ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ALDO GHIZZETTI

Sulle formule di cubatura relative ad intervalli piani

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 14, nº 3 (1960), p. 237-268

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1960_3_14_3_237_0>

SULLE FORMULE DI CUBATURA RELATIVE AD INTERVALLI PIANI (*)

di ALDO GHIZZETTI (Roma)

Introduzione

In precedenti lavori [1] mi sono occupato di un metodo generale per ricavare formule di quadratura, con l'espressione del resto. Tale metodo, fondato sull'uso sistematico dell'identità di Green-Lagrange relativa ad un operatore differenziale lineare E ed al suo aggiunto E^*, non appare immediatamente estendibile al caso delle formule di cubatura, cioè delle formule approssimate per il calcolo di integrali doppi, anche se ci si limita al caso più semplice in cui il dominio d'integrazione è un intervallo piano $T\,(a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d)$. La ragione è che la più ovvia estensione del metodo conduce soltanto ad approssimare l'integrale doppio mediante integrali curvilinei estesi alla frontiera FT di T e non mediante combinazioni lineari di valori assunti dall'integrando (ed eventualmente da certe sue derivate parziali) in punti di T. Per arrivare allo scopo occorre anzitutto scrivere l'identità di Green-Lagrange in modo diverso e successivamente introdurre, non un solo operatore E col suo aggiunto E^*, ma un gruppo di operatori $(E_1, E_2, \ldots, E_m)$ coi loro aggiunti $(E_1^*, E_2^*, \ldots, E_m^*)$. Si può così arrivare a generalissime formule di cubatura, a patto però di saper risolvere un certo problema relativo ad alcune equazioni a derivate parziali in più incognite.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

[1] Vedi A. GHIZZETTI, *Sulle formule di quadratura*, Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, vol. XXVI, 1954-55; *Sulla convergenza dei procedimenti di calcolo, degli integrali definiti, forniti dalle formule di quadratura*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, vol. XXVI. 1956; *Teoria generale delle formule di quadratura*, Atti del « Colloquio sulle moderne macchine calcolatrici » tenuto a Roma nell'ottobre 1956 a cura del Centro Internazionale Provvisorio di Calcolo.

Tutta questa modificazione del metodo è descritta dettagliatamente nel § 1 di questo lavoro ([2]), ove viene posto il predetto problema. La risoluzione di questo nel caso più generale non appare semplice e richiederà altre più approfondite ricerche che non sono svolte in questo lavoro.

Nel § 2 viene applicata la teoria generale esposta nel § 1 alla costruzione dalla più generale formula di cubatura, che sia esatta per i polinomi di un certo grado $n-1$ e che faccia intervenire i valori dell'integrando e delle sue derivate parziali fino all'ordine $n-2$ nei punti (x_α, y_β) $(\alpha = 0, 1, \ldots, \mu+1\,;\ \beta = 0, 1, \ldots, \nu+1$ con $x_0 = a,\ x_{\mu+1} = b\,;\ y_0 = c,\ y_{\nu+1} = d)$ di un arbitrario reticolato situato in T. In questo caso il problema di cui si è detto dianzi può essere risolto in modo completo e, con opportuni accorgimenti, si arriva alla formula voluta, che contiene $(\mu+2)(\nu+2)\binom{n}{2}-\binom{n+1}{2}$ parametri arbitrari, cioè il numero esatto che permette di qualificarla come la più generale possibile. La struttura di questa formula, che comprende tutte le innumerevoli formule dello stesso tipo già note nella letteratura, è naturalmente assai complicata. Di essa interesseranno i casi particolari corrispondenti ad opportune scelte degli interi n, μ, ν, dei punti (x_α, y_β) e dei parametri arbitrari. Di ciò non mi occupo in questo lavoro e mi limito alla fine ad indicare alcuni semplicissimi esempi inerenti al caso $n = 2$, $\mu = \nu = 0$.

Ma, oltre a ciò, la formula ricavata permette di studiare problemi analoghi a quelli di Gauss, di Tchebyceff, ecc. relativi alle formule di quadratura; su queste questioni conto di ritornare in una successiva Nota.

È da avvertire che in tutto questo lavoro l'integrando viene sempre considerato come il prodotto di una funzione $u(x, y)$ di classe n e di una funzione $g(x, y)$ (*funzione peso*) che si suppone soltanto sommabile, con la precisazione che, parlando di valori dell'integrando e delle sue derivate, si deve intendere valori della $u(x, y)$ e sue derivate. Le formule di cubatura trovate valgono quindi per ogni integrale doppio secondo Lebesgue. Ho adottato questa generalità (già considerata nei lavori citati in ([1])) perchè restano così implicitamente stabilite anche *formule di cubatura relative ad intervalli illimitati.* Infatti un integrale doppio esteso ad un intervallo illimitato può sempre, con un cambiamento di variabili, esser trasformato in un integrale doppio esteso ad un intervallo limitato; ciò introduce però in generale nell'integrando delle nuove singolarità ma, per le formule qui ricavate nel modo detto, questo non costituisce difficoltà. Anche da questo punto di vista si potranno fare numerose ricerche e ricavare formule utili.

([2]) Di esso avevo già dato breve notizia in A. GHIZZETTI, *Questioni connesse con le formule di cubatura,* Atti del V Congresso dell'Unione Matematica Italiana, Pavia-Torino 1955.

§ 1. — Metodo generale per ricavare formule di cubatura.

1. *Formula di Green relativa ad un operatore differenziale lineare in due variabili.* — Sia $T\,(a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d)$ un assegnato intervallo del piano xy. Sia E un operatore differenziale lineare di ordine $n \geq 2$, nelle due variabili indipendenti x e y:

$$E = \sum_{\substack{h \leq n, k \leq n \\ h+k \geq n}} a_{hk}(x, y) \frac{\partial^{2n-h-k}}{\partial x^{n-h}\, \partial y^{n-k}}, \tag{1.1}$$

con i coefficienti a_{hk} di classe $2n - h - k$ in T. Possiamo perciò considerare l'operatore aggiunto

$$E^* = \sum_{\substack{h \leq n, k \leq n \\ h+k \geq n}} (-1)^{2n-h-k} \frac{\partial^{2n-h-k}}{\partial x^{n-h}\, \partial y^{n-k}} a_{hk}(x, y). \tag{1.2}$$

Per ogni coppia di indici p, q verificanti le

$$p \leq n, \quad q \leq n, \quad p + q \geq n, \tag{1.3}$$

consideriamo anche il seguente operatore di ordine $p + q - n$

$$E_{pq} = \sum_{\substack{h \leq p, k \leq q \\ h+k \geq n}} a_{hk}(x, y) \frac{\partial^{p+q-h-k}}{\partial x^{p-h}\, \partial y^{q-k}}, \qquad (E_{nn} \equiv E), \tag{1.4}$$

ed il suo aggiunto

$$E^*_{pq} = \sum_{\substack{h \leq p, k \leq q \\ h+k \geq n}} (-1)^{p+q-h-k} \frac{\partial^{p+q-h-k}}{\partial x^{p-h}\, \partial y^{q-k}} a_{hk}(x, y). \tag{1.5}$$

Allora, come conseguenza della seguente identità (che si dimostra facilmente per induzione e nella quale $u(x, y)$, $v(x, y)$ sono in T funzioni di classe $p + q - 1$ e dotate di derivate parziali d'ordine $p + q - 1$ assolutamente continue secondo Tonelli):

$$v \frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p\, \partial y^q} - (-1)^{p+q} u \frac{\partial^{p+q} v}{\partial x^p\, \partial y^q} = \tag{1.6}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{s=0}^{q-1} (-1)^{p+q-r-s-2} \frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r\, \partial y^s} \frac{\partial^{p+q-r-s-2} v}{\partial x^{p-r-1}\, \partial y^{q-s-1}} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \sum_{r=0}^{p-1} (-1)^{p+q-r-1} \frac{\partial^r u}{\partial x^r} \frac{\partial^{p+q-r-1} v}{\partial x^{p-r-1}\, \partial y^q} + \frac{\partial}{\partial y} \sum_{s=0}^{q-1} (-1)^{p+q-s-1} \frac{\partial^s u}{\partial y^s} \frac{\partial^{p+q-s-1} v}{\partial x^p\, \partial y^{q-s-1}},$$

si trova, tenendo anche conto di (1.5), che sussiste quest'altra (ove $u(x, y)$, $v(x, y)$ sono in T funzioni di classe $n-1$ dotate di derivate parziali d'ordine $n-1$ assolutamente continue secondo Tonelli):

$$(1.7) \qquad vE(u) - uE^*(v) = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \sum_{r+s \leq n-2} \frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r\, \partial y^s} E^*_{n-r-1,n-s-1}(v) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\partial^r u}{\partial x^r} E^*_{n-r-1,n}(v) + \frac{\partial}{\partial y} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\partial^s u}{\partial y^s} E^*_{n,n-s-1}(v),$$

che riscriviamo brevemente sotto la forma

$$(1.8) \qquad vE(u) - uE^*(v) = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} A(u, v) + \frac{\partial}{\partial x} B(u, v) + \frac{\partial}{\partial y} C(u, v) \text{ (3)}.$$

Ne segue immediatamente:

$$(1.9) \qquad \iint_T [vE(u) - uE^*(v)]\, dx\, dy = [A(u, v)]_{(b,d)} - [A(u, v)]_{(b,c)} - [A(u, v)]_{(a,d)} + \\ + [A(u, v)]_{(a,c)} + \int_c^d \{[B(u, v)]_{x=b} - [B(u, v)]_{x=a}\}\, dy + \\ + \int_a^b \{[C(u, v)]_{y=d} - [C(u, v)]_{y=c}\}\, dx.$$

2. *Formula di Green relativa ad un gruppo di operatori differenziali lineari in due variabili.* — Fissiamo ora un certo numero m di operatori E_i, $(i = 1, 2, \dots, m)$, del tipo (1.1). Detto n l'ordine massimo di questi operatori, non è restrittivo ragionare come se tutti fossero di ordine n, cosicchè possiamo adottare per gli E_i ed i loro aggiunti E_i^* espressioni analoghe alle (1.1), (1.2) con certi coefficienti $a_{i\,|\,hk}(x, y)$.

Introducendo poi gli operatori $E_{i\,|\,pq}$, $E^*_{i\,|\,pq}$ definiti da formule simili alle (1.4), (1.5) ed associando ad ogni E_i una corrispondente funzione v_i, possiamo, in corrispondenza a (1.8), scrivere la formula:

$$(2.1) \qquad v_i E_i(u) - uE_i^*(v_i) = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} A_i(u, v_i) + \frac{\partial}{\partial x} B_i(u, v_i) + \frac{\partial}{\partial y} C_i(u, v_i), \\ (i = 1, 2, \dots, m),$$

(3) Si intende che le (1.6), (1.7), (1.8) sono valide quasi ovunque in T.

avendo posto [cfr. con (1.7)]:

$$A_i(u, v_i) = \sum_{r+s\leq n-2} \frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial y^s} E^*_{i\,|\,n-r-1,n-s-1}(v_i), \tag{2.2}$$

$$B_i(u, v_i) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\partial^r u}{\partial x^r} E^*_{i\,|\,n-r-1,n}(v_i), \tag{2.3}$$

$$C_i(u, v_i) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\partial^s u}{\partial y^s} E^*_{i\,|\,n,n-s-1}(v_i). \tag{2.4}$$

Si ha allora [cfr. con (1.9)]:

$$\begin{gathered}\iint_T [v_i E_i(u) - uE_i^*(v_i)]\, dx\, dy = [A_i(u, v_i)]_{(b,d)} - [A_i(u, v_i)]_{(b,c)} - \\ - [A_i(u, v_i)]_{(a,d)} + [A_i(u, v_i)]_{(a,c)} + \int_c^d \{[B_i(u, v_i)]_{x=b} - [B_i(u, v_i)]_{x=a}\}\, dy + \\ + \int_a^b \{[C_i(u, v_i)]_{y=d} - [C_i(u, v_i)]_{y=c}\}\, dx, \\ (i = 1, 2, \dots, m),\end{gathered} \tag{2.5}$$

onde, sommandò rispetto all'indice i, risulta

$$\begin{gathered}\iint_T \left[\sum_{i=1}^m v_i E_i(u) - u \sum_{i=1}^m E_i^*(v_i)\right] dx\, dy = \\ = \left[\sum_{i=1}^m A_i(u, v_i)\right]_{(b,d)} - \left[\sum_{i=1}^m A_i(u, v_i)\right]_{(b,c)} - \left[\sum_{i=1}^m A_i(u, v_i)\right]_{(a,d)} + \left[\sum_{i=1}^m A_i(u, v_i)\right]_{(a,c)} + \\ + \int_c^d \left\{\left[\sum_{i=1}^m B_i(u, v_i)\right]_{x=b} - \left[\sum_{i=1}^m B_i(u, v_i)\right]_{x=a}\right\} dy + \\ + \int_a^b \left\{\left[\sum_{i=1}^m C_i(u, v_i)\right]_{y=d} - \left[\sum_{i=1}^m C_i(u, v_i)\right]_{y=c}\right\} dx.\end{gathered} \tag{2.6}$$

È questa la formula di Green a cui volevamo pervenire e di cui ci interessa trarre subito alcune conseguenze.

