ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MARIA CINQUINI-CIBRARIO

Ulteriori ricerche intorno ai sistemi di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 13, nº 4 (1959), p. 449-488

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1959_3_13_4_449_0>

ULTERIORI RICERCHE INTORNO AI SISTEMI DI EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI IN PIÙ VARIABILI INDIPENDENTI

di Maria Cinquini-Cibrario (a Pavia)

In una Memoria (¹), dedicata ai sistemi di tipo iperbolico di equazioni a derivate parziali del primo ordine in più di due variabili indipendenti, abbiamo dimostrato, sotto ampie ipotesi, teoremi di esistenza, di unicità e di dipendenza continua dai valori iniziali della soluzione del problema di Cauchy (in senso generalizzato) per il sistema quasi-lineare

$$(\mathrm{I})\qquad \frac{\partial z_i(x,y_1,\dots,y_h)}{\partial x}+\sum_{r=1}^{h}\varrho_{ir}[x,y_1,\dots,y_h;\,z_1(x,y_1,\dots,y_h),\dots,z_m(x,y_1,\dots,y_h)]\,\frac{\partial z_i(x,y_1,\dots,y_h)}{\partial y_r}=$$

$$=f_i\,[x,y_1,\dots,y_h\,;\;z_1\,(x,y_1,\dots,y_h),\dots,z_m\,(x,y_1,\dots,y_h)],\qquad (i=1,2,\dots,m),$$

nelle $h+1$ variabili indipendenti $x, y_1, \dots, y_h$ e nelle m funzioni incognite $z_1\,(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m\,(x, y_1, \dots, y_h)$; i coefficienti sono definiti per $0 \leq x \leq a_0$ e per tutti i valori reali di $y_1, \dots, y_h$; $z_1, \dots, z_m$; la soluzione è costruita in un campo

$$D_\infty:\qquad 0\leq x\leq a\,,\;-\infty<y_1<+\infty\,,\dots,-\infty<y_h<+\infty\,,$$

con $0 < a \leq a_0$.

In una successiva Memoria (²) abbiamo dimostrato teoremi di unicità e di dipendenza continua dai valori iniziali della soluzione del problema di

---

(¹) M. Cinquini-Cibrario, *Sistemi di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti,* Ann. di Mat. (IV), XLIV (1957), pp. 357-418. Nel seguito tale memoria sarà indicata con (M_1).

(²) M. Cinquini-Cibrario, *Teoremi di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti,* Ann. di Mat. (IV), XLVI (1959), p. 103-134. Nel seguito tale memoria sarà indicata con (M_2).

CAUCHY (in senso generalizzato) per un sistema di tipo iperbolico di equazioni quasi-lineari dal primo ordine del tipo

$$(a)\qquad \sum_{j=1}^{m} A_{ij}\left[x, y_1, \dots, y_h; z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h)\right]\left\{\frac{\partial z_j(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=1}^{h} \varrho_{ir}\left[x, y_1, \dots, y_h; z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h)\right]\frac{\partial z_j(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_r}\right\} =$$

$$= f_i\left[x, y_1, \dots, y_h; z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h)\right], \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

sotto ipotesi anche più ampie; in tale lavoro abbiamo considerato sia il caso, in cui la soluzione è definita in un campo D_∞, sia quello, in cui essa è definita in un opportuno campo limitato T (dello spazio delle variabili $x, y_1, \dots, y_h$), appartenente al semispazio $x \geq 0$ e avente come intersezione con l'iperpiano $x = 0$ il campo

$$-b_1 \leq y_1 \leq b_1, \dots, -b_h \leq y_h \leq b_h,$$

dove $b_1, \dots, b_h$ sono costanti positive. Anche i coefficienti $A_{ij}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $\varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $(i, j = 1, 2, \dots, m;\ r = 1, 2, \dots, h)$, possono essere supposti definiti in un campo limitato.

Il campo funzionale, nel quale sono dimostrati i teoremi contenuti nelle memorie (M_1) *e* (M_2) *è costituito dai sistemi di funzioni*

$$\text{(II)}\qquad z_1 = z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m = z_m(x, y_1, \dots, y_h),$$

le quali sono definite in un campo illimitato D_∞ (oppure in un campo limitato T), su ogni intersezione di D_∞ (o di T) con una retta $y_1 = cost., \dots, y_h = cost.$ sono funzioni assolutamente continue di x, e su ogni intersezione di D_∞ (o di T) con un iperpiano $x = cost.$ sono lipschitziane nel complesso delle variabili $y_1, \dots, y_h$, con costante di LIPSCHITZ *indipendente da x.*

Un tale sistema (II) *di funzioni costituisce in D_∞ (o in T) una soluzione del problema di* CAUCHY *in senso generalizzato per il sistema* (I) *o per il sistema* (a)*, se le funzioni stesse soddisfano quasi sempre nel campo D_∞ (o nel campo T) rispettivamente il sistema* (I) *o il sistema* (a)*, e inoltre soddisfano, in tutti i punti della intersezione del campo D_∞ (o del campo T) con l'iperpiano $x = 0$, le*

$$\text{(III)}\qquad z_i(0, y_1, \dots, y_h) = \Phi_i(y_1, \dots, y_h), \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

dove le $\Phi_i(y_1, \dots, y_h)$ sono funzioni assegnate, lipschitziane nel complesso delle variabili.

Il presente lavoro, utilizzando anche i risultati di (M_2), porta alcuni complementi alle ricerche fatte in (M_1). In primo luogo, mentre in (M_1) si era dimostrata l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di CAUCHY (in senso generalizzato) per il sistema (I), definita nel campo illimitato D_∞, nel presente lavoro si dimostra (cfr. § 1, n. 2, TEOREMA I) l'esistenza e l'unicità della soluzione di tale problema, definita in un campo limitato T (del tipo considerato nella memoria (M_2)). Nel § 1 sono inoltre date condizioni (cfr. n. 4, TEOREMA II) per l'esistenza delle derivate $\dfrac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_r}$, $(i = 1, 2, \dots, m;\ r = 1, 2, \dots, h)$ in ogni punto del campo T, e anche (n. 5, *c*)), perchè la soluzione (II) risolva il problema di CAUCHY per il sistema (I) anche in senso classico.

In secondo luogo, nel § 2, si mostra come la trattazione relativa al sistema (I), fatta sia nella memoria (M_1), sia nel precedente § 1, si semplifichi, quando, in particolare, *il sistema è semilineare*, cioè ha la forma

$$(\mathrm{I}') \qquad \frac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial x} + \sum_{r=1}^{h} \varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h) \frac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_r} =$$

$$= f_i[x, y_1, \dots, y_h;\ z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h)], \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Se i coefficienti $\varrho_{ir}(x, y, \dots, y_h), f_i(x, y_1, \dots, y_h;\ z_1, \dots, z_m)$, $(r=1,2,\dots,h;\ i=1,2,\dots,m)$, sono definiti per $0 \leq x \leq a_0$ e per tutti i valori reali di $y_1, \dots, y_h$, o, rispettivamente, di $y_1, \dots, y_h;\ z_1, \dots, z_m$, la soluzione (II) del problema di CAUCHY in senso generalizzato, relativa al sistema (I′), quando la varietà portante i dati sia l'intiero iperpiano $x = 0$, è costruita (cfr. § 2, n. 6, TEOREMA III) in tutto il campo

$$D_\infty^{(0)}: \qquad 0 \leq x \leq a_0, \ -\infty < y_1 < +\infty, \dots, \ -\infty < y_h < +\infty,$$

mentre per il sistema generale (I) la soluzione dello stesso problema è costruita nel campo D_∞ (con $a \leq a_0$) (3).

Anche nel caso, in cui le condizioni iniziali (III) devono essere soddisfatte soltanto nel campo limitato

$$-b_1 \leq y_1 \leq b_1, \dots, \ -b_h \leq y_h \leq b_h,$$

si trova (cfr. n. 8, TEOREMA IV) che il campo T limitato, nel quale è co-

(3) Cfr. (M_1), § 2, n. 3, TEOREMA II, p. 380-395.

struita la soluzione del problema di CAUCHY in senso generalizzato per il sistema (I′) è, in generale, più ampio del campo limitato nel quale è costruita la soluzione dello stesso problema per il sistema generale (I).

§ 1.

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY IN UN CAMPO LIMITATO.

1. Alcune definizioni.

Sia a^* un numero reale positivo qualunque, siano $M_r^*(x)$, $(r=1,2,\dots,h)$, funzioni definite nell'intervallo $0 \leq x \leq a^*$, ivi quasi continue, non negative e integrabili (4), e siano b_r^*, $(r = 1, 2, \dots, h)$, costanti positive, tali che

$$\int_0^{a^*} M_r^*(t)\,dt \leq b_r^*, \quad (r = 1, 2, \dots, h).$$

Introduciamo alcone definizioni, utili per semplificare gli enunciati dei teoremi, che dimostreremo.

DEFINIZIONE I. « *Una funzione* $z(x, y_1, \dots, y_h)$, *definita nel campo*

$$T^*: \quad 0 \leq x \leq a^*, \quad -b_r^* + \int_0^x M_r^*(t)\,dt \leq y_r \leq b_r^* - \int_0^x M_r^*(t)\,dt, \quad (r = 1, 2, \dots, h),$$

si dice di classe G *in* T^*, *se essa è funzione assolutamente continua di* x *su ogni segmento* $y_1 = cost., \dots, y_h = cost.$ *tutto appartenente al campo* T^*, *e se inoltre esiste una costante* H^*, *tale che sia*

$$| z(x, y_1, \dots, y_h) - z(x, \overline{y}_1, \dots, \overline{y}_h) | \leq H^* \sum_{r=1}^{h} | y_r - \overline{y}_r | ,$$

comunque siano i punti $(x, y_1, \dots, y_h)$, $(x, \overline{y}_1, \dots, \overline{y}_h)$ *appartenenti al campo* T^* » (5).

---

(4) In tutto il lavoro l'integrabilità è intesa nel senso di LEBESGUE.

(5) In particolare, se è $M_r^*(x) \equiv 0$, $(r = 1, 2, \dots, h)$, identicamente in $(0, a^*)$, il campo T^* è definito dalle

La funzione $z(x, y_1, \dots, y_h)$ *è, evidentemente, continua nel campo chiuso* T^*, *e su ogni intersezione di* T^* *con un iperpiano* $x = \text{cost.}$ *è lipschitziana nel complesso delle variabili* $y_1, \dots, y_h$ *(con costante di* LIPSCHITZ *indipendente da* x), *e quindi in quasi tutti i punti del campo* T^* *è differenziabile nel complesso delle variabili* $y_1, \dots, y_h$ (6).

DEFINIZIONE II « *Una funzione* $g(X; x, y_1, \dots, y_h)$, *definita nel campo*

$$0 \leq X \leq a^*, \; 0 \leq x \leq a^*, \; -b_r^* + \int_0^x M_r^*(t)\, dt \leq y_r \leq b_r^* - \int_0^x M_r^*(t)\, dt, \quad (r = 1, 2, \dots, h),$$

si dice ivi di classe $G^{[1]}$, *se, per ogni punto fissato* $(x, y_1, \dots, y_h)$ *di* T^*, *è funzione assolutamente continua di* X *in* $(0, a^*)$, *e se, per ogni* X *fissato di* $(0, a^*)$, *è di classe* G *in* T^* » (7).

2. Teorema di esistenza e di unicità.

TEOREMA I « *Siano* $M_r^{(0)}(x)$, $(r = 1, 2, \dots, h)$, *funzioni definite in un intervallo* $(0, a_0)$, *ivi quasi-continue, non negative e integrabili; siano* $b_r^{(0)}$, $(r = 1, 2, \dots, h)$, Ω_i, $(i = 1, 2, \dots, m)$ *costanti positive, e sia*

$$b_r^{(0)} \geq \int_0^{a_0} M_r^{(0)}(t)\, dt, \quad (r = 1, 2, \dots, h). \tag{1}$$

$$0 \leq x \leq a^*, \; -b_r^* \leq y_r \leq b_r^*, \; (r = 1, 2, \dots, h).$$

Se inoltre tutte le b_r^*, $(r = 1, 2, \dots, h)$, tendono a $+\infty$, il campo T^* tende al campo

$$0 \leq x \leq a^*, \; -\infty < y_r < +\infty, \; (r = 1, 2, \dots, h),$$

considerato in (M_1), § 1, n. 1, DEFINIZIONE I, p. 370-371; tale definizione è dunque un caso particolare della presente.

