ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SERGIO CAMPANATO

Sui problemi al contorno per sistemi di equazioni differenziali lineari del tipo dell'elasticità (parte II)

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 13, nº 3 (1959), p. 275-302
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1959_3_13_3_275_0>

SUI PROBLEMI AL CONTORNO PER SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL TIPO DELL'ELASTICITÀ - (parte II)

di SERGIO CAMPANATO (Genova)

Questo lavoro costituisce la seconda parte di una Memoria dallo stesso titolo, recentemente pubblicata su questa rivista, nella quale sono state trattate le questioni esistenziali relative ai problemi al contorno misto e di trasmissione per i sistemi di equazioni differenziali lineari, che generalizzano il sistema dell'elasticità,

$$A(u) = -\sum_{1}^{n}{}_{hk}\, S_h^*\,(C_{hk}\, S_k(u))\,, \tag{I.1}$$

dove $S_k(u) \equiv \{s_{1k}(u), \dots, s_{mk}(u)\}$, con $s_{hk}(u) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_h}{\partial x_k} + \dfrac{\partial u_k}{\partial x_h}\right)$, e $S_k^*(u)$ è l'aggiunto formale di $S_k(u)$.

A quella Memoria facciamo riferimento per quanto riguarda la nomenclatura, la bibliografia e ogni richiamo necessario [1].

Questo lavoro consta di tre capitoli. Nel primo ci occuperemo della coercività (cfr. n. 1) delle forme

$$a(u, v) = \int_\Omega \Sigma_{hk}\, C_{hk}\, S_k(u) \times \overline{S_h(v)}\, dx \tag{I.2}$$

e

$$\tilde{a}(u, v) = \int_\Omega \Sigma_{hk}\, A_{hk}\, D_k\, u \times \overline{D_h\, v}\, dx \tag{I.3}$$

associate all'operatore $A(u)$. Nel secondo e terzo capitolo ci occuperemo rispettivamente dei teoremi esistenziali e della teoria di Riesz-Fredholm per i problemi al contorno relativi all'operatore $A(u) + \lambda u$ e della regolarizzazione delle soluzioni «deboli» dei problemi (3,I) (4,I) (6.I) e (6.II) di (N).

---

(1) Per brevità nel seguito si farà riferimento a quella Memoria con il simbolo (N). I numeri fra [ ] si riferiscono alla bibliografia riportata in (N).

CAP. I

COERCIVITÀ DELLE FORME $\tilde{a}(u, v)$ E $a(u, v)$.

1. La trattazione svolta nei nn. 3 e 4 di (N) ha messo in rilievo l'importanza di assegnare condizioni algebriche sull'operatore $A(u)$ e condizioni di regolarità sull'aperto Ω atte ad assicurare che le forme $a(u, v)$ e $\tilde{a}(u, v)$ soddisfano relazioni quali le (3.5), (3.6), (4.2), (4.3), (4.4) di (N). Queste relazioni non solo, come si è visto, sono alla base dei teoremi esistenziali, ma sono di essenziale importanza anche per la successiva regolarizzazione delle soluzioni «deboli» [cfr. [12] e il n. 6].

Condizioni algebriche per la validità delle relazioni (3.6), (4.3), (4.4) di (N) sono già state date nei nn. 3 e 4 di (N) [cfr. le (3.7) e (4.6) - (N)].

Riprenderemo ora il problema per quanto riguarda la forma $\tilde{a}(u, v)$ e cercheremo di stabilire delle condizioni sufficienti per la validità delle (4.2), (4.3) e (4.4) - (N); da quanto diremo però si potranno trarre risultati anche per la forma $a(u, v)$ e le maggiorazioni (3.5) e (3.1) - (N).

Secondo una terminologia introdotta da Aronszajn [2], considerato il sottoinsieme di $C^1(\Omega)^n$ dei vettori che appartengono a $\mathcal{D}_0(\overline{\Omega}, R_n)^n$ *diremo che la forma* $\tilde{a}(u, v)$ *è coerciva su* $\mathcal{D}_0(\overline{\Omega}, R_n)^n$ *se esistono due costanti* c *e* c_0, $c > 0$ *e* $c_0 \geq 0$, *tali che*

$$\mathcal{R}e\, \tilde{a}(u, u) \geq c \| u \|^2_{H^1(\Omega)^n} - c_0 \| u \|^2_0 \tag{1.1}$$

per ogni $u \in \mathcal{D}_0(\overline{\Omega}, R_n)^n$; *diremo poi che* $\tilde{a}(u, v)$ *è fortemente coerciva su* $\mathcal{D}_0(\overline{\Omega}, R_n)^n$ *se* $\lambda_0 = 0$ *cioè se per ogni* $u \in \mathcal{D}_0(\overline{\Omega}, R_n)^n$

$$\mathcal{R}e\, \tilde{a}(u, u) \geq c \| u \|^2_{H^1(\Omega)^n} \tag{1.2}$$

Poichè, se le maggiorazioni (1.1) e (1.2) valgono in $\mathcal{D}_0(\overline{\Omega}, R_n)^n$, esse valgono necessariamente anche in W^n (chiusura di $\mathcal{D}_0(\overline{\Omega}, R_n)^n$ rispetto alla norma di $H'(\Omega)^n$) *nel seguito, per brevità, parleremo spesso di coercività e coercività forte di* $\tilde{a}(u, v)$ *su* W^n.

Osserviamo che dalla (1.2) *segue immediatamente la* (4.2) di (N).

---

[2] N. ARONSZAJN — « *On coercive integro — differential quadratic forms,* » Conference on Partial Diff. Equations, University of Kansas, 1954, Technical Report No. 14 pp. 94 106.

Ci occuperemo, ora, della coercività della forma $\tilde{a}(u, v)$ su W^n; osserveremo alla fine qualche caso in cui si ha anche la coercività forte di $\tilde{a}(u, v)$ su W^n.

Il procedimento che applicheremo è una estensione ai problemi al contorno misto e di trasmissione per operatori vettoriali $A(u)$ del metodo esposto recentemente da *S.* Agmon in [1]; i risultati che daremo sono analoghi a quelli ottenuti da quell'Autore per una singola equazione differenziale lineare di ordine $2m$.

Premettiamo in questo numero alcuni teoremi relativi alla coercività di forme assegnate su una semiretta, su un semispazio e su una semisfera, che ci saranno utili successivamente.

Sia x una variabile reale e R_1^+ il semiasse delle $x \geq 0$. Indichiamo con $\mathcal{E}_1^+$ la classe dei vettori complessi, ad n componenti, di classe 1 in R_1^+ e ivi di quadrato sommabile con la loro derivata prima: $\mathcal{E}_1^+ \equiv C^1(R_1^+)^n \cap H^1(R_1^+)^n$. Per ogni coppia di vettori $u, v \in \mathcal{E}_1^+$ consideriamo la forma (3)

$$\Gamma(u, v) = \int_0^{+\infty} \sum_{0}^{1}{}_{hk} \Gamma_{hk}\, D^k u \times \overline{D^h u}\, dx \tag{1.3}$$

dove le Γ_{hk} sono matrici costanti complesse di ordine n.

TEOREMA (1. I) — *Condizione sufficiente perchè*

$$\mathcal{R}e\, \Gamma(u, u) \geq c \, \| u \|^2_{H^1(R_1^+)^n} \tag{1.4}$$

($c > 0$ indipendente da u) *nella classe dei vettori $u \in \mathcal{E}_1^+$ nulli per $x = 0$, è che per ogni numero reale λ e per ogni vettore complesso $\eta \equiv (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$* risulti

$$\mathcal{R}e \sum_{0}^{1}{}_{hk} i^{(k-h)} \Gamma_{hk} \lambda^{h+k} \eta \times \bar{\eta} \geq c(1 + \lambda^2) \sum_{1}^{n}{}_{i} |\eta_i|^2 . \tag{1.5}$$

Infatti se $u \in \mathcal{E}_1^+$, ed è nullo per $x = 0$, si può prolungare su tutto l'asse reale R_1^+ ponendo $u \equiv 0$ per $x < 0$ in modo che $u \in H^1(R_1)^n$ e il vettore u, così prolungato, ammette un trasformato di Fourier $\widehat{u}(\xi)$. Allora

(3) $D^k u = \dfrac{d^k u}{dx^k}$.

nell'ipotesi che valga la (1.5) si ha:

$$\Re e\, \Gamma(u, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Re e \sum_{0}^{1}{}_{hk} \Gamma_{hk}\, i^{(k-h)}\, \xi^{h+k}\, \widehat{u} \times \overline{\widehat{u}}\, d\,\xi \geq$$

$$\geq c \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \xi^2)\, |\, \widehat{u}(\xi)\, |^2\, d\,\xi = c\, \|\, u\, \|_{H^1(R_1^+)^n}$$

TEOREMA (1. II) — *Condizione sufficiente perchè valga la* (1.4) *in* $\mathcal{E}_1^+$, *è che valga la* (1.5) *e inoltre*

$$\Re e\, \Gamma(u, u) > 0 \tag{1.6}$$

per ogni $u \in \mathcal{E}_1^+$, *non identicamente nullo, soluzione del sistema*

$$\sum_{0}^{1}{}_{hk}\, i^{-2h} (\Gamma_{hk} + \overline{\Gamma}_{kh})\, D^{h+k} u = 0 \tag{1.7}$$

Infatti l'ipotesi (1.5) implica che per un λ reale qualunque sia

$$\det \left\| \sum_{0}^{1}{}_{hk}\, i^{(k-h)} (\Gamma_{hk} + \overline{\Gamma}_{kh})\, \lambda^{(h+k)} \right\| > 0 \tag{1.8}$$

per cui se cerchiamo un sistema fondamentale di soluzioni di (1.7) del tipo $\beta\, e^{i\lambda x}$, con β vettore costante e λ numero complesso, l'equazione « caratteristica » cui si perviene non ha, in virtù di (1.8), radici reali.