3. *Conseguenze della precedente formula di Green.* — Supponiamo che la funzione $u(x, y)$ sia di classe n in T e, fissata una funzione $g(x, y)$ sommabile in T, imponiamo alle funzioni $v_i(x, y)$ (di classe $n-1$ in T e dotate di derivate parziali d'ordine $n-1$ assolutamente continue secondo Tonelli) di soddisfare, quasi ovunque in T, alla

$$\sum_{i=1}^{m} E_i^*(v_i) = g. \tag{3.1}$$

Da (2.6) si deduce allora la formula seguente

$$\begin{aligned}\iint_T ug\,dx\,dy = &-\left[\sum_{i=1}^{m} A_i(u, v_i)\right]_{(b,d)} + \left[\sum_{i=1}^{m} A_i(u, v_i)\right]_{(b,c)} + \\ &+\left[\sum_{i=1}^{m} A_i(u, v_i)\right]_{(a,d)} - \left[\sum_{i=1}^{m} A_i(u, v_i)\right]_{(a,c)} - \int_c^d \left\{\left[\sum_{i=1}^{m} B_i(u, v_i)\right]_{x=b} - \left[\sum_{i=1}^{m} B_i(u, v_i)\right]_{x=a}\right\} dy - \\ &- \int_a^b \left\{\left[\sum_{i=1}^{m} C_i(u, v_i)\right]_{y=d} - \left[\sum_{i=1}^{m} C_i(u, v_i)\right]_{y=c}\right\} dx + \iint_T \sum_{i=1}^{m} v_i E_i(u)\,dx\,dy.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Fissiamo ora nell'intervallo T un gruppo di $\mu\nu$ punti (x_α, y_β), $(\alpha = 1, 2, \dots, \mu;\ \beta = 1, 2, \dots, \nu)$, con

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_\mu \leq b, \qquad c \leq y_1 < y_2 < \dots < y_\nu \leq d. \tag{3.3}$$

Per uniformità di scrittura, porremo anche

$$a = x_0,\ b = x_{\mu+1}; \qquad c = y_0,\ d = y_{\nu+1}, \tag{3.4}$$

cosicchè l'intervallo T resta decomposto in $(\mu+1)(\nu+1)$ intervalli parziali

$$T_{\alpha\beta}(x_\alpha \leq x \leq x_{\alpha+1},\ y_\beta \leq y \leq y_{\beta+1}), \quad (\alpha = 0, 1, \dots, \mu;\ \beta = 0, 1, \dots, \nu). \tag{3.5}$$

Applichiamo la (3.2) ad ogni intervallo $T_{\alpha\beta}$, scegliendo corrispondentemente un gruppo di m funzioni $v_i^{\alpha\beta}$ tali da aversi

$$\sum_{i=1}^{m} E_i^*(v_i^{\alpha\beta}) = g, \quad (\alpha = 0, 1, \dots, \mu;\ \beta = 0, 1, \dots, \nu), \tag{3.6}$$

e successivamente sommiamo membro a membro le $(\mu+1)(\nu+1)$ relazioni così ottenute. Perveniamo in tal guisa alla

$$\iint\limits_T ug\,dx\,dy = \tag{3.7}$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{\mu}\sum_{\beta=0}^{\nu}\left\{-\left[\sum_{i=1}^{m} A_i(u, v_i^{\alpha\beta})\right]_{(x_{\alpha+1}, y_{\beta+1})} + \left[\sum_{i=1}^{m} A_i(u, v_i^{\alpha\beta})\right]_{(x_{\alpha+1}, y_\beta)} + \right.$$

$$\left. + \left[\sum_{i=1}^{m} A_i(u, v_i^{\alpha\beta})\right]_{(x_\alpha, y_{\beta+1})} - \left[\sum_{i=1}^{m} A_i(u, v_i^{\alpha\beta})\right]_{(x_\alpha, y_\beta)}\right\} -$$

$$- \sum_{\alpha=0}^{\mu}\sum_{\beta=0}^{\nu}\int_{y_\beta}^{y_{\beta+1}}\left\{\left[\sum_{i=1}^{m} B_i(u, v_i^{\alpha\beta})\right]_{x=x_{\alpha+1}} - \left[\sum_{i=1}^{m} B_i(u, v_i^{\alpha\beta})\right]_{x=x_\alpha}\right\} dy -$$

$$- \sum_{\alpha=0}^{\mu}\sum_{\beta=0}^{\nu}\int_{x_\alpha}^{x_{\alpha+1}}\left\{\left[\sum_{i=1}^{m} C_i(u, v_i^{\alpha\beta})\right]_{y=y_{\beta+1}} - \left[\sum_{i=1}^{m} C_i(u, v_i^{\alpha\beta})\right]_{y=y_\beta}\right\} dx +$$

$$+ \sum_{\alpha=0}^{\mu}\sum_{\beta=0}^{\nu}\iint\limits_{T_{\alpha\beta}}\sum_{i=1}^{m} v_i^{\alpha\beta} E_i(u)\,dx\,dy.$$

Avvertiamo che in questa formula gli interi μ, ν possono anche essere nulli, avvenendo allora delle ovvie semplificazioni; per esempio, se $\mu = \nu = 0$ la (3.7) si riduce alla (3.2).

4. *Costruzione della formula di cubatura e posizione del problema ad esso connesso.* — Studiamo la formula (3.7). È evidente che essa potrà interpretarsi come una formula di cubatura (per il calcolo dell'integrale doppio indicato a primo membro e col *resto* espresso dall'integrale doppio che figura a secondo membro) qualora risulti possibile scegliere le funzioni $v_i^{\alpha\beta}$ [soddisfacenti le (3.6)] in modo da far sparire gli integrali semplici che compaiono nel secondo membro, vale a dire in modo che, posto

$$\mathcal{B}(u) = \sum_{\alpha=0}^{\mu}\sum_{\beta=0}^{\nu}\int_{y_\beta}^{y_{\beta+1}}\left\{\left[\sum_{i=1}^{m} B_i(u, v_i^{\alpha\beta})\right]_{x=x_{\alpha+1}} - \left[\sum_{i=1}^{m} B_i(u, v_i^{\alpha\beta})\right]_{x=x_\alpha}\right\} dy, \tag{4.1}$$

$$\mathcal{C}(u) = \sum_{\alpha=0}^{\mu}\sum_{\beta=0}^{\nu}\int_{x_\alpha}^{x_{\alpha+1}}\left\{\left[\sum_{i=1}^{m} C_i(u, v_i^{\alpha\beta})\right]_{y=y_{\beta+1}} - \left[\sum_{i=1}^{m} C_i(u, v_i^{\alpha\beta})\right]_{y=y_\beta}\right\} dx, \tag{4.2}$$

riesca

$$\mathcal{B}(u) = 0, \qquad \mathcal{C}(u) = 0, \tag{4.3}$$

qualunque sia la funzione u di classe n in T.

Osserviamo che la (4.1) può anche scriversi

$$\mathcal{B}(u) = -\sum_{\alpha=0}^{\mu+1}\sum_{\beta=0}^{\nu}\int_{y_\beta}^{y_{\beta+1}}\left[\sum_{i=1}^{m} B_i(u,\, v_i^{\alpha\beta} - v_i^{\alpha-1,\beta})\right]_{x=x_\alpha} dy, \tag{4.4}$$ [4]

ovvero, tenendo conto di (2.3):

$$\mathcal{B}(u) = -\sum_{\alpha=0}^{\mu+1}\sum_{\beta=0}^{\nu}\int_{y_\beta}^{y_{\beta+1}}\sum_{r=0}^{n-1}\left[\frac{\partial^r u}{\partial x^r}\right]_{x=x_\alpha}\sum_{i=1}^{m}[E^*_{i\,|\,n-r-1,n}(v_i^{\alpha\beta} - v_i^{\alpha-1,\beta})]_{x=x_\alpha}\, dy; \tag{4.5}$$

analogamente, partendo da (4.2), si trova:

$$\mathcal{C}(u) = -\sum_{\alpha=0}^{\mu}\sum_{\beta=0}^{\nu+1}\int_{x_\alpha}^{x_{\alpha+1}}\sum_{s=0}^{n-1}\left[\frac{\partial^s u}{\partial y^s}\right]_{y=y_\beta}\sum_{i=1}^{m}[E^*_{i\,|\,n,n-s-1}(v_i^{\alpha\beta} - v_i^{\alpha,\beta-1})]_{y=y_\beta}\, dx. \tag{4.6}$$

Perciò per realizzare le (4.3) (qualunque sia la funzione u) occorre e basta scegliere le $v_i^{\alpha\beta}$ in modo che [oltre le (3.6)] siano verificate le seguenti condizioni di frontiera (dei vari intervalli parziali $T_{\alpha\beta}$):

$$\sum_{i=1}^{m}[E^*_{i\,|\,n-r-1,n}(v_i^{\alpha\beta} - v_i^{\alpha-1,\beta})]_{x=x_\alpha} = 0, \tag{4.7}$$

$$(\alpha = 0, 1, \ldots, \mu+1;\ \beta = 0, 1, \ldots, \nu;\ r = 0, 1, \ldots, n-1);$$

$$\sum_{i=1}^{m}[E^*_{i\,|\,n,n-s-1}(v_i^{\alpha\beta} - v_i^{\alpha,\beta-1})]_{y=y_\beta} = 0, \tag{4.8}$$

$$(\alpha = 0, 1, \ldots, \mu;\ \beta = 0, 1, \ldots, \nu+1;\ s = 0, 1, \ldots, n-1),$$

in numero complessivo di $n(2\mu\nu + 3\mu + 3\nu + 4)$.

---

[4] A patto di ritenere che sia $v_i^{-1,\beta} \equiv 0$, $v_i^{\mu+1,\beta} \equiv 0$, $(\beta = 0, 1, \ldots, \nu)$; analogamente nella (4.6) si deve supporre $v_i^{\alpha,-1} \equiv 0$, $v_i^{\alpha,\nu+1} \equiv 0$, $(\alpha = 0, 1, \ldots, \mu)$.

Sorge così il problema di *costruire delle funzioni* $v_i^{\alpha\beta}(x, y)$ [*in numero di* $m(\mu+1)(\nu+1)$] *verificanti quasi ovunque in* T *le* $(\mu+1)(\nu+1)$ *equazioni* (3.6) *e, sui segmenti delle rette* $x = x_\alpha$, $y = y_\beta$ *che sono contenuti in* T, *le* $n(2\mu\nu + 3\mu + 3\nu + 4)$ *condizioni* (4.7), (4.8). Lo chiameremo *problema di frontiera relativo agli operatori differenziali lineari* E_i, *ai punti* (x_α, y_β) *ed alla funzione peso* $g(x, y)$ o, brevemente, *problema* $F(E_i, x_\alpha, y_\beta, g)$. Il suo studio nel caso generale non appare semplice e perciò in questo lavoro ci limiteremo a studiarlo in un caso particolare di notevole importanza, di cui diremo fra breve.

Per il momento, rimanendo nel caso generale, possiamo osservare che, *ammessa la risolubilità del problema* $F(E_i, x_\alpha, y_\beta, g)$, per ogni sua soluzione $\{v_i^{\alpha\beta}\}$ la (3.7) fornisce la seguente formula di cubatura

$$(4.9)\qquad \iint_T ug\,dx\,dy =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{\mu}\sum_{\beta=0}^{\nu}\Bigg\{-\left[\sum_{i=1}^{m} A_i(u, v_i^{\alpha\beta})\right]_{(x_{\alpha+1}, y_{\beta+1})} + \left[\sum_{i=1}^{m} A_i(u, v_i^{\alpha\beta})\right]_{(x_{\alpha+1}, y_\beta)} +$$
$$+ \left[\sum_{i=1}^{m} A_i(u, v_i^{\alpha\beta})\right]_{(x_\alpha, y_{\beta+1})} - \left[\sum_{i=1}^{m} A_i(u, v_i^{\alpha\beta})\right]_{(x_\alpha, y_\beta)}\Bigg\} +$$
$$+ \sum_{\alpha=0}^{\mu}\sum_{\beta=0}^{\nu}\iint_{T_{\alpha\beta}}\sum_{i=1}^{m} v_i^{\alpha\beta} E_i(u)\,dx\,dy,$$

che, con ovvia trasformazione, si può anche scrivere(5)

$$(4.10)\qquad \iint_T ug\,dx\,dy = \sum_{\alpha=0}^{\mu+1}\sum_{\beta=0}^{\nu+1}\left[\sum_{i=1}^{m} A_i(u, -v_i^{\alpha\beta} + v_i^{\alpha,\beta-1} + v_i^{\alpha-1,\beta} - v_i^{\alpha-1,\beta-1})\right]_{(x_\alpha, y_\beta)} +$$
$$+ \sum_{\alpha=0}^{\mu}\sum_{\beta=0}^{\nu}\iint_{T_{\alpha\beta}}\sum_{i=1}^{m} v_i^{\alpha\beta} E_i(u)\,dx\,dy,$$

ovvero, ricordando la (2.2):

$$(4.11)\qquad \boxed{\iint_T ug\,dx\,dy = \sum_{\alpha=0}^{\mu+1}\sum_{\beta=0}^{\nu+1}\sum_{r+s\le n-2} c_{rs}^{\alpha\beta}\left[\frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r\,\partial y^s}\right]_{(x_\alpha, y_\beta)} + R,}$$

(5) Sempre mantenendo la convenzione già fatta: $v_i^{\alpha\beta} \equiv 0$ per $\alpha = -1$, $\alpha = \mu+1$, $\beta = -1$, $\beta = \nu + 1$.

avendo posto

$$(4.12)\qquad c_{rs}^{\alpha\beta}=\sum_{i=1}^{m}[E^{*}_{i\,|\,n-r-1,n-s-1}(-v_i^{\alpha\beta}+v_i^{\alpha,\beta-1}+v_i^{\alpha-1,\beta}-v_i^{\alpha-1,\beta-1})]_{(x_\alpha,y_\beta)}\,,$$

$$(4.13)\qquad R=\sum_{\alpha=0}^{\mu}\sum_{\beta=0}^{\nu}\iint\limits_{T_{\alpha\beta}}\sum_{i=1}^{m}v_i^{\alpha\beta}\,E_i(u)\,dx\,dy.$$

Con la (4.11) l'integrale doppio del primo membro è approssimato [con l'errore R espresso da (4.13)] da una ben determinata combinazione lineare dei valori della funzione u e delle sue derivate parziali fino all'ordine $n-2$, nei $(\mu+2)(\nu+2)$ punti (x_α, y_β). I coefficienti $c_{rs}^{\alpha\beta}$ di tale combinazione lineare [espressi da (4.12)] dipendono dalla funzione peso g che è stata supposta soltanto sommabile in T; ne segue che la (4.11) è applicabile ad ogni integrale secondo Lebesgue, quando si esprima la funzione integranda come prodotto di una funzione u di classe n e di una funzione sommabile g.