(6) Infatti in quasi tutti i punti di tutte le intersezioni del campo T^* con un iperpiano $x = \text{cost.}$ la funzione $z(x, y_1, \dots, y_h)$ è differenziabile nel complesso delle variabili $y_1, \dots, y_h$ (cfr. H. RADEMACHER, *Über partielle und totale Differenzierberkeit von Funktionen mehrerer Variabeln und über die Transformation der Doppelintegrale,* Math. Ann. **79** (1919), 340-359; cfr. ivi in particolare Parte I, n. 3, TEOREMA I, p. 347).

(7) Vale una osservazione analoga a quella della precedente nota (5).

Siano

$\varrho_{ir}(x, y_1, ..., y_h; z_1, ..., z_m), f_i(x, y_1, ..., y_h; z_1, ..., z_m), (r = 1, 2, ..., h; i = 1, 2, ..., m)$

funzioni definite nel campo [8]

$$C: \begin{cases} 0 \leq x \leq a_0, \; -b_r^{(0)} + \int_0^x M_r^{(0)}(t)\,dt \leq y_r \leq b_r^{(0)} - \int_0^x M_r^{(0)}(t)\,dt, \; (r = 1, 2, ..., h), \\ \qquad -\Omega_i \leq z_i \leq \Omega_i, \; (i = 1, 2, ..., m). \end{cases}$$

Esistano $h + m + 1$ *funzioni* $M_r(x)$, $(r = 1, 2, ..., h)$, $N_i(x)$, $(i = 1, 2, ..., m)$, $L(x)$, *definite in* $(0, a_0)$, *ivi quasi-continue, non negative e integrabili, tali che per quasi tutti gli* x *di* $(0, a_0)$ *sia*

$$M_r^{(0)}(x) \leq M_r(x), \; (r = 1, 2, ..., h), \tag{2}$$

e inoltre

$$| \varrho_{ir}(x, y_1, ..., y_h; z_1, ..., z_m) | \leq M_r(x), \; (r = 1, 2, ..., h; \; i = 1, 2, ..., m), \tag{3}$$

$$| f_i(x, y_1, ..., y_h; z_1, ..., z_m) | \leq N_i(x), \; (i = 1, 2, ..., m), \tag{4}$$

per tutte le $(h+m)$*-ple reali* $(y_1, ..., y_h; z_1, ..., z_m)$, *tali che il punto* $(x, y_1, ..., y_h; z_1, ..., z_m)$ *appartenga al campo* C,

$$| \varrho_{ir}(x, y_1, ..., y_h; z_1, ..., z_m) - \varrho_{ir}(x, \bar{y}_1, ..., \bar{y}_h; \bar{z}_1, ..., \bar{z}_m) | \leq L(x) \left\{ \sum_{s=1}^{h} | y_s - \bar{y}_s | + \sum_{j=1}^{m} | z_j - \bar{z}_j | \right\}, \tag{5}$$

$$(r = 1, 2, ..., h; \; i = 1, 2, ..., m),$$

---

[8] In particolare se in $(0, a_0)$ è identicamente $M_r^{(0)}(x) = 0$, $(r = 1, 2, ..., h)$, il campo C è definito dalle

$$0 \leq x \leq a_0, \; -b_r^{(0)} \leq y_r \leq b_r^{(0)}, \; (r = 1, 3, ..., h), \; -\Omega_i \leq z_i \leq \Omega_i, \; (i = 1, 2, ..., m).$$

D'altra parte il TEOREMA I è valido anche se, per un particolare indice s fissato (o per più indici s fissati) fra i numeri $1, 2, ..., h$, è $M_s^{(0)}(x) = 0$ identicamente in $(0, a_0)$ e $b_s^{(0)} = \infty$, oppure se, per un indice j fissato (o per più indici j fissati) tra i numeri $1, 2, ..., m$, è $\Omega_j = \infty$, cioè se al campo C appartengono punti per i quali $| y_s |$ oppure $| z_j |$ è grande a piacere. In particolare il TEOREMA I è valido anche quando il campo C è definito dalle

$$0 \leq x \leq a_0, \; -\infty < y_r < +\infty, \; (r = 1, 2, ..., h), \; -\infty < z_i < +\infty, \; (i = 1, 2, ..., m).$$

$$(6)\quad |f_i(x,y_1,\dots,y_h;z_1,\dots,z_m)-f_i(x,\overline{y}_1,\dots,\overline{y}_h;\overline{z}_1,\dots,\overline{z}_m)|\leq L(x)\left\{\sum_{s=1}^{h}|y_s-\overline{y}_s|+\sum_{j=1}^{m}|z_j-\overline{z}_j|\right\},$$
$$(i=1,2,\dots,m),$$

per tutte le coppie di $(h+m)$*-ple reali* $(y_1,\dots,y_h;z_1,\dots,z_m)$, $(\overline{y}_1,\dots,\overline{y}_h;\overline{z}_1,\dots,\overline{z}_m)$, *tali che i punti* $(x,y_1,\dots,y_h;z_1,\dots,z_m)$, $(x,\overline{y}_1,\dots,\overline{y}_h;\overline{z}_1,\dots,\overline{z}_m)$ *appartengano al campo C.*

Siano b_r, $(r=1,2,\dots,h)$, *costanti positive, con*

$$(7)\qquad b_r\leq b_r^{(0)},\quad (r=1,2,\dots,h);$$

le funzioni $\Phi_i(y_1,\dots,y_h)$, $(i=1,2,\dots,m)$, *siano definite nel campo*

$$R:\qquad -b_r\leq y_r\leq b_r,\ (r=1,2,\dots,h),$$

e siano ivi lipschitziane nel complesso delle variabili; esistano cioè m costanti $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$, *tali che sia*

$$(8)\quad |\Phi_i(y_1,\dots,y_h)-\Phi_i(\overline{y}_1,\dots,\overline{y}_h)|\leq\lambda_i\sum_{r=1}^{h}|y_r-\overline{y}_r|,\ (i=1,2,\dots,m)$$

per tutte le coppie di h-ple reali $(y_1,\dots,y_h)$, $(\overline{y}_1,\dots,\overline{y}_h)$ *appartenenti al campo R; sia inoltre in tutto R*

$$(9)\qquad |\Phi_i(y_1,\dots,y_h)|\leq\mu_i<\Omega_i,\ (i=1,2,\dots,m).$$

Posto

$$(10)\qquad K=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i,$$

sia a' *un numero positivo* $(\leq a_0)$, *soddisfacente la diseguaglianza* (9)

$$(11_1)\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^{a'}L(t)\,dt<\frac{1}{m-h}\,lg\,\frac{hK+m}{h(K+1)}, & \text{se } m\neq h;\\[2ex] \displaystyle\int_0^{a'}L(t)\,dt<\frac{1}{m(K+1)}, & \text{se } m=h.\end{cases}$$

(9) La scelta del numero a' è precisata maggiormente nel corso della dimostrazione (cfr. il capoverso *b*)); si vedano anche le osservazioni fatte più avanti nella nota (11). Per le (11_1) cfr. (M_1), § 1, n. 3, LEMMA IV, p. 364-368; cfr. ivi, in particolare, le formule (III) di p. 365; il numero, là indicato con a, è, al presente, indicato con a'.

e sia a il massimo numero ($\leq a'$), *soddisfacente tutte le disuguaglianze* [10]

$$(11_2) \qquad \int_0^a N_i(t)\,dt \leq \Omega_i - \mu_i\,, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$(11_3) \qquad \int_0^a M_r(t)dt \leq b_r,\ (r=1,2,\dots,h),\ \textit{mentre} \int_0^x M_r(t)dt < b_r,\ (r=1,2,\dots,h),\ \textit{se}\ 0 \leq x < a.$$

Esiste allora uno e un solo sistema di funzioni

$$(\mathrm{II}) \qquad z_1 = z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m = z_m(x, y_1, \dots, y_h),$$

definite nel campo

$$T: \qquad 0 \leq x \leq a, \ -b_r + \int_0^x M_r(t)\,dt \leq y_r \leq b_r - \int_0^x M_r(t)\,dt,\ (r = 1, 2, \dots, h),$$

le quali sono di classe G in T, in quasi tutto T soddisfano il sistema

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial x} + \sum_{r=1}^{h} \varrho_{ir}[x, y_1, \dots, y_h; z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h)]\, \frac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_r} =$$

$$= f_i\,[x, y_1, \dots, y_h;\ z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h)], \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

e inoltre soddisfano le

$$(\mathrm{III}) \qquad z_i(0, y_1, \dots, y_h) = \Phi_i(y_1, \dots, y_h), \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

per tutte le h-ple reali appartenenti al campo R ».

a) Nel campo

$$C_\infty: \quad 0 \leq x \leq a_0, -\infty < y_r < +\infty, (r = 1, 2, \dots, h), -\infty < z_i < +\infty, \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

---

(10) Circa la condizione (11_2), si confronti anche quanto è detto più avanti nella nota (15).

definiamo le funzioni $R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $F_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $(r = 1, 2, \dots, h; \; i = 1, 2, \dots, m)$, come segue:

$$\begin{cases} R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) = \varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m), \\ F_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) = f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m), \end{cases}$$

quando il punto $(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$ appartiene al campo C [11];

$$\begin{cases} R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) = R_{ir}\left(x, b_1^{(0)} - \int\limits_0^x M_r^{(0)}(t)\, dt, y_2, \dots, y_h; z_1, \dots, y_m\right), \\ F_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) = F_i\left(x, b_1^{(0)} - \int\limits_0^x M_r^{(0)}(t)\, dt, y_2, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m\right), \end{cases}$$

per

$$0 \leq x \leq a_0, \quad b_1^{(0)} - \int\limits_0^x M_r^{(0)}(t)\, dt < y_1,$$

$$-b_r^{(0)} + \int\limits_0^x M_r^{(0)}(t)\, dt \leq y_r \leq b_r^{(0)} - \int\limits_0^x M_r^{(0)}(t)\, dt, \quad (r = 2, 3, \dots, h),$$

$$-\Omega_j \leq z_j \leq \Omega_j, \quad (j = 1, 2, \dots, m);$$

$$\begin{cases} R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) = R_{ir}\left(x, -b_1^{(0)} + \int\limits_0^x M_r^{(0)}(t)\, dt, y_2, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m\right), \\ F_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) = F_i\left(x, -b_1^{(0)} + \int\limits_0^x M_r^{(0)}(t)\, dt, y_2, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m\right), \end{cases}$$

---

(11) È evidente che, se il campo C è definito dalle

$$0 \leq x \leq a_0, \; -\infty < y_r < +\infty, \; (r = 1, 2, \dots, h), \; -\infty < z_i < +\infty, \; (i = 1, 2, \dots, m),$$

non occorre l'introduzione delle funzioni $R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$; $F_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$.

per

$$0 \leq x \leq a_0\,, \quad -b_1^{(0)} + \int_0^x M_r^{(0)}(t)\,dt > y_1\,,$$

$$-b_r^{(0)} + \int_0^x M_r^{(0)}(t)\,dt \leq y_r \leq b_r^{(0)} - \int_0^x M_r^{(0)}(t)\,dt, \ (r = 2, 3, \dots, h)\,;$$

$$-\Omega_j \leq z_j \leq \Omega_j, \ (j = 1, 2, \dots, m)\,;$$

. . . .

