}}{y^\lambda} \, dy$$

$$\text{e} \quad \int_1^{+\infty} \frac{(y-1)^{i-1}}{y^\lambda} \, dy < +\infty \quad \text{e} \quad \frac{1}{t^{\lambda - i}} \in L^2(0, t^*).$$

In questo caso è dunque $f \in H^{-i}(0, +\infty; H^{-m+r+i}(\pi)) \subset T^{-m,r}(R_+^n)$.

Si osservi ancora, per quanto riguarda il dato f, che il risultato ottenuto col teor. 7.3, se r è > 0, è in un certo senso «intermedio» tra il teor. 1.1 e il teor. 1.2, poichè $H^{-m+r}(R_+^n) \subset T^{-m,r}(R_+^n) \subset H^{-m}(R_+^n)$ e $H^{m+r}(R_+^n) \subset T^{m,r}(R_+^n) \subset H^m(R_+^n)$; se invece r è < 0, esso è più generale del teor. 1.1 poichè è $H^{-m}(R_+^n) \subset T^{-m,r}(R_+^n) \subset H^{-m+r}(R_+^n)$ e $H^m(R_+^n) \subset$ $\subset T^{m,r}(R_+^n) \subset H^{m+r}(R_+^n)$.

II. - Il problema di Dirichlet negli spazi $T^{k,r}(R_+^n)$ con k intero e r reale

8. Spazi d'interpolazione tra due spazi di Hilbert.

Richiamiamo in questo numero qualche risultato relativo all'interpolazione tra spazi di Hilbert, che useremo nel seguito.

Siano E e F due spazi di Hilbert; come già si è fatto nel paragrafo precedente indicheremo con $(u, v)_E$ il prodotto scalare in E e con $\| u \|_E$ la norma, $\| u \|_E = (u, u)_E^{1/2}$; e analogamente per F. Supporremo anche che $F \subset E$, l'inclusione essendo da intendere sia algebricamente sia topologicamente. Inoltre supporremo che F è *denso* in E.

Operatore Λ. Porremo la

Def. 8.1: *Indicheremo con $D(\Lambda)$ l'insieme degli elementi $u \in F$ tali che la forma semilineare*

$$v \to (u, v)_F$$

che è continua in F, sia anche continua con la topologia di E; allora, essendo F denso in E, si ha

$$(u, v)_F = (\Lambda u, v)_E, \quad \Lambda u \in E$$

e viene così definito un operatore lineare $u \to \Lambda u$, da $D(\Lambda)$ in E.

Questo operatore Λ è autoaggiunto (non limitato) in generale in E ed è positivo, $\Lambda > 0$; $D(\Lambda)$ è il dominio (di definizione) di Λ.

Indichiamo ora con Λ^ϱ la potenza d'ordine ϱ, ϱ reale, di Λ. È un operatore autoaggiunto positivo, il cui dominio indicheremo con $D(\Lambda^\varrho)$. Introdurremo in $D(\Lambda^\varrho)$ la struttura hilbertiana con il prodotto scalare $(u, v)_{D(\Lambda^\varrho)} =$ $= (\Lambda^\varrho u, \Lambda^\varrho v)_E$.

Osserviamo che $D(\Lambda^{1/2}) = F$ con identità di strutture hilbertiane

Spazi $F^{1-\vartheta}E^\vartheta$, $0 \leq \vartheta \leq 1$; porremo la

Def. 8.2: $F^{1-\vartheta}E^\vartheta = D(\Lambda^{\frac{1-\vartheta}{2}})$, $0 \leq \vartheta \leq 1$.

Per $\vartheta = 0$ (rispettivamente $\vartheta = 1$) si ritrova F (rispettivamente E).