Siano allora $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ le radici dell'equazione caratteristica aventi parte immaginaria positiva, di molteplicità rispettivamente $p_1, p_2, \dots, p_h$ con $p_1 + p_2 + \dots + p_h = n$. Ogni vettore $v \in \mathcal{E}_1^+$ soluzione di (1.7) si può scrivere nella forma

$$v = \sum_{1}^{h}{}_{j}\, c_j\, \alpha_j(x)\, e^{i\lambda_j x} \tag{1.9}$$

con c_j costanti numeriche ed α_j vettori a componenti polinomiali di grado (p_{j-1}) $(j = 1, 2, \dots, h)$. Dimostriamo che ogni vettore $u \in \mathcal{E}_1^+$ si può decomporre nel seguente modo:

$$u = u_0 + v \tag{1.10}$$

con v del tipo (1.9) e $u_0 \in \mathcal{E}_1^+$ e nullo per $x = 0$.

Infatti il vettore v si determina imponendo che sia del tipo (1.9) e che soddisfi alla condizione

$$v(0) = \sum_1^h {}_j\, c_j\, \alpha_j(0) = u(0) \tag{1.11}$$

Si osservi che la (1.11) determina univocamente le costanti c_j ($j = 1, 2, \dots, n$) in quanto la matrice $\| \alpha_{ji}(0) \|$ ($i, j = 1, 2 \dots h$) ha caratteristica h altrimenti esisterebbe un vettore v, non nullo, del tipo (1.9), soddisfacente la condizione $v(0) = 0$, il che è assurdo.

Determinato v nel modo ora detto, il vettore u_0 si ottiene per differenza:

$$u_0 = u - v$$

Osserviamo ora che la condizione (1.6) implica che

$$\sum_1^h {}_{sj}\, \mathcal{R}e\, \Gamma(\chi_s e^{i\lambda_s x}, \alpha_j e^{i\lambda_j x})\, c_s \overline{c_j} > 0$$

ossia il primo membro è una forma hermitiana definita positiva nelle $\{c_j\}$ ($j = 1, 2 - h$). Quindi per ogni v del tipo (1.9) si avrà:

$$\mathcal{R}e\, \Gamma(v, v) \geq c_1 \sum_1^h {}_j\, | c_j |^2 \geq c_2 \| v \|_{H^1(CR_1^+)^n} \tag{1.12}$$

Tenuto conto della (1.10) si ha per ogni $u \in \mathcal{E}_1^+$

$$\mathcal{R}e\, \Gamma(u, u) = \mathcal{R}e\, \Gamma(u_0, u_0) + \mathcal{R}e\, \Gamma(v, v) + 2\, \mathcal{R}e\, \Gamma(u_0, v)$$

e poichè, come si prova con immediate integrazioni per parti, $\mathcal{R}e\, \Gamma(u_0, v) = 0$ si ha la tesi in virtù della (1.12) e del teorema (1. I).

OSSERVAZIONE. — Alla condizione (1.6) si può dare una forma algebrica.

Supponiamo per semplicità che le radici dell'equazione « caratteristica » siano semplici (a un risultato analogo, sia pure più complicato, si arriva anche nell'ipotesi contraria) e siano $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ quelle a parte immaginaria positiva. Ogni $v \in \mathcal{E}_1^+$ soluzione di (1.7) si potrà scrivere nella forma

$$v = \sum_i^n {}_j\, c_j\, \chi_j\, e^{i\lambda_j x}$$

con c_j costanti arbitrarie e α_j vettori costanti opportuni. Di qui, tenuto conto che

$$\int_0^{+\infty} e^{i(\lambda_r - \bar{\lambda}_h)x}\, dx = \frac{i}{\lambda_r - \bar{\lambda}_h}$$

si ha:

$$\mathcal{R}e\, \Gamma(v, v) = \sum_{1}^{n}{}_{jh} \frac{1}{\lambda_j - \bar{\lambda}_h} \sum_{0}^{1}{}_{kl}\, i^{-2k} (\Gamma_{kl} + \bar{\Gamma}_{lk})\, c_j \bar{c}_h \lambda_j^k \bar{\lambda}_h^l\, \alpha \times \bar{\alpha}_h \tag{1.13}$$

Quindi la (1.6) *squivale ad affermare che la* (1.13) *è* > 0 *per ogni vettore* $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *non nullo.*

Passiamo ora a forme, sempre a coefficienti costanti, assegnate in un semispazio ad $n > 1$ dimensioni. Indichiamo con R_n^+ il semispazio delle $x_n \geq 0$ e con $\mathcal{E}_n^+$ la classe di vettori u ad n componenti definiti in R_n^+ ivi di classe 1 e di quadrato sommabile con le derivate prime: $\mathcal{E}_n^+ \equiv C^1(R_n^+)^n \cap H^1(R_n^+)^n$.

In $\mathcal{E}_n^+$ consideriamo la forma

$$F(u, v) = \int_{R_n^+} \sum_{1}^{n}{}_{hk} F_{hk} D_k u \times \overline{D_h v}\, dx \tag{1.14}$$

dove le F_{hk} sono matrici costanti complesse di ordine n.

Dimostriamo il seguente teorema:

TEOREMA (1. III). *Condizione sufficiente perché valga la relazione*

$$\mathcal{R}e\, F(u, u) \geq \text{cost}\, \|u\|^2_{1, R_n^+}$$

per ogni $u \in \mathcal{E}_n^+$ *è che, per ogni vettore unitario reale* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$, *la forma*

$$F_\xi[f(t), f(t)] = \int_0^{+\infty} \Big[F_{nn} \frac{df}{dt} \times \frac{\overline{df}}{dt} - i \sum_{1}^{n-1}{}_h F_{hn} \xi_h \frac{df}{dt} \times \bar{f} + \tag{1.15}$$

$$+ i \sum_{1}^{n-1}{}_k F_{nk} \xi_k f \times \frac{\overline{df}}{dt} + \sum_{1}^{n-1}{}_{hk} F_{hk} \xi_h \xi_k f \times \bar{f} \Big] dt$$

verifichi la relazione (1.4) *per ogni* $f(t) \in \mathcal{E}_1^+$ *uniformemente rispetto a* ξ (4).

(4) Questa idotesi non è essenziale e si può eliminare mediante il ragionamento esposto da Agmon in [1] n. 5.

Indichiamo con p e q due n-ple di numeri interi positivi, la forma (1.14) si può anche scrivere

$$F(u, v) = \int_{R_n^+} \sum_{|p|=|q|=1} F_{pq} D^q u \times \overline{D^p v}\, dx$$

dove $F_{pq} = F_{hk}$ per $p = \{\delta_i^h\}$ e $p = \{\delta_i^k\}$. Poniamo ancora $p^* = (p_1, p_2, \ldots$ $\ldots, p_{n-1})$, $q^* = (q_1, q_2, \ldots, q_{n-1})$, $x^* = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, $t = x_n$ sicchè il generico punto $x \in R_n$ si potrà scrivere $x \equiv (x^*, t)$; sia infine R_{n-1} la varietà $t = 0$, cioé la varietà dei punti x^*.

Per ogni vettore $u(x) = u(x^*, t) \in \mathcal{E}_n^+$ indichiamo con $\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{u}(\xi_1, \ldots$ $\ldots, \xi_{n-1}, t)$ Il suo trasformato di Fourier rispetto alle variabili $(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_{n-1})$ cioé rispetto a x^*.

Si ha allora per la formula di Parseval:

$$\Re e\, F(u, u) = \Re e \int_{R_n^+} \sum_{|p|=|q|=1} F_{pq} D^q u \times \overline{D^p u}\, dx =$$

$$= \Re e \int_0^{+\infty} dt \int_{R_{n-1}} \sum_{|p|=|q|=1} F_{pq} D^{q^*} \frac{\partial^{q_n} \widehat{u}}{\partial t^{q_n}} \times \overline{D^{p^*} \frac{\partial^{p_n} \widehat{u}}{\partial t^{p_n}}}\, d\xi =$$

$$= \Re e \int_0^{+\infty} dt \int_{R_{n-1}} \sum_{|p|=|q|=1} F_{pq} \xi^{q^*} \xi^{p^*} \frac{\partial^{q_n} \widehat{u}(\xi, t)}{\partial t^{q_n}} \times \frac{\partial^{p_n} \overline{\widehat{u}}(\xi, t)}{\partial t^{p_n}}\, d\xi =$$

$$= \Re e \int_{R_{n-1}} F_\xi [\widehat{u}(\zeta, t), \widehat{u}(\xi, t)]\, d\xi = \Re e \int_{R_{n-1}} |\xi|\, F_{\frac{\xi}{|\xi|}} \left[\widehat{u}\left(\xi, \frac{t}{|\xi|}\right), \widehat{u}\left(\xi, \frac{t}{|\xi|}\right)\right] d\xi$$

dove $\dfrac{\xi}{|\xi|}$ è un vettore unitario, e, fissato ξ, $\widehat{u}\left(\xi, \dfrac{t}{|\xi|}\right) \in \mathcal{E}_1^+$.

Allora per l'ipotesi del teorema

$$\Re e\, F(u, u) \geq \text{cost.} \int_{R_{n-1}} |\xi|\, d\xi \int_0^{+\infty} \sum_i^1 \left| \frac{\partial^i \widehat{u}\left(\xi, \frac{t}{|\xi|}\right)}{\partial t^i} \right|^2 dt =$$

$$= c \sum_{0}^{1}{}_i \int_0^{+\infty} dt \int_{R_{n-1}} |\xi|^{2(1-i)} \left| \frac{\partial^i \hat{u}(\xi, t)}{\partial t^i} \right|^2 d\xi = c \, \|u\|^2_{1.R_n^+}$$

(con $c > 0$ indipendente da u) cioè la tesi.

COROLLARIO. — *Il teorema* (1.III) *sussiste in particolare se la forma* (1.15) *soddisfa le condizioni del teorema* (1.II).