. . . .

$$\begin{cases} R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h\,; z_1, \dots, z_m) = R_{ir}\left(x, y_1, \dots, y_{h-1}, b_h^{(0)} - \int_0^x M_h^{(0)}(t)\,dt\,; z_1, \dots, z_m\right), \\ F_i(x, y_1, \dots, y_h\,;\ z_1, \dots, z_m) = F_i\left(x, y_1, \dots, y_{h-1}, b_h^{(0)} - \int_0^x M_h^{(0)}(t)\,dt\,; z_1, \dots, z_m\right), \end{cases}$$

per

$$0 \leq x \leq a_0, \ -\infty < y_r < +\infty, \ (r = 1, 2, \dots, h-1), \ b_h^{(0)} - \int_0^x M_h^{(0)}(t)\,dt < y_h\,;$$

$$-\Omega_j \leq z_j \leq \Omega_j, \ (j = 1, 2, \dots, m)\,;$$

$$\begin{cases} R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h\,; z_1, \dots, z_m) = R_{ir}\left(x, y_1, \dots, y_{h-1}, -b_h^{(0)} + \int_0^x M_h^{(0)}(t)\,dt\,; z_1, \dots, z_m\right), \\ F_i(x, y_1, \dots, y_h\,;\ z_1, \dots, z_m) = F_i\left(x, y_1, \dots, y_{h-1}, -b_h^{(0)} + \int_0^x M_h^{(0)}(t)\,dt\,; z_1, \dots, z_m\right), \end{cases}$$

per

$$0 \leq x \leq a_0, \ -\infty < y_r < +\infty, \ (r = 1, 2, \dots, h-1), \ -b_h^{(0)} + \int_0^x M_h^{(0)}(t)\,dt > y_h\,;$$

$$-\Omega_j \leq z_j \leq \Omega_j, \ (j = 1, 2, \dots, m)\,;$$

$$\begin{cases} R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) = R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; \Omega_1, z_2, \dots, z_m), \\ F_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) = F_i(x, y_1, \dots, y_h; \Omega_1, z_2, \dots, z_m), \end{cases}$$

per

$$0 \leq x \leq a_0, \; -\infty < y_r < +\infty, \; (r = 1, 2, \dots, h), \; \Omega_1 < z_1,$$
$$-\Omega_j \leq z_j \leq \Omega_j, \; (j = 2, 3, \dots, m);$$

$$\begin{cases} R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) = R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; -\Omega_1, z_2, \dots, z_m), \\ F_i(x, y_1, \dots, y_h; y_1, \dots, z_m) = F_i(x, y_1, \dots, y_h; -\Omega_1, z_2, \dots, z_m). \end{cases}$$

per

$$0 \leq x \leq a_0, \; -\infty < y_r < +\infty, \; (r = 1, 2, \dots, h); \; -\Omega_1 > z_1,$$
$$-\Omega_j \leq z_j \leq \Omega_j, \; (j = 2, 3, \dots, m);$$

. . . .

. . . .

$$\begin{cases} R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) = R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_{n-1}, \Omega_m), \\ F_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) = F_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_{m-1}, \Omega_m), \end{cases}$$

per

$$0 \leq x \leq a_0, \; -\infty < y_r < +\infty, \; (r = 1, 2, \dots, h);$$
$$-\infty < z_j < +\infty, \; (j = 1, 2, \dots, m-1), \; \Omega_m < z_m,$$

$$\begin{cases} R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) = R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_{m-1}, -\Omega_m), \\ F_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) = F_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_{m-1}, -\Omega_m), \end{cases}$$

per

$$0 \leq x \leq a_0, \; -\infty < y_r < +\infty, \; (r = 1, 2, \dots, h);$$
$$-\infty < z_j < +\infty, \; (j = 1, 2, \dots, m-1), \; -\Omega_m < z_m \; (^{12}).$$

---

(12) Se, per un particolare indice s fissato fra i numeri $1, 2, \dots, h$ (o per più indici s fissati tra tali numeri) è $M_s^{(0)}(x) = 0$ identicamente in $(0, a_0)$ e $b_s^{(0)} = \infty$, oppure se, per un

Definiamo infine le funzioni $\Psi_i(y_1, \dots, y_h)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, in tutto il campo

$$R_\infty: \quad -\infty < y_1 < +\infty, \; -\infty < y_2 < +\infty, \dots, -\infty < y_h < +\infty,$$

mediante le

$$\Psi_i(y_1, \dots, y_h) = \Phi_i(y_1, \dots, y_h),$$

per

$$|\, y_r \,| \leq b_r, \; (r = 1, 2, \dots, h);$$

$$\Psi_i(y_1, \dots, y_h) = \Psi_i(b_1, y_2, \dots, y_h),$$

per

$$b_1 < y_1; \; |\, y_r \,| \leq b_r, \; (r = 2, 3, \dots, h);$$

$$\Psi_i(y_1, \dots, y_h) = \Psi_i(-b_1, y_2, \dots, y_h),$$

per

$$-b_1 > y_1, \; |\, y_r \,| \leq b_r, \; (r = 2, 3, \dots, h);$$

. . . .

. . . .

$$\Psi_i(y_1, \dots, y_h) = \Psi_i(y_1, \dots, y_{h-1}, b_h),$$

per

$$-\infty < y_r < +\infty, \; (r = 1, 2, \dots, h-1), \; b_h < y_h;$$

$$\Psi_i(y_1, \dots, y_h) = \Psi_i(y_1, \dots, y_{h-1}, -b_h),$$

per

$$-\infty < y_r < +\infty, \; (r = 1, 2, \dots, h-1), \; -b_h > y_h.$$

Allora per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$ è

$$(12) \quad \begin{cases} |\, R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h;\, z_1, \dots, z_m) \,| \leq M_r(x), \; (r = 1, 2, \dots, h;\; i = 1, 2, \dots, m), \\ |\, F_i(x, y_1, \dots, y_h;\, z_1, \dots, z_m) \,| \leq N_i(x), \; (i = 1, 2, \dots, m), \end{cases}$$

---

indice j fissato (o per più indici j fissati) tra i numeri $1, 2, \dots, m$, è $\Omega_j = \infty$, cioè se al campo C appartengono punti per i quali $|\, y_s \,|$ oppure $|\, z_j \,|$ è grande a piacere, la definizione delle funzioni $R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h;\, z_1, \dots, z_m)$, $F_i(x, y_1, \dots, y_h;\, z_1, \dots, z_m)$ si può semplificare in modo evidente.

per tutte le $(h+m)$-*ple* reali $(y_1, \dots, y_h, z_1, \dots, z_m)$, e

$$(13)\quad \begin{cases} |R_{ir}(x,y_1,\dots,y_h;z_1,\dots,z_m)-R_{ir}(x,\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_h;\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_m)| \leq L(x)\left\{\sum_{s=1}^{h}|y_s-\bar{y}_s|+\sum_{j=1}^{m}|z_j-\bar{z}_j|\right\}, \\ \qquad (r=1,\dots,h;\ i=1,2,\dots,m), \\ |F_i(x,y_1,\dots,y_h;z_1,\dots,z_m)-F_i(x,\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_h;\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_m)| \leq L(x)\left\{\sum_{s=1}^{h}|y_s-\bar{y}_s|+\sum_{j=1}^{m}|z_j-\bar{z}_j|\right\}, \\ \qquad (i=1,2,\dots,m), \end{cases}$$

per tutte le coppie di $(h+m)$-*ple* reali $(y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$.

Inoltre

$$(14)\qquad |\Psi_i(y_1, \dots, y_h)| \leq \mu_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

per tutte le *h-ple* reali $(y_1, \dots, y_h)$,

$$(15)\qquad |\Psi_i(y_1, \dots, y_h) - \Psi_i(\bar{y}, \dots, \bar{y}_h)| \leq \lambda_i \sum_{s=1}^{h} |y_s - \bar{y}_s|, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

per tutte le coppie di *h-ple* reali $(y_1, \dots, y_h)$, $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h)$.

b) Indicato per brevità con A il secondo membro delle disuguaglianze (11_1), cioè posto

$$A = \frac{1}{m-h} lg \frac{hK+m}{h(K+1)}, \quad \text{se } m \neq h, \quad A = \frac{1}{m(K+1)}, \quad \text{se } m = h,$$

si scelga un numero a' come segue; se è

$$(16)\qquad \int_0^{a_0} L(t)\, dt < A,$$

si ponga

$$a' = a_0;$$

se invece

$$(17)\qquad \int_0^{a_0} L(t)\, dt \geq A,$$

e se α è il più piccolo numero positivo $(\leq a_0)$ tale che

$$(18)\qquad \int_0^{\alpha} L(t)\, dt = A,$$

si può prendere come valore a' un qualsiasi numero positivo minore di α, e prossimo quanto si vuole ad α. È dunque, in ogni caso

$$\int_0^{a'} L(t)\, dt < A\,. \tag{19}$$

Per i risultati conseguiti in (M_1), esiste uno e un solo sistema [13] (II) di funzioni, le quali sono definite nel campo

$$D'_\infty: \qquad 0 \leq x \leq a', \ -\infty < y_1 < +\infty, \dots, -\infty < y_h < +\infty\,,$$

sono ivi di classe G, soddisfano in quasi tutto D'_∞ il sistema

$$\frac{\partial z_i(x,y_1,\dots,y_h)}{\partial x} + \sum_{r=1}^{h} R_{ir}[x,y_1,\dots,y_h;\, z_1(x,y_1,\dots,y_h),\dots,z_m(x,y_1,\dots,y_h)]\, \frac{\partial z_i(x,y_1,\dots,y_h)}{\partial y_r} = \tag{20}$$

$$= F_i\,(x, y_1, \dots, y_h;\ z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h)],\ (i = 1, 2, \dots, m),$$

e inoltre soddisfano identicamente in $y_1, \dots, y_h$ le

$$z_i\,(0, y_1, \dots, y_h) = \Psi_i\,(y_1, \dots, y_h),\ (i = 1, 2, \dots, m). \tag{21}$$

---

[13] Cfr., per quanto riguarda l'esistenza delle funzioni (II), (M_1), § 2, n. 3, TEOREMA II, pp. 380-395, e, per quanto riguarda l'unicità, (M_1), § 3, n. 2, TEOREMA IV, pp. 402-403. Se vale la (16), e quindi $a' = a_0$, il numero a' è determinato; se invece vale la (17), poichè si può scegliere a' prossimo quanto si vuole ad α, le funzioni (II) sono definite nel campo

$$0 \leq x < \alpha, \ -\infty < y_1 < +\infty, \dots, -\infty < y_h < +\infty\,,$$

e sono di classe G in ogni campo

$$0 \leq x \leq a', \ -\infty < y_1 < +\infty, \dots, -\infty < y_h < +\infty\,,$$

con $0 < a' < \alpha$. Può darsi che si sappia determinare direttamente (cfr. l'osservazione fatta in (M_1), § 2, n. 4, c), p. 397), un numero positivo a^* ($\leq a_0$) in modo da assicurare la validità del procedimento tenuto nella dimostrazione del citato TEORRMA II di (M_1) in tutto il campo

$$0 < x \leq a^*, \ -\infty < y_1 < +\infty, \dots, -\infty < y_h < +\infty\,.$$

Si può allora prendere $a' = a^*$, senza preoccuparci della condizione (19).

c) Dalle (12) e (14) segue che in tutto D'_∞ è [14]

$$|\, z_i\,(x,\, y_1,\, \dots\, .\, y_h)\,| \leq \mu_i + \int_0^x N_i\,(t)\,dt, \quad (i = 1,\, 2,\, \dots\, ,\, m). \tag{22}$$

Sia a'' il massimo numero ($\leq a'$) soddisfacente tutte le disuguaglianze

$$\int_0^{a''} N_i\,(t)\,dt \leq \Omega_i - \mu_i, \quad (i = 1,\, 2,\, \dots\, ,\, m). \tag{23}$$

Allora nel campo

$$D''_\infty: \qquad 0 \leq x \leq a'', \; -\infty < y_1 < +\infty, \dots, -\infty < y_h < +\infty,$$

è [15]

$$|\, z_i\,(x,\, y_1,\, \dots\, ,\, y_h)\,| \leq \Omega_i, \quad (i = 1,\, 2,\, \dots\, ,\, m). \tag{24}$$

d) Sia a il massimo numero positivo ($\leq a''$), soddisfacente tutte le disuguaglianze

$$\int_0^a M_r\,(t)\,dt \leq b_r, \quad (r = 1,\, 2,\, \dots\, ,\, h), \tag{11_3}$$

([14]) Le (22) seguono dalle formule (IV) e (V) di (M_1), § 2, n. 2, p. 372 (nelle quali si ponga $R_{ir}\,(x\,, y_1\,, \dots\,, y_h\,;\; z_1\,, \dots\,, z_m)$, $F_i\,(x\,, y_1\,, \dots\,, y_h\,;\; z_1\,, \dots\,, z_m)$ al posto di $\varrho_{ir}\,(x,\, y_1\,, \dots\,, y_h\,;\; z_1,\, \dots\,,\, z_m)$, $f_i(x,\, y_1,\, \dots\,,\, y_h\,;\; z_1,\, \dots\,,\, z_m)$, e inoltre $\Psi_i\,(y_1,\, \dots\,,\, y_h)$ al posto di $\Phi_i\,(y_1,\, \dots\,,\, y_h)$), quando si tenga conto delle (12) e (14).