TEOREMA D'INTERPOLAZIONE. Siano F_1 e E_1 due altri spazi di HILBERT, con le stesse proprietà degli spazi F, G; dunque risultano definiti gli spazi intermedi $F_1^{1-\vartheta}E_1^{\vartheta}$. In queste condizioni si ha il seguente risultato [24];

TEOR. 8.1 : *Se M è un applicazione lineare continua da E in E_1 e da F in F_1, allora per $0 < \vartheta < 1$, M è un'applicazione lineare continua da $F^{1-\vartheta}E^{\vartheta}$ in $F_1^{1-\vartheta}E_1^{\vartheta}$.*

Una dimostrazione diversa da quella data in [24] è stata data da N. ARONSZAJN [5], che ha ottenuto il seguente complemento (che può ottenersi anche con il metodo di [24]): indicata con $\mu_{1-\vartheta}$ la norma di M nello spazio delle applicazioni lineari e continue di $F^{1-\vartheta}E^{\vartheta}$ in $F_1^{1-\vartheta}E_1^{\vartheta}$, allora si ha

$$\mu_{1-\vartheta} \leq \mu_0^{\vartheta} \cdot \mu_1^{1-\vartheta}. \tag{8.1}$$

Si veda anche [15 bis].

OSSERVAZIONE : In [15] si trova la costruzione di altri spazi di HILBERT contenenti gli spazi $F^{1-\vartheta}E^{\vartheta}$ come casi particolari e soddisfacenti a proprietà di interpolazione analoghe a quelle degli $F^{1-\vartheta}E^{\vartheta}$.

9. Gli spazi $T^{k,r}(R_+^n)$ con k intero e r reale.

9.1. Abbiamo ricordato nel n. 1 gli spazi $H^k(R^n)$ con k reale e in particolare il fatto che se $k > h$, allora $H^k(R^n) \subset H^h(R^n)$ e inoltre $H^k(R^n)$ è denso in $H^h(R^n)$; dunque possiamo utilizzare le nozioni del n. 8, prendendo $F = H^k(R^n)$ e $E = H^h(R^n)$.

È importante mettere in evidenza la seguente

PROP. 9.1 : *Per k e h reali qualunque, $k > h$, si ha*

$$(H^k(R^n))^{1-\vartheta}(H^h(R^n))^{\vartheta} = H^{(1-\vartheta)k+\vartheta h}(R^n)$$

con identità di strutture hilbertiane.

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $\mathcal{F}H^k(R^n)$ lo spazio delle trasformate di FOURIER degli elementi di $H^k(R^n)$ con norma data proprio dalla (1.3). La Proposizione si riduce a dimostrare che, se si prende $F = \mathcal{F}H^k(R^n)$, $E = \mathcal{F}H^h(R^n)$, allora si ha

$$F^{1-\vartheta}E^{\vartheta} = \mathcal{F}H^{(1-\vartheta)k+\vartheta h}(R^n).$$

Si verifica che in questo caso, Λ è dato da

$$\Lambda(\mathcal{F}u) = (1 + |\xi|^2)^{k-h}\,\mathcal{F}u;$$

allora risulta

$$\Lambda^{\frac{1-\vartheta}{2}}(\mathcal{F}u) = (1+|\xi|^2)^{(1-\vartheta)\frac{k-h}{2}}\mathcal{F}u$$

e $D(\Lambda^{\frac{1-\vartheta}{2}})$ è l'insieme delle funzioni $\mathcal{F}u$ tali che $\Lambda^{\frac{1-\vartheta}{2}}(\mathcal{F}u) \in \mathcal{F}H^h(R^n)$, dunque $(1+|\xi|^2)^{(1-\vartheta)\frac{k-h}{2}+\frac{h}{2}}\cdot\mathcal{F}u \in L^2(R^n)$ e inoltre

$$\| \Lambda^{\frac{1-\vartheta}{2}}(\mathcal{F}u)\|_E^2 = \int_{R^n}(1+|\xi|^2)^{(1-\vartheta)k+\vartheta h}\,|\mathcal{F}u|^2\,d\xi$$

da cui la Proposizione.

9.2. Nel n. 3, def. 3.1, abbiamo introdotto gli spazi $T^{k,r}(R^n)$ per k e r reali qualunque. Per la Prop. 3.1 possiamo applicare i procedimenti di interpolazione del n. 8 anche a questi spazi. Ebbene anche in questo caso vale una Proposizione analoga alla Prop. 9.1 e precisamente

PROP. 9.2: *Per k, k', r, r' reali qualunque e $k \geq k'$, $r \geq r'$, si ha*

$$(T^{k,r}(R^n))^{1-\vartheta}(T^{k',r'}(R^n))^{\vartheta} = T^{(1-\vartheta)k+\vartheta k',(1-\vartheta)r+\vartheta r'}(R^n)$$

con identità di strutture hilbertiane.