Indichiamo ora con σ_r la semisfera $\left\{ \sum_1^n{}_i x_i^2 \leq r^2, \ x_n \geq 0 \right\}$ e con $\mathcal{E}_{n,0}^+$ la sottoclasse di $\mathcal{E}_n^+$ dei vettori che sono nulli fuori di σ_r. In $\mathcal{E}_{n,0}^+$ consideriamo la forma

$$B(u, v) = \int_{\sigma_r} \sum_1^n{}_{hk} B_{hk}(x) \, D_k u \times \overline{D_h v} \, dx \tag{1.16}$$

dove le $B_{hk}(x)$ sono matrici, di ordine n, continue in σ_r. Usando le notazioni introdotte precedentemente, dimostriamo il seguente

TEOREMA (1.IV). *Condizione sufficiente perché la forma* (1.16) *sia coerciva su* $\mathcal{E}_{n,0}^+$ *è che*

1^0) *per ogni* $x^* \in \sigma_r \cap (x_n = 0)$ *la forma a coefficienti costanti*

$$B_{x^*}(u, v) = \int_{R_n^+} \sum{}_{hk} B_{hk}(x^*, 0) \, D_k u \times \overline{D_h v} \, dx \tag{1.17}$$

verifichi le ipotesi del teorema (1.III).

2^0) *per ogni coppia di vettori* λ *reale ed* η *complesso e per ogni valore* $x \in \sigma_r$ *sia*

$$\mathcal{R}e \sum_1^n{}_{hk} B_{hk}(x) \, \lambda_h \lambda_k \, \eta \times \eta \geq c \, |\lambda|^2 \sum_1^n{}_i |\eta_i|^2 \tag{1.18}$$

con c costante > 0 *indipendente da* x.

Possiamo intanto affermare per l'ipotesi 2^0) e in virtù di un ben noto risultato (cfr. Gårding [9] e Nirenberg [15]) che esistono due costanti positive c_1 e c_2 tali che, qualunque sia $u \in \mathcal{E}_{n,0}^+$ avente supporto interno a σ_r,

$$\mathcal{R}e \, B(u, u) \geq c_1 \, \|u\|_{H^1(\sigma_r)^m} - c_2 \, \|u\|^2_{0,\sigma_r}.$$

Supponiamo allora che il supporto di $u \in \mathcal{E}^{+}_{n,0}$ abbia almeno un punto x_0^* in comune con l'iperpiano $x_n = 0$ e il diametro di questo supporto sia $\leq$ di un prefissato numero $\delta \leq r$. Indicata con $\sigma_\delta(x_0^*)$ la semisfera $\{| x^* - x_0^* |^2 + x_n^2 \leq \delta^2, x_n \geq 0\}$, possiamo scrivere:

$$B(u, u) = B_{x_0^*}(u, u) + \int_{\sigma_\delta(x_0^*)} \Sigma_{hk} [B_{hk}(x^*, x_n) - B(x_0^*, 0)] D_k u \times \overline{D_h u} \, dx \,. \tag{1.19}$$

Sia $\omega(\varrho)$ il comune modulo di continuità delle matrici B_{hk} in σ_r, cioè

$$\omega(\varrho) = \max_{h,k} \operatorname{est.sup}_{|x'-x''| \leq \varrho} | B_{hk}(x') - B_{hk}(x'') | \,.$$

Dalla (1.19) si ha allora, tenuto conto dell'ipotesi 1⁰),

$$\Re e\, B(u, u) \geq \Re e\, B_{x_0^*}(u, u) -$$

$$- c_3\, \omega(\varrho) \| u \|^2_{1,R_n^+} \geq c_4 \| u \|^2_{1,R_n^+} - c_3\, \omega(\varrho) \| u \|^2_{1,R_n^+}$$

dove c_3, c_4 sono costanti > 0 indipendenti da u. Poichè $\omega(\varrho)$ è infinitesimo con ϱ, scelto δ sufficientemente piccolo, $\delta \leq \delta_0$, si ha (c_5 cost. > 0)

$$\Re e\, B(u, u) \geq c_5 \| u \|^2_{1,R_n^+} \,. \tag{1.20}$$

Sia ora u un vettore qualunque di $\mathcal{E}^{+\,*}_{n,0}$ ed $\{h_i(x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n_h)$ un sistema di funzioni infinitamente derivabili in R_n^+, aventi supporto di diametro minore di δ_0 e tali che $\Sigma\, h_i^2 = 1$ in σ_r. Si può allora scrivere

$$B(u, u) = \Sigma_i\, B(h_i u, h_i u) - Q(u, u)$$

dove in Q figurano prodotti della u per derivate della u d'ordine ≤ 1. Tenuto conto di ciò e del fatto che $h_i u \in \mathcal{E}^{+}_{n,0}$ e ha supporto di diametro $< \delta_0$, si ottiene (c_6, c_7 costanti ≥ 0)

$$\Re e\, B(u, u) = \Sigma_i\, \Re e\, B(h_i u, h_i u) - \Re e\, Q(u, u) \geq$$

$$\geq c_5 \Sigma_i \| h_i u \|^2_{1,R_n^+} - c_6 \| u \|_{1,R_n^+} \| u \|_{0,R_n^+} \geq c_5 \| u \|^2_{1,R_n^+} -$$

$$- c_7 \| u \|_{1,R_n^+} \| u \|_{0,R_n^+} - c_6 \| u \|_{1,R_n^+} \| u \|_{0,R_n^+}$$

da cui la tesi.

OSSERVAZIONE. — Alla forma (1.16) resta associato l'operatore differenziale lineare del secondo ordine

$$B(u) = -\sum_{hk}{}_1^n D_h\,(B_{hk}(x)\,D_k\,u)\,. \tag{1.21}$$

Ricordiamo (cfr. [15] · (N)) che questo operatore si dice *ellittico* in σ_r se per ogni vettore reale $\boldsymbol{\xi} \equiv (\xi_1 \dots \xi_n)$ e qualunque sia $x \in \sigma_r$,

$$\det \left\| \sum_{hk}{}_1^n B_{hk}(x)\,\xi_h\,\xi_k \right\| \neq 0\,.$$

Si dice invece che (1.21) è (*uniformemente*) *fortemente ellittico* in σ_r se per ogni coppia di vettori $\boldsymbol{\lambda} \equiv (\lambda_1 \dots \lambda_n)$ reale ed $\boldsymbol{\eta} \equiv (\eta_1 \dots \eta_n)$ complesso, si ha

$$\mathcal{R}e \sum_{hk} B_{hk}\,\lambda_h\,\lambda_k\,\boldsymbol{\eta} \times \overline{\boldsymbol{\eta}} \geq c\,|\boldsymbol{\lambda}|^2 \sum_i{}_1^n |\eta_i|^2$$

con c costante > 0 indipendente da x in σ_r.

Allora l'ipotesi 2^0) del teorema (1.IV) equivale a supporre che l'operatore (1.21) associato alla forma (1.16) sia fortemente ellittico in σ_r. Osserviamo che questa ipotesi è anche sufficiente per assicurare che, per ogni $x^* \in \sigma_r \cap (x_n = 0)$, la forma (1.17) è tale che la corrispondente forma (1.15) verifica la (1.5). Infatti se $B(u)$ è fortemente ellittico in σ_r, per ogni fissato x^*, detto $\xi \equiv (\xi_1 \dots \xi_{n-1})$ un vettore reale unitario, λ un numero reale ed $\boldsymbol{\eta}$ un vettore complesso qualunque, si avrà (c costante > 0)

$$B_{nn}(x^*, 0)\,\lambda^2\,\boldsymbol{\eta} \times \overline{\boldsymbol{\eta}} + \left(\sum_k{}_1^{n-1} [B_{nk}(x^*, 0) + B_{kn}(x^*, 0)]\,\xi_k \right) \lambda +$$

$$+ \left(\sum_{hk}{}_1^{n-1} B_{hk}(x^*, 0)\,\xi_h\,\xi_k \right) \geq c\,\{\xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 + \lambda^2\} \sum_i{}_1^n |\eta_i|^2 =$$

$$= c\,\{1 + \lambda^2\} \sum_i{}_1^n |\eta_i|^2\,.$$

2. — Siamo ora in grado di studiare la coercività della forma $\tilde{a}(u, v)$ su $W(\Omega)^n$. Quanto ora diremo si riferirà al caso del problema misto; tratteremo successivamente il caso del problema di trasmissione.

Vogliamo dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA (2.I) — *Condizione sufficiente affinchè la forma* $\tilde{a}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ *sia coerciva su* $W(\Omega)^n$ *è che*

1^0) *l'operatore* $A(\boldsymbol{u}) = -\Sigma_{hk} D_h (A_{hk} D_k \boldsymbol{u})$ *abbia coefficienti continui in* $\overline{\Omega}$ *e sia fortemente ellittico in* Ω

2^0) *esista un sottoinsieme aperto* $\partial^* \Omega$ *di* $\partial \Omega$, *di classe* 1, *che contiene* $\partial_2 \Omega$ *tale che, per ogni punto* $x_0 \in \partial^* \Omega$, *detto* $\boldsymbol{\nu}$ *il versore della normale interna a* $\partial^* \Omega$ *in* x_0, *e* $\boldsymbol{\xi}$ *un generico versore ortogonale a* $\boldsymbol{\nu}$, *sia*

$$(2.1) \qquad \mathcal{R}e \int_0^{+\infty} \Sigma_{hk}^{n}{}_{1} \, A_{hk}(x_0) \left(\xi_k \boldsymbol{f} - i \, \nu_k \frac{d\boldsymbol{f}}{dt} \right) \times \left(\overline{\xi_h \boldsymbol{f} + i \, \nu_h \frac{d\boldsymbol{f}}{dt}} \right) dt > 0$$

per ogni vettore $\boldsymbol{f}(t) \in \mathcal{E}_1^+$, *non identicamente nullo, soluzione del sistema*

$$(2.2) \qquad -\Sigma_{hk} A_{hk}(x_0) \nu_h \nu_k \frac{d^2 \boldsymbol{f}}{dt^2} - i \Sigma_{hk} [A_{hk}(x_0) + A_{kh}(x_0)] \nu_k \xi_h \frac{d\boldsymbol{f}}{dt} + \Sigma_{hk} A_{hk}(x_0) \xi_h \xi_k \boldsymbol{f} = 0.$$

Per l'ipotesi 2^0) fissato comunque $x_0 \in \partial_2 \Omega$ esiste un intorno $I(x_0)$ tale che $I(x_0) \cap \overline{\Omega}$ è trasformato da un omeomorfismo di classe 1, $\xi = \mathcal{T}(x)$, in una semisfera $\sigma_r \equiv \{\Sigma_i \xi_i^2 \leq r^2, \xi_n \geq 0\}$ in modo tale che $I(x_0) \cap \partial \Omega$ venga trasformato in $\sigma_r \cap (\xi_n = 0)$. Di più, $\partial_2 \Omega$ sarà ricoperto da un numero finito di questi intorni, siano $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$. Posto $\mathcal{J}_h = I_h \cap \overline{\Omega}$ $(h = 1, 2, \ldots, \mu)$ esisterà altresì un sistema $\{\alpha_i(x)\}$ $(i = 1, 1 \ldots m)$ di funzioni infinitamente derivabili in $\overline{\Omega}$, $0 \leq \alpha_i(x) \leq 1$, ognuna delle quali è diversa da zero solo in uno degli $\mathcal{J}_h$ e tali che $\Sigma_i{}_1^m \alpha_i^2 = 1$ in tutti i punti $x \in \overline{\Omega}$ di un intorno di $\partial_2 \Omega$. Alle $\alpha_i(x)$ aggiungiamo la funzione $\alpha_0 = \sqrt{1 - \Sigma \alpha_i^2}$ la quale è infinitamente derivabile in $\overline{\Omega}$ e nulla in un intorno di $\partial_2 \Omega$.