([15]) Se si riesce a determinare direttamente un valore a'' ($\leq a'$), tale che in tutto il campo D''_∞ siano soddisfatte le (24), non è necessario di preoccuparsi che il numero a'' soddisfi le (23). Così pure è evidente che, se le funzioni $\varrho_{ir}\,(x,\, y_1,\, \dots\,,\, y_h\,;\; z_1,\, \dots\,,\, z_m)$, $f_i\,(x,\, y_1\,;\, \dots\,;\, z_1,\, \dots\,,\, z_m)$ sono definite nel campo

$$0 \leq x \leq a_0\,, \; -b_r^{(0)} + \int_0^x M_r^{(0)}\,(t)\,dt \leq y_r \leq b_r^{(0)} - \int_0^x M_r^{(0)}\,(t)\,dt, \; (r = 1, 2, \dots, h),$$

$$-\infty < z_i < +\infty\,, \; (i = 1, 2, \dots, m),$$

le costanti μ_i possono essere grandi a piacere, non occorre introdurre le (23), ed è $a'' = a'$.

e inoltre le condizioni che sia

$$(25)\qquad \int_0^x M_r(t)\,dt < b_r\,,\ (r = 1, 2, \dots, h),\quad \text{per } 0 \leq x < a\,.$$

Il campo T (dello spazio delle variabili $x, y_1, \dots, y_h$), definito nell'enunciato del teorema, appartiene al campo D''_∞, e quindi, se il punto $(x, y_1, \dots, y_h)$ appartiene al campo T, il punto (16)

$$(x, y_1, \dots, y_h\,;\ z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h))$$

(nello spazio delle variabili $x, y_1, \dots, y_h\,;\ z_1, \dots, z_m$) appartiene al campo C, nel quale è identicamente

$$\begin{cases} R_{ir}(x, y_1,\dots,y_h\,; z_1,\dots,z_m) = \varrho_{ir}(x, y_1,\dots,y_h\,; z_1,\dots,z_m), & (r = 1, 2,\dots, h\,; i = 1, 2,\dots,m), \\ F_i(x, y_1,\dots,y_h\,; z_1,\dots,z_m) = f_i(x, y_1,\dots,y_h\,; z_1,\dots,z_m), & (i = 1, 2,\dots, m). \end{cases}$$

Se dunque il punto $(x, y_1, \dots, y_h)$ appartiene al campo T, il sistema (20) e le condizioni (21) coincidono con il sistema (I) e le condizioni (III) (17). Le funzioni (II) soddisfano dunque quasi ovunque in T il sistema (I) e soddisfano le (III) per tutte le *h-ple* $(y_1, \dots, y_h)$ tali che sia

$$|\, y_r \,| \leq b_r,\ (r = 1, 2, \dots, h).$$

e) È così provata l'esistenza di almeno un sistema (II) di funzioni, definite nel campo T e soddisfacenti le condizioni del TEOREMA I. In quanto all'unicità di un tale sistema di funzioni, essa segue come caso molto particolare dei risultati contenuti in (M_2) (18).

---

(16) Si tenga presente che il campo T appartiene al campo

$$T^{(0)}:\qquad 0 \leq x \leq a_0,\ -b_r^{(0)} + \int_0^x M_r^{(0)}(t)\,dt \leq y_r \leq b_r^{(0)} - \int_0^x M_r^{(0)}(t)\,dt,\ (r = 1, 2, \dots, h).$$

(17) Si tenga presente che per $|\, y_r \,| \leq b_r$, $(r = 1, 2, \dots, h)$ è

$$\Psi_i(y_1, \dots, y_h) = \Phi_i(y_1, \dots, y_h),\ (i = 1, 2, \dots, m).$$

(18) Cfr. (M_2), § 1, n. 2, TEOREMA I, pp. 106-118; cfr. pure § 3, n. 11, TEOREMA V, pp. 128-131, e n. 13, *a*), pp. 131-132; l'unicità della soluzione è provata sotto ipotesi alquanto più ampie delle attuali.

3. Osservazioni.

a) Nel campo T la soluzione (II) *del problema di* CAUCHY (*in senso generalizzato*) *relativo al sistema* (I) *dipende con continuità dai dati;* ciò segue come caso particolare dei risultati ottenuti in (M_2) [19].

b) Il sistema di funzioni (II) *soddisfa in tutti i punti di quasi tutte le intersezioni del campo T con una retta* $y_1 =$ cost., ... , $y_h =$ cost. *il sistema di equazioni integrali* [20]

$$(\mathrm{VI})\qquad z_i(x, y_1, \dots, y_h) = \Phi_i(y_1, \dots, y_h) +$$

$$+ \int_0^x \left\{ - \sum_{r=1}^{h} \varrho_{ir}[X, y_1, \dots, y_h; z_1(X, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(X, y_1, \dots, y_h)] \frac{\partial z_i(X, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_r} + \right.$$

$$\left. + f_i[X, y_1, \dots, y_h; z_1(X, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(X, y_1, \dots, y_h)] \right\} dX, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

c) Siano $M_r^{(1)}(x)$, $(r = 1, 2, \dots, h)$, $N_i^{(1)}(x)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, $L^{(1)}(x)$ funzioni definite in $(0, a_0)$, ivi quasi-continue, non negative e integrabili. soddisfacenti in quasi tutto $(0, a_0)$ le

$$(26)\qquad \begin{cases} M_r^{(0)}(x) \leq M_r^{(1)}(x) \leq M_r(x), & (r = 1, 2, \dots, h), \\ N_i^{(1)}(x) \leq N_i(x), & (i = 1, 2, \dots, m), \\ L^{(1)}(x) \leq L(x); \end{cases}$$

e inoltre tali che per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$ sia

$$(27)\qquad \begin{cases} |\, \varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) \,| \leq M_r^{(1)}(x), & (r = 1, 2, \dots, h; i = 1, 2, \dots, m), \\ |\, f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) \,| \leq N_i^{(1)}(x), & (i = 1, 2, \dots, m), \end{cases}$$

per tutte le $(h + m)$-*ple* reali $(y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$ tali che il punto

---

[19] Cfr. (M_2), § 2, n. 6, TEOREMA III, pp. 122-124; § 3, n. 12, TEOREMA III, p. 131, e n. 13, *a*), pp. 131-132. I risultati di (M_2) valgono sotto ipotesi alquanto più ampie delle attuali.

[20] Cfr. (M_1), § 2, n. 2, I), *a*), form. (VI), p. 373.

$(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots z_m)$ appartenga al campo C;

$$(27')\left\{\begin{aligned}&|\varrho_{ir}(x,y_1,\dots,y_h;z_1,\dots,z_m)-\varrho_{ir}(x,\bar y_1,\dots,\bar y_h;\bar z_1,\dots,\bar z_m)|\leq L^{(1)}(x)\left\{\sum_{s=1}^{h}|y_s-\bar y_s|+\sum_{j=1}^{m}|z_j-\bar z_j|\right\},\\&\qquad\qquad(r=1,2,\dots,h;\ i=1,2,\dots,m),\\&|f_i(x,y_1,\dots,y_h;z_1,\dots,z_m)-f_i(x,\bar y_1,\dots,\bar y_h;\bar z_1,\dots,\bar z_m)|\leq L^{(1)}(x)\left\{\sum_{s=1}^{h}|y_s-\bar y_s|+\sum_{j=1}^{m}|z_j-\bar z_j|\right\},\\&\qquad\qquad(i=1,\dots,m),\end{aligned}\right.$$

per tutte le coppie di $(h+m)$-*ple* reali $(y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $(\bar y_1, \dots, \bar y_h; \bar z_1, \dots, \bar z_m)$, tali che i punti $(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $(x, \bar y_1, \dots, \bar y_h; \bar z_1, \dots, \bar z_m)$ appartengano al campo C.

Allora nell'enunciato del TEOREMA I si possono sostituire le funzioni $M_r^{(1)}(x)$, $(r = 1, 2, \dots, h)$, $N_i^{(1)}(x)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, $L^{(1)}(x)$ alle funzioni $M_r(x)$, $(r = 1, 2, \dots, h)$, $N_i(x)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, $L(x)$. Si giunge così a determinare un campo $T^{(1)}$ (al quale appartengono certamente tutti i punti del campo T)

$$T^{(1)}:\quad 0 \leq r \leq a^{(1)},\ -b_r + \int_0^x M_r^{(1)}(t)\,dt \leq y_r \leq b_r - \int_0^x M_r^{(1)}(t)\,dt,\ (r = 1, 2, \dots, h).$$

Il campo $T^{(1)}$ può riuscire più ampio del campo T.

Il TEOREMA I prova l'esistenza e l'unicità delle funzioni (II), definite nel campo $T^{(1)}$, soddisfacenti le (I) in quasi tutto $T^{(1)}$ e soddisfacenti le (III) per tutte le h-*ple* $(y_1, \dots, y_h)$ tali che $|y_r| \leq b_r$, $(r = 1, 2, \dots, h)$.

Quindi, supposto fissato il campo C e dati il sistema (I) e le condizioni iniziali (III), una scelta opportuna del sistema di funzioni $M_r^{(1)}(x)$, $(r=1,2,\dots,h)$, $N_i^{(1)}(x)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, $L^{(1)}(x)$ può permettere di provare il teorema di esistenza e di unicità in un campo più ampio.

4. Condizioni sufficienti per l'esistenza e la continuità in ogni punto del campo T delle derivate $\dfrac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_r}$, $(r = 1, 2, \dots, h; i = 1, 2, \dots, m)$.

TEOREMA II « *Valgano tutte le ipotesi del* TEOREMA I; *inoltre in tutti i punti di quasi tutte le intersezioni del campo C con gli iperpiani $x = cost.$*

le derivate

$$\frac{\partial \varrho_{ir}}{\partial y_l},\ \frac{\partial \varrho_{ir}}{\partial z_j},\ \frac{\partial f_i}{\partial y_l},\ \frac{\partial f_i}{\partial z_j},\ (r,\ l = 1, 2, \dots, h;\ i, j = 1, 2, \dots, m)$$

esistano finite; in tutti i punti di quasi tutte le intersezioni del campo C con gli iperpiani $x = cost.$ sia [21]

$$(28)\quad \begin{cases} \left| \dfrac{\partial \varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h;\ z_1, \dots, z_m)}{\partial y_l} \right| \leq L(x); & \left| \dfrac{\partial \varrho_{ir}(\dots)}{\partial z_j} \right| \leq L(x); \\[2ex] \left| \dfrac{\partial f_i(\dots)}{\partial y_l} \right| \leq L(x); & \left| \dfrac{\partial f_i(\dots)}{\partial z_j} \right| \leq L(x), \\[2ex] & (r,\ l = 1, 2, \dots, h;\ i, j = 1, 2, \dots, m). \end{cases}$$

Esista una funzione $\Lambda(x)$, definita in $(0, a_0)$, ivi quasi continua, non negativa e integrabile, tale che per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$ sia [22]

$$(29)\quad \begin{cases} \left| \dfrac{\partial \varrho_{ir}}{\partial y_l} - \dfrac{\partial \overline{\varrho}_{ir}}{\partial y_l} \right| \leq \Lambda(x) \left\{ \sum\limits_{s=1}^{h} |y_s - \overline{y}_s| + \sum\limits_{j=1}^{m} |z_j - \overline{z}_j| \right\}, \\[2ex] \left| \dfrac{\partial \varrho_{ir}}{\partial z_j} - \dfrac{\partial \overline{\varrho}_{ir}}{\partial z_j} \right| \leq \Lambda(x) \left\{ \sum\limits_{s=1}^{h} |y_s - \overline{y}_s| + \sum\limits_{j=1}^{m} |z_j - \overline{z}_j| \right\}, \\[2ex] \left| \dfrac{\partial f_i}{\partial y_l} - \dfrac{\partial \overline{f}_i}{\partial y_l} \right| \leq \Lambda(x) \left\{ \sum\limits_{s=1}^{h} |y_s - \overline{y}_s| + \sum\limits_{j=1}^{m} |z_j - \overline{z}_j| \right\}, \\[2ex] \left| \dfrac{\partial f_i}{\partial z_j} - \dfrac{\partial \overline{f}_i}{\partial z_j} \right| \leq \Lambda(x) \left\{ \sum\limits_{s=1}^{h} |y_s - \overline{y}_s| + \sum\limits_{j=1}^{m} |z_j - \overline{z}_j| \right\}, \\[2ex] \qquad (r,\ l = 1, 2, \dots, h;\ i, j = 1, 2, \dots, m), \end{cases}$$

per tutte le coppie di $(h+m)$-ple reali $(y_1, \dots, y_h;\ z_1, \dots, z_m)$, $(\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_h;\ \overline{z}_1, \dots, \overline{z}_m)$, tali che i punti $(x, y_1, \dots, y_h;\ z_1, \dots, z_m)$, $(x, \overline{y}_1, \dots, \overline{y}_h;\ \overline{z}_1, \dots, \overline{z}_m)$ appartengano al campo C.

---

[21] Le (28) sono conseguenza delle (5) e (6).