La dimostrazione è analoga a quella della Prop. 9.1.

9.3. Veniamo ora ad estendere la definizione degli spazi $T^{k,r}(R^n_+)$. Essi sono stati introdotti nel n. 3 per k e r interi qualunque, mediante la def. 3.2. Come già si è osservato nella nota ([11]), non si ha però difficoltà alcuna ad introdurre con la stessa def. 3.2 gli spazi $T^{k,r}(R^n)$ *per k intero qualunque e r reale qualunque.* Basta infatti osservare che la trasformazione $\mathcal{G}^r u$ definita con la (3.4) ha senso anche per r reale e gode delle stesse proprietà di cui gode nel caso di r intero. Possiamo allora porre la

DEF. 9.1: *Per k intero qualunqne e r reale qualunque indicheremo con $T^{k,r}(R^n_+)$ lo spazio delle distribuzioni $u \in \mathcal{D}'(0,+\infty;\mathcal{S}'_{x'})$ tali che*

$$\mathcal{G}^r u \in H^k(R^n_+)$$

normalizzato da

$$(3.5)\qquad \|u\|_{T^{k,r}(R^n_+)} = \|\mathcal{G}^r u\|_{H^k(R^n_+)}.$$

Vale anche ora, con la stessa dimostrazione, la prop. 3.4; precisamente

PROP. 9.3: *Per k interi e r reale lo spazio $T^{k,r}(R^n_+)$ coincide con l'insieme delle restrizioni a R^n_+ degli elementi di $T^{k,r}(R^n_+)$.*

Vediamo ora di interpolare gli spazi $T^{k,r}(R^n_+)$ rispetto ad r, onde ottenere una proposizione analoga alle Prop. 9.1 e 9.2. Si ha infatti

Prop. 9.4: *Per k intero, r e r' reali, $r \geq r'$, si ha*

$$T^{k,r}(R^n_+))^{1-\vartheta}(T^{k,r'}(R^n_+))^{\vartheta} = T^{k,(1-\vartheta)r+\vartheta r'}(R^n_+)$$

con identità di strutture hilbertiane.

Dimostrazione. Si applica la definizione di $F^{1-\vartheta}E^{\vartheta}$ data nel n. 8, ponendo $E = T^{k,r'}(R^n_+)$, $F = T^{k,r}(R^n_+)$; per semplicità di scrittura porremo $(u, v) = (u, v)_{H^k(R^n_+)}$. Allora

$$(u, v)_E = (\mathcal{G}^{r'}u, \mathcal{G}^{r'}v), \quad (u, v)_F = (\mathcal{G}^{r}u, \mathcal{G}^{r}v).$$

Si deduce, tenendo anche conto che $\mathcal{G}^r$ è un operatore simmetrico, che

$$\Lambda u = \mathcal{G}^{2(r-r')}u,$$

dunque

$$\Lambda^{\frac{1-\vartheta}{2}}u = \mathcal{G}^{(1-\vartheta)(r-r')}u$$

e allora $F^{1-\vartheta}E^{\vartheta}$ è lo spazio delle u tali che $\mathcal{G}^{(1-\vartheta)(r-r')}u$ sia in $T^{k,r'}(R^n_+)$, cioè

$$\mathcal{G}^{(1-\vartheta)(r-r')}\mathcal{G}^{r'}u = \mathcal{G}^{(1-\vartheta)r+\vartheta r'}u \in H^k(R^n_+)$$

e il prodotto scalare in $F^{1-\vartheta}E^{\vartheta}$ è

$$(\mathcal{G}^{(1-\vartheta)r+\vartheta r'}u, \mathcal{G}^{(1-\vartheta)r+\vartheta r'}v) = (u, v)_{T^{k,(1-\vartheta)r+\vartheta r'}(R^n_+)}$$

da cui la Proposizione.