Supponiamo dapprima $\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}_0(\overline{\Omega}, R_n)^n$; allora, con un ragionamento già applicato nel teorema (1.IV), si dimostra che ($c_1 \geq 0$ e indipendente da $\boldsymbol{u}$)

$$(2.3) \qquad \mathcal{R}e \, \tilde{a}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geq \Sigma_i{}_1^m \tilde{a}(\alpha_i \boldsymbol{u}, \alpha_i \boldsymbol{u}) - c_1 \| \boldsymbol{u} \|_{1,\Omega} \| \boldsymbol{u} \|_{0,\Omega} .$$

Poichè $\alpha_0 \boldsymbol{u} \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(\Omega)^m$, per l'ipotesi fatta su $A(\boldsymbol{u})$ si può applicare un noto risultato di Garding-Nirenberg (cfr. [9] e [15]), e si ha, qualunque sia $\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}_0(\overline{\Omega}, R_n)^n$,

$$(2.4) \qquad \mathcal{R}e \, \tilde{a}(\alpha_0 \boldsymbol{u}, \alpha_0 \boldsymbol{u}) \geq c_2 \| \alpha_0 \boldsymbol{u} \|_{1,\Omega}^2 - c_3 \| \alpha_0 \boldsymbol{u} \|_{0,\Omega}^2$$

(c_2 e c_3 costanti positive indipendenti da $\boldsymbol{u}$).

Consideriamo ora la classe dei vettori $\alpha_i \boldsymbol{u}$ $(i \geq 1)$ al variare di $\boldsymbol{u}$ in $\mathcal{D}_0(\bar{\Omega}, R_n)^n$ e supponiamo per fissare le idee che $\alpha_i \boldsymbol{u}$ sia nullo in $\bar{\Omega} - \mathcal{J}_h$. Detto $\xi = \mathcal{T}(x)$ l'omeomorfismo di classe 1 che trasforma $\mathcal{J}_h$ nella semisfera $\sigma_r \equiv \left\{ \sum_1^n {}_i \xi_i^2 \leq r^2, \xi_n \geq 0 \right\}$ poniamo

$$\boldsymbol{u}^*(\xi) = \boldsymbol{u}(\mathcal{T}^{-1}(\xi)), \quad \alpha_i^*(\xi) = \alpha_i(\mathcal{T}^{-1}(\xi)), \quad A_{hk}^*(\xi) = A_{hk}(\mathcal{T}^{-1}(\xi))$$

e indichiamo con $\tilde{a}^*(\alpha_i^* \boldsymbol{u}^*, \alpha_i^* \boldsymbol{u}^*)$ la trasformata della forma $\tilde{a}(\alpha_i \boldsymbol{u}, \alpha_i \boldsymbol{u})$, cioè

$$(2.5) \qquad \tilde{a}^*(\alpha_i^* \boldsymbol{u}^*, \alpha_i^* \boldsymbol{v}^*) = \int_{\sigma_r} \Sigma_{hk} A_{hk}^*(\xi) D_k(\alpha_i^* \boldsymbol{u}^*) \times \overline{D_h(\alpha_i^* \boldsymbol{u}^*)}\, d\xi ..$$

Osserviamo ora che se $\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}_0(\bar{\Omega}, R_n)^n$, $\alpha_i^* \boldsymbol{u}^* \in \mathcal{E}_{n,0}^+$, e che, per le ipotesi 1°) e 2°) del teorema e la regolarità dell'omeormofismo $\xi = \mathcal{T}(x)$, la forma (2.5) verifica le ipotesi del teorema (1.IV); esistono pertanto due costanti positive c_4 e c_5, indipendenti da $\boldsymbol{u}$ e da i, tali che per ogni $(\boldsymbol{u} \in \mathcal{D}_0(\bar{\Omega}, R_n)^n$ sia

$$(2.6) \qquad \mathcal{R}e\, \tilde{a}^*(\alpha_i^* \boldsymbol{u}^*, \alpha_i^* \boldsymbol{u}^*) \geq c_4 \| \alpha_i^* \boldsymbol{u}^* \|_{1,\sigma_r}^2 - c_5 \| \alpha_i^* \boldsymbol{u}^* \|_{0,\sigma_r}^2$$

da cui

$$(2.7) \qquad \mathcal{R}e \sum_1^m {}_i\, \tilde{a}^*(\alpha_i^* \boldsymbol{u}^*, \alpha_i^* \boldsymbol{u}^*) \geq c_4 \sum_1^m {}_i \| \alpha_i^* \boldsymbol{u}^* \|_{1,\sigma_r}^2 - c_5 \| \alpha_i^* \boldsymbol{u}^* \|_{0,\sigma_r}^2 \geq$$

$$\geq \bar{c}_4 \sum_1^m {}_i \| \alpha_i \boldsymbol{u} \|_{1,\mathcal{J}_h}^2 - \bar{c}_5 \sum_1^m {}_i \| \alpha_i \boldsymbol{u} \|_{0,\mathcal{J}_h}^2$$

($\bar{c}_4$ e $\bar{c}_5$ costanti positive indipendenti da $\boldsymbol{u}$).

Dalle (2.3), (2.4), (2.7), si ottiene

$$(2.8) \qquad \mathcal{R}e\, \tilde{a}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geq c_6 \sum_0^m {}_i \| \alpha_i \boldsymbol{u} \|_1^2 - c_7 \sum_0^m {}_i \| \alpha_i \boldsymbol{u} \|_0^2 - c_1 \| \boldsymbol{u} \|_1 \| \boldsymbol{u} \|_0 \geq$$

$$\geq c_8 \| \boldsymbol{u} \|_{H^1(\Omega)^n}^2 - c_9 \| \boldsymbol{u} \|_0^2$$

(c_6, c_7, c_8, c_9 costanti positive indipendenti da $\boldsymbol{u}$). Tenuto conto che $\mathcal{D}_0(\bar{\Omega}, R_n)^n$ è denso in W^n dalla (2.8) segue la tesi.

Abbiamo così data una condizione sufficiente per la validità in W^n della maggiorazione (I.1) la quale è utile quando si studi ad es. un problema di tipo misto.

OSSERVAZIONE I. — Se supponiamo che Ω, oltre a soddisfare l'ipotesi del teorema (2.I) sia anche di secondo tipo [cfr. (N) n. 2] cioè che per ogni $u \in W^n$

$$\| u \|_0 \leq \bar{c} \| u \|_1$$

con $\bar{c}$ costante positiva indipendente da u, allora *dalla* (I.1) *e* (2.9) *si ha che se* $\bar{c}\, c_0 < c$ *la forma* $\tilde{a}(u, v)$ *è fortemente coerciva in* W^n.

OSSERVAZIONE II. — Consideriamo questo caso particolare: Ω sia dato dalla semisfera $\sigma_r \equiv \{\Sigma x_i^2 \leq r^2, x_n \geq 0\}$, $\partial_1 \Omega \equiv \{\sigma_r \cap (x_n = 0)\}$ e l'operatore $A(u)$ abbia coefficienti costanti. I vettori $u \in \mathcal{D}_0(\bar{\Omega}, R_n)^n$ si possono prolungare in tutto il semispazio $x_n \geq 0$ ponendoli $= 0$ fuori di σ_r e gli u, così prolungati, appartengono a $\mathcal{E}_n^+ \cap H^1(R_n^+)^n$. Ebbene, se la forma $\tilde{a}(u, v)$ è coerciva (ad es. se verifica le ipotesi del teorema (1.III)) allora, con un ragionamento analogo a quello fatto da Agmon in [1] n. 5, si dimostra che sussiste la maggiorazione

$$\mathcal{R}e\, \tilde{a}(u, u) \geq c \| u \|_1^2 \tag{2.10}$$

per ogni $u \in W^n$, e poichè Ω è evidentemente di secondo tipo la (2.10) permette di applicare il teorema (4.II) di (N).

Queste osservazioni lasciano capire che i risultati precedentemente stabiliti, anche nel caso specifico del sistema dell'elasticità, qualora applicati a particolari domini, possono assicurare la validità della maggiorazione (4.2) - (N) in ipotesi sul parametro χ anche più generali di quelle che si danno usualmente $\left(\chi > \dfrac{n-2}{n};\ \text{cfr. (N) n. 4}\right)$.

OSSERVAZIONE III. — Supponiamo che $\tilde{a}(u,v)$ sia coerciva su $\mathcal{D}_0(\bar{\Omega}, R_u)^n$. Dalla (I.1) si ha allora, per ogni $u \in \mathcal{D}_0(\bar{\Omega}, R_n)^n$,

$$\mathcal{R}e\, a(u, u) \geq c \| u \|_{E^n}^2 - c_0 \| u \|_0^2 \tag{2.11}$$

e di qui, per chiusura, si ottiene che la (2.11) vale anche per ogni $u \in V^n$. Discorso analogo si può fare se $\tilde{a}(u, v)$ è fortemente coerciva su $\mathcal{D}_0(\bar{\Omega}, R_n)^n$.