[22] Scriviamo $\dfrac{\partial \varrho_{ir}}{\partial y_l}$ per $\dfrac{\partial \varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_r;\ z_1, \dots, z_m)}{\partial y_l}$, e $\dfrac{\partial \overline{\varrho}_{ir}}{\partial y_l}$ per $\dfrac{\partial \varrho_{ir}(x, \overline{y}_1, \dots, \overline{y}_h;\ \overline{z}_1, \dots, \overline{z}_m)}{\partial y_l}$,

e analogamente per le altre derivate $\dfrac{\partial \varrho_{ir}}{\partial z_j}$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_l}$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}$.

Le funzioni $\Phi_i(y_1, \dots, y_h)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$ *in ogni punto del campo* R *ammettano derivate parziali prime finite, le quali nel campo* R *siano lipschitziane nel complesso delle variabili. In queste ipotesi le funzioni*

$$\text{(II)} \qquad z_1 = z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m = z_m(x, y_1, \dots, y_h),$$

definite nel campo T *(indicato nel* TEOREMA I), *ivi di classe* G, *soddisfacenti le* (I) *in quasi tutto il campo* T *e le* (III) *per tutte le* h*-ple* $(y_1, \dots, y_h)$, *tali che* $|y_r| \leq b_r$, $(r = 1, 2, \dots, h)$, *funzioni delle quali il* TEOREMA I *assicura l'esistenza e l'unicità, ammettono in ogni punto del campo* T *derivate parziali prime finite* [23]

$$\frac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_l}, \quad (l = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m),$$

le quali sono di classe G *nel campo* T*; inoltre le funzioni* (III) *soddisfano le* (VI) *identicamente in* T, *e soddisfano le* (I) *in quasi tutti i punti di tutte le intersezioni del campo* T *con le rette* $y_1 = cost., \dots, y_h = cost.$ ».

a) Nella dimostrazione del TEOREMA I è stato costruito il sistema (II) di funzioni, definite nel campo D'_∞ e ivi di classe G, soddisfacenti in quasi tutto D'_∞ il sistema (20) e soddisfacenti identicamente le (21); a tale sistema (II) di funzioni si possono associare [24] m sistemi di funzioni

$$\text{(30)} \qquad g_{i1}(X;\ x, y_1, \dots, y_h), \dots, g_{ih}(X;\ x, y_1, \dots, y_h), \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

---

[23] Nei punti del contorno del campo T, *non* appartenenti all'iperpiano $x = a$, è senz'altro possibile definire le derivate $\dfrac{\partial z_i}{\partial y_l}$. Se inoltre, per tutti gli indici $r = 1, 2, \dots, h$, è $\displaystyle\int_0^a M_r(t)\,dt < b_r$, le derivate $\dfrac{\partial z_i}{\partial y_l}$ hanno significato anche nei punti della intersezione del campo T con l'iperpiano $x = a$; altrimenti si intende come valore di

$$\frac{\partial z_i(a, y_1^{(0)}, \dots, y_h^{(0)})}{\partial y_l} \left(\text{con } -b_r + \int_0^a M_r(t)\,dt \leq y_r^{(0)} \leq b_r - \int_0^a M_r(t)\,dt,\ (r = 1, 2, \dots, h)\right),$$

il limite a cui tende $\dfrac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_l}$ quando il punto $(x, y_1, \dots, y_h)$ tende al punto $(a, y_1^{(0)}, \dots, y_h^{(0)})$.

[24] Cfr. (M_1) § 2, n. 2, TEOREMA I, pp. 371-380.

definite nel campo

Δ'_∞: $0 \leq X \leq a'$, $0 \leq x \leq a'$, $-\infty < y_1 < +\infty, \dots, -\infty < y_h < +\infty$,

ivi di classe $G^{[1]}$, tali che in tutto D'_∞ siano soddisfatte le [25]

$$(31)\quad g_{ir}(X; x, y_1, \dots, y_h) = y_r - \int_X^x R_{ir}[t, g_{is}(t; x, y_1, \dots, y_h); z_j(t, g_{is}(t; x, y_1, \dots, y_h))]\, dt,$$

$$(r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m),$$

identicamente in Δ'_∞; e

$$(32)\quad z_i(x, y_1, \dots, y_h) = \Psi_i(g_{is}(0; x, y_1, \dots, y_h)) +$$

$$+ \int_0^x F_i[X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h); z_j(X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h))]\, dX, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

identicamente in D'_∞.

In (M_1) le funzioni (II) e (30) sono state costruite a partire da successioni di funzioni [26]

$$(33)\quad g_{ir}^{(n)}(X; x, y_1, \dots, y_h) = y_r - \int_0^x R_{ir}[t, g_{is}^{(n)}(t; x, y_1, \dots, y_h); z_j^{(n)}(t - \delta, g_{is}^{(n)}(t; x, y_1, \dots, y_h))]\, dt,$$

$$(r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m),$$

$$(34)\quad z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h) = \Psi_i(g_{is}^{(n)}(0; x, y_1, \dots, y_h)) +$$

$$+ \int_0^x F_i[X, g_{is}^{(n)}(X; x, y_1, \dots, y_h); z_j^{(n)}(X - \delta, g_{is}^{(n)}(X; x, y_1, \dots y_h))]\, dX, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

---

[25] Scriviamo, qui e in seguito, $R_{ir}(x, y_s; z_j)$, $F_i(x, y_s; z_j)$, $\varrho_{ir}(x, y_s; z_j)$, $f_i(x, y_s; z_j)$ al posto di $R_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, ecc. Scriviamo inoltre spesso, per brevità, $\Psi_i(y_s)$, $\Phi_i(y_s)$, $z_j(x, y_s)$ al posto di $\Psi_i(y_1, \dots, y_h)$, $\Phi_i(y_1, \dots, y_h)$, $z_j(x, y_1, \dots, y_h)$.

[26] Cfr. (M_1), § 2, n. 3, TEOREMA II, pp. 380-395; cfr. ivi in particolare capoverso *b*), pp. 381-385, form. (33) e (34); vi è qui qualche differenza di notazioni.

dove è $n = 2, 3, \dots$, si è posto $\delta = \dfrac{a'}{n}$, e si è posto, inoltre, per definizione

$$z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h) = \Psi_i(y_1, \dots y_h), \quad \text{per } -\frac{a'}{2} \leq x \leq 0, \ (i = 1, 2, \dots, m).$$

b) Sia ora $(x, y_1, \dots, y_h)$ un punto fissato, appartenente al campo T; per $0 \leq X \leq x$ è ([27])

$$(35) \qquad -b_r + \int_0^X M_r(t)\,dt \leq g_{ir}(X; x, y, \dots, y_h) \leq b_r - \int_0^X M_r(t)\,dt,$$

$$(r = 1, 2, \dots, h; \ i = 1, 2, \dots, m),$$

$$(36) \qquad -b_r + \int_0^X M_r(t)\,dt \leq g_{ir}^{(n)}(X; x, y_1, \dots, y_h) \leq b_r - \int_0^X M_r(t)\,dt,$$

$$(r = 1, 2, \dots, h; \ i = 1, 2, \dots, m).$$

([27]) Infatti dalle (3), (31), (33) segue per $0 \leq X \leq x$

$$|g_{ir}(X; x, y_1, \dots, y_h) - y_r| \leq \int_X^x M_r(t)\,dt; \ |g_{ir}^{(n)}(X; x, y_1, \dots, y_h) - y_r| \leq \int_X^x M_r(t)\,dt,$$

$$(r = 1, 2, \dots, h; \ i = 1, 2, \dots, m),$$

cioè

$$(\alpha) \quad y_r - \int_X^x M_r(t)\,dt \leq g_{ir}(X; x, y_1, \dots, y_h) \leq y_r + \int_X^x M_r(t)\,dt, \ (r = 1, 2, \dots, h; i = 1, 2, \dots, m),$$

$$(\beta) \quad y_r - \int_X^x M_r(t)\,dt \leq g_{ir}^{(n)}(X; x, y_1, \dots, y_h) \leq y_r + \int_X^x M_r(t)\,dt, \ (r=1, 2, \dots, h; \ i=1, 2, \dots, m).$$

Per ipotesi il punto $(x, y_1, \dots, y_h)$ appartiene al campo T, e quindi è

$$0 \leq x \leq a, \ -b_r + \int_0^x M_r(t)\,dt \leq y_r \leq b_r - \int_0^x M_r(t)\,dt, \ (r = 1, 2, \dots, h).$$

Da queste ultime disuguaglianze e dalle (α) e (β) seguono le (35) e (36) (cfr. anche (M_2), § 1, n. 2, c), pp. 111-112).

Allora *se i è uno fissato tra i numeri* $1, 2, \ldots m$, e se dalle curve definite (nello spazio delle variabili $(X, Y_1, \ldots, Y_h)$) dalle

$$Y_r = g_{ir}(X\,;\ x, y_1, \ldots, y_h),\ (r = 1, 2, \ldots, h), \tag{37}$$

$$Y_r = g_{ir}^{(n)}(X\,;\ x, y_1, \ldots, y_h),\ (r = 1, 2, \ldots, h), \tag{38}$$

si considerano gli archi corrispondenti a $0 \leq X \leq x$, si vede che tutti i punti di tali archi appartengono al campo

$$0 \leq X \leq x, \quad -b_r + \int_0^X M_r(t)\,dt \leq Y_r \leq b_r - \int_0^X M_r(t)\,dt,\ (r = 1, 2, \ldots, h),$$

cioè appartengono al campo T considerato nello spazio delle variabili $(X, Y_1, \ldots Y_h)$. In particolare è

$$\begin{cases} |\ g_{ir}(0, x, y_1, \ldots, y_h\ | \leq b_r, & (r = 1, 2, \ldots, h), \\ |\ g_{ir}^{(n)}(0; x, y_1, \ldots, y_h)\ | \leq b_r, & (r = 1, 2, \ldots, h). \end{cases} \tag{39}$$

Inoltre se è $0 \leq x \leq a$, dalle (32) e (34), tenuto conto delle (11_2), (12), (14), (15), segue, come nel n. 2, *c*)

$$|\,z_i(x, y_1, \ldots, y_h)\,| \leq \mu_i + \int_0^x \left[\lambda_i \sum_{r=1}^h M_r(t) + N_i(t)\right] dt \leq \Omega_i,\ (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{40}$$

$$|\,z_i^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_h)\,| \leq \mu_i + \int_0^x \left[\lambda_i \sum_{r=1}^h M_r(t) + N_i(t)\right] dt \leq \Omega_i,\ (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{41}$$

Dalle considerazioni fatte segue che, se il punto $(x, y_1, \ldots, y_h)$ appartiene al campo T, è per $0 \leq t \leq x$, $0 \leq X \leq x$.

$$\begin{cases} R_{ir}[t, g_{is}(t\,,\ x, y_1, \ldots, y_h)\,;\ z_j(t, g_{is}(t\,;\ x, y_1, \ldots, y_h))] = \varrho_{ir}[\ldots] \\ F_i[X, g_{is}(X\,;\ x, y_1, \ldots, y_h)\,;\ z_j(X, g_{is}(X;\ x, y_1, \ldots, y_h))] = f_i\ [\ldots] \\ R_{ir}[t, g_{is}^{(n)}(t\,;\ x, y_1, \ldots, y_h)\,;\ z_j^{(n)}(t - \delta, g_{ir}^{(n)}(t;\ x, y_1, \ldots, y_h))] = \varrho_{ir}[\ldots] \\ F_i[X, g_{is}^{(n)}(X\,; x, y_1, \ldots, y_h)\,; z_j^{(n)}(X - \delta, g_{is}^{(n)}(X; x, y_1, \ldots, y_h))] = f_i[\ldots] \\ \qquad (r = 1, 2, \ldots, h\,;\ i = 1, 2, \ldots, m), \end{cases}$$

e inoltre

$$\begin{cases} \Psi_i\,(g_{is}\,(0\,;\; x, y_1, \dots, y_h)) = \Phi_i\,(g_{is}\,(0\,;\; x, y_1, \dots, y_h)), \\ \Psi_i\,(g_{is}^{(n)}(0\,;\; x, y_1, \dots, y_h)) = \Phi_i\,(g_{is}^{(n)}(0\,;\; x, y_1, \dots, y_h)), \quad (i = 1, 2, \dots, m). \end{cases}$$