Non si ha poi difficoltà alcuna nell'introdurre anche per r reale il sottospazio $T^{k,r}_0(R^n_+)$ di $T^{k,r}(R^n_+)$, come si è fatto nel n. 4 e di dimostrare nello stesso modo le proposizioni corrispondenti alla Prop. 4.2 e al Teor. 4.1; e così pure si possono introdurre le nozioni del n. 5 per gli spazi $H^k(0, +\infty; H^s(\pi))$ quando k sia intero e s sia reale qualunque. Per il seguito a noi interesserà però mettere in evidenza l'analoga delle Prop. 5.4 e precisamente

Prop. 9.5: *Se k è intero positivo e r reale qualunque, si ha*

$$T^{k,r}(R^n_+) = \bigcap_{i=0}^{k} H^i(0, +\infty; H^{k+r-i}(\pi)).$$

La dimostrazione è la stessa della Prop. 5.4.

Terminiamo questo numero osservando che anche per i nuovi spazi $T^{k,r}(R^n_+)$ k intero e r reale, valgono le relazioni di inclusione (5.6).

10. Il problema di Dirichlet non omogeneo.

10.1. Siamo ora in grado di dimostrare il .

TEOR. 10.1 : *Sia m intero positivo, e sia M un operatore che goda della proprietà*

$$(10.1) \quad M \text{ è un isomorfismo di } T^{m,r}(R^n_+) \text{ su } T^{-m,r}(R^n_+) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{m+r-j-1/2}(\pi)$$

qualunque sia r intero.
Allora m gode della proprietà (10.1) *qualunque sia r reale.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo anzitutto che se M è un isomorfismo di E su E_1 e di F su F_1, è ugualmente un isomorfismo di $F^{1-\vartheta}E^{\vartheta}$ su $F_1^{1-\vartheta}E_1^{\vartheta}$. Si applica infatti il teorema di interpolazione a M e M^{-1}.

Poniamo ora per semplicità

$$Y^r = T^{-m,r}(R^n_+) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{m+r-j-1/2}(\pi) .$$

Sia r intero positivo. L'operatore M è un isomorfismo di $T^{m,r}(R^n_+)$ su Y^r e di $T^{m,-r}(R^n_+)$ su Y^{-r}, dunque è ugualmente un isomorfismo di

$$(T^{m,r}(R^n_+))^{1-\vartheta}(T^{m,-r}(R^n_+))^{\vartheta} \text{ su } (Y^r)^{1-2\vartheta}(Y^{-r})^{\vartheta} .$$

Ma per la Prop. 9.4 il primo spazio coincide con $T^{m,(1-2\theta)r}(R^n_+)$ e resta dunque da dimostrare solamente che

$$(10.2) \qquad (Y^r)^{1-\vartheta}(Y^{-r})^{\vartheta} = Y^{(1-2\vartheta)r}.$$

Ora si constata facilmente che il primo spazio coincide con

$$(T^{-m,r}(R^n_+))^{1-\vartheta}(T^{-m,-r}(R^n_+))^{\vartheta} \times \prod_{j=0}^{m-1} (H^{m+r-j-1/2}(\pi))^{1-\vartheta}(H^{m-r-j-1/2}(\pi))^{\vartheta}$$

e allora (10.2) segue, utilizzando la Prop. 9.4 e la Prop. 9.1 (nella quale si sostituisca R^n con $R^{n-1} = \pi$).

Di conseguenza M ha la proprietà (10.1) per ogni numero reale compreso tra $-r$ ed r, ed essendo r un intero positivo qualunque, si ha il Teorema.

10.2· Applichiamo ora il Teor. 10.1 all'operatore $M = \{A, \vec{\gamma}\}$. Sappiamo che $\{A, \vec{\gamma}\}$ gode della proprietà (10.1) per ogni r intero, per il Teor. 7.3; il Teor. 10.1 si può dunque effettivamente applicare e si ottiene il

TEOR. 10.2 : *Nelle ipotesi* α) *e* (1.5) *per r reale qualunque l'applicazione* $u \to \{Au, \vec{\gamma u}\}$ *è un isomorfismo di* $T^{m,r}(R_+^n)$ *su* $T^{-m,r}(R_+^n) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{m+r-j-1/2}(\pi)$.