Quindi i teoremi precedenti servono anche per stabilire la maggiorazione (2.11) *in* V^n.

Se Ω *oltre a soddisfare l'ipotesi del teorema* (2.I) *è anche di I tipo, cioè per ogni* $u \in V^n$

$$\| u \|_0^2 \leq \bar{c} ||| u |||^2$$

($\bar{c} > 0$ *indipendente da* u) *e se* $\bar{c}\, c_0 < c$ *la forma* $a(u, v)$ *è «fortemente coerciva» su* V^n *nel senso che per ogni* $u \in V^n$ *vale la maggiorazione*

$$\mathcal{R}e\, a(u, u) \geq \text{cost.}\ \| u \|_{E^n}^2$$

da cui segue immediatamente la (3.5) - (N) *e il teorema di esistenza* (3.I) - (N).

3. — Il teorema (2.I) non è utilizzabile quando si voglia studiare il il problema di trasmissione (per la nomenclatura cfr. (N) prb. (IV-I)) perchè in tal caso sui coefficienti dell'operatore $A(u)$ non si può fare l'ipotesi che siano continui in tutto $\overline{\Omega}$ ma soltanto che siano continui separatamente in $\overline{\Omega}_1$ e $\overline{\Omega}_2$ (5). Quindi, se si vuol dare una condizione di coercività in W^n, per la forma $\tilde{a}(n, v)$, utilizzabile nel problema di trasmissione, bisognerà dimostrare un teorema analogo al teorema (2.I) nella sola ipotesi sui coefficienti di $A(u)$ che siano continui separatamente in $\overline{\Omega}_1$ e $\overline{\Omega}_2$. Per questo è necessario innanzitutto completare i risultati del n. 1 nel senso che ora mostreremo.

Indichiamo con $\mathcal{E}$ la classe dei vettori $u(t)$ a $2n$ componenti, definiti sul semiasse reale R_1^+, tali che

$$u(t) \in C^1(R_1^+)^{2n} \cap H^1(R_1^+)^{2n}$$

$$u_i(0) = u_{i+n}(0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Con ragionamento analogo a quello svolto nella dimostrazione del teorema (1.II) si prova che

TEOREMA (3.I). — *Condizione sufficiente perchè la forma*

$$\Gamma'(u, v) = \int_0^{+\infty} \sum_{hk}{}_0^{\mu} \Gamma'_{hk} D^k u \times \overline{D^h u}\, dx$$

dove le Γ'_{hk} sono matrici costanti complesse di ordine $2n$, sia fortemente coerciva in $\mathcal{E}$ è che, per ogni numero reale λ e per ogni vettore complesso $\eta \equiv (\eta_1, \ldots, \eta_{2n})$, risulti

$$\mathcal{R}e \sum_{hk}{}_0^{1} i^{k(-h)} \Gamma'_{hk} \lambda^{h-k} \eta \times \eta \geq c(1 + \lambda^2) \sum_i{}_1^{2n} |\eta_i|^2$$

(c cost. > 0) *e inoltre*

$$\mathcal{R}e\, \Gamma'(u, u) > 0$$

per ogni vettore $u \in \mathcal{E}$, non identicamente nullo, soluzione del sistema

$$\sum_{kk}{}_0^{1} i^{-2k} (\Gamma'_{hk} + \overline{\Gamma}'_{kh}) D^{h+k} u = 0 .$$

Indichiamo poi con $\mathcal{E}^*$ ed $\mathcal{E}_0^*$ le seguenti classi di vettori:

$\mathcal{E}^*$ è la classe dei vettori u a $2n$ componenti definiti nel semispazio R_n^+ tali che

$$u \in C^1(R_n^+)^{2n} \cap H^1(R_n^+)^{2n}$$

$$u_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = u_{i+n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

---

(5) Questo è da intendersi che per ogni $x_0 \in \Sigma$ esistono i limiti di quei coefficienti al tendere di x a x_0 in Ω_1 oppure in Ω_2 ma tali limiti non sono necessariamente uguali.

$\mathcal{E}_0^*$ *è la sottoclasse di* $\mathcal{E}^*$ *dei vettori che sono nulli fuori di una semisfera* $\sigma_r \equiv \{\Sigma x_i^2 \leq r^2, x_n \geq 0\}$.

Si possono allora dimostrare, con lo stesso tipo di ragionamento usato nel n. 1, i teoremi, analoghi ai teoremi (1.III) e (1.IV), che si ottengono da questi ultimi sostituendo nelle forme $F(u, v)$ e $B(u, v)$ e nelle varie ipotesi le matrici F_{hk} e B_{hk} con analoghe *matrici d'ordine* $2n$, e la classi di vettori $\mathcal{E}_n^+$ e $\mathcal{E}_{n,0}^+$ rispettivamente con le classi $\mathcal{E}^*$ ed $\mathcal{E}_0^*$ ora introdotte.

Sfruttando questi risultati e naturalmente i teoremi del n. 1 si può dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA (3.II) — *Condizione sufficiente affinchè la forma* $\tilde{a}(u, u)$ *sia coerciva su* $W(\Omega)^n$ *è che*

1⁰) *gli operatori* $A^i(u) = -\sum_{hk}^{n} D_h(A_{hk}^i D_k u)$ $(i = 1, 2)$ *abbiano i coefficienti continui in* $\bar{\Omega}_i$ $(i = 1, 2)$ *e siano ivi fortemente ellittici*

2⁰) *valga su* $\partial_2 \Omega$ *l'ipotesi* 2⁰) *del teorema* (2,I) *fatta eccezione al più per i punti di* $\overline{\partial_2 \Omega} \cup \bar{\Sigma}$

3⁰) Σ *sia localmente di classe* 1 *e per ogni punto* x_0 *interno a* Σ, *detto* $\boldsymbol{\nu}$ *il versore della normale a* Σ *in* x_0 (*orientato sempre verso l'interno di* Ω_1 *o sempre verso l'interno di* Ω_2) *e* $\boldsymbol{\xi}$ *un versore ortogonale a* $\boldsymbol{\nu}$, *sia*

$$\mathcal{R}e \int_0^{+\infty} \sum_{1}^{2}{}_r \sum_{1}^{n}{}_{hk} A_{hk}^r(x_0) \left(\xi_k f^r - i\nu_k \frac{df^r}{dt}\right) \times \overline{\left(\xi_h f^r + i\nu_h \frac{df^r}{dt}\right)} dt > 0$$

per ogni vettore $f \in \mathcal{E}$, *non ideticamente nullo, soluzione del sistema*

$$-\sum_{1}^{2}{}_r \sum_{1}^{n}{}_{hk} A_{hk}^r(x_0) \left[\nu_h \nu_k \frac{d^2 f^r}{dt^2} - i(\nu_k \xi_h + \nu_h \xi_k) \frac{df^r}{dt} + \xi_h \xi_k f^r\right] = 0$$

dove $f^1 \equiv (f_1, \dots, f_n)$ e $f^2 \equiv (f_{n+1}, \dots, f_{2n})$

4⁰) *per ogni punto* $x_0 \in \bar{\Sigma} \cap \partial\Omega$ *esista un intorno* $I(x_0)$ *tale che per ogni* $u \in W(\Omega)^n$, *nullo in* $\Omega - I(x_0)$, *valga la* (1.1) [6].

---

[6] Osserviamo che la condizione 4⁰) è sicuramente verificata nei seguenti due casi:

1⁰) esiste un ϱ-intorno I_ϱ $(\varrho > 0)$ dell'insieme $\bar{\Sigma} \cap \partial\Omega$ tale che per ogni punto di $I_\varrho \cap \bar{\Omega}^i$ $(i = 1, 2)$ e per ogni n-pla di numeri complessi $\{\lambda^i\}$ si abbia

$$\mathcal{R}e \sum_{1}^{n}{}_{hk} A_{kn}^i \lambda^h \times \overline{\lambda^k} \geq \alpha \sum_{1}^{n}{}_{hk} |\lambda_h^k|^2$$

con α cost. > 0 indipendente da x

2⁰) $\partial\Omega_1$ e $\partial\Omega_2$ sono sufficientemente regolari nell'intorno dei punti di $\bar{\Sigma} \cap \partial\Omega$ in modo che per ogni punto $x_0 \in \bar{\Sigma} \cap \partial\Omega$ esista un intorno $I(x_0)$ di x_0 e un omeomorfismo di classe 1 che muta $I(x_0) \cap \bar{\Omega}_1$ nella semisfera $[\Sigma\, \xi_i^2 \leq r^2, \xi_n \leq 0]$ e $I(x_0) \cap \bar{\Omega}_2$ nella semisfera $\{\Sigma_i\, \xi_i^2 \leq r^2, \xi_n \geq 0\}$.

La dimostrazione si ottiene ricoprendo $\partial_2 \Omega \cup \Sigma$ con un numero finito di intorni tali che, se x_0 è interno a $\partial_2\Omega \cap \partial\Omega_i$ $(i = 1, 2)$ esista un omeomorfismo di classe 1 che muta $I(x_0) \cap \overline{\Omega}_i$ nella semisfera $\{\Sigma\, \xi_i^2 \leq r^2, \xi_n \geq 0\}$; se x_0 è interno a Σ esista un omeomorfismo di classe 1 che muta $I(x_0) \cap \overline{\Omega}$ nella sfera $\sigma_r \equiv \{\Sigma_i\, \xi_i^2 \leq r^2\}$, se $x_0 \in \overline{\Sigma} \cap \partial\Omega$ nell'intorno $I(x_0)$ sia verificata l'ipotesi 4⁰) del teorema. Si procede quindi come nel teorema (2.I), precisamente se x_0 è interno a $\partial_2\Omega \cap \partial\Omega_i$ $(i = 1, 2)$ si sfruttano ancora i teoremi del n. 1, se $x_0 \in \overline{\Sigma} \cap \partial\Omega$ si sfrutta l'ipotesi 4⁰), infine se x_0 è interno a Σ si applica un'ulteriore « trasformazione per simetria rispetto al piano $\xi_n = 0$ » la quale muta σ_r nella semisfera $\{\Sigma_i\, \xi_i^2 \leq r^2, \xi_n \geq 0\}$ e fa corrispondere biunivocamente ad ogni coppia di vettori ad n componenti, definiti rispettivamente in $\sigma_r \cap (\xi_n \leq 0)$ e $\sigma_r \cap (\xi_n \geq 0)$, un vettore a $2n$ componenti definito in σ'_r. Dopodichè si applicano i risultati dati in questo numero.