Se dunque il punto $(x, y_1, \dots, y_h)$ appartiene al campo T, le (31), (32), (33), (34) diventano rispettivamente [28]

$$\text{(IV)} \quad g_{ir}\,(X\,;\; x, y_1, \dots, y_h) = y_r - \int_X^x \varrho_{ir}[t, g_{is}(t\,;\; x, y_1, \dots, y_h)\,;\; z_j(t, g_{is}(t\,;\; x, y_1, \dots, y_h))]\, dt,$$

$$(r = 1, 2, \dots, h\,;\; i = 1, 2, \dots, m),$$

$$\text{(V)} \qquad z_i\,(x, y_1, \dots, y_h) = \Phi_i\,(g_{is}\,(0\,;\; x, y_1, \dots, y_h)) +$$

$$+ \int_0^x f_i\,[X, g_{is}\,(X\,;\; x, y_1, \dots, y_h)\,;\; z_j\,(X, g_{is}\,(X\,;\; x, y_1, \dots, y_h))]\, dX, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$\text{(42)} \quad g_{ir}^{(n)}\,(X;\, x, y_1, \dots, y_h) = y_h - \int_X^x \varrho_{ir}[t, g_{is}^{(n)}\,(t;\, x, y_1, \dots, y_h);\, z_j^{(n)}(t-\delta, g_{is}^{(n)}(t;\, x, y_1, \dots, y_h))]\, dt$$

$$(r = 1, 2, \dots, h\,;\; i = 1, 2, \dots, m),$$

$$\text{(43)} \qquad z_i^{(n)}\,(x, y_1, \dots, y_h) = \Phi_i\,(g_{is}^{(n)}\,(0\,;\; x, y_1, \dots, y_h)) +$$

$$+ \int_0^x f_i[X, g_{is}^{(n)}\,(X;\, x, y_1, \dots, y_h);\, z_j^{(n)}(X-\delta, g_{is}^{(n)}\,(X;\, x, y_1, \dots, y_h))]\, dX, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

c) Se per tutti i valori di r, con $r = 1, 2, \dots, h$, è

$$\int_0^a M_r\,(t)\, dt < b_r,$$

---

[28] Per le formule (IV) e (V) cfr. anche (M_1), § 2, n. 2, TEOREMA I, p. 372, e per le (42) e (43), (M_1), § 2, n. 3, TEOREMA II, *b*), form. (33), (34), p. 382.

nel campo T dello spazio $(x, y_1, \dots, y_h)$ e nel campo

$$0 \leq X \leq x, \quad 0 \leq x \leq a, \quad -b_r + \int_0^x M_r(t)\, dt \leq y_r \leq b_r - \int_0^x M_r(t)\, dt,$$

$$(r = 1, 2, \dots, h),$$

dello spazio $(X, x, y_1, \dots, y_h)$ si possono ripetere con poche modificazioni le considerazioni mediante le quali è stato dimostrato il Teorema V di (M_1) [29]; si prova così che in tutto il campo T esistono le derivate

$$\frac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_l}, \quad (l = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m), \tag{44}$$

e che esse sono di classe G nel campo T.

Se invece tra i numeri $1, 2, \dots, h$ *esiste* almeno un indice r_0, per il quale

$$\int_0^a M_{r_0}(t)\, dt = b_{r_0}. \tag{45}$$

sia ε un numero positivo $(< a)$, arbitrariamente piccolo, e si consideri il campo

$$T_\varepsilon: \quad 0 \leq x \leq a - \varepsilon, \quad -b_r + \int_0^x M_r(t)\, dt \leq y_r \leq b_r - \int_0^x M_r(t)\, dt, \quad (r = 1, 2, \dots, h),$$

dello spazio $(x, y_1, \dots, y_h)$ e il campo

$$0 \leq X \leq x, \quad 0 \leq x \leq a - \varepsilon, \quad -b_r + \int_0^x M_r(t)\, dt \leq y_r \leq b_r - \int_0^x M_r(t)\, dt,$$

$$(r = 1, 2, \dots, h),$$

dello spazio $(X;\ x, y_1, \dots, y_h)$. In tali campi si possono ripetere le considerazioni, alle quali abbiamo accennato or ora; si prova così che in tutto T_ε le derivate (44) esistono finite e sono di classe G.

---

[29] Cfr. (M_1), § 4, n. 1, TEOREMA V, pp. 403-415.

Poichè ε è positivo arbitrario, riesce provata l'esistenza delle derivate (44) in ogni punto del campo T, per il quale sia $0 \leq x < a$. Tenendo poi conto di alcune disuguaglianze dimostrate in (M_1) (30), si prova che quando il punto $(x, y_1, \dots, y_h)$ appartiene al campo T e tende ad un punto $(a, y_1^{(0)}, \dots, y_h^{(0)})$ pure appartenente al campo T (31), ognuna delle derivate (44) tende ad un limite determinato e finito. Tali derivate possono dunque essere definite anche nel punto $(a, y_1^{(0)}, \dots, y_h^{(0)})$; utilizzando di nuovo le disuguaglianze citate in (30), si può dimostrare che le derivate (44) sono di classe G in tutto il campo T.

d) Poichè le derivate (44) esistono e sono continue e anzi di classe G in tutto T, si verifica facilmente che il secondo membro di ognuna delle (VI) è funzione continua nel complesso delle variabili in ogni punto del campo T, e poichè tale è anche il primo membro, segue che le (VI) valgono identicamente in T, e le (I) valgono in quasi tutti i punti di tutte le intersezioni del campo T con una retta $y_1 = \text{cost.}, \dots, y_h = \text{cost.}$

5. Osservazioni.

a) Valgano le ipotesi dei Teoremi I e II circa le funzioni

$$\varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m),\ f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m),\ (r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m);$$

siano a^*, b_r^*, $(r = 1, 2, \dots, h)$, costanti soddisfacenti le

$$0 < a^* \leq a_0;\ 0 < b_r^* \leq b_r^{(0)};\ \int_0^{a^*} M_r(t)\,dt \leq b_r^*,\ (r = 1, 2, \dots, h).$$

Si consideri il campo

$$T^* :\quad 0 \leq x \leq a^*,\ -b_r^* + \int_0^x M(t)\,dt \leq y_r \leq b_r^* - \int_0^x M_r(t)\,dt,\ (r = 1, 2, \dots, h),$$

---

(30) Cfr. (M_1), § 4, n. 1, *d*), form. (35) p. 413, *g*) form. (40), p. 414, nelle quali (cfr anche ivi le osservazioni fatte nel capoverso *h*) pp. 414-415) si sopprima l'indice n.

(31) E' cioè

$$-b_r + \int_0^a M_r(t)\,dt \leq y_r^{(0)} \leq b_r - \int_0^a M_r(t)\,dt, \quad (r = 1, 2, \dots, h).$$

Per l'ipotesi fatta (45) esiste almeno un indice r_0, per il quale è $y_{r_0} = 0$.

e sia noto il sistema di funzioni

$$z_i = z_i^*(x, y_1, \dots, y_h), \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

definite in T^*, ivi di classe G e soddisfacenti quasi ovunque in T^* il sistema (I); allora se in tutto il campo

$$R^*: \qquad -b_r \leq y_r \leq b_r^*, \quad (r = 1, 2, \dots, h),$$

le funzioni

$$z_i^*(0, y_1, \dots, y_h) = \Phi_i^*(y_1, \dots y_h), \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

ammettono derivate $\dfrac{\partial \Phi_i^*}{\partial y_l}$, $(l = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m)$ le quali sono lipschitziane nel complesso delle variabili $y_1, \dots, y_h$ in tutto R^*, le funzioni $z_i = z_i^*(x, y_1, \dots y_h)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, ammettono in ogni punto di T^* finite le derivate

$$\frac{\partial z_i^*(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_l}, \quad (l = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m),$$

le quali sono di classe G in T^*, e le funzioni stesse soddisfano le (VI) identicamente in T^* (32).

b) Se valgono le ipotesi dei TEOREMI I e II e se inoltre le funzioni $\varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $(r = 1, 2, \dots, h;$ $i = 1, 2, \dots, m)$ sono continue nel complesso delle variabili nel campo C, allora, analogamente a quanto si è osservato in (M_1) (33), in ogni punto del campo T esistono finite anche le derivate $\dfrac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial x}$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, e tali derivate sono continue in T; le funzioni (II) soddisfano allora il sistema (I) identicamente in T, e risolvono il problema di CAUCHY anche nel senso classico.

Anche in questo caso vale, in particolare, l'osservazione fatta or ora in *a*).

---

(32) La dimostrazione di questo risultato è simile a quella sviluppata in (M_1), § 4, n. 2, *b*, pp. 415-416 (cfr. ivi la nota (40)).

(33) Cfr. (M_1), § 4, n. 3, TEOREMA VI, pp. 416-417.

§ 2.

SISTEMI SEMILINEARI

6. Teorema di esistenza e di unicità.

TEOREMA III « *Le funzioni* $\varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h)$, $f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $(r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m)$ *siano definite per ogni* x *dell'intervallo* $(0, a_0)$ *e, rispettivamente, per tutti i valori reali di* $y_1, \dots, y_h$ *e di* $y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m$. *Esistano* $m(h+1)+2$ *funzioni* $M_{ir}(x)$, $N_i(x)$, $(r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m)$, $L(x)$, $L_1(x)$, *definite in* $(0, a_0)$, *ivi quasi-continue, non negative e integrabili, tali che per quasi tutti gli* x *di* $(0, a_0)$ *valgano le*

$$(46)\qquad |\, \varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h) \,| \leq M_{ir}(x), \quad (r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m)$$

per tutte le h*-ple reali* $(y_1, \dots, y_h)$,

$$(47)\qquad |\, \varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h) - \varrho_{ir}(x, \overline{y}_1, \dots, \overline{y}_h) \,| \leq L(x) \sum_{s=1}^{h} |\, y_s - \overline{y}_s \,|,$$

$$(r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m),$$

per tutte le coppie di h*-ple reali* $(y_1, \dots, y_h)$, $(\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_h)$,

$$(48)\qquad |\, f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) \,| \leq N_i(x), \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

per tutte $(h+m)$*-ple reali* $(y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$,

$$(49)\qquad |\, f_i(x, y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m) - f_i(x, \overline{y}_1, \dots, \overline{y}_h; \overline{z}_1, \dots, \overline{z}_m) \,| \leq$$

$$\leq L(x) \left\{ \sum_{s=1}^{h} |\, y_s - \overline{y}_s \,| + \sum_{j=1}^{m} |\, z_j - \overline{z}_j \,| \right\}, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

per tutte le coppie di $(h+m)$*-ple reali* $(y_1, \dots, y_h; z_1, \dots, z_m)$, $(\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_h; \overline{z}_1, \dots, \overline{z}_m)$. *Le funzioni* $\Phi_i(y_1, \dots, y_h)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, *siano definite per tutti i valori reali delle variabili e siano lipschitziane nel complesso delle variabili. In queste ipotesi esiste uno e un solo sistema di funzioni*

$$(\mathrm{II})\qquad z_1 = z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m = z_m(x, y_1, \dots, y_h),$$

definite in tutto il campo

$$D_\infty^{(0)}: \qquad 0 \le x \le a_0, \ -\infty < y_1 < +\infty, \dots, -\infty < y_h < +\infty,$$

le quali sono di classe G *in* $D_\infty^{(0)}$, *soddisfano in quasi tutto* $D_\infty^{(0)}$ *il sistema semilineare*

$$\text{(I}'\text{)} \qquad \frac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial x} + \sum_{r=1}^{h} \varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h) \frac{\partial z_i(x, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_r} =$$

$$= f_i[x, y_1, \dots, y_h;\ z_1(x, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(x, y_1, \dots, y_h)], \ (i = 1, 2, \dots, m),$$

e soddisfano identicamente le

$$\text{(III)} \qquad z_i(0, y_1, \dots, y_h) = \Phi_i(y_1, \dots, y_h), \ (i = 1, 2, \dots, m) \text{»}.$$

a) L'unicità della soluzione (II) del problema di CAUCHY (in senso generalizzato) relativo al sistema (I′) segue come caso particolare del teorema di unicità dimostrato in (M_1) (34). L'esistenza di tale soluzione è provata (35), quando si siano costruiti m sistemi di funzioni

$$(50) \qquad g_{i1}(X;\ x, y_1, \dots, y_h), \dots, g_{ih}(X;\ x, y_1, \dots, y_h), \ (i = 1, 2, \dots, m),$$

definite nel campo

$$\Delta_\infty^{(0)}: \quad 0 \le X \le a_0, \ 0 \le x \le a_0, \ -\infty < y_1 < +\infty, \dots, -\infty < y_h < +\infty,$$

e ivi di classe $G^{[1]}$, e un sistema (II) di funzioni definite nel campo $D_\infty^{(0)}$ e ivi di classe G, in modo che le equazioni

$$\text{(IV}'\text{)} \qquad g_{ir}(X;\ x, y_1, \dots, y_h) = y_r - \int_X^x \varrho_{ir}[t, g_{is}(t;\ x, y_1, \dots, y_h)]\, dt,$$

$$(r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m),$$

---

(34) Cfr. (M_1), § 3, n. 2, TEOREMA IV, pp. 402-403.