Si noti ancora che *la* (4.11) *è esatta* (cioè risulta $R=0$) *per le funzioni* u (se esistono) *che sono soluzioni del sistema di equazioni lineari alle derivate parziali*

$$(4.14)\qquad E_i(u)=0,\qquad (i=1,2,\dots,m).$$

Sembra pertanto opportuno limitare lo studio del problema $F(E_i, x_\alpha, y_\beta, g)$ ai casi in cui il sistema (4.14) è compatibile (e ciò porterà a delle limitazioni per il numero m degli operatori E_i). Fra tali casi quello che si presenta più spontaneo è il caso in cui il sistema (4.14) è equivalente ad un'equazione lineare ai differenziali totali, di ordine n, illimitatamente integrabile. Da questo punto di vista è ben naturale cominciare a saggiare la precedente teoria, *considerando il caso dell'equazione* $d^n u=0$, *allo scopo di arrivare ad una formula di cubatura che sia esatta per i polinomi di grado non superiore a* $n-1$.

§ 2. — **Formule di cubatura esatte per i polinomi di grado assegnato.**

5. *Particolarizzazione delle formule generali.* — Prendendo dunque in considerazione il caso menzionato alla fine del n. precedente, il sistema (4.14) si scrive

$$(5.1)\qquad \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-i}\partial y^i}=0,\quad (i=0,1,\dots,n),$$

cosicchè nelle formule generali del § 1 si deve porre

$$(5.2)\qquad m = n + 1\,; \quad E_i = \frac{\partial^n}{\partial x^{n-i}\,\partial y^i}\,, \quad E_i^* = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^{n-i}\,\partial y^i}\,, \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Collegandoci allora con quanto si è detto all'inizio del n. 2, vediamo che tutti i coefficienti $a_{i\,|\,hk}(x, y)$ dell'operatore E_i sono nulli ad eccezione di $a_{i\,|\,i,n-i} = 1$. Ne segue che, fissati due indici p, q verificanti le (1.3), dalle formule analoghe a (1.5) si ricava

$$(5.3)\qquad E_{i\,|\,pq}^* \begin{cases} = (-1)^{p+q-n} \dfrac{\partial^{p+q-n}}{\partial x^{p-i}\,\partial y^{q-n+i}}\,, & (\text{per } i \leq p \leq n,\ n - i \leq q \leq n), \\ = 0, & (\text{per gli altri } p,\ q). \end{cases}$$

Dopo ciò, è ben facile dedurre che le (3.6), (4.7), (4.8) diventano

$$(5.4)\qquad \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^n v_i^{\alpha\beta}}{\partial x^{n-i}\,\partial y^i} = (-1)^n g, \quad (\alpha = 0, 1, \dots, \mu\,;\ \beta = 0, 1, \dots, \nu)\,;$$

$$(5.5)\qquad \sum_{i=0}^{n-r-1} \left[\frac{\partial^{n-r-1}(v_i^{\alpha\beta} - v_i^{\alpha-1,\beta})}{\partial x^{n-r-i-1}\,\partial y^i}\right]_{x=x_\alpha} = 0,$$

$$(\alpha = 0, 1, \dots, \mu + 1\,;\ \beta = 0, 1, \dots, \nu\,;\ r = 0, 1, \dots, n-1)\,;$$

$$(5.6)\qquad \sum_{i=s+1}^{n} \left[\frac{\partial^{n-s-1}(v_i^{\alpha\beta} - v_i^{\alpha,\beta-1})}{\partial x^{n-i}\,\partial y^{i-s-1}}\right]_{y=y_\beta} = 0,$$

$$(\alpha = 0, 1, \dots, \mu\,;\ \beta = 0, 1, \dots, \nu + 1\,;\ s = 0, 1, \dots, n-1).$$

Queste equazioni traducono il problema $F(\partial^n/\partial x^{n-i}\,\partial y^i, x_\alpha, y_\beta, g)$ che dobbiamo considerare. Se riusciremo a risoverlo, in corrispondenza ad ogni sua soluzioue $\{v_i^{\alpha\beta}\}$ si otterrà una formula di cubatura come la (4.11), con

$$(5.7)\qquad c_{rs}^{\alpha\beta} = (-1)^{n-r-s-1} \sum_{i=s+1}^{n-r-1} \left[\frac{\partial^{n-r-s-2}(v_i^{\alpha\beta} - v_i^{\alpha,\beta-1} - v_i^{\alpha-1,\beta} + v_i^{\alpha-1,\beta-1})}{\partial x^{n-r-i-1}\,\partial y^{i-s-1}}\right]_{(x_\alpha, y_\beta)},$$

$$(5.8)\qquad R = \sum_{\alpha=0}^{\mu} \sum_{\beta=0}^{\nu} \iint_{T_{\alpha\beta}} \sum_{i=0}^{n} v_i^{\alpha\beta} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-i}\,\partial y^i}\,dx\,dy,$$

come subito segue da (4.12), (4.13), (5.1), (5.3).

6. *Risoluzione del problema connesso alla formula di cubatura in esame.* — Cominciamo col costruire una soluzione particolare del problema (5.4), (5,5), (5,6) (lineare, non omogeneo). A tale scopo introduciamo le seguenti $(\mu+1)(\nu+1)\binom{n}{2}$ funzioni (di x e y):

$$U_{rs}^{\alpha\beta} = (-1)^n \frac{n-r-s-1}{n-1}\Bigg[-\int_{x_\alpha}^{x}\int_{y_\beta}^{y}\frac{(x-\xi)^r}{r!}\,\frac{(y-\eta)^s}{s!}\,g(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta + \tag{6.1}$$
$$+\int_{x_\alpha}^{x}\int_{y_\beta}^{y_{\beta+1}}\frac{(x-\xi)^r}{r!}\,\frac{(y-\eta)^s}{s!}\,\frac{y_{\beta+1}-\eta}{y_{\beta+1}-y_\beta}\,g(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta +$$
$$+\int_{x_\alpha}^{x_{\alpha+1}}\int_{y_\beta}^{y}\frac{(x-\xi)^r}{r!}\,\frac{(y-\eta)^s}{s!}\,\frac{x_{\alpha+1}-\xi}{x_{\alpha+1}-x_\alpha}\,g(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\Bigg],$$

$$(\alpha=0,1,\dots,\mu;\quad \beta=0,1,\dots,\nu;\quad r+s\le n-2),$$

e successivamente queste altre $(\mu+1)(\nu+1)(n+1)$:

$$\tag{6.2}\left\{\begin{aligned}
V_0^{\alpha\beta} &= (-1)^n\int_{x_\alpha}^{x}\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\,g(\xi,y)\,d\xi\,-\\
&\qquad -\frac{(-1)^n}{n-1}\,\frac{x-x_\alpha}{x_{\alpha+1}-x_\alpha}\int_{x_\alpha}^{x_{\alpha+1}}\frac{(x-\xi)^{n-2}}{(n-2)!}\,(x_{\alpha+1}-\xi)\,g(\xi,y)\,d\xi,\\
V_i^{\alpha\beta} &= U_{n-i-1,i-1}^{\alpha\beta},\quad (i=1,2,\dots,n-1),\\
V_n^{\alpha\beta} &= (-1)^n\int_{y_\beta}^{y}\frac{(y-\eta)^{n-1}}{(n-1)!}\,g(x,\eta)\,d\eta\,-\\
&\qquad -\frac{(-1)^n}{n-1}\,\frac{y-y_\beta}{y_{\beta+1}-y_\beta}\int_{y_\beta}^{y_{\beta+1}}\frac{(y-\eta)^{n-2}}{(n-2)!}\,(y_{\beta+1}-\eta)\,g(x,\eta)\,d\eta,\\
&\qquad (\alpha=0,1,\dots,\mu;\quad \beta=0,1,\dots,\nu).
\end{aligned}\right.$$

È facile verificare che *queste funzioni* $V_0^{\alpha\beta}$, $V_1^{\alpha\beta}$, ..., $V_{n-1}^{\alpha\beta}$, $V_n^{\alpha\beta}$ *forniscono una soluzione particolare del nostro problema* (5.4), (5.5), (5.6).

Possiamo anche notare, a proposito delle (6.1), (6.2), che un semplice calcolo mostra il sussistere dell identità

$$\sum_{i=s+1}^{n-r-1} \frac{\partial^{n-r-s-2} V_i^{\alpha\beta}}{\partial x^{n-r-i-1} \, \partial y^{i-s-1}} = U_{rs}^{\alpha\beta}, \tag{6.3}$$

che ci sarà utile fra poco.

In virtù dell'enunciato precedente, se poniamo

$$v_i^{\alpha\beta} = V_i^{\alpha\beta} + w_i^{\alpha\beta}, \tag{6.4}$$

le funzioni $w_i^{\alpha\beta}$ debbono verificare le

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^n w_i^{\alpha\beta}}{\partial x^{n-i} \, \partial y^i} = 0, \qquad (\alpha = 0, 1, \dots, \mu; \quad \beta = 0, 1, \dots, \nu) \tag{6.5}$$

ed inoltre le condizioni analoghe alle (5.5), (5.6) (scritte con w in luogo di v).

Il modo più generale di soddisfare le (6.5) è di assumere

$$w_i^{\alpha\beta} = -\frac{\partial \varphi_{i-1}^{\alpha\beta}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i^{\alpha\beta}}{\partial y}, \tag{6.6}$$

con $\varphi_{-1}^{\alpha\beta} \equiv \varphi_n^{\alpha\beta} \equiv 0$ e $\varphi_0^{\alpha\beta}$, $\varphi_1^{\alpha\beta}$, ..., $\varphi_{n-1}^{\alpha\beta}$ funzioni arbitrarie (di classe n e dotate di derivate parziali n-esime assolutamente continue secondo Tonelli).

Sostituendo (6.6) nelle (5.5), (5.6) (scritte con w in luogo di v) si ottengono le

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial^{n-r} (\varphi_{n-r-1}^{\alpha\beta} - \varphi_{n-r-1}^{\alpha-1,\beta})}{\partial y^{n-r}}\right]_{x=x_\alpha} = 0, \\ \qquad (\alpha = 0, 1, \dots, \mu + 1; \quad \beta = 0, 1, \dots, \nu; \quad r = 0, 1, \dots, n-1), \\ \left[\dfrac{\partial^{n-s} (\varphi_s^{\alpha\beta} - \varphi_s^{\alpha,\beta-1})}{\partial x^{n-s}}\right]_{y=y_\beta} = 0, \\ \qquad (\alpha = 0, 1, \dots, \mu; \quad \beta = 0, 1, \dots, \nu + 1; \quad s = 0, 1, \dots, n-1), \end{cases} \tag{6.7}$$

le quali sono manifestamente equivalenti alle

$$(6.8)\quad \begin{cases} [\varphi_s^{\alpha\beta} - \varphi_s^{\alpha-1,\beta}]_{x=x_\alpha} = \text{polinomio in } y \text{ di grado } s, \\ \qquad (\alpha = 0, 1, \dots, \mu + 1\,; \quad \beta = 0, 1, \dots, \nu), \\ [\varphi_s^{\alpha\beta} - \varphi_s^{\alpha,\beta-1}]_{y=y_\beta} = \text{polinomio in } x \text{ di grado } n - s - 1, \\ \qquad (\alpha = 0, 1, \dots, \mu\,; \quad \beta = 0, 1, \dots, \nu + 1), \\ \qquad (s = 0, 1, \dots, n - 1). \end{cases}$$

Ricordando (6.4) e (6,6) si vede pertanto che *il nostro problema* (5.4), (5.5), (5.6) *è completamente risolto dalle formule*

$$(6.9)\qquad v_i^{\alpha\beta} = V_i^{\alpha\beta} - \frac{\partial \varphi_{i-1}^{\alpha\beta}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i^{\alpha\beta}}{\partial y},$$

ove le $V_i^{\alpha\beta}$ *sono funzioni note date dalle* (6.2) *e le* $\varphi_0^{\alpha\beta}, \varphi_1^{\alpha\beta}, \dots, \varphi_{n-1}^{\alpha\beta}$ *sono funzioni qualsiansi verificanti le condizioni* (6.8) *(e le ipotesi qnalitative già dette). In* (6.9) *si deve poi ritenere* $\varphi_{-1}^{\alpha\beta} \equiv 0$, $\varphi_n^{\alpha\beta} \equiv 0$ (6).

Rimane soltanto da trovare per le $\varphi_0^{\alpha\beta}, \varphi_1^{\alpha\beta}, \dots, \varphi_{n-1}^{\alpha\beta}$ (che chiameremo *funzioni ausiliarie*) un'opportuna rappresentazione e poi sostituire (6.9) nelle formule (5.7), (5.8) che esprimono i coefficienti ed il resto della nostra formula di cubatura (4.11).