Col teorema precedente si è così risolto il problema di DIRICHLET non omogeneo

$$(10.3) \qquad Au = f;\ \gamma_j u = g_j, \qquad j = 0, \dots, m = 1$$

per ogni $f \in T^{-m,r}(R_+^n)$ e $g_j \in H^{m+r-j-1/2}(\pi)$.

Rimane ora da dire qualcosa sull'interpretazione delle condizioni al contorno $\gamma_j u = g_j$. In virtù della Prop. 9.5 non si ha difficoltà ad estendere allo spazio $T^{m,r}(R_+^n)$ con r reale qualunque le Prop. 7.1 e 7.2, sfruttando sempre il risultato citato di LIONS [24]; si ha cioè la

PROP. 10.1 : *L'applicazione* $u \to \vec{\gamma u}$ *è lineare e continua da* $T^{m,r}(R_+^n)$ *su* $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m+r-j-1/2}(\pi)$ *per r reale qualunque e si ha di più*

$$\lim_{t \to 0} \gamma_{j,t}\, u = \gamma_j u \quad in \quad H^{m+r-j-1/2}(\pi) \qquad j = 0, \dots, m-1.$$

Le condizioni $\gamma_j u = g_j$ nel teor. 10.2 si possono dunque precisare nel senso che è

$$\lim_{t \to 0} \gamma_{j,t}\, u = g_j \quad in \quad H^{m+r-j-1/2}(\pi), \qquad j = 0, \dots, m-1.$$

OSSRERVAZIONE I. Se nel teor. 10.2 facciamo $r = -\frac{1}{2}$ e osserviamo che $H^{-m}(R_+^n) \equiv T^{-m,0}(R_+^n) \subset T^{-m,-1/2}(R_+^n)$, otteniamo che, assegnate $f \in H^{-m}(R_+^n)$ e $g_j \in H^{m-1-j}(\pi)$ esiste una e una sola $u \in T^{m,-1/2}(R_+^n)$ che risolve il problema (10.3). Si riottengono così per il problema di DIRICHLET per il semipiano, come caso particolare del teor. 10.2, i risultati di C. CIMMINO [13] per $m = 1$ e di E. MAGENES [26] per $m > 1$, con maggiori precisazioni sulla soluzione u; mentre infatti in [13] e in [26] si ha che la soluzione $u \in H^{m-1}(R_+^n)$ e verifica le

$$\lim_{t \to 0} \gamma_{j,t}\, u = g_j \quad \text{in} \quad H^{m-1-j}(\pi), \qquad j = 0, \dots, m-1$$

noi possiamo ora dire di più che essa appartiene a $T^{m,-1/2}(R_+^n)$, il quale è un sottospazio di $H^{m-1}(R_+^n)$ poichè

$$T^{m,-1/2}(R_+^n) \subset T^{m,-1}(R_+^n) \subset H^{m-1}(R_+^n) .$$

Valgono poi anche ora le considerazioni fatte nell'Osservazione II del n. 7.

OSSERVAZIONE II. Le ipotesi da noi fatte per la validità del teorema 10.2 sono dunque, come si è detto all'inizio del n. 6, le α) sui coefficienti a_{pq} e la (1.5). Tuttavia è opportuno osservare ancora, come si è già fatto nell'Osservazione II del n. 2, che in realtà il corollario del teor. 2.1 e tutti i teoremi 6.1, 6.2, 7.1, 7.2, 7.3, 10.2 sono validi ogni qualvolta gli a_{pq} verifichino l'ipotesi α) e valga il teor. 1.1. In questo senso dunque la (1.5) è adoperata solo come condizione sufficiente perchè valga il teor. 1.1.

Essa può essere dunque sostituita da altre ipotesi anche più generali, purchè da essa consegua il teor. 1.1; i recenti lavori di SCHECHTER [37], [38], [38 bis], AGMON [2], BROWDER [12] e di AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG [3] permettono di ottenere condizioni del tipo detto anche per operatori Au *non fortemente ellittici.* Per maggiori dettagli rinviamo alla Remarque 10.5 del nostro prossimo articolo (II), sugli « Annales de l'Institut Fourier ».

BIBLIOGRAFIA

1 - S. AGMON : *Multiple layer potentials and the Dirichlet problem for higher order elliptic equations in the plane*, I, Commun. pure appl. math. 10 (1957), 179-239.