Osserviamo infine che anche nel caso che Ω sia un aperto non limitato si pone il problema di dare delle condizioni algebriche per la validità delle maggiorazioni (6.9) e (6.10) — (N). In entrambi i casi, però, ci si riduce agli analoghi problemi già studiati per aperti limitati decomponendo Ω in una successione di insiemi limitati, disgiunti, $\{\Omega_\nu\}$, ognuno dei quali ha frontiera sufficientemente regolare (7).

CAP. II

TEOREMI ESISTENZIALI E TEORIA DI RIESZ PER L'OPERATORE $A(u) + \lambda u$.

4. — Come nei numeri precedenti supponiamo che Ω sia un insieme aperto, limitato e connesso dello spazio R_n; in Ω consideriamo l'operatore

$$A(u) + \lambda u \tag{4.1}$$

dove λ è un parametro complesso e $A(u)$ è dato dalla (I.1) o dalla $A(u) = -\sum_{hk}^{n} {}_1\, D_h(A_{hk}\, D_k u)$, secondo che come operatori elementari si scelgono gli $S_k(u)$ oppure le derivate $D_k u$.

Anche per l'operatore (4.1) si può sviluppare uno studio dei problemi al contorno misto e di trasmissione analogo a quello fatto nel Cap. II di

(7) Ciò è senz'altro possibile se la frontiera di Ω è sufficientemente regolare.

(N). Basterà sostituire alla considerazione delle forme $a(u, v)$ e $\tilde{a}(u, v)$ quella delle nuove forme associate all'operatore (4.1)

$$a(u, v) + \lambda (u, v)_{L^2(\Omega)^n} \tag{4.2}$$

e, rispettivamente,

$$\tilde{a}(u, v) + \lambda (u, v)_{L^2(\Omega)^n} . \tag{4.3}$$

Con lo stesso significato dei simboli e nelle stesse ipotesi sui dati f, d e δ che si son fatte nei problemi (3.I) e (4.I) di (N) si possono dimostrare i seguenti teoremi di esistenza ed unicità:

TEOREMA (4.I) — *Se c'è una costante $\alpha > 0$ tale che per ogni $v \in V^n$*

$$\mathcal{R}e\, a(v, v) + \mathcal{R}e\, \lambda \| v \|_0^2 \geq \alpha \| v \|_{E^n}^2 \tag{4.4}$$

allora esiste uno ed un solo vettore $u \in \mathcal{V}^n$ che risolve l'equazione

$$a(u, v) + \lambda (u, v)_{L^2(\Omega)^n} = \langle f, v \rangle + \langle d, v \rangle \tag{4.5}$$

per ogni $v \in V^n$.

TEOREMA (4.II) — *Se c'è una costante $\alpha > 0$ tale che qualunque sia $v \in W^n$*

$$\mathcal{R}e\, \tilde{a}(v, v) + \mathcal{R}e\, \lambda \| v \|_0^2 \geq \alpha \| v \|_{H'(\Omega)^n}^2 \tag{4.6}$$

allora esiste uno ed un solo vettore $u \in \mathcal{W}^n$ che risolve l'equazione

$$\tilde{a}(u, v) + \lambda (u, v)_{L^2(\Omega)^n} = \langle f, v \rangle + \langle \delta, v \rangle \tag{4.7}$$

per ogni $v \in W^n$.

Si potrebbero anche enunciare teoremi analoghi ai teoremi (3.II), (4.II), (4.III) di (N).

Facciamo invece qualche osservazione sulla validità delle maggiorazioni (4.4) e (4.6):

Innanzitutto *se Ω è di primo tipo o di secondo tipo, rispettivamente, c'è equivalenza tra le maggiorazioni* (4.4) *e* (4.5) *e le analoghe che si ottengono sostituendo nei secondi membri le norme $\| \;\|_{E^n}$ e $\| \;\|_{H'(\Omega)^n}$ con le norme $|||\; |||$ e $\| \;\|_1$. In questo caso quindi le condizioni algebriche* (3.7) e (4.7) di (N) *sono sufficienti a garantire la validità delle maggiorazioni* (4.4) *e* (4.6), come già si è visto nei nn. 3 e 4 di (N).

Anche i risultati ottenuti nel capitolo precedente possono vantaggiosamente applicarsi allo studio della (4.6) attraverso il teorema che ora daremo e osservazioni analoghe a quelle che abbiamo fatto nel n. 2.

TEOREMA (4.I) — *Se la forma* $\tilde{a}(u, v)$ *è coerciva in* W^n *allora per ogni* λ *avente parte reale sufficientemente grande la forma* (4.3) *verifica la* (4.6) *e vale il teorema* (4.II).

Infatti, nelle ipotesi poste, si ha dalla (I.1)

$$\mathcal{R}e\, \tilde{a}(u, u) + \mathcal{R}e\, \lambda \| u \|_0^2 \geq c \| u \|_{H'(\Omega)^n} + (\mathcal{R}e\, \lambda - c_0) \| u \|_0^2$$

da cui, se $\mathcal{R}e\, \lambda \geq c_0$,

$$\mathcal{R}e\, \tilde{a}(u, u) + \mathcal{R}e\, \lambda \| u \|_0^2 \geq c \| u \|^2_{H'(\Omega)}$$

5. — Riprendiamo il problema considerato nel numero precedente

Pr. (5.I) — *Trovare un vettore* $u \in \mathcal{W}^n$ *tale che per ogni* $v \in W^n$ *sia*

$$\tilde{a}(u, v) + \lambda (u, v)_{L^2(\Omega)^n} = \langle f, v \rangle + \langle \delta, v \rangle \tag{5.1}$$

Al problema (5.1) *è possibile applicare la teoria di Riesz-Fredholm e giungere così a un teorema dell'alternativa.* Per il tipo di ragionamento ben noto che è necessario seguire rinviamo a Lions [10] n. 4 limitandoci qui a dare i risultati. Osserviamo solo che il termine in più che qui si presenta $\langle \delta, v \rangle$ non porta sostanziali modifiche al ragionamento trattandosi di un funzionale lineare e continuo su W^n.

Facciamo le seguenti ipotesi.

i_1) *la forma* $\tilde{a}(u, v)$ *sia* W^n*-ellittica, cioè verifichi la* (4.6) *per ogni* $v \in W^n$

i_2) $Q \subset L^2(\Omega)^n \subset Q'$

i_3) *l'iniezione di* W^n *in* Q' *è completamente continua.*

Si osservi che se ad esempio $Q \equiv Q' \equiv L^2(\Omega)^n$, *ed* Ω *è un aperto di Sobolev, l'ipotesi* i_3) *è senz'altro verificata perchè l'iniezione di* $H'(\Omega)^n$ *in* $L^2(\Omega)^n$ *è completamente continua* (cfr. Deny-Lions [4]) *e* W^n *è chiuso in* $H^1(\Omega)^n$.

Diremo problema aggiunto del problema (5.1) il seguente

Pr. (5.II) — *Trovare un vettore* $u \in W^n$ *tale che per ogni* $v \in W^n$ *sia*

$$\overline{\tilde{a}(v, u)} + \bar{\lambda}(u, v) = \langle f' v \rangle + \langle \delta', v \rangle \tag{5.2}$$

con $f' \in Q'$ e $< \delta', v >$ *funzionali lineari e continuo in* W^n, *nullo su* $H_0^1(\Omega)^n$.

Dai problemi (5.I) e (5.II) si ottengono i corrispondenti problemi « omogenei » assumendo nulli i secondi membri in (5.1) e (5.2).

Si possono allora dimostrare i seguenti teoremi.

TEOREMA (5.1) — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè il problema* (5.I) *ammetta una e una sola soluzione è che il corrispondente problema omogeneo abbia solo la soluzione nulla. Di più, gli autovalori del problema omogeneo formano un insieme numerabile.*

Se λ *è un autovalore per il problema* (5.I) *omogeneo esso lo è anche per il problema omogeneo aggiunto e in corrispondenza questo problema ammette un numero finito* (*che varia con* λ) *di autosoluzioni linearmente indipendenti in* W^n; *siano* $w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots w^{(\nu)}$.

Il problema (5.I) *ha in questo caso soluzione se e soltanto se*

$$(5.3) \qquad < f, w^{(h)} > + < \delta, w^{(h)} > = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Si può dimostrare, di più, che:

TEOREMA (5.II) — *Se la forma* $\tilde{a}(u, v)$ *è hermitiana* (8), *cioè* $\tilde{a}(u, v) = \overline{\tilde{a}(v, u)}$ *per ogni* $u, v \in W^n$, *allora lo spettro del problema* (5.1) *omogeneo* (*e quindi del problema omogeneo aggiunto*) *è costituito da un insieme numerabile di valori reali*

$$0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_i \geq \ldots$$

Il sistema delle autofunzioni corrispondenti $\{u^{(i)}\}$, *determinato univocamente dalla condizione di formare un sistema ortonormale in* $L^2(\Omega)^n$, *è completo in* $L^2(\Omega)^n$, *mentre* $\left\{ \frac{u^{(i)}}{\sqrt{-\lambda_i}} \right\}$ *è ortonormale e completo in* W^n *rispetto al prodotto scalare* $\tilde{a}(u, v)$.

La teoria di Riesz-Fredholm, e in generale quanto detto sopra si applica naturalmente anche al seguente problema, analogo del Pr. (5.I).

Pr. (5.III) — *Trovare un vettore* $u \in V^n$ *tale che per ogni* $v \in V^n$

$$(5.4) \qquad a(u, v) + \lambda(u, v) = < f, v > + < d, v >$$

($f \in Q'$ e $< d, v >$ *funzionale lineare e continuo su* V^n *nullo su* E_0^n).