Ma conviene intanto fare la sostituzione di (6.9) in (5.7) prescindendo dalla rappresentazione delle funzioni ausiliarie. A tale scopo si osservi che da (6.9) discende, con facile calcolo e ricordando la (6.3):

$$(6.10)\qquad \sum_{i=s+1}^{n-r-1} \frac{\partial^{n-r-s-2} v_i^{\alpha\beta}}{\partial x^{n-r-i-1}\,\partial y^{i-s-1}} = U_{rs}^{\alpha\beta} - \frac{\partial^{n-r-s-1}\varphi_s^{\alpha\beta}}{\partial x^{n-r-s-1}} + \frac{\partial^{n-r-s-1}\varphi_{n-r-1}^{\alpha\beta}}{\partial y^{n-r-s-1}},$$

dimodochè la (5.7) diventa

$$(6.11)\qquad c_{rs}^{\alpha\beta} = (-1)^{n-r-s-1}(G_{rs}^{\alpha\beta} + A_{rs}^{\alpha\beta}),$$

(6) Si tenga inoltre presente che, conformemente ad una convenzione già fatta [vedi le note (4), (5)], nelle (6.7), (6.8), (6.9) si deve anche ritenere $V_i^{\alpha\beta} \equiv 0$, $\varphi_i^{\alpha\beta} \equiv 0$ quando $\alpha = -1$, $\alpha = \mu + 1$, $\beta = -1$, $\beta = \nu + 1$.

avendo posto

$$G_{rs}^{\alpha\beta} = [U_{rs}^{\alpha\beta} - U_{rs}^{\alpha,\beta-1} - U_{rs}^{\alpha-1,\beta} + U_{rs}^{\alpha-1,\beta-1}]_{(x_\alpha,y_\beta)}, \tag{6.12}$$

$$A_{rs}^{\alpha\beta} = \left[-\frac{\partial^{n-r-s-1}(\varphi_s^{\alpha\beta} - \varphi_s^{\alpha,\beta-1} - \varphi_s^{\alpha-1,\beta} + \varphi_s^{\alpha-1,\beta-1})}{\partial x^{n-r-s-1}} + \right. \tag{6.13}$$

$$\left. + \frac{\partial^{n-r-s-1}(\varphi_{n-r-1}^{\alpha\beta} - \varphi_{n-r-1}^{\alpha,\beta-1} - \varphi_{n-r-1}^{\alpha-1,\beta} + \varphi_{n-r-1}^{\alpha-1,\beta-1})}{\partial y^{n-r-s-1}} \right]_{(x_\alpha,y_\beta)}.$$

Conviene anche osservare che, in virtù di (6.1), la (6.12) può sostituirsi con la

$$G_{rs}^{\alpha\beta} = (-1)^n \frac{n-r-s-1}{n-1} \left\{ \int_{x_{\alpha-1}}^{x_\alpha} \int_{y_{\beta-1}}^{y_\beta} \frac{(x_\alpha-\xi)^r}{r!} \frac{(y_\beta-\eta)^s}{s!} \left(\frac{x_\alpha-\xi}{x_\alpha-x_{\alpha-1}} + \frac{y_\beta-\eta}{y_\beta-y_{\beta-1}} - 1 \right) \cdot \right. \tag{6.14}$$

$$\cdot g(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta - \int_{x_\alpha}^{x_{\alpha+1}} \int_{y_{\beta-1}}^{y_\beta} \frac{(x_\alpha-\xi)^r}{r!} \frac{(y_\beta-\eta)^s}{s!} \frac{x_{\alpha+1}-\xi}{x_{\alpha+1}-x_\alpha} g(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta -$$

$$\left. - \int_{x_{\alpha-1}}^{x_\alpha} \int_{y_\beta}^{y_{\beta+1}} \frac{(x_\alpha-\xi)^r}{r!} \frac{(y_\beta-\eta)^s}{s!} \frac{y_{\beta+1}-\eta}{y_{\beta+1}-y_\beta} g(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \right\}.$$

7. *Rappresentazione delle funzioni ausiliarie.* — Le funzioni ausiliarie $\varphi_0^{\alpha\beta}, \varphi_1^{\alpha\beta}, \dots, \varphi_{n-1}^{\alpha\beta}$ debbono verificare soltanto le condizioni (6.8) ed è perciò evidente che esse possono scegliersi in infiniti modi diversi. Per orientarci nella scelta che conviene fare, possiamo osservare che dette funzioni concorrono a formare i coefficienti $c_{rs}^{\alpha\beta}$ della formula di cubatura soltanto attraverso la quantità $A_{rs}^{\alpha\beta}$ [vedi (6.11) e (6.13)] ed inoltre servono a formare l'espressione del resto R per mezzo di (5.8), (6.9).

È ovvio pertanto che *sono da ritenersi equivalenti due diverse scelte delle funzioni ausiliarie quando queste diano luogo alle stesse quantità $A_{rs}^{\alpha\beta}$, perchè le due corrispondenti formule di cubatura verranno a differire esclusivamente nell'espressione formale del resto* R.

Conviene perciò esaminare quali siano gli elementi delle funzioni ausiliarie che giocano nella formazione delle $A_{rs}^{\alpha\beta}$. A tale scopo osserviamo che da (6.8) segue

$$(7.1)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial\,(\varphi_s^{\alpha\beta}-\varphi_s^{\alpha-1,\beta})}{\partial y}\right]_{x=x_\alpha} = \text{polinomio in } y \text{ di grado } s-1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(identicamente nullo se } s=0), \\ (\alpha=0,1,\dots,\mu+1;\quad \beta=0,1,\dots,\nu;\quad s=0,1,\dots,n-1); \\ \left[\dfrac{\partial\,(\varphi_s^{\alpha\beta}-\varphi_s^{\alpha,\beta-1})}{\partial x}\right]_{y=y_\beta} = \text{polinomio in } x \text{ di grado } n-s-2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(identicamente nullo se } s=n-1), \\ (\alpha=0,1,\dots,\mu;\quad \beta=0,1,\dots,\nu+1;\quad s=0,1,\dots,n-1), \end{cases}$$

cosicchè possiamo porre [7]

$$(7.2)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial\,(\varphi_s^{\alpha\beta}-\varphi_s^{\alpha-1,\beta})}{\partial y}\right]_{x=x_\alpha} = \displaystyle\sum_{k=0}^{s-1} b_{sk}^{\alpha\beta}\frac{(y-y_\beta)^{s-k-1}}{(s-k-1)!}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (\alpha=0,1,\dots,\mu+1;\quad \beta=0,1,\dots,\nu), \\ \left[\dfrac{\partial\,(\varphi_s^{\alpha\beta}-\varphi_s^{\alpha,\beta-1})}{\partial x}\right]_{y=y_\beta} = \displaystyle\sum_{h=0}^{n-s-2} a_{sh}^{\alpha\beta}\frac{(x-x_\alpha)^{n-s-h-2}}{(n-s-h-2)!}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (\alpha=0,1,\dots,\mu;\quad \beta=0,1,\dots,\nu+1), \\ \qquad\qquad (s=0,1,\dots,n-1). \end{cases}$$

Restano così introdotti i parametri $b_{sk}^{\alpha\beta}$ $\left[\text{in numero di } (\mu+2)(\nu+1)\binom{n}{2}\right]$ e $a_{sh}^{\alpha\beta}$ $\left[\text{in numero di } (\mu+1)(\nu+2)\binom{n}{2}\right]$ ed è notevole che *soltanto questi parametri concorrono nella formazione delle* $A_{rs}^{\alpha\beta}$. Il secondo membro di (6.13) può scriversi infatti nel modo seguente

$$-\left[\frac{\partial^{n-r-s-2}}{\partial x^{n-r-s-2}}\left(\frac{\partial\,(\varphi_s^{\alpha\beta}-\varphi_s^{\alpha,\beta-1})}{\partial x}\right)_{y=y_\beta}\right]_{x=x_\alpha}+\left[\frac{\partial^{n-r-s-2}}{\partial x^{n-r-s-2}}\left(\frac{\partial\,(\varphi_s^{\alpha-1,\beta}-\varphi_s^{\alpha-1,\beta-1})}{\partial x}\right)_{y=y_\beta}\right]_{x=x_\alpha}+$$

$$+\left[\frac{\partial^{n-r-s-2}}{\partial y^{n-r-s-2}}\left(\frac{\partial(\varphi_{n-r-1}^{\alpha\beta}-\varphi_{n-r-1}^{\alpha-1,\beta})}{\partial y}\right)_{x=x_\alpha}\right]_{y=y_\beta}-\left[\frac{\partial^{n-r-s-2}}{\partial y^{n-r-s-2}}\left(\frac{\partial(\varphi_{n-r-1}^{\alpha,\beta-1}-\varphi_{n-r-1}^{\alpha-1,\beta-1})}{\partial y}\right)_{x=x_\alpha}\right]_{y=y_\beta}$$

---

(7) Per includere nelle due formule (7.2) rispettivamente i casi $s=0$, $s=n-1$, converremo che sia da riguardare identicamente nulla ogni sommatoria del tipo $\sum_{k=0}^{-1}$.

ed è quindi ovviamente esprimibile per mezzo delle (7.2); facendo il calcolo si trova:

$$(7.3)\quad A_{rs}^{\alpha\beta} = -a_{sr}^{\alpha\beta} + b_{n-r-1,s}^{\alpha\beta} + \sum_{h=0}^{r} a_{sh}^{\alpha-1,\beta}\frac{(x_\alpha - x_{\alpha-1})^{r-h}}{(r-h)!} - \sum_{k=0}^{s} b_{n-r-1,k}^{\alpha,\beta-1}\frac{(y_\beta - y_{\beta-1})^{s-k}}{(s-k)!}.$$

A questo punto sembra dunque di poter affermare che sia ora sufficiente costruire delle particolari funzioni $\varphi_0^{\alpha\beta}, \varphi_1^{\alpha\beta}, \dots, \varphi_{n-1}^{\alpha\beta}$ (più semplici possibili) per le quali siano valide le (7.2) [e le (6.8)] per avere senz'altro la formula di cubatura cercata, con i coefficienti espressi, secondo la (7.3), in funzione dei $(2\mu\nu + 3\mu + 3\nu' + 4)\binom{n}{2}$ parametri arbitrari $a_{sh}^{\alpha\beta}$, $b_{sk}^{\alpha\beta}$.

In realtà le cose non sono così semplici, anzitutto perchè *questi parametri non possono essere assegnati ad arbitrio* ed, in secondo luogo, perchè (anche tenendo conto delle relazioni che li legano) *essi sono in numero sovrabbondante.* In questo n. ci occuperemo del primo punto, rimandando l'esame del secondo al n. successivo.

Che i predetti parametri non siano indipendenti segue subito dalla relazione evidente

$$(7.4)\qquad \sum_{\alpha=0}^{\mu}\sum_{\beta=0}^{\nu}\oint_{FT_{\alpha\beta}} \frac{\partial\varphi_s^{\alpha\beta}}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi_s^{\alpha\beta}}{\partial y}dy = 0, \qquad (s = 0, 1, \dots, n-1),$$

che equivale alla

$$(7.5)\quad \sum_{\alpha=0}^{\mu}\sum_{\beta=0}^{\nu+1}\int_{x_\alpha}^{x_{\alpha+1}}\left[\frac{\partial(\varphi_s^{\alpha\beta} - \varphi_s^{\alpha,\beta-1})}{\partial x}\right]_{y=y_\beta} dx = \sum_{\alpha=0}^{\mu+1}\sum_{\beta=0}^{\nu}\int_{y_\beta}^{y_{\beta+1}}\left[\frac{\partial(\varphi_s^{\alpha\beta} - \varphi_s^{\alpha-1,\beta})}{\partial y}\right]_{x=x_\alpha} dy,$$
$$(s = 0, 1, \dots, n-1),$$

e successivamente, in virtù di (7.2), a quest'altra

$$(7.6)\quad \sum_{\alpha=0}^{\mu}\sum_{\beta=0}^{\nu+1}\sum_{h=0}^{n-s-2} a_{sh}^{\alpha\beta}\frac{(x_{\alpha+1} - x_\alpha)^{n-s-h-1}}{(n-s-h-1)!} = \sum_{\alpha=0}^{\mu+1}\sum_{\beta=0}^{\nu}\sum_{k=0}^{s-1} b_{sk}^{\alpha\beta}\frac{(y_{\beta+1} - y_\beta)^{s-k}}{(s-k)!},$$
$$(s = 0, 1, \dots, n-1),$$

che stabilisce n relazioni lineari fra i nostri parametri.

Se indichiamo con τ_s il valore comune dei due membri di (7.6) [e sarà $\tau_0 = \tau_{n-1} = 0$ in virtù di quanto si è detto nella nota (7)], possiamo dalle stesse (7.6) ricavare i $2(n-1)$ parametri $a_{s,n-s-2}^{\mu,\nu+1}$ $(s = 0, 1, \dots, n-2)$,

$b^{\mu+1,\nu}_{s,s-1}$ $(s = 1, 2, \dots, n-1)$ nel modo seguente:

$$(7.7) \qquad a^{\mu,\nu+1}_{s,n-s-2} = -\sum_{\beta=0}^{\nu} a^{\mu\beta}_{s,n-s-2} - \sum_{\beta=0}^{\nu+1}\sum_{h=0}^{n-s-3} a^{\mu\beta}_{sh}\frac{(x_{\mu+1}-x_{\mu})^{n-s-h-2}}{(n-s-h-1)!} -$$

$$-\frac{1}{x_{\mu+1}-x_{\mu}}\sum_{\alpha=0}^{\mu-1}\sum_{\beta=0}^{\nu+1}\sum_{h=0}^{n-s-2} a^{\alpha\beta}_{sh}\frac{(x_{\alpha+1}-x_{\alpha})^{n-s-h-1}}{(n-s-h-1)!} + \frac{\tau_s}{x_{\mu+1}-x_{\mu}},$$

$$(s = 0, 1, \dots, n-2; \quad \tau_0 = 0),$$

$$(7.8) \qquad b^{\mu+1,\nu}_{s,s-1} = -\sum_{\alpha=0}^{\mu} b^{\alpha\nu}_{s,s-1} - \sum_{\alpha=0}^{\mu+1}\sum_{k=0}^{s-2} b^{\alpha\nu}_{sk}\frac{(y_{\nu+1}-y_{\nu})^{s-k-1}}{(s-k)!} -$$

$$-\frac{1}{y_{\nu+1}-y_{\nu}}\sum_{\alpha=0}^{\mu+1}\sum_{\beta=0}^{\nu-1}\sum_{k=0}^{s-1} b^{\alpha\beta}_{sk}\frac{(y_{\beta+1}-y_{\beta})^{s-k}}{(s-k)!} + \frac{\tau_s}{y_{\nu+1}-y_{\nu}},$$

$$(s = 1, 2, \dots, n-1; \quad \tau_{n-1} = 0).$$

Restano così eliminati $2(n-1)$ parametri, introducendone però altri $n-2$ (cioè $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-2}$), cosicchè abbiamo ora $N = (2\mu\nu + 3\mu + 3\nu + 4)\binom{n}{2} - n$ parametri; *facciamo vedere che questi sono indipendenti.*