(35) Cfr. (M_1), § 2, n. 2, TEOREMA I, pp. 371-380, e inoltre § 2, n. 3, TEOREMA II, pp. 380-395, e in particolare capoverso *a*), p. 381.

siano soddisfatte identicamenta in $\Delta_{\infty}^{(0)}$, e le

$$\text{(V)} \qquad z_i(x, y_1, \dots, y_h) = \Phi_i(g_{is}(0\,;\, x, y_1, \dots, y_h) +$$

$$+ \int_0^x f_i[X, g_{is}(X\,;\, x, y_1, \dots, y_h)\,;\, z_j(X\,;\, g_{is}(X\,;\, x, y_1, \dots, y_h)]\, dX, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

identicamente in $D_{\infty}^{(0)}$.

b) Per ogni indice i fissato tra i numeri 1, 2, ... , *m le* (IV′) *costituiscono un sistema di h equazioni differenziali ordinarie* (*scritte in forma integrale*) *nelle funzioni incognite* (50); le (46) e (47) assicurano che a tale sistema si possono applicare i teoremi di esistenza e di unicità di CARATHÉODORY [36]. Risultano così determinati gli m sistemi di funzioni (50), soddisfacenti le (IV′) nel campo $\Delta_{\infty}^{(0)}$.

c) Per costruire le funzioni (II), definite in $D_{\infty}^{(0)}$, ivi di classe G e soddisfacenti le (V), si segue un procedimento simile a quello tenuto in (M_1) § 2, n. 3, nella dimostrazione del TEOREMA II [37].

Sia n un intiero ≥ 2, e si ponga

$$\delta = \frac{a_0}{n}.$$

Per x appartenente all'intervallo $\left(-\frac{a_0}{2},\, 0\right)$ e per ogni h-*pla* reale $(y_1, \dots, y_h)$ si definiscano le funzioni $z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, mediante le

$$\text{(51)} \qquad z_i(x\,;\, y_1, \dots, y_h) = \Phi_i(y_1, \dots, y_h), \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

e in tutto $D_{\infty}^{(0)}$ si definiscano le funzioni $z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, mediante le

$$\text{(52)} \qquad z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h) = \Phi_i(g_{is}(0\,;\, x, y_1, \dots, y_h)) +$$

$$+ \int_0^x f_i[X, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h); z_j^{(n)}(X - \delta, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h))]\, dX, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

---

[36] C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Fünktionen*, Teubner, Leipzig, 1918; cfr. Kap. XI, pp. 665-688, e in particolare ivi n. 582, p. 672, n. 583, p. 674.

[37] Cfr. ivi in particolare capoverso *b*), pp. 381-385. Nel caso attuale il procedimento riesce notevolmente più semplice, perchè le funzioni (50) sono già note.

d) Le funzioni delle m successioni (ottenute per $i = 1, 2, \ldots, m$)

$$z_i^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_h) - \Phi_i(y_1, \ldots, y_h), \quad (n = 2, 3, \ldots), \tag{53}$$

sono equilimitate nel campo $D_\infty^{(0)}$.

Infatti per ipotesi esistono m costanti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, tali che

$$| \Phi_i(y_1, \ldots, y_h) - \Phi_i(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_h) | \leq \lambda_i \sum_{s=1}^{h} | y_s - \overline{y}_s |, \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{54}$$

per tutte le coppie di h-*ple* reali $(y_1, \ldots, y_h)$, $(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_h)$; dalle (46), (48), (52), (54), tenuto conto anche delle (IV′), segue

$$| z_i^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_h) - \Phi_i(y_1, \ldots, y_h) | \leq \int_0^x \left[\lambda_i \sum_{r=1}^{h} M_{ir}(t) + N_i(t) \right] dt \leq \tag{55}$$

$$\leq \int_0^{a_0} \left[\lambda_i \sum_{r=1}^{h} M_{ir}(t) + N_i(t) \right] dt, \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

in tutto $D_\infty^{(0)}$ e per qualsiasi intiero $n \geq 2$.

e) Per ogni n fissato, le funzioni $z_i^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_h)$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, sono lipschitziane in $y_1, \ldots, y_h$ con costante di LIPSCHITZ indipendente da x. Infatti se $(y_1, \ldots, y_h)$, $(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_h)$ sono due distinte h-ple reali, dalle (49), (52), (54) segue che per ogni x di $(0, a_0)$ è

$$\frac{| z_i^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_h) - z_i^{(n)}(x, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_h) |}{\sum_{s=1}^{h} | y_s - \overline{y}_s |} \leq \tag{56}$$

$$\leq \lambda_i \frac{\sum_{s=1}^{h} | g_{is}(0;\, x, y_1, \ldots, y_h) - g_{is}(0;\, x, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_h) |}{\sum_{s=1}^{h} | y_s - \overline{y}_s |} +$$

$$+ \int_0^x L_1(X) \frac{\sum_{s=1}^{h} | g_{is}(X;\, x, y_1, \ldots, y_h) - g_{is}(X;\, x, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_h) |}{\sum_{s=1}^{h} | y_s - \overline{y}_s |} \cdot \Bigg[1 +$$

$$+\left.\frac{\sum\limits_{j=1}^{m} | z_j^{(n)} (X-\delta, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h)) - z_j^{(n)} (X-\delta, g_{is}(X; x, \overline{y}, \dots, \overline{y})) |}{\sum\limits_{s=1}^{h} | g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h) - g_{is}(X; x, \overline{y}_1, \dots, \overline{y}_h) |}\right] dX,$$

$$(i = 1, 2, \dots, m).$$

Ma (38)

$$\frac{\sum\limits_{s=1}^{h} | g_{is}(X; x; y_1, \dots, y_h) - g_{is}(X; x, \overline{y}_1, \dots, \overline{y}_h) |}{\sum\limits_{s=1}^{h} | y_s - \overline{y}_s |} \leq \tag{57}$$

$$\leq e^{h\left|\int_X^x L(t)\,dt\right|} \leq e^{h\int_0^{a_0} L(t)\,dt}, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Sostituendo nelle (56) si ottengono le

$$\frac{| z_i^{(n)} (x, y_1, \dots, y_h) - z_i^{(n)} (x, \overline{y}_1, \dots, \overline{y}) |}{\sum\limits_{s=1}^{h} | y_s - \overline{y}_s |} \leq \lambda_i\, e^{h\int_0^x L(t)\,dt} + \tag{58}$$

$$+\int_0^x L_1(X) e^{h\int_X^x L(t)\,dt} \left(1 + \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} |z_j^{(n)}(X-\delta, g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h)) - z_j^{(n)}(X-\delta, g_{is}(X; x, \overline{y}_1, \dots, \overline{y}_h))|}{\sum\limits_{s=1}^{h} | g_{is}(X; x, y_1, \dots, y_h) - g_{is}(X; x, \overline{y}_1, \dots, \overline{y}_h) |}\right) dX,$$

$$(i = 1, 2, \dots, m).$$

Per $0 \leq x \leq \delta$, tenendo conto delle (51) e (54), e posto

$$K = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i. \tag{59}$$

---

(38) Cfr. (M_1), § 1, n. 1, *a*) LEMMA I, pp. 360-362 form. (4); nel caso attuale si tenga conto delle (IV'), (46), (47).

le (58) divengono

$$\frac{|z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h) - z_i^{(n)}(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h)|}{\sum_{s=1}^{h} |y_s - \bar{y}_s|} \leq \lambda_i \, e^{h\int_0^x L(t)\,dt} +$$

$$+ (1 + K) \int_0^x L_1(X) e^{h\int_X^x L(t)\,dt} dX \leq e^{h\int_0^\delta L(t)\,dt} \left[\lambda_i + (1 + K) \int_0^\delta L_1(X)\,dX\right],$$

$$(i = 1, 2, \dots, m).$$

Dimostrato così che le funzioni $z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h)$, $(i = 1, \dots, m)$, sono lipschitziane rispetto alle variabili $y_1, \dots, y_h$ nel campo

$$0 \leq x \leq \delta, \quad -\infty < y_1 < +\infty, \dots, -\infty < y_h < +\infty,$$

con ragionamento analogo si prova successivamente che tali funzioni sono lipschitziane rispetto alle variabili $y_1, \dots, y_h$ nel campo

$$\delta \leq x \leq 2\delta, \quad -\infty < y_1 < +\infty, \dots, -\infty < y_h < +\infty,$$

. . . .

e infine nel campo

$$(n-1)\,\delta \leq x \leq a_0. \quad -\infty < y_1 < +\infty, \dots, -\infty < y_h < +\infty.$$

Si possono dunque determinare m costanti $\lambda_i^{(n)}$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, tali che per ogni x di $(0, a_0)$ e per tutte le coppie di *h-ple* reali $(y_1, \dots, y_h)$, $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h)$ sia

$$(58') \qquad |z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h) - z_i^{(n)}(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y})| \leq \lambda_i^{(n)} \sum_{s=1}^{h} |y_s - \bar{y}_s|, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

f) Le funzioni delle m successioni (53) per ogni x fissato di $(0, a_0)$ sono equilipschitziane in $y_1, \dots, y_h$ (con costante di Lipschitz *indipendente da x).*

Si indichi infatti con $U^{(n)}(x)$ il limite superiore (che, per le (58′), è certo finito) dell'espressione

$$(60) \qquad \frac{\sum_{i=1}^{m} | z_i^{(n)}(X, y_1, \dots, y_h) - z_i^{(n)}(X, \overline{y}_1, \dots, \overline{y}_h) |}{\sum_{s=1}^{h} | y_s - \overline{y}_s |}$$

nel campo [39]

$$0 \leq X \leq x, \; -\infty < y_1 < +\infty, \dots, -\infty < y_h < +\infty .$$

La funzione $U^{(n)}(x)$ è in $(0, a_0)$ limitata, non negativa e non decrescente; dalle (58) seguono le

$$(61) \qquad \frac{| z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h) - z_i^{(n)}(x, \overline{y}_1, \dots, \overline{y}_h) |}{\sum_{s=1}^{h} | y_s - \overline{y}_s |} \leq \lambda_i \, e^{h\int_0^x L(t)\, dt} +$$

$$+ \int_0^x L_1(X) \, e^{h\int_X^x L(t)\, dt} (1 + U^{(n)}(X)) \, dX, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Sommando le m relazioni (61) e tenendo conto della (59), si ottiene la

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} | z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h) - z_i^{(n)}(x, \overline{y}_1, \dots, \overline{y}_h) |}{\sum_{s=1}^{h} | y_s - \overline{y}_s |} \leq K \, e^{h\int_0^x L(t)\, dt} +$$

$$+ m \int_0^x L_1(X) \, e^{h\int_X^x L(t)\, dt} (1 + U^{(n)}(X)) \, dX,$$

dalla quale, tenendo conto del modo, in cui è stata definita la funzione

[39] Non ha importanza il fatto che l'espressione (60) sia indeterminata per $y_1 = \overline{y}_1, \dots, y_h = \overline{y}_h$.