---

(8) Il che comporta che l'operatore $A(u) \doteq -\Sigma_{hk} D_k (A_{hh} D_k u)$ sia autoaggiunto; vedasi, ad es., il caso dell'operatore dell'elasticità.

Anche in questo caso si arriva a teoremi analoghi ai teoremi (5.I) e (5.II), naturalmente le ipotesi i_1) e i_3) dovranno essere sostituite con le seguenti:

i_4) *la forma* $a(u, v)$ *sia* V^n*-ellittica*

e

i_5) *l'iniezione di* V^n *in* Q' *sia completamente continua.*

Un interessante problema è senza dubbio quello di dare delle condizioni sufficienti affinchè valga la i_5).

La i_5) *è senz'altro verificata assunto* $Q \equiv Q' \equiv L^2(\Omega)^n$, *nel caso che* Ω *sia di Sobolev e di terzo tipo* (cfr. (N) n. 1) in virtù del fatto che $V^n \equiv W^n$ e di quanto si è osservato a proposito della i_3).

Voglio qui segnalare un altro caso in cui la i_5) è senz'altro verificata, intendendo di assumere sempre $Q \equiv Q' \equiv L^2(\Omega)^n$.

TEOREMA (5.III) — *Supponiamo che* Ω *goda della proprietà di cono e inoltre sia tale che esista un numero reale* $q > 2$ *per cui*

1⁰) $V(\Omega)^n \subset L^q(\Omega)^n$

2⁰) *l'iniezione di* $V(\Omega)^n$ *in* $L^q(\Omega)^n$ *è continua, cioè*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)^n} \leq c\,\|u\|_{E^n}$$

con $c > 0$ *indipendente da* u, *per ogni* $u \in V^n$.

Sotto queste ipotesi l'iniezione di $V(\Omega)^n$ *in* $L^2(\Omega)^n$ *è completamente continua.*

Sia $\{u\}$ un insieme di vettori di V^n aventi norme equilimitate; necessariamente anche le norme $\|u\|_0$ sono equilimitate; allora per un noto teorema di M. Riesz [8'] basterà provare che si ha uniformemente

$$\lim_{|\Delta x| \to 0} \|u(x + \Delta x) - u(x)\|_0 = 0 \tag{5.5}$$

(con Δx vettore generico di R_n e dove si intende che $u(x + \Delta x) \equiv 0$ se $x + \Delta x$ sta fuori di Ω) per avere che $\{u\}$ è compatto in $L^2(\Omega)^n$.

Sia $\{\Omega_\nu\}$ una successione di sottoinsiemi aperti di Ω dotati della proprietà di cono, invadente Ω, e tale che Ω_ν abbia distanza $> \dfrac{1}{\nu}$

(8') M. RIESZ — «*Sur les ensembles compacts de fonctions sommables*» Acta lett. ac. Sc. Regiae Universitatis Hungariae F. J. Sectio Sc. Mat. (Szeged), 6, 136-143 — (1932-34).

da $\partial \Omega$. Sarà allora

$$\lim_{\nu \to \infty} \operatorname{mis} (\Omega - \Omega_\nu) = 0.$$

Dalle ipotesi 1^0) e 2^0), tenuto conto della relazione, valida per ogni $\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)^n$, (cfr. la (3.5)) di [8],

$$\|\boldsymbol{u}\|_0 \leq (\operatorname{mis} \Omega)^{\frac{q-2}{2q}} \|\boldsymbol{u}\|_{L^q(\Omega)^n}$$

si ha che gli integrali $\int |\boldsymbol{u}|^2 \, d\,x$ estesi a porzioni di Ω risultano equiassolutamente continui e dunque

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_{\Omega - \Omega_\nu} |\boldsymbol{u}(x + \Delta\, x) - \boldsymbol{u}(x)|^2 \, dx = 0 \tag{5.6}$$

uniformemente rispetto al vettore $\Delta\, x$.

Notiamo che per $x \in \Omega_\nu$ e $|\Delta\, x| \leqq \frac{1}{\nu}$ il segmenta $(x, x + \Delta\, x)$ è tutto contenuto in Ω.

Fissato allora Δx nel modo ora detto, operiamo una rotazione degli assi $x \to \xi$ tale che l'asse ξ_i (i fissato) abbia la direzione e il verso del vettore Δx. Si ha:

$$\int_{\Omega_\nu} |u_i(\xi + \Delta x) - u_i(\xi)|^2 \, d\,\xi \leq |\Delta x|^2 \int_\Omega \left(\frac{\partial\, u_i}{\partial \xi_i}\right)^2 d\,\xi \leq |\Delta\, x|^2 \, |||\boldsymbol{u}|||^2_\Omega .$$

E poichè le norme $\|\ \|_0$ e $|||\ |||$ sono invarianti per rotazione degli assi, sarà anche

$$\|u_i(x + \Delta x) - u_i(x)\|^2_{0,\Omega_\nu} \leq |\Delta x|^2 \, |||\boldsymbol{u}|||^2_\Omega$$

Di qui, sommando rispetto a i e tenendo conto della (5.6), si ha la (5.5) e quindi la tesi.

Le ipotesi 1^0) e 2^0) equivalgono a supporre che Ω sia tale che in $V^n(\Omega)$ si possano dare maggiorazioni analoghe a quelle di Sobolev per lo spazio $H^1(\Omega)$.

Le ipotesi da farsi su Ω e la determinazione dell'esponente q massimo (che naturalmente non può superare l'esponente di Sobolev per $H^1(\Omega)$, cioè $\left.\dfrac{2n}{n-2}\right)$ sono problemi che rimangono aperti e sui quali conto di ritornare in un prossimo lavoro.

CAP. III

REGOLARIZZAZIONE

6. — Ci occuperemo ora del problema della regolarizzazione delle soluzioni «deboli» del problema misto e di trasmissione per l'operatore $A(u)$ per i quali in (N) si sono dati i teoremi esistenziali.

Applicheremo un procedimento cui vari Autori (tra i quali ricordiamo sopratutto Friedrichs, Nirenberg, Browder, Aronszajn-Smith, Stampacchia) hanno portato il loro contributo; precisamente noi seguiremo la rielaborazione che di esso è stata di recente fatta per equazioni differenziali lineari di ordine $2m$ in [12] (nn. 10 e 11).

L'estensione dei risultati di [12] al caso degli operatori vettoriali che ci interessano è immediata per cui ci limiteremo a richiamare i risultati soffermandoci solo su quei punti ove la trattazione generale si semplifica o si modifica. Per ogni dettaglio rinviamo fin d'ora al lavoro [12] citato.

Per fissare le idee nel seguito supporremo che u sia soluzione del problema (4.I) — (N) *ma, dato il carattere locale dei ragionamenti che faremo, è evidente fin d'ora che i risultati che daremo sono validi anche per le soluzioni dei problemi* (3.I), (6.I), (6.II) di (N). Teniamo conto in proposito di quanto detto nei nn. 2 e 6 di (N).

Sia $x_0 \equiv (x_1^0, \dots, x_r^0)$ un punto interno ad Ω (nel caso del problema di trasmissione x_0 interno a $\Omega - \Sigma$) e σ_r una sfera di centro x_0, raggio r, interna ad $\Omega\,[a\ \Omega - \Sigma]$.

Supponiamo che la forma $\tilde{a}(u, v)$ sia W^n-ellittica, cioè che soddisfi la (4.2) — (N). Si hanno questi lemmi:

LEMMA (6.I) — *Se $\varphi \in \mathcal{D}(\sigma_r)$ allora*

$$|a(\varphi u, \varphi u)| \geq c \,\|\varphi u\|^2_{H'(\sigma_r)^n} \tag{6.1}$$

(con c indipendente da u).

È immediata conseguenza del fatto che $\varphi u \in H_0^1(\sigma_r)^n$.

LEMMA (6.II) — (9) *Se $f \in H^k(\sigma_r)^n$, con k intero ≥ 1, per ogui $v \in \mathcal{D}(\sigma_r)^n$ e per ogni n-pla $p \equiv (p_1, p_2 \dots p_n)$, con $|p| \leq k$, si ha*

$$|(f, D^p v)_{L^2(\sigma_r)^n}| \leq \text{cost} \, \|v\|_{L^2(\sigma_r)^n} \tag{6.2}$$

(con c indipendente da v).

Infatti tenuto conto che v si annulla su $\partial \sigma_r$ con tutte le derivate, si ha:

$$|(f, D^p v)_{L^2(\sigma_r)^n}| = (D^p f, v)_{L^2(\sigma_r)^n} | \leq c \, \|v\|_{L^2(\sigma_r)^n}$$

Indichiamo con $\tau_h g$ (g funzione scalare o vettoriale) il rapporto incrementale di g rispetto alla generica x_i. Si ha allora:

LEMMA (6.III) — *Se $f \in L^2(\sigma_r)^n$, $\varphi \in \mathcal{D}(\sigma_r)$, e le matrici A_{hk} sono di classe* 1 *in σ_r, allora per ogni $v \in H_0^1(\sigma_r)^n$*, si ha

$$|\tilde{a}(\tau_h(\varphi u), v)| \leq c_1 \, \|v\|_{H^1(\sigma_r)^n} \tag{6.3}$$

e

$$\|\tau_h(\varphi u)\|_{H^1(\sigma_r)^n} \leq c_2 \tag{6.4}$$

c_1 e c_2 indipendenti da h.

Supponiamo dapprima $v \in \mathcal{D}(\sigma_r)^n$. L'equazione (4.1) di (N) si può scrivere

$$\tilde{a}(u, v) = (f, v)_{L^2(\sigma_r)^n} \tag{6.5}$$

da cui

$$\tilde{a}(u, \varphi \tau_{-h} v) = (f, \varphi \tau_{-h} v)_{L^2(\sigma_r)^n} = -(\tau_h \varphi f, v)_{L^2(\sigma_r)^n} \leq c \, \|v\|_{L^2(\sigma_r)^n}$$

Inoltre, come si prova con facili calcoli, tenendo conto dell'ipotesi fatta sulle A_{hk},

$$|\tilde{a}(\tau_h \varphi u, v) + \tilde{a}(u, \varphi \tau_{-h} v)| \leq \bar{c} \, \|v\|_{H^1(\sigma_r)^n}$$

da cui la (6.3) per $v \in \mathcal{D}(\sigma_r)^n$. Poichè $\mathcal{D}(\sigma_r)^n$ è denso in $H_0^1(\sigma_r)^n$ si ha la prima parte del lemma. Dalla (6.3), posto $v = \tau_h \varphi u$, si ottiene

$$|\tilde{a}(\tau_h(\varphi u), \tau_h(\varphi u)| \leq c^* \, \|\tau_h(\varphi u)\|_{H^1(\sigma_r)^n} \tag{6.6}$$

Di qui per il lemma (6.I) si ha la (6.4).