1bis - » » : *The coerciveness problem for integro-differential forms*, Journal Analyse Math., 6 (1958), 183-223.

2 - » » : *The L_p approach to the Dirichlet problem*, I, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, III, 13 (1959), 405-448.

2bis - » » : *Maximum properties for solutions of higher order elliptic equations*, Bull. A. U. S. 60 (1960), 77-80.

3 - S. AGMON-A. DOUGLIS-L. NIRENBERG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying boundary general conditions*, I Commun. pure appl. math., 12 (1959), 623-727.

4 - N. ARONSZAJN : *Boundary value of functions with finite Dirichlet integral*, Tech. Report n. 14, Univer. Kansas, 1955, 77-94.

5 - » *Associated spaces, interpolation theorems and the regularity of solution of differential problems* (in corso di stampa).

6 - N. ARONSZAJN.-K. T. SMITH ; *Theory of Besset potential*, I (in corso di stampa).

7 - V. M. BABICH-L. N. SLOBODECHIJ : *Sulla limitatezza dell'integrale di Dirichlet* (in russo) Doklady Akad. Nauk, 106 (1956), 604-608.

8 - N. BOURBAKI : *Espaces vectoriels topologiques*, chap. III, IV, V, Paris, Hermann, 1955.

9 - » » : *Intération*, Paris, Hermann, 1952.

10 - F. E. BROWDER : *Assumption of boundary values and the Green's function in the Dirichlet problem for the general elliptic equation*, Proc. Nat. Acad. U. S. A., 39, (1953) 433-439.

11 - » » : *On the regularity properties of solution of elliptic differential equations*, Commun. pure appl. math., 9 (1956), 351-361.

12 - » » : *Estimates and existence theorems for elliptic boundary value problems*, Proc. Nat. Acad. U. S. A., 45 (1959), 365-372.

13 - G. CIMMINO : *Nuovo tipo di condizioni al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 61 (1937), 177-224.

14 - J. DENY-J. L. LIONS : *Les espaces de B. Levi*, Ann. Inst. Fourier, 5 (1953-54), 305-370.

15 - C. FOIAS-J. L. LIONS : *Sur certaines théorèmes d'interpolation* (in corso di stampa su Acta Szeged).

15bis - E. GAGLIARDO : *Interpolation d'espaces de Banach et application*, C. A. Acad. Sc. Paris, (I), (II), (III), 248 (1959), 1912-1914, 3388-3390, 3517-3518.

16 - L. GÅRDING : *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations*, Math. Acad. Scand. 1 (1953), 237-255.

17 - L. GÅRDING-B. MALGRANGE : *Opérateurs différentiels partiellement hypoelliptiques*, C. R. Sc. Paris, 247 (1958), 2083-2085.

18 - O. V. GUSEVA : *Sui problemi al contorno per sistemi fortemente ellittici* (in russo), Doklady Akad. Nauk., 102 (1955), 1069-1072.

19 - L. HORMANDER : *On interior regularity of the solutions of partial differential equations,* Commun. pure appl. math., 9 (1958), 197-218.

19bis - » » : *On the regularity of solutions of boundary problems,* Acta Math., 99 (1958), 225-264.

20 - A. K. KOSELEV : *Sulla limitatezza in L_p delle derivate delle soluzioni delle equazioni e dei sistemi ellittici* (in russo), Doklady Akad. Nauk., 116 (1957), 542-544.

21 - J. L. LIONS : *Problèmes aux limites en théorie des distributions,* Acta Math. 94 (1955), 13-153.

21bis - » : *Lectures on elliptic differential equations,* Tata Inst. of fundamental Research, Bombay, 1957.

22 - » : *Sur les problèmes aux limites du type de dérivée oblique,* Ann. of Math., 64 (1956), 208-239.

23 - » : *Conditions aux limites de Visik-Sobolev et problémes mixtes,* C. R. Acad. Sc. Paris, 244 (1957), 1126-1128.

24 - » : *Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications,* Bull. Math. Soc. Sc. Math. Phys. R. P. Roumanie, 2, 50 (1959), 419-432.

25 - » : *Un théorème de traces ; applications,* C. R. Acad. Sc. Paris, 249 (1959), 2259-2261.