A tale scopo basterà evidentemente mostrare che, supposte valide le (7.7), (7.8), esiste almeno un sistema di funzioni ausiliarie che verifica le (7.2) [e le (6.8)]. Il più semplice sistema che siamo riusciti a costruire è il seguente (ove $s = 0, 1, \dots, n-1$):

$$(7.9) \qquad \varphi^{\alpha\beta}_{s} = \sum_{j=0}^{\beta}\sum_{h=0}^{n-s-2} a^{\alpha j}_{sh}\frac{(x-x_{\alpha})^{n-s-h-1}}{(n-s-h-1)!} + \sum_{i=0}^{\alpha}\sum_{k=0}^{s-1} b^{i\beta}_{sk}\frac{(y-y_{\beta})^{s-k}}{(s-k)!},$$

$$(\alpha = 0, 1, \dots, \mu-1; \quad \beta = 0, 1, \dots, \nu-1);$$

$$(7.10) \qquad \varphi^{\mu\beta}_{s} = \sum_{j=0}^{\beta}\sum_{h=0}^{n-s-2} a^{\mu j}_{sh}\frac{(x-x_{\mu})^{n-s-h-1}}{(n-s-h-1)!} + \sum_{i=0}^{\mu}\sum_{k=0}^{s-1} b^{i\beta}_{sk}\frac{(y-y_{\beta})^{s-k}}{(s-k)!} -$$

$$-\frac{x-x_{\mu}}{x_{\mu+1}-x_{\mu}}\sum_{i=0}^{\mu+1}\sum_{k=0}^{s-1} b^{i\beta}_{sk}\frac{(y-y_{\beta})^{s-k}}{(s-k)!} - \frac{x-x_{\mu}}{x_{\mu+1}-x_{\mu}}\sum_{i=0}^{\mu+1}\sum_{j=0}^{\beta-1}\sum_{k=0}^{s-1} b^{ij}_{sk}\frac{(y_{j+1}-y_{j})^{s-k}}{(s-k)!},$$

$$(\beta = 0, 1, \dots, \nu-1);$$

$$(7.11) \qquad \varphi_s^{\alpha\nu} = \sum_{j=0}^{\nu} \sum_{h=0}^{n-s-2} a_{sh}^{\alpha j} \frac{(x - x_\alpha)^{n-s-h-1}}{(n - s - h - 1)!} + \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{k=0}^{s-1} b_{sk}^{i\nu} \frac{(y - y_\nu)^{s-k}}{(s - k)!} -$$

$$- \frac{y - y_\nu}{y_{\nu+1} - y_\nu} \sum_{j=0}^{\nu+1} \sum_{h=0}^{n-s-2} a_{sh}^{\alpha j} \frac{(x - x_\alpha)^{n-s-h-1}}{(n - s - h - 1)!} -$$

$$- \frac{y - y_\nu}{y_{\nu+1} - y_\nu} \sum_{i=0}^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\nu+1} \sum_{h=0}^{n-s-2} a_{sh}^{ij} \frac{(x_{i+1} - x_i)^{n-s-h-1}}{(n - s - h - 1)!}, \qquad (\alpha = 0, 1, \dots, \mu - 1);$$

$$(7.12) \qquad \varphi_s^{\mu\nu} = \sum_{j=0}^{\nu} \sum_{h=0}^{n-s-2} a_{sh}^{\mu j} \frac{(x - x_\mu)^{n-s-h-1}}{(n - s - h - 1)!} + \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{k=0}^{s-1} b_{sk}^{i\nu} \frac{(y - y_\nu)^{s-k}}{(s - k)!} -$$

$$- \frac{y - y_\nu}{y_{\nu+1} - y_\nu} \sum_{j=0}^{\nu+1} \sum_{h=0}^{n-s-3} a_{sh}^{\mu j} \frac{(x - x_\mu)^{n-s-h-1} - (x_{\mu+1} - x_\mu)^{n-s-h-2} (x - x_\mu)}{(n - s - h - 1)!} -$$

$$- \frac{x - x_\mu}{x_{\mu+1} - x_\mu} \sum_{i=0}^{\mu+1} \sum_{k=0}^{s-2} b_{sk}^{i\nu} \frac{(y - y_\nu)^{s-k} - (y_{\nu+1} - y_\nu)^{s-k-1} (y - y_\nu)}{(s - k)!} -$$

$$- \frac{x_{\mu+1} - x}{x_{\mu+1} - x_\mu} \frac{y - y_\nu}{y_{\nu+1} - y_\nu} \sum_{i=0}^{\mu-1} \sum_{j=0}^{\nu+1} \sum_{h=0}^{n-s-2} a_{sh}^{ij} \frac{(x_{i+1} - x_i)^{n-s-h-1}}{(n - s - h - 1)!} -$$

$$- \frac{x - x_\mu}{x_{\mu+1} - x_\mu} \frac{y_{\nu+1} - y}{y_{\nu+1} - y_\nu} \sum_{i=0}^{\mu+1} \sum_{j=0}^{\nu-1} \sum_{k=0}^{s-1} b_{sk}^{ij} \frac{(y_{j+1} - y_j)^{s-k}}{(s - k)!} - \tau_s \frac{x - x_\mu}{x_{\mu+1} - x_\mu} \frac{y - y_\nu}{y_{\nu+1} - y_\nu},$$

per il quale si vede a colpo d'occhio che son verificate le (6.8) ed è poi facile verificare che son valide le (7.2), naturalmente tenendo conto di (7.7) e (7.8) [8].

Si noti che nelle (7.3), ... , (7.13) figurano soltanto gli N parametri indipendenti di cui si è detto.

Con questo rimane definitivamente stabilito la possibilità di scrivere la formula di cubatura che stiamo cercando. Occorre però ancora modificare l'espressione (7.3) dei coefficienti $A_{rs}^{\alpha\beta}$, eliminando da essa i parametri $a_{s,n-s-2}^{\mu,\nu+1}$, $b_{s,s-1}^{\mu+1,\nu}$ espressi da (7.7) e (7.8); ciò porta ad una diversa espressione per i coefficienti $A_{rs}^{\mu+1,\nu}$, $A_{rs}^{\mu,\nu+1}$, $A_{rs}^{\mu+1,\nu+1}$ con $r + s = n - 2$, che sono i soli in cui figurano tali parametri. Si arriva facilmente al risultato che le (7.3)

---

[8] Però queste intervengono soltanto quando si verifica la validità di quelle due formule (7.2) che corrispondono a $(\alpha = \mu + 1, \beta = \nu)$ e $(\alpha = \mu, \beta = \nu + 1)$.

vanno sostituite con le formule seguenti:

$$(7.13)\quad A_{rs}^{\alpha\beta} = -a_{sr}^{\alpha\beta} + b_{n-r-1,s}^{\alpha\beta} + \sum_{h=0}^{r} a_{sh}^{\alpha-1,\beta}\frac{(x_\alpha - x_{\alpha-1})^{r-h}}{(r-h)!} - \sum_{k=0}^{s} b_{n-r-1,k}^{\alpha,\beta-1}\frac{(y_\beta - y_{\beta-1})^{s-k}}{(s-k)!},$$

$$(\alpha = 0, 1, \dots, \mu;\quad \beta = 0, 1, \dots, \nu;\quad r + s \leq n - 2),$$

$$(\alpha=\mu+1;\ \beta=0,1,\dots,\nu-1;\ r+s\leq n-2),\ (\alpha=0,1,\dots,\mu-1;\ \beta=\nu+1;\ r+s\leq n-2),$$

$$(\alpha = \mu + 1;\quad \beta = \nu;\quad r + s \leq n - 3),\quad (\alpha = \mu;\quad \beta = \nu + 1;\quad r + s \leq n - 3)$$

$$(7.14)\qquad A_{n-s-1,s-1}^{\mu+1,\nu} = \sum_{h=0}^{n-s-1} a_{s-1,h}^{\mu\nu}\frac{(x_{\mu+1} - x_\mu)^{n-s-h-1}}{(n-s-h-1)!} -$$

$$-\sum_{k=0}^{s-1} b_{sk}^{\mu+1,\nu-1}\frac{(y_\nu - y_{\nu-1})^{s-k-1}}{(s-k-1)!} - \frac{1}{y_{\nu+1} - y_\nu}\left[\sum_{\alpha=0}^{\mu}\sum_{\beta=0}^{\nu}\sum_{k=0}^{s-1} b_{sk}^{\alpha\beta}\frac{(y_{\beta+1} - y_\beta)^{s-k}}{(s-k)!} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\beta=0}^{\nu-1}\sum_{k=0}^{s-1} b_{sk}^{\mu+1,\beta}\frac{(y_{\beta+1} - y_\beta)^{s-k}}{(s-k)!} + \sum_{k=0}^{s-2} b_{sk}^{\mu+1,\nu}\frac{(y_{\nu+1} - y_\nu)^{s-k}}{(s-k)!} - \tau_s\right],$$

$$(7.15)\quad A_{n-s-2,s}^{\mu,\nu+1} = \sum_{h=0}^{n-s-2} a_{sh}^{\mu-1,\nu+1}\frac{(x_\mu - x_{\mu-1})^{n-s-h-2}}{(n-s-h-2)!} - \sum_{k=0}^{s} b_{s+1,k}^{\mu\nu}\frac{(y_{\nu+1} - y_\nu)^{s-k}}{(s-k)!} +$$

$$+ \frac{1}{x_{\mu+1} - x_\mu}\left[\sum_{\alpha=0}^{\mu}\sum_{\beta=0}^{\nu}\sum_{h=0}^{n-s-2} a_{sh}^{\alpha\beta}\frac{(x_{\alpha+1} - x_\alpha)^{n-s-h-1}}{(n-s-h-1)!} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\alpha=0}^{\mu-1}\sum_{h=0}^{n-s-2} a_{sh}^{\alpha,\nu+1}\frac{(x_{\alpha+1} - x_\alpha)^{n-s-h-1}}{(n-s-h-1)!} + \sum_{h=0}^{n-s-3} a_{sh}^{\mu,\nu+1}\frac{(x_{\mu+1} - x_\mu)^{n-s-h-1}}{(n-s-h-1)!} - \tau_s\right],$$

$$(s = 0, 1, \dots, n-1;\quad \tau_0 = \tau_{n-1} = 0).$$

Si noti che non abbiamo qui scritto le espressioni delle $A_{rs}^{\mu+1,\nu+1}$ $(r + + s \leq n - 2)$ perchè, come vedremo nel n. successivo, questi coefficienti si possono ricavare in altro modo.

8. *Riduzione del numero dei parametri.* — Come si è già detto, potremmo ora scrivere la nostra formula di cubatura (esatta quando u è un polinomio di grado $n - 1$), partendo dalla (4.11), esprimendo i coefficienti $c_{rs}^{\alpha\beta}$ per mezzo di (6.11), (6.12), (7.13) ecc. ed il resto R tramite le (5.8), (6.9), (7.9) ecc. Si arriverebbe così ad una formula dipendente da

$$(8.1)\qquad N = (2\mu\nu + 3\mu + 3\nu + 4)\binom{n}{2} - n$$

parametri arbitrari. Ora un semplice computo mostra che questi parametri sono troppi.

Infatti la nostra formula dipende sostanzialmente dai $(\mu+2)(\nu+2)\binom{n}{2}$ coefficienti $A_{rs}^{\alpha\beta}$; d'altra parte scrivendo che essa è esatta per gli $\binom{n+1}{2}$ monomi in x, y di grado $\leq n-1$, si ottengono altrettante condizioni lineari per gli $A_{rs}^{\alpha\beta}$ (condizioni che non è difficile riconoscere indipendenti), cosicchè i coefficienti essenziali dovrebbero essere in numero di

$$N' = (\mu+2)(\nu+2)\binom{n}{2} - \binom{n+1}{2}. \tag{8.2}$$

Ma si ha

$$N - N' = (\mu+1)(\nu+1)\binom{n}{2}, \tag{8.3}$$

onde *è presumibile che sia possibile eliminare ancora* $(\mu+1)(\nu+1)\binom{n}{2}$ *parametri fra quelli introdotti nel n. precedente. Dimostreremo ora che ciò si può effettivamente fare.*

Cominciamo coll'osservare che, supposto $g \equiv 0$, la nostra formula di cubatura (4.11) diventa semplicemente (9)

$$0 = \sum_{\alpha=0}^{\mu+1} \sum_{\beta=0}^{\nu+1} \sum_{r+s\leq n-2} (-1)^{n-r-s-1} A_{rs}^{\alpha\beta} \left[\frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial y^s}\right]_{(x_\alpha, y_\beta)} + R, \tag{8.4}$$

e perciò, se u è un polinomio di grado $n-1$, deve essere

$$\sum_{\alpha=0}^{\mu+1} \sum_{\beta=0}^{\nu+1} \sum_{p+q\leq n-2} (-1)^{n-p-q-1} A_{pq}^{\alpha\beta} \left[\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}\right]_{(x_\alpha, y_\beta)} = 0. \tag{8.5}$$

Ponendo in (8.5) $u = \dfrac{(x-x_{\mu+1})^r}{r!} \dfrac{(y-y_{\nu+1})^s}{s!}$ (con $r+s \leq n-2$), si ottiene con facile calcolo

$$\begin{aligned} (8.6)\quad & A_{rs}^{\mu+1,\nu+1} + \sum_{\alpha=0}^{\mu} \sum_{h=0}^{r} A_{hs}^{\alpha,\nu+1} \frac{(x_{\mu+1}-x_\alpha)^{r-h}}{(r-h)!} + \sum_{\beta=0}^{\nu} \sum_{k=0}^{s} A_{rk}^{\mu+1,\beta} \frac{(y_{\nu+1}-y_\beta)^{s-k}}{(s-k)!} + \\ & + \sum_{\alpha=0}^{\mu} \sum_{\beta=0}^{\nu} \sum_{h=0}^{r} \sum_{k=0}^{s} A_{hk}^{\alpha\beta} \frac{(x_{\mu+1}-x_\alpha)^{r-h}}{(r-h)!} \frac{(y_{\nu+1}-y_\beta)^{s-k}}{(s-k)!} = 0, \quad (r+s\leq n-2); \end{aligned}$$