$U^{(n)}(x)$, segue la

$$U^{(n)}(x) \leq K e^{h\int_0^x L(t)\,dt} + m \int_0^x L_1(X)\, e^{h\int_X^x L(t)\,dt} (1 + U^{(n)}(X))\, dX,$$

che si può anche scrivere

$$e^{-h\int_0^x L(t)\,dt} U^{(n)}(x) \leq K + m \int_0^x L_1(X)\, e^{-h\int_0^X L(t)\,dt} (1 + U^{(n)}(X))\, dX.$$

Posto

$$V^{(n)}(x) = e^{-h\int_0^x L(t)\,dt} U^{(n)}(x), \tag{62}$$

si ottiene la disuguaglianza

$$0 \leq V^{(n)}(x) \leq K + m \int_0^x L_1(X)\, e^{-h\int_0^X L(t)\,dt} dX + m \int_0^x L_1(X)\, V^{(n)}(X)\, dX.$$

Da questa, per una nota estensione del LEMMA di GRONWALL [40], segue

$$0 \leq V^{(n)}(x) \leq K e^{m\int_0^x L_1(t)\,dt} + m \int_0^x e^{m\int_X^x L_1(t)\,dt} L_1(X)\, e^{-h\int_0^X L(t)\,dt} dX,$$

Tenuto conto della (62) e posto

$$U(x) = K e^{\int_0^x [mL_1(t) + h\,L(t)]\,dt} + m \int_0^x L_1(X)\, e^{\int_X^x [mL_1(t) + h\,L(t)]\,dt} dX,$$

---

[40] Cfr. G. SANSONE e R. CONTI, *Equazioni differenziali non lineari*, Monografie matematiche del C. N. R., Ediz. Cremonese, Roma 1956, Cap. I, § 2, n. 1, pp. 15-16. Nel caso presente il LEMMA di GRONWALL si può applicare, senza preoccuparsi se la funzione $V^{(n)}(x)$ sia o no continua in $(0, a_0)$.

si trova che in tutto $(0, a_0)$ è

$$0 \leq U^{(n)}(x) \leq U(x)$$

Dalle (61) seguono allora le

$$(63) \qquad \frac{| z_i^{(n)}(x, y_1, \dots, y_h) - z_i^{(n)}(x, \overline{y}_1, \dots, \overline{y}_h) |}{\sum_{s=1}^{h} | y_s - \overline{y}_s |} \leq \lambda_i \, e^{h\int_0^x L(t)\,dt} +$$

$$+ \int_0^x L_1(X)\, e^{h\int_X^x L(t)\,dt} (1 + U(X))\, dX \leq e^{h\int_0^{a_0} L(t)\,dt} \left[\lambda_i + \int_0^{a_0} L_1(X)(1 + U(X))\, dX \right] = H_i,$$

$$(i = 1, 2, \dots, m).$$

Le (63) provano quanto abbiamo asserito al principio del presente capoverso.

g) Le funzioni delle m successioni (53), *per ogni h-pla reale fissata* $(y_1, \dots, y_h)$, *sono equiassolutamente continue in x nell'intervallo* $(0, a_0)$. Se x', x'' sono due punti di $(0, a_0)$ ed è p. es., $x' < x''$, dalle (48), (49), (52), (54) con calcoli evidenti seguono le

$$| z_i^{(n)}(x', y_1, \dots, y_h) - z_i^{(n)}(x'', y_1, \dots, y_h) | \leq \lambda_i \sum_{s=1}^{h} | g_{is}(0;\, x', y_1, \dots, y_h) - g_{is}(0;\, x'', y_1, \dots, y_h) | +$$

$$+ \int_{x'}^{x''} N_i(t)\, dt + \int_0^{a^0} L_1(X) \cdot \left[\sum_{s=1}^{h} | g_{is}(X;\, x', y_1, \dots, y_h) - g_{is}(X;\, x'', y_1, \dots, y_h) | \right] \times$$

$$\times \left[1 + \frac{\sum_{j=1}^{m} | z_j^{(n)}(X - \delta, g_{is}(X;\, x', y_1, \dots, y_h)) - z_j^{(n)}(X - \delta, g_{is}(X;\, x'', y_1, \dots, y_h)) |}{\sum_{s=1}^{h} | g_{is}(X;\, x', y_1, \dots, y_h) - g_{is}(X;\, x'', y_1, \dots, y_h) |} \right] dX,$$

$$(i = 1, 2, \dots, m),$$

cioè, tenuto conto delle (63),

$$(64) \qquad | z_i^{(n)}(x', y_1, \dots, y_h) - z_i^{(n)}(x'', y_1, \dots, y_h) | \leq$$

$$\leq \lambda_i \sum_{s=1}^{h} | g_{is}(0\,;\ x', y_1, \ldots, y_h) - g_{is}(0\,;\ x'', y_1, \ldots, y_h) | + \int_{x'}^{x''} N_i(t)\, dt +$$

$$+ \left(1 + \sum_{j=1}^{m} H_j\right) \cdot \int_0^{a_0} L_1(X) \cdot \left[\sum_{s=1}^{h} | g_{is}(X;\ x', y_1, \ldots, y_h) - g_{is}(X;\ x'', y_1, \ldots, y_h) | \right] dX,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Tenuto conto delle (46) e (47) è [41]

$$\sum_{r=1}^{h} | g_{is}(X;\ x', y_1, \ldots, y_h) - g_{is}(X;\ x'', y_1, \ldots, y_h) | \leq e^{h\int_0^{a_0} L(t)\, dt} \sum_{s=1}^{h} \int_{x'}^{x''} M_{is}(t)\, dt,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Da queste e dalle (64) seguono le

$$| z_i^{(n)}(x', y_1, \ldots, y_h) - z_i^{(n)}(x'', y_1, \ldots, y_h) | \leq \int_{x'}^{x''} N_i(t)\, dt +$$

$$+ \left[\lambda_i + \left(1 + \sum_{j=1}^{m} H_j\right) \int_0^{a''} L_1(t)\, dt \right] e^{h\int_0^{a_0} L(t)\, dt} \sum_{s=1}^{h} \int_{x'}^{x''} M_{is}(t)\, dt, \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Da queste ultime disuguaglianze e dalla definizione di assoluta continuità segue quanto è asserito al principio del presente capoverso.

h) Dai risultati dei capoversi *d*), *f*), *g*) segue che *le m successioni* (53) *sono costituite di funzioni equilimitate ed equicontinue nel campo* $D_\infty^{(0)}$. In modo noto [42] si prova l'esistenza delle funzioni (II), che sono definite nel campo $D_\infty^{(0)}$, sono ivi di classe G, e soddisfano identicamente le (V) nel campo $D_\infty^{(0)}$. Ne segue che le funzioni (II) soddisfano il sistema (I′) in quasi tutto $D_\infty^{(0)}$ e le (III) identicamente in $y_1, \ldots, y_h$ [43].

---

[41] Cfr. (M_1), § 1, n. 1, *b*), LEMMA II, pp. 362-363, form. (9).
[42] Cfr. anche (M_1), § 2, n. 3, *h*), pp. 393-395.
[43] Cfr. (M_1), § 2, n. 2, TEOREMA I, parte II), p. 373 e pp. 377-380.

7. Osservazioni.

a) La soluzione (II) del problema di CAUCHY (inteso in senso generalizzato) relativo al sistema (I′), della quale nel TEOREMA III sono state dimostrate l'esistenza e l'unicità, dipende con continuità dai valori iniziali in tutto $D_\infty^{(0)}$ (44).

b) Le funzioni (II), per quasi tutte le *h-ple* reali $(y_1, \dots, y_h)$, soddisfano per ogni x di $(0, a_0)$ il sistema

$$\text{(VI}'\text{)} \quad z_i(x, y_1, \dots, y_h) = \Phi_i(y_1, \dots, y_h) + \int_0^x \Big[- \sum_{r=1}^h \varrho_{ir}(X, y_1, \dots, y_h) \frac{\partial z_i(X, y_1, \dots, y_h)}{\partial y_r} +$$

$$+ f_i(X, y_1, \dots, y_h;\, z_1(X, y_1, \dots, y_h), \dots, z_m(X, y_1, \dots, y_h)) \Big] dX, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

8. Un ulteriore teorema.

TEOREMA IV « *Le costanti* a_0, $b_r^{(0)}$, b_r, $(r = 1, 2, \dots, h)$, Ω_i, $(i = 1, 2, \dots, m)$, *e le funzioni* $M_r^{(0)}(x)$, $M_r(x)$, $(r = 1, 2, \dots, h)$, $N_i(x)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$, $L(x)$ *siano quelle stesse introdotte nel* TEOREMA I, *e soddisfino le condizioni* (1), (2), (7); *sia inoltre* $L_1(x)$ *una ulteriore funzione, definita in* $(0, a_0)$, *ivi quasi-continua, non negativa e integrabile. Le funzioni* $\varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h)$, $(r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m)$ *sono definite nel campo*

$$T^{(0)}: \ 0 \leq x \leq a_0, \ -b_r^{(0)} + \int_0^x M_r^{(0)}(t)\, dt \leq y_r \leq b_r^{(0)} - \int_0^x M_r^{(0)}(t)\, dt, \ (r = 1, 2, \dots, h),$$

e le funzioni $f_i(x, y_1, \dots, y_h;\ z_1, \dots, z_m)$ *siano definite nel campo* C, *indicato nel* TEOREMA I. *Per quasi tutti gli* x *di* $(0, a_0)$ *sia*

$$\text{(3}'\text{)} \qquad |\, \varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h) \,| \leq M_r(x), \ (r = 1, 2, \dots, h;\ i = 1, 2, \dots, m),$$

per tutte le h-ple reali $(y_1, \dots, y_h)$, *tali che il punto* $(x, y_1, \dots, y_h)$ *appartenga*

---

(44) Cfr. (M_1), § 3, n. 1, TEOREMA III, pp. 397-402.

al campo $T^{(0)}$,

(5′) $$| \varrho_{ir}(x, y_1, \dots, y_h) - \varrho_{ir}(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h) | \leq L(x) \sum_{s=1}^{h} | y_s - \bar{y}_s | ,$$

$$(r = 1, 2, \dots, h ; \; i = 1, 2, \dots, m).$$

per tutte le coppie di h*-ple reali* $(y_1, \dots, y_h)$, $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h)$, *tali che i punti* $(x, y_1, \dots, y_h)$, $(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h)$ *appartengano al campo* $T^{(0)}$,

(4) $$| f_i(x, y_1, \dots, y_h ; z_1, \dots, z_m) | \leq N_i(x), \; (i = 1, 2, \dots, m),$$

per tutte le $(h + m)$*-ple reali, tali che il punto* $(x, y_1, \dots, y_h ; z_1, \dots, z_m)$ *appartenga al campo* C,

(6′) $$| f_i(x, y_1, \dots, y_h ; z_1, \dots, z_m) - f_i(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h ; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m) | \leq$$

$$\leq L_1(x) \left\{ \sum_{s=1}^{h} | y_s - \bar{y}_s | + \sum_{j=1}^{m} | z_j - \bar{z}_j | \right\} ;$$

per tutte le coppie di $(h+m)$*-ple reali* $(y_1, \dots, y_h ; z_1, \dots, z_m)$, $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h ; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$, *tali che i punti* $(x, y_1, \dots, y_h ; z_1, \dots, z_m)$, $(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_h ; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m)$ *appartengano al campo* C.

Le funzioni $\Phi_i(y_1, \dots, y_h)$ *siano definite nel campo*

R: $$- b_r \leq y_r \leq b_r, \; (r = 1, 2, \dots, h),$$

siano ivi lipschitziane nel complesso delle variabili e soddisfino le (8) *e* (9).

Sia allora a *il massimo numero* $(\leq a_0)$ *soddisfacente tutte le disuguaglianze* [45]

(11₂) $$\int_0^a N_i(t)\, dt \leq \Omega_i - \mu_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

(11₃) $$\int_0^a M_r(t)\, dt \leq b_r, \quad (r = 1, 2, \dots, h),$$

---

[45] Confrontando l'enunciato del presente TEOREMA IV con quello del TEOREMA I si vede che nel caso attuale, in cui il sistema è semilineare, non interviene la condizione (11_1) e ciò perchè dal TEOREMA III segue che per il sistema semilineare (I′) è $a' = a_0$. Si tengano presenti anche le osservazioni fatte nella nota [15].

mentre

$$\int_0^x M_r(t)\,dt < b_r\,, \quad (r = 1, 2, \dots, h), \text{ per } 0 \leq x < a.$$

Esiste allora uno e un solo sistema di funzioni (II), *definite nel campo*

$$T: \qquad 0 \leq x \leq a, \; - b_r + \int_0^x M_r(t)\,dt \leq y_r \leq b_r - \int_0^x M(t)\,dt, \; (r = 1, 2, \dots, h),$$

ivi di classe G, soddisfacenti il sistema (I′) *in quasi tutto T, e soddisfacenti le* (III) *per tutte le h-ple reali* $(y_1, \dots, y_h)$, *appartenenti al campo R* ».

La dimostrazione del presente TEOREMA IV è simile a quello del TEOREMA I; nel caso attuale si utilizza il risultato del precedente TEOREMA III, mentre nella dimostrazione del TEOREMA I si erano utilizzati i risultati conseguiti in (M_1). Anche nel caso attuale valgono, in particolare, le osservazioni fatte nel n. 3, *a*), *b*); in tutti i punti di quasi tutte le intersezioni del campo T con una retta $y_1 =$ cost., ... , $y_h =$ cost. le funzioni (II) soddisfano il sistema (VI′). Si possono pure sviluppare considerazioni del tipo di quelle fatte nel n. 3, *c*).