26 - E. MAGENES : *Sul problema di Dirichlet per le equazioni lineari ellittiche in due variabili,* Ann. Mat pura appl. IV, 48 (1959), 257-279.

27 - E. MAGENES-G. STAMPACCHIA : *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico,* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, III, 12 (1958), 247-357.

28 - B. MALGRANGE : *Sur une classe d'opératuers hypoelliptiques,* Bull. Soc. Math. France, 85 (1957), 283-306.

29 - C. MIRANDA : *Teorema del massimo modulo e teorema di esistenza e di unicità per il problema di Dirichlet relativo alle equazioni ellittiche in due variabili,* Ann. Mat. pura appl., IV, 46 (1958), 265-312.

30 - L. NIRENBERG : *Remarks on strongly elliptic partial differential equations,* Commun. pure appl. math., 5 (1955), 648-674.

31 - J. PEETRE : *Théorèmes de régularité pour quelques classes d'opérateurs différentiels,* Thèse, Lund Université, 1959.

32 - B. PINI : *Teoremi di unicità per problemi generalizzanti i problemi biarmonici fondamentali interno ed esterno,* Boll. U. M. I., 10 (1955), 465-473.

33 - » : *Una generalizzazione del problema biarmonico fondamentale,* Rend. Sem. Mat. Padova, 25 (1956) 196-213.

34 - » : *Sul problema di Dirichlet per le equazioni a derivate parziali lineari ellittiche in due variabili,* Rend. Sem. Mat. Padova, 26 (1956), 177-200.

35 - G. PRODI : *Tracce sulla frontiera delle funzioni di Beppo Levi,* Rend. Sem. Mat. Padova, 26 (1956), 36-40.

36 - » : *Tracce di funzioni con derivata di ordine l a quadrato integrabile su varietà di dimensione arbitraria,* Rend. Sem. Mat. Padova, 28 (1958), 402-452.

37 - M. SCHECHTER : *Solution of the Dirichlet problem for systems not necessarily strongly elliptic,* Commun, pure appl. mat., 12 (1959) 241-247.

38 - » : *General boundary value problems for elliptic differential equations,* Commun. pure appl. math., 12 (1959), 457-486.

38bis - » : *Remarks on elliptic boundary value problems,* Commun. pure appl. math., 12 (1959), 561-578.

39 - L. SCHWARTZ : *Théorie des distributions,* t. I (2 edit.) (1957), t. II (1951), Paris, Hermann.

39bis - L. SCHWARTZ : *Les travaux de Gårding sur le Problème de Dirichlet,* Sém. Bourbaki, an. 1952.

40 - » : *Equations aux dérivées partielles,* Sem. Schwartz, Paris, (1954).

41 - » : *Su alcuni problemi della teoria delle equazioni differenziali lineari di tipo ellittico,* Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 27 (1957), 211-249.

42 - » : *Espaces de functions différentiables à valeurs vectorielles,* Journ. Analyse Math. 4 (1954-55), 88-148.

43 - » : *Théorie des distributions à valeurs vectorielles,* Ann. Inst. Fourier, VII (1958), 1-141, VIII (1958),1-209.

43bis - L. N. SLOBODECHY : *Valutazioni in L^p delle soluzioni dei sistemi ellittici* (in russo), Doklady Akad. Nauk., 123 (1958), 616-619.

44 - S. L. SOBOLEV-M. I. VISHIK : *Formulazione generale di qualche problema ai limiti per le equazioni alle derivate parziali,* (in russo), Doklady Akad. Nauk, 111 (1956), 521-523.

44bis - S. L. SOBOLEV : *Applicazioni dell'analisi funzionale alla Fisica-Matematica,* (in russo), Leningrado 1950.

45 - G. STAMPACCHIA : *Sopra una classe di funzioni in n variabili,* Ric. Mat., 1 (1951), 27-54.

46 - G. STAMPACCHIA : *Su un problema relativo alle equazioni di tipo ellittico del secondo ordine,* Ric. Mat, 5 (1956), 3-24.

47 - M. I. VISHIK : *Sui sistemi fortemente ellittici di equazioni differenziali* (in russo), Mat. Sbornik, 29 (1951), 617-676.