---

(9) Da $g \equiv 0$ segue successivamente $U_{rs}^{\alpha\beta} \equiv 0$ [per (6.1)], $G_{rs}^{\alpha\beta} = 0$ [per (6.12)], $c_{rs}^{\alpha\beta} = (-1)^{n-r-s-1} A_{rs}^{\alpha\beta}$ [per (6.11)].

ponendo invece $u = \dfrac{(x - x_{\mu+1})^{n-s-1}}{(n-s-1)!} \dfrac{(y - y_{\nu+1})^s}{s!}$ $(s = 0, 1, \ldots, n-1)$, si ricava

$$(8.7)\quad \sum_{\alpha=0}^{\mu} \sum_{\beta=0}^{\nu+1} \sum_{h=0}^{n-s-2} A_{hs}^{\alpha\beta} \frac{(x_{\mu+1}-x_\alpha)^{n-s-h-1}}{(n-s-h-1)!} + \sum_{\alpha=0}^{\mu+1} \sum_{\beta=0}^{\nu} \sum_{k=0}^{s-1} A_{n-s-1,k}^{\alpha\beta} \frac{(y_{\nu+1}-y_\beta)^{s-k}}{(s-k)!} +$$

$$+ \sum_{\alpha=0}^{\mu} \sum_{\beta=0}^{\nu} \sum_{h=0}^{n-s-2} \sum_{k=0}^{s-1} A_{hk}^{\alpha\beta} \frac{(x_{\mu+1} - x_\alpha)^{n-s-h-1}}{(n-s-h-1)!} \frac{(y_{\nu+1} - y_\beta)^{s-k}}{(s-k)!} = 0, (s=0,1,\ldots,n-1).$$

Restano così esplicitate le $\binom{n}{2} + n = \binom{n+1}{2}$ relazioni fra i coefficienti $A_{rs}^{\alpha\beta}$ di cui si è detto sopra ([10]).

Dimostriamo ora che fra questi coefficienti $A_{rs}^{\alpha\beta}$ non esistono altre relazioni. Per far questo basterà mostrare che le formule esprimenti gli $A_{rs}^{\alpha\beta}$ per mezzo degli N parametri costituiscono un sistema compatibile di equazioni lineari nei parametri stessi [le condizioni di compatibilità essendo proprio le (8.6), (8.7)]; vedremo in pari tempo che il sistema è indeterminato e ciò ci consentirà di ridurre a N' il numero dei parametri.

Osserviamo intanto che dalle (8.6) si possono ricavare i coefficienti $A_{rs}^{\mu+1,\nu+1}$ in funzione di altri; ciò ci consente di trascurare nel predetto sistema le equazioni corrispondenti alle formule che esprimono gli $A_{rs}^{\mu+1,\nu+1}$ ([11]). Perciò il sistema da studiare è costituito dalle (7.13), (7.14), (7.15).

Cominciamo a prendere in esame le (7.13); la relativa discussione è concettualmente assai semplice ma, volendo esporla nel caso generale, richiederebbe un lungo discorso. Perciò, per brevità, ci limiteremo ad esporla nel caso particolare $\mu = 1$, $\nu = 2$, tenendo presente che i parametri da ricavare sono:

$$\begin{pmatrix} a_{sr}^{00} & a_{sr}^{10} \\ a_{sr}^{01} & a_{sr}^{11} \\ a_{sr}^{02} & a_{sr}^{12} \\ a_{sr}^{03} & - \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} b_{n-r-1,s}^{00} & b_{n-r-1,s}^{10} & b_{n-r-1,s}^{20} \\ b_{n-r-1,s}^{01} & b_{n-r-1,s}^{11} & b_{n-r-1,s}^{21} \\ b_{n-r-1,s}^{02} & b_{n-r-1,s}^{12} & - \end{pmatrix} \quad \text{per } r + s \leq n - 2;$$

$$a_{sr}^{13}, \quad b_{n-r-1,s}^{22} \quad \text{per } r + s \leq n - 3.$$

([10]) Si può verificare che la (8.6) è conseguenza della (7.3) [senza nemmeno tener conto delle (7.7), (7.8)] e che lo stesso accade per la (8 7), invocando però le (7.7), (7.8) [cioè usando le (7.13), (7.14), (7.15)].

([11]) Per questa ragione non le abbiamo scritte alla fine del n. 7.

Scriviamo esplicitamente le (7.13) $\left[\text{in numero di } (\mu+1)(\nu+1)\binom{n}{2} + (\mu+\nu)\binom{n}{2} + 2\binom{n-1}{2} = 9\binom{n}{2} + 2\binom{n-1}{2}\right]$, convenendo di usare la notazione $f(a, b, \ldots)$ per indicare brevemente delle espressioni lineari in a, $b, \ldots$ Si ottiene il seguente sistema:

	$A^{00}_{rs} = -a^{00}_{sr} + b^{00}_{n-r-1,s}$	
$\alpha = 0, 1$	$A^{10}_{rs} = -a^{10}_{sr} + b^{10}_{n-r-1,s} + f(a^{00}_{sh})$	$A^{01}_{rs} = -a^{01}_{sr} + b^{01}_{n-r-1,s} + f(b^{00}_{n-r-1,k})$
$\beta = 0, 1, 2$	—	$A^{02}_{rs} = -a^{02}_{sr} + b^{02}_{n-r-1,s} + f(b^{01}_{n-r-1,k})$
$r+s \leq n-2$	$A^{11}_{rs} = -a^{11}_{sr} + b^{11}_{n-r-1,s} + f(a^{01}_{sh}, b^{10}_{n-r-1,k})$	
	—	$A^{12}_{rs} = -a^{12}_{sr} + b^{12}_{n-r-1,s} + f(a^{02}_{sh}, b^{11}_{n-r-1,k})$
$\alpha = 2$, $\beta = 0, 1$, $r+s \leq n-2$	$A^{20}_{rs} = b^{20}_{n-r-1,s} + f(a^{10}_{sh})$ $A^{21}_{rs} = b^{21}_{n-r-1,s} + f(a^{11}_{sh}, b^{20}_{n-r-1,k})$	
$\alpha = 0$, $\beta = 3$, $r+s \leq n-2$	$A^{03}_{rs} = -a^{03}_{sr} + f(b^{02}_{n-r-1,k})$	
$\alpha = 2,\ \beta = 2$; $\alpha = 1,\ \beta = 3$; $r+s \leq n-3$	$A^{22}_{rs} = b^{22}_{n-r-1,s} + f(a^{12}_{sh}, b^{21}_{n-r-1,k})$ $A^{13}_{rs} = -a^{13}_{sr} + f(a^{03}_{sh}, b^{12}_{n-r-1,k})$	

di cui si vede immediatamente la risolubilità e l'indeterminazione. Infatti dall'equazione della 1ª riga si possono ricavare le a^{00}_{sr}, $b^{00}_{n-r-1,s}$ esprimendole per mezzo di un'indeterminata [12]; sostituendo nelle due equazioni della 2ª riga si ricavano a^{10}_{sr}, $b^{10}_{n-r-1,s}$ per mezzo di un'indeterminata e lo stesso per

---

([12]) Si intende un'indeterminata dipendente dagli indici r, s e quindi si tratta di $\binom{n}{2}$ indeterminate; analogamente per il seguito

a_{sr}^{01}, $b_{n-r-1,s}^{01}$; sostituendo sull'equazione della 3ª si ricavano a_{sr}^{02}, $b_{n-r-1,s}^{02}$ per mezzo di un'indeterminata; e così di seguito per le equazioni della 4ª e 5ª riga. Esaminando poi le equazioni successive si vede che esse determinano univocamente $b_{n-r-1,s}^{20}$ $b_{n-r-1,s}^{21}$, a_{sr}^{03} (con $r+s \leq n-2$) ed infine $b_{n\ \ r-1,s}^{22}$, a_{sr}^{13} (con $r+s \leq n-3$).

Le cose vanno nello stesso modo nel caso generale: dalle (7.13) si possono così ricavare le incognite di ciascuna coppia $(a_{sr}^{\alpha\beta}, b_{n-r-1,s}^{\alpha\beta})$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, \mu; \beta = 0, 1, \ldots, \nu)$ per mezzo di una indeterminata (dipendente da r, s), *perchè si incontrano successivamente soltanto le differenze* $-a_{sr}^{\alpha\beta} + b_{n-r-1,s}^{\alpha\beta}$. Si ricavano poi univocamente tutte le altre incognite

$$(8.8)\quad \begin{cases} b_{n-r-1,s}^{\mu+1,\beta}, \ (\beta = 0, 1, \ldots, \nu-1); \ a_{sr}^{\alpha,\nu+1}, \ (\alpha = 0, 1, \ldots, \mu-1), \ (r+s \leq n-2), \\ \qquad b_{n-r-1,s}^{\mu+1,\nu}, \quad a_{sr}^{\mu,\nu+1}, \ (r+s \leq n-3). \end{cases}$$

Stabilita così la risolubilità e la natura dell'indeterminazione del sistema (7.13), passiamo alle rimanenti equazioni (7.14), (7.15), ove figurano tutte le $a_{sr}^{\alpha\beta}$, $b_{n-r-1,s}^{\alpha\beta}$ dianzi ricavate e poi le nuove incognite $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}$. Qui la compatibilità non è evidente, perchè ogni τ_s si ricava in due modi diversi: una volta dalla (7.14) ed una volta dalla (7.15) e si tratta di far vedere che i due risultati sono uguali (ed uguali a zero per $s = 0$ e $s = n-1$).

A tale scopo consideriamo la (8.7) e sostituiamo alle $A_{rs}^{\alpha\beta}$ che vi compaiono (escluse le $A_{n-s-2,s}^{\mu,\nu+1}$ e $A_{n-s-1,s-1}^{\mu+1,\nu}$) le loro espressioni fornite dalle (7.13), (7.14), (7.15). Dopo un calcolo assai laborioso si perviene alla

$$(8.9)\qquad \begin{aligned} &(y_{\nu+1} - y_\nu)\Bigg[A_{n-s-1,s-1}^{\mu+1,\nu} - \sum_{h=0}^{n-s-1} a_{s-1,h}^{\mu\nu} \frac{(x_{\mu+1} - x_\mu)^{n-s-h-1}}{(n-s-h-1)!} + \\ &\qquad + \sum_{k=0}^{s-1} b_{sk}^{\mu+1,\nu-1} \frac{(y_\nu - y_{\nu-1})^{s-k-1}}{(s-k-1)!}\Bigg] + \\ &+ \sum_{\alpha=0}^{\mu} \sum_{\beta=0}^{\nu} \sum_{k=0}^{s-1} b_{sk}^{\alpha\beta} \frac{(y_{\beta+1} - y_\beta)^{s-k}}{(s-k)!} + \sum_{\beta=0}^{\nu-1} \sum_{k=0}^{s-1} b_{sk}^{\mu+1,\beta} \frac{(y_{\beta+1} - y_\beta)^{s-k}}{(s-k)!} + \\ &\qquad + \sum_{k=0}^{s-2} b_{sk}^{\mu+1,\nu} \frac{(y_{\nu+1} - y_\nu)^{s-k}}{(s-k)!} + \\ &+ (x_{\mu+1} - x_\mu)\Bigg[A_{n-s-2,s}^{\mu,\nu+1} - \sum_{h=0}^{n-s-2} a_{sh}^{\mu-1,\nu+1} \frac{(x_\mu - x_{\mu-1})^{n-s-h-2}}{(n-s-h-2)!} + \\ &\qquad + \sum_{k=0}^{s} b_{s+1,k}^{\mu\nu} \frac{(y_{\nu+1} - y_\nu)^{s-k}}{(s-k)!}\Bigg] - \\ &- \sum_{\alpha=0}^{\mu} \sum_{\beta=0}^{\nu} \sum_{h=0}^{n-s-2} a_{sh}^{\alpha\beta} \frac{(x_{\alpha+1} - x_\alpha)^{n-s-h-1}}{(n-s-h-1)!} - \sum_{\alpha=0}^{\mu-1} \sum_{h=0}^{n-s-2} a_{sh}^{\alpha,\nu+1} \frac{(x_{\alpha+1} - x_\alpha)^{n-s-h-1}}{(n-s-h-1)!} - \\ &\qquad - \sum_{h=0}^{n-s-3} a_{sh}^{\mu,\nu+1} \frac{(x_{\mu+1} - x_\mu)^{n-s-h-1}}{(n-s-h-1)!} = 0, \qquad (s = 0, 1, \ldots, n-1), \end{aligned}$$

ed è chiaro che questa esprime precisamente che sono eguali i due valori di τ_s $(s = 1, 2, \dots, n-2)$ che si ricavano da (7.14) e (7.15); inoltre se $s = 0$ [oppure $s = n - 1$] mancano le prime [le ultime] quattro righe della (8.9) e perciò se si ricava τ_0 dalla (7.15) [τ_{n-1} dalla (7.14)] risulta precisamente $\tau_0 = 0$ [$\tau_{n-1} = 0$].

Resta così completamente dimostrato che le (8.6), (8.7) sono le sole relazioni esistenti fra i coefficienti $A_{rs}^{\alpha\beta}$; risulta pure che nella formazione dei coefficienti $A_{rs}^{\alpha\beta}$ secondo le (7.13), (7.14), (7.15) giocano soltanto le differenze $\lambda_{rs}^{\alpha\beta} = -a_{rs}^{\alpha\beta} + b_{n-r-1,s}^{\alpha\beta}$ $(\alpha = 0, 1, \dots, \mu;\ \beta = 0, 1, \dots, \nu;\ r + s \leq n - 2)$.

Possiamo perciò scegliere come parametri queste $\lambda_{rs}^{\alpha\beta}$, assumendo per esempio

$$(8.10)\quad a_{sr}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\lambda_{rs}^{\alpha\beta},\ b_{n-r-1,s}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\lambda_{rs}^{\alpha\beta};\ (\alpha=0,1,\dots,\mu;\beta=0,1,\dots,\nu;\ r+s\leq n-2);$$

per i parametri (8.8) conviene allora cambiare notazioni col porre

$$(8.11)\quad \begin{cases} a_{sr}^{\alpha,\nu+1} = -\varrho_{rs}^{\alpha}, & (\alpha=0,1,\dots,\mu-1;\ r+s\leq n-2), (\alpha=\mu;\ r+s\leq n-3), \\ b_{n-r-1,s}^{\mu+1,\beta} = \sigma_{rs}^{\beta}, & (\beta=0,1,\dots,\nu-1;\ r+s\leq n-2), (\beta=\nu;\ r+s\leq n-3), \end{cases}$$

mantenendo invece la notazione $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-2}$, per i rimanenti parametri. Abbiamo così complessivamente un numero di parametri uguale a $(\mu+1)(\nu+1)\binom{n}{2} + \left[\mu\binom{n}{2} + \binom{n-1}{2}\right] + \left[\nu\binom{n}{2} + \binom{n-1}{2}\right] + (n-2)$, numero che si riconosce uguale a N' dato da (8.2). Il ragionamento fatto prova che questo numero di parametri non può essere ulteriormente abbassato.

Diamo ora l'espressione dei coefficienti $A_{rs}^{\alpha\beta}$ per mezzo di questi N' parametri essenziali. Da (7.13) segue, tenendo conto di (8.10), (8.11):

$$(8.12)\quad A_{rs}^{\alpha\beta} = \lambda_{rs}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\sum_{h=0}^{r}\lambda_{hs}^{\alpha-1,\beta}\frac{(x_\alpha - x_{\alpha-1})^{r-h}}{(r-h)!} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{s}\lambda_{rk}^{\alpha,\beta-1}\frac{(y_\beta - y_{\beta-1})^{s-k}}{(s-k)!},$$

$$(\alpha = 0, 1, \dots, \mu;\ \beta = 0, 1, \dots, \nu;\ r + s \leq n - 2);$$

$$(8.13)\quad A_{rs}^{\alpha,\nu+1} = \varrho_{rs}^{\alpha} - \sum_{h=0}^{r}\varrho_{hs}^{\alpha-1}\frac{(x_\alpha - x_{\alpha-1})^{r-h}}{(r-h)!} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{s}\lambda_{rk}^{\alpha\nu}\frac{(y_{\nu+1} - y_\nu)^{s-k}}{(s-k)!},$$

$$(\alpha = 0, 1, \dots, \mu - 1;\ r + s \leq n - 2),\quad (\alpha = \mu;\ r + s \leq n - 3);$$

$$(8.14)\quad A_{rs}^{\mu+1,\beta} = \sigma_{rs}^{\beta} - \frac{1}{2}\sum_{h=0}^{r}\lambda_{hs}^{\mu\beta}\frac{(x_{\mu+1} - x_\mu)^{r-h}}{(r-h)!} - \sum_{k=0}^{s}\sigma_{rk}^{\beta-1}\frac{(y_\beta - y_{\beta-1})^{s-k}}{(s-k)!},$$

$$(\beta = 0, 1, \dots, \nu - 1;\ r + s \leq n - 2),\quad (\beta = \nu;\ r + s \leq n - 3).$$

Analogamente da (7.14), (7.15) si ricava [13]

$$(8.15)\qquad A_{,s}^{\mu,\nu+1} = -\sum_{h=0}^{r} \varrho_{hs}^{\mu-1} \frac{(x_\mu - x_{\mu-1})^{r-h}}{(r-h)!} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{s} \lambda_{rk}^{\mu\nu} \frac{(y_{\nu+1} - y_\nu)^{s-k}}{(s-k)!} -$$

$$-\frac{1}{x_{\mu+1} - x_\mu}\left[\frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{\mu}\sum_{\beta=0}^{\nu}\sum_{h=0}^{r} \lambda_{hs}^{\alpha\beta} \frac{(x_{\alpha+1} - x_\alpha)^{r-h+1}}{(r-h+1)!} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\alpha=0}^{\mu-1}\sum_{h=0}^{r} \varrho_{hs}^{\alpha} \frac{(x_{\alpha+1} - x_\alpha)^{r-h+1}}{(r-h+1)!} + \sum_{h=0}^{r-1} \varrho_{hs}^{\mu} \frac{(x_{\mu+1} - x_\mu)^{r-h+1}}{(r-h+1)!} + \tau_s\right],$$

$$(r+s = n-2,\ \tau_0 = 0):$$

$$(8.16)\qquad A_{,s}^{\mu+1,\nu} = -\frac{1}{2}\sum_{h=0}^{r} \lambda_{hs}^{\mu\nu} \frac{(x_{\mu+1} - x_\mu)^{r-h}}{(r-h)!} - \sum_{k=0}^{s} \sigma_{,k}^{\nu-1} \frac{(y_\nu - y_{\nu-1})^{s-k}}{(s-k)!} -$$

$$-\frac{1}{y_{\nu+1} - y_\nu}\left[\frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{\mu}\sum_{\beta=0}^{\nu}\sum_{k=0}^{s} \lambda_{,k}^{\alpha\beta} \frac{(y_{\beta+1} - y_\beta)^{s-k+1}}{(s-k+1)!} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\beta=0}^{\nu-1}\sum_{k=0}^{s} \sigma_{,k}^{\beta} \frac{(y_{\beta+1} - y_\beta)^{s-k+1}}{(s-k+1)!} + \sum_{k=0}^{s-1} \sigma_{rk}^{\nu} \frac{(y_{\nu+1} - y_\nu)^{s-k+1}}{(s-k+1)!} - \tau_{s+1}\right],$$

$$(r+s = n-2,\ \tau_{n-1} = 0).$$

Rimangono da esprimere i coefficienti $A_{rs}^{\mu+1,\nu+1}$; ci si può servire della (8.6) e delle precedenti (8.12), ..., (8.16) e dopo un lungo calcolo si perviene alle

$$(8.17)\qquad A_{rs}^{\mu+1,\nu+1} = -\sum_{h=0}^{r} \varrho_{hs}^{\mu} \frac{(x_{\mu+1} - x_\mu)^{r-h}}{(r-h)!} - \sum_{k=0}^{s} \sigma_{rk}^{\nu} \frac{(y_{\nu+1} - y_\nu)^{s-k}}{(s-k)!},$$

$$(r+s \leq n-3);$$

$$(8.18)\qquad A_{rs}^{\mu+1,\nu+1} =$$

$$= \frac{1}{x_{\mu+1} - x_\mu}\left[\frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{\mu}\sum_{\beta=0}^{\nu}\sum_{h=0}^{r} \lambda_{hs}^{\alpha\beta} \frac{(x_{\alpha+1} - x_\alpha)^{r-h+1}}{(r-h+1)!} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\alpha=0}^{\mu-1}\sum_{h=0}^{r} \varrho_{hs}^{\alpha} \frac{(x_{\alpha+1} - x_\alpha)^{r-h+1}}{(r-h+1)!} - \sum_{h=0}^{r-1} (r-h)\, \varrho_{hs}^{\mu} \frac{(x_{\mu+1} - x_\mu)^{r+h+1}}{(r-h+1)!} + \tau_s\right] +$$

$$+ \frac{1}{y_{\nu+1} - y_\nu}\left[\frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{\mu}\sum_{\beta=0}^{\nu}\sum_{k=0}^{s} \lambda_{rk}^{\alpha\beta} \frac{(y_{\beta+1} - y_\beta)^{s-k+1}}{(s-k+1)!} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\beta=0}^{\nu-1}\sum_{k=0}^{s} \sigma_{rk}^{\beta} \frac{(y_{\beta+1} - y_\beta)^{s-k+1}}{(s-k+1)!} - \sum_{k=0}^{s-1} (s-k)\, \sigma_{rk}^{\nu} \frac{(y_{\nu+1} - y_\nu)^{s-k+1}}{(s-k+1)!} - \tau_{s+1}\right],$$

$$(r+s = n-2).$$

---

[13] Conviene qui pensare scritte le (7.14), (7 15) sotto forma più simmetrica, cioè cambiando $n-s-1$ in r e $s-1$ in s nella (7.14) e cambiando $n-s-2$ in r nella (7.15).

Occorre infine esprimere coi nuovi parametri le funzioni ausiliarie $\varphi_s^{\alpha\beta}$ definite da (7.9), ... , (7.12). Osserviamo però che queste funzioni intervengono soltanto nella formazione delle $v_i^{\alpha\beta}$ [vedi (6.9)] con le quali dovremo esprimere il resto R [vedi (5.8)]; ne segue che non interessano singolarmente le $\varphi_s^{\alpha\beta}$, ma soltanto le funzioni

$$(8.19)\qquad \psi_s^{\alpha\beta} = -\frac{\partial \varphi_{s-1}^{\alpha\beta}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_s^{\alpha\beta}}{\partial y}, \quad (\alpha = 0, 1, \dots, \mu;\ \beta = 0, 1, \dots, \nu;\ s = 0, 1, \dots, n).$$

Partendo dalle (7.9), ... , (7.12), tenendo conto delle (8.10), (8.11) ed eseguendo i calcoli, si perviene infine alle seguenti espressioni delle $\psi_s^{\alpha\beta}$ (polinomi in x, y):

$$(8.20)\qquad \psi_s^{\alpha\beta} = \sum_{h=0}^{n-s-1}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\beta}\lambda_{h,s-1}^{\alpha j}\right)\frac{(x-x_\alpha)^{n-s-h-1}}{(n-s-h-1)!} + \sum_{k=0}^{s-1}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\alpha}\lambda_{n-s-1,k}^{i\beta}\right)\frac{(y-y_\beta)^{s-k-1}}{(s-k-1)!},$$

$$(\alpha = 0, 1, \dots, \mu-1;\ \beta = 0, 1, \dots, \nu-1;\ s = 0, 1, \dots, n);$$

$$(8.21)\qquad \psi_s^{\alpha\nu} = \sum_{h=0}^{n-s-1}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\nu}\lambda_{h,s-1}^{\alpha j}\right)\frac{(x-x_\alpha)^{n-s-h-1}}{(n-s-h-1)!} +$$
$$+\frac{1}{y_{\nu+1}-y_\nu}\sum_{h=0}^{n-s-2}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\nu}\lambda_{hs}^{\alpha j} + \overset{\alpha}{\varrho}_{hs}\right)\frac{(x-x_\alpha)^{n-s-h-1}}{(n-s-h-1)!} +$$
$$+\frac{1}{y_{\nu+1}-y_\nu}\sum_{i=0}^{\alpha-1}\sum_{h=0}^{n-s-2}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\nu}\lambda_{hs}^{ij} + \overset{i}{\varrho}_{hs}\right)\frac{(x_{i+1}-x_i)^{n-s-h-1}}{(n-s-h-1)!} +$$
$$+\sum_{k=0}^{s-1}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\alpha}\lambda_{n-s-1,k}^{i\nu}\right)\frac{(y-y_\nu)^{s-k-1}}{(s-k-1)!} -$$
$$-\frac{y-y_\nu}{y_{\nu+1}-y_\nu}\sum_{h=0}^{n-s-1}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\nu}\lambda_{h,s-1}^{\alpha j} + \overset{\alpha}{\varrho}_{h,s-1}\right)\frac{(x-x_\alpha)^{n-s-h-1}}{(n-s-h-1)!},$$

$$(\alpha = 0, 1, \dots, \mu-1;\ s = 0, 1, \dots, n);$$

$$(8.22)\qquad \psi_s^{\mu\beta} = \sum_{h=0}^{n-s-1}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\beta}\lambda_{h,s-1}^{\mu j}\right)\frac{(x-x_\mu)^{n-s-h-1}}{(n-s-h-1)!} +$$
$$+\sum_{k=0}^{s-1}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\mu}\lambda_{n-s-1,k}^{i\beta}\right)\frac{(y-y_\beta)^{s-k-1}}{(s-k-1)!} +$$

$$+\frac{1}{x_{\mu+1}-x_\mu}\sum_{k=0}^{s-2}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\mu}\lambda_{n-s,k}^{i\beta}+\sigma_{n-s,k}^{\beta}\right)\frac{(y-y_\beta)^{s-k-1}}{(s-k-1)\,!}+$$

$$+\frac{1}{x_{\mu+1}-x_\mu}\sum_{j=0}^{\beta-1}\sum_{k=0}^{s-2}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\mu}\lambda_{n-s,k}^{ij}+\sigma_{n-s,k}^{j}\right)\frac{(y_{j+1}-y_j)^{s-k-1}}{(s-k-1)\,!}-$$

$$-\frac{x-x_\mu}{x_{\mu+1}-x_\mu}\sum_{k=0}^{s-1}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\mu}\lambda_{n-s-1,k}^{i\beta}+\sigma_{n-s-1,k}^{\beta}\right)\frac{(y-y_\beta)^{s-k-1}}{(s-k-1)\,!},$$

$$(\beta=0,1,\ldots,\nu-1\,;\ s=0,1,\ldots,n)\ \text{(14)}\,;$$

$$\psi_s^{\mu\nu}=\sum_{h=0}^{n-s-1}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\nu}\lambda_{h,s-1}^{\mu j}\right)\frac{(x-x_\mu)^{n-s-h-1}}{(n-s-h-1)!}+ \tag{8.23}$$

$$+\frac{1}{y_{\nu+1}-y_\nu}\sum_{h=0}^{n-s-2}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\nu}\lambda_{hs}^{\mu j}+\varrho_{hs}^{\mu}\right)\frac{(x-x_\mu)^{n-s-h-1}}{(n-s-h-1)\,!}+$$

$$+\frac{1}{y_{\nu+1}-y_\nu}\sum_{i=0}^{\mu-1}\sum_{h=0}^{n-s-2}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\nu}\lambda_{hs}^{ij}+\varrho_{hs}^{i}\right)\frac{(x_{i+1}-x_i)^{n-s-h-1}}{(n-s-h-1)\,!}+$$

$$+\sum_{k=0}^{s-1}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\mu}\lambda_{n-s-1,k}^{i\nu}\right)\frac{(y-y_\nu)^{s-k-1}}{(s-k-1)\,!}+$$

$$+\frac{1}{x_{\mu+1}-x_\mu}\sum_{k=0}^{s-2}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\mu}\lambda_{n-s,k}^{i\nu}+\sigma_{n-s,k}^{\nu}\right)\frac{(y-y_\nu)^{s-k-1}}{(s-k-1)\,!}+$$

$$+\frac{1}{x_{\mu+1}-x_\mu}\sum_{j=0}^{\nu-1}\sum_{k=0}^{s-2}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\mu}\lambda_{n-s,k}^{ij}+\sigma_{n-s,k}^{j}\right)\frac{(y_{j+1}-y_j)^{s-k-1}}{(s-k-1)\,!}-$$

$$-\frac{y-y_\nu}{y_{\nu+1}-y_\nu}\left[\sum_{h=0}^{n-s-1}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\nu}\lambda_{h,s-1}^{\mu j}+\varrho_{h,s-1}^{\mu}\right)\frac{(x-x_\mu)^{n-s-h-1}}{(n-s-h-1)!}-\right.$$

$$-\frac{1}{x_{\mu+1}-x_\mu}\sum_{i=0}^{\mu}\sum_{h=0}^{n-s-1}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\nu}\lambda_{h,s-1}^{ij}+\varrho_{h,s-1}^{i}\right)\frac{(x_{i+1}-x_i)^{n-s-h}}{(n-s-h)\,!}+$$

$$\left.+\frac{1}{x_{\mu+1}-x_\mu}\sum_{j=0}^{\nu}\sum_{k=0}^{s-2}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\mu}\lambda_{n-s,k}^{ij}+\sigma_{n-s,k}^{j}\right)\frac{(y_{j+1}-y_j)^{s-k-1}}{(s-k-1)\,!}-\frac{\tau_{s-1}}{x_{\mu+1}-x_\mu}\right]-$$

---

(14) Si noti che da (8.20) segue $\psi_0^{\alpha\beta}\equiv 0$, $\psi_n^{\alpha\beta}\equiv 0$; da (8.21) e (8.22) segue rispettivamente $\psi_n^{\alpha\nu}\equiv 0$, $\psi_0^{\mu\beta}\equiv 0$.

$$-\frac{x-x_\mu}{x_{\mu+1}-x_\mu}\left[\sum_{k=0}^{s-1}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\mu}\lambda^{i\nu}_{n-s-1,k}+\overset{\nu}{\sigma}_{n-s-1,k}\right)\frac{(y-y_\nu)^{s-k-1}}{(s-k-1)!}-\right.$$

$$-\frac{1}{y_{\nu+1}-y_\nu}\sum_{j=0}^{\nu}\sum_{k=0}^{s-1}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\mu}\lambda^{ij}_{n-s-1,k}+\overset{j}{\sigma}_{n-s-1,k}\right)\frac{(y_{j+1}-y_j)^{s-k}}{(s-k)!}+$$

$$\left.+\frac{1}{y_{\nu+1}-y_\nu}\sum_{i=0}^{\mu}\sum_{h=0}^{n-s-2}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\nu}\lambda^{ij}_{hs}+\overset{i}{\varrho}_{hs}\right)\frac{(x_{i+1}-x_i)^{n-s-h-1}}{(n-s-h-1)!}+\frac{\tau_s}{y_{\nu+1}-y_\nu}\right],$$

$$(s=0,1,\ldots,n)\ (^{15}).$$

9. *Formula finale.* — Possiamo riassumere i risultati ottenuti nel modo seguente. Per scrivere la nostra formula di cubatura (esatta quando u è un polinomio di grado $n-1$) *sotto la forma più generale, occorre introdurre* $(\mu+2)\,(\nu+2)\binom{n}{2}-\binom{n+1}{2}$ *parametri, così come è indicato in questo quadro* [cfr. (8.10) e (8.11)]

$$(9.1)\qquad\left\{\begin{array}{l}
\begin{pmatrix}\lambda^{00}_{rs} & \lambda^{01}_{rs} & \ldots & \lambda^{0\nu}_{rs}\\ \lambda^{10}_{rs} & \lambda^{11}_{rs} & \ldots & \lambda^{1\nu}_{rs}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \lambda^{\mu0}_{rs} & \lambda^{\mu1}_{rs} & \ldots & \lambda^{\mu\nu}_{rs}\end{pmatrix},\ (r+s\leq n-2);\\[2ex]
\overset{0}{\varrho}_{rs},\ \overset{1}{\varrho}_{rs},\ldots,\overset{\mu-1}{\varrho}_{rs},\quad(r+s\leq n-2);\quad\overset{\mu}{\varrho}_{rs},\quad(r+s\leq n-3);\\[1ex]
\overset{0}{\sigma}_{rs},\ \overset{1}{\sigma}_{rs},\ldots,\overset{\nu-1}{\sigma}_{rs},\quad(r+s\leq n-2);\quad\overset{\nu}{\sigma}_{rs},\quad(r+s\leq n-3);\\[1ex]
\qquad\qquad\tau_1,\quad\tau_2,\ldots,\tau_{n-2}.
\end{array}\right.$$

Allora la formula si scrive [cfr. (4.11)]

$$(9.2)\qquad\iint_T ug\,dx\,dy=\sum_{\alpha=0}^{\mu+1}\sum_{\beta=0}^{\nu+1}\sum_{r+s\leq n-2}c^{\alpha\beta}_{rs}\left[\frac{\partial^{r+s}u}{\partial x^r\,\partial y^s}\right]_{(x_\alpha,y_\beta)}+R.$$

I coefficienti $c^{\alpha\beta}_{rs}$ *sono dati da* [cfr. (6.11)]

$$(9.3)\qquad c^{\alpha\beta}_{rs}=(-1)^{n-r-s-1}\,(G^{\alpha\beta}_{rs}+A^{\alpha\beta}_{rs}),$$

---

(15) Per la validità della (8.23) occorre convenire che sia $\overset{\mu}{\varrho}_{rs}=\overset{\nu}{\sigma}_{rs}=0$ quando $r+s=n-2$.

ove le $G_{rs}^{\alpha\beta}$ *sono delle costanti fisse* (dipendenti dalla funzione peso g) *date da* (6.14) *e le* $A_{rs}^{\alpha\beta}$ *sono costanti* (indipendenti da g ed in parte arbitrarie) *che si esprimono per mezzo dei parametri arbitrari* (9.1) *con le formule* (8.12), ... , (8.18) [e risultano legate fra loro dalle $\binom{n+1}{2}$ relazioni (8.6), (8.7)].

Il resto R *è dato dalla formula* [cfr. (5.8), (6.9), (8.19)]

$$R = \sum_{\alpha=0}^{\mu} \sum_{\beta=0}^{\nu} \sum_{s=0}^{n} \int_{x_\alpha}^{x_{\alpha+1}} \int_{y_\beta}^{y_{\beta+1}} (V_s^{\alpha\beta} + \psi_s^{\alpha\beta}) \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-s} \partial y^s} dx\, dy , \tag{9.4}$$

ove le $V_s^{\alpha\beta}$ *sono delle funzioni fisse* (*dipendenti da* g) *date dalle* (6.2) *e le* $\psi_s^{\alpha\beta}$ *sono polinomi* (*indipendenti da* g *ed in parte arbitrari*) *che si esprimono per mezzo di parametri arbitrari* (9.1) *mediante le* (8.20), ... , (8.23).

È da tenere presente che ogni qualvolta si incontra [nelle espressioni (8.12), , ... , (8.18) delle costanti $A_{rs}^{\alpha\beta}$ oppure (8.20), ... , (8.23) dei polinomi $\psi_s^{\alpha\beta}$] *un parametro* $\lambda, \varrho, \sigma, \tau$ *con indici diversi da quelli registrati in* (9.1) *esso deve ritenersi nullo; inoltre in tali espressioni deve ritenersi soppresso ogni termine in cui figuri almeno una sommatoria del tipo* $\sum\limits_{i=0}^{p}$ *con* $p < 0$.

Osserviamo che la (9.2) è effettivamente la formula più generale che risponda ai requisiti voluti perchè essa dipende da un numero di parametri arbitrari esattamente uguale a quello da cui una tal formula deve dipendere (cfr. n. 8).

Infine è quasi superfluo avvertire che l'utilizzazione pratica della nostra formula (9.2) è subordinata alla possibilità di riuscire a calcolare facilmente (e possibilmente con metodi elementari) tutti gli integrali (semplici e doppi) mediante i quali si esprimono le costanti $G_{rs}^{\alpha\beta}$ e le funzioni $V_s^{\alpha\beta}$ [vedi (6.14) e (6.1), (6.2)]. Ciò si può fare per esempio se $g \equiv 1$, ma per altre scelte del peso g il calcolo dei predetti integrali potrà offrire serie difficoltà. Si tenga ad ogni modo presente che, dovendo calcolare un integrale doppio $\iint\limits_T f\, dx\, dy$, si può porre $f = ug$ (con u di classe n e g sommabile) in infiniti modi diversi; si avrà dunque cura di far ciò in modo che ne risulti un fattore g per cui il calcolo degli integrali in discorso risulti agevolato.

10. *Un semplice caso particolare.* — La formula generale del n. precedente può dar luogo ad innumerevoli casi particolari di uso pratico e può servire a ritrovare tutte le formule di cubatura (relative ad intervalli ed esatte per polinomi di un certo grado) che sono già note. In questo lavoro non intendiamo dilungarci su questo punto e ci limiteremo a dare un esempio semplicissimo considerando il caso $n = 2, \mu = \nu = 0$, in cui i parametri (9.1) si riducono ad uno solo λ_{00}^{00} che indicheremo semplicemente con λ.

Trascurando di scrivere nei coefficienti $c_{rs}^{\alpha\beta}$ gli indici inferiori r, s entrambi sempre uguali a zero e nelle funzioni $V_s^{\alpha\beta}, \psi_s^{\alpha\beta}$ gli indici superiori α, β per la stessa ragione, si ottiene la formula

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} ug\, dx\, dy = c^{00} u(x_0, y_0) + c^{01} u(x_0, y_1) + c^{10} u(x_1, y_0) + c^{11} u(x_1, y_1) + R \tag{10.1}$$

con i coefficienti dati dalle

$$\left\{\begin{aligned} c^{00} &= -\lambda \\ c^{01} &= \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} \frac{x_1 - \xi}{x_1 - x_0}\, g(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \lambda, \\ c^{10} &= \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} \frac{y_1 - \eta}{y_1 - y_0}\, g(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \lambda, \\ c^{11} &= -\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} \left(\frac{x_1 - \xi}{x_1 - x_0} + \frac{y_1 - \eta}{y_1 - y_0} - 1\right) g(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta - \lambda, \end{aligned}\right. \tag{10.2}$$

mentre il resto R ha l'espressione

$$R = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} \left[V_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (V_1 + \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + V_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] dx\, dy, \tag{10.3}$$

con

$$\left\{\begin{aligned} V_0 &= \int_{x_0}^{x} (x - \xi)\, g(\xi, y)\, d\xi - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - \xi)\, g(\xi, y)\, d\xi, \\ V_1 &= -\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} g(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y_1} \frac{y_1 - \eta}{y_1 - y_0}\, g(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \\ &\qquad + \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y} \frac{x_1 - \xi}{x_1 - x_0}\, g(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \\ V_2 &= \int_{y_0}^{y} (y - \eta)\, g(x, \eta)\, d\eta - \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \int_{y_0}^{y_1} (y_1 - \eta)\, g(x, \eta)\, d\eta. \end{aligned}\right. \tag{10.4}$$

Se $g \equiv 1$, la (10.1) diventa

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} u\,dx\,dy = -\lambda\,u(x_0, y_0) + \tag{10.5}$$

$$+\left[\frac{1}{2}(x_1 - x_0)(y_1 - y_0) + \lambda\right][u(x_0, y_1) + u(x_1, y_0)] - \lambda u(x_1, y_1) + R,$$

con

$$R = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\left\{-\frac{1}{2}(x - x_0)(x_1 - x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right. \tag{10.6}$$

$$+\left[\frac{1}{2}(x - x_0)(y_1 - y) + \frac{1}{2}(y - y_0)(x_1 - x) + \lambda\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} -$$

$$\left. -\frac{1}{2}(y - y_0)(y_1 - y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\} dx\,dy.$$

Nella (10.5) si può assumere per esempio $\lambda = -\frac{1}{4}(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)$, ottenendo

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} u\,dx\,dy = \tag{10.7}$$

$$= \frac{1}{4}(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)[u(x_0, y_0) + u(x_0, y_1) + u(x_1, y_0) + u(x_1, y_1)] + R$$

con

$$R = -\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\left[\frac{1}{2}(x - x_0)(x_1 - x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right. \tag{10.8}$$

$$\left. + \left(x - \frac{x_0 + x_1}{2}\right)\left(y - \frac{y_0 + y_1}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{2}(y - y_0)(y_1 - y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] dx\,dy;$$

da quest'ultima formula, detto M il massimo modulo delle derivate seconde della u, si ricava per esempio

$$|R| \leq \frac{1}{48} M(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)[4(x_1 - x_0)^2 + 3(x_1 - x_0)(y_1 - y_0) + 4(y_1 - y_0)^2]. \tag{10.9}$$

Le (10.1), (10.5), (10.7) sono esatte quando u è un polinomio di 1^0 grado.