---

(9) Nei lemmi che seguono si indicherà spesso con lo stesso simbolo un vettore e la restrizione di esso alla sfera σ_r. L'ipotesi che $f \in H^k(\sigma_r)^n$ qualunque sia x_0 in Ω equivale all'ipotesi che $f \in H^k_{\text{loc}}(\Omega)^n$.

TEOREMA (6.I) — *Se* $f \in H^k(\sigma_r)^n$, *con* k *intero* ≥ 0 *e le matrici* A_{hk} *sono di classe* $(k+1)$ *in* σ_r, *allora* $u \in H^{k+2}(\sigma_\varrho)^n$ *per ogni* $\varrho < r$.

Questo fondamentale teorema per $k = 0$ è conseguenza immediata del lemma (6.III). Tenuto conto di questo fatto, se $k > 0$, con ragionamento analogo a quello svolto nel lemma (6.III) nel quale si sfrutterà ora il lemma (6.II) anzichè il lemma (6.I), si dimostra che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\sigma_r)$ si ha

$$\| \tau_h (\varphi D^p u \|_{H^1(\sigma_r)^n} \leq \text{cost.}$$

con $|p| \leq k$, e di qui facilmente la tesi.

Si può allora concludere, tenuto conto di un noto teorema di Sobolev ([10]), con i seguenti teoremi.

TEOREMA (6.II) — *Se la forma* $\tilde{a}(u, v)$ è W^n *-ellittica e le matrici* A_{hk} *sono di classe* $(k+1$ *in* Ω, *se inoltre* $f \in H^k_{\text{loc}}(\Omega)^n$ *con* k *intero* $> \frac{n}{2}$, allora u *coincide quasi — ovunque in* Ω *con un vettore di classe* 2 *che verifica, in senso classico, l'equazione* $\Lambda(u) = f$ *per ogni* $x \in \Omega$.

TEOREMA (6.III) — *Se le matrici* A_{hk} *sono di classe* $(k+1)$ *in* Ω_1, *e* Ω_2 *separatamente e la forma* $\tilde{a}(u, v)$ *è* W^n*-ellittica, se inoltre* ([11]) $f^{(i)} \in H^k_{\text{loc}}(\Omega_i)^n$ $(i = 1, 2)$ *con* k *intero* $> \frac{n}{2}$, *allora* u *coincide quasi ovunque in* Ω_i *con un vettore di classe* 2 *che verifica in senso classico l'equazione* $\Lambda(u) = f^{(i)}$ *in ogni punto di* Ω_i.

L'ultima parte del teorema si dimostra partendo dalla (6.5) con immediate integrazioni per parti.

Sia ora $x_0 \equiv (x_1^0 \dots x_n^0)$ un punto interno a $\partial_1 \Omega$ oppure a $\partial \Omega_2$ e supponiamo che $\partial_i \Omega$ $(i = 1, 2)$ sia una varietà $(n-1)$ -dimensionale di classe $l \geq 2$; esiste allora un intorno $I(x_0)$ e un omeorfismo $\xi = \mathcal{T}(x)$ di classe l, a Jacobiano $= 1$, che muta $I(x_0) \cap \overline{\Omega}$ nella semisfera $\sigma_r \equiv \{\Sigma \xi_i^2 \leq r^2, \xi_n \geq 0\}$. Supponiamo ancora che il funzionale $< \delta, v >$ lineare e continuo su W^n sia del tipo $(\delta, \gamma_0 v)_{L^2(\delta_2 \Omega)^n}$ con $\delta \in H^s(\partial_2 \Omega)$ (s intero ≥ 0).

È evidente che $\mathcal{T}$ muta la classe di vettori $\mathcal{H}^1[I(x_0) \cap \Omega]^n$ nella classe $\mathcal{H}^1(\sigma_r)^n$. Indicati con $u^*(\xi), f^*(\xi), \delta^*(\xi), \tilde{a}^*(u^*, b^*)$ trasformati secondo $\mathcal{T}$

([10]) Questo teorema afferma che le funzioni di $H^k(\Omega)$ appartengono a $C^{k-2}(\overline{\Omega})$ se la frontiera di Ω è sufficientemente regolare; per es., se $\Omega \equiv \sigma_r$.

([11]) $f^{(i)}$ restrizione di f ad Ω.

dei vettori $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\delta}$ e della forma $\widetilde{a}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, si ha dalla (4.1) - (N) per ogni vettore $\boldsymbol{v} \in \mathcal{H}^1 [I(x_0) \cap \Omega]^n$

$$\widetilde{a}^* (\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}^*) = (\boldsymbol{f}^*, \boldsymbol{v}^*)_{L^2(\sigma_r)^n} + (\mathcal{J} \delta^*, \gamma_0 \boldsymbol{v}^*)_{L^2(\Gamma_r)^n} \tag{6.7}$$

dove $\Gamma_r = \sigma_r \cap (\xi_n = 0)$ e $\mathcal{J}$ è una opportuna funzione di $C^{l-1}(\Gamma_r)$.

Si dimostrano i seguenti lemmi.

LEMMA (6.IV) — *Se $\boldsymbol{\delta}^* \in H^k(\Gamma_r)^n$, con k intero $1 \leq k\, l - 1$, per ogni n-pla di interi $p = (p_n, \dots, p_{n-1}, 0)$ con $|p| \leq k$, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\sigma_r, \Xi_n)$ e $\boldsymbol{v} \in \mathcal{D}(\sigma_r, \Xi_n)^n$ si ha*

$$|(\mathcal{J} \boldsymbol{\delta}^*, \gamma_0\, \varphi\, D^p \boldsymbol{v})_{L^2(\Gamma_n)^n}| \leq c \, \| \boldsymbol{v} \|_{H^1(\sigma_r)^n} .$$

(con c indipendente da $\boldsymbol{v}$).

Il lemma segue dalla relazione, di verifica immediata,

$$|(\mathcal{J} \boldsymbol{\delta}^*, \gamma_0\, \varphi\, D^p \boldsymbol{v})_{L^2(\Gamma_r)^n}| = |(D^p (\mathcal{J} \varphi\, \boldsymbol{\delta}^*), \gamma_0 \boldsymbol{v})_{L^2(\Gamma_r)^n}| \leq c \, \| \boldsymbol{v} \|_{H^1(\sigma_r)^n}$$

LEMMA (6.V) — *Se $\boldsymbol{f}^* \in H^k(\sigma_r)^n$, con k intero ≥ 1, allora per ogni $\boldsymbol{v} \in \mathcal{D}(\sigma_r, \Xi_n)^n$ si ha* (c costante indipendente da $\boldsymbol{v}$)

$$|(\boldsymbol{f}^*, D^p \boldsymbol{v})_{L^2(\sigma_r)^n}| \leq c \, \| \boldsymbol{v} \|_{L^2(\sigma_r)^n} .$$

La dimostrazione è analoga a quella del lemma (6.II).

Indichiamo con $\tau_h g$ (g vettore o scalare) il rapporto incrementale di g rispetto alla generica ξ_i con $i \neq n$. Allora

LEMMA (6.VI) — *Se $\boldsymbol{f}^* \in L^2(\sigma_r)^n$, $\boldsymbol{\delta}^* \in L^2(\Gamma_r)^n$, $\varphi \in D(\sigma_r)$, Ξ e $l = 3$ per ogni $\boldsymbol{v} \in \mathcal{H}^1(\sigma_r)^n$ si ha (c_1, c_2 costanti indipendenti da h):*

$$|a^*(\tau_h\, \varphi\, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v})| \leq c_1 \, \| \boldsymbol{v} \|_{H^1(\sigma_r)^n}$$

e

$$\| r_h (\varphi\, \boldsymbol{u}^*) \|_{H^1(\sigma_r)^n} \leq c_2$$

quindi in particolare $\boldsymbol{u}^* \in H^2(\sigma_\varrho)^n$ per ogni $\varrho < r$.

La dimostrazione è analoga a quella del lemma (6.III) tenuto conto dei lemmi (6.IV) e (6.V) e del fatto che, per la regolarità della trasformazione $\mathcal{T}$, si ha dalla (4.2) di (N) che

$$|a^*(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})| \geq \text{cost} \, \| \boldsymbol{v} \|_{H^1(\sigma_r)^n}$$

per ogni $\boldsymbol{v} \in \mathcal{H}'(\sigma_r)^n$.

Dai lemmi precedenti, ragionando come nel teorema (6.I), si giunge al seguente risultato:

TEOREMA (6.IV) — *Se* $f^* \in H^k(\sigma_r)^n$, $\delta^* \in H^k(\Gamma_r)^n$ *e* $l = k+1$, *allora per ogni n-pla di interi* $p \equiv (p_1, \ldots, p_{n-1}, 0)$ *con* $|p| \leq k$

$$D^p u^* \in H^2(\sigma_\varrho)^n$$

per ogni $\varrho < r$.

Resta ancora da studiare la regolarità delle derivate $D^p u^*$ nelle quali figurano derivazioni anche rispetto a ξ_n. La regolarità di queste derivate si può ottenere, sfruttando i risultati precedenti, dall'equazione [12] $A^*(u^*) = f^*$ seguendo un ben noto artificio di Nirenberg, come ora mostreremo.

Supponiamo che l'operatore $A(u) = -\Sigma_{hk} D_h (A_{hk} D_k u)$ sia fortemente ellittico (cfr. n- 1); questo comporta, se indichiamo con A^*_{hk} la matrice trasformata secondo la $\mathcal{T}$ di $A_{hk}(x)$, che

$$\det A^*_{nn} \neq 0$$

E poichè u^* soddisfa in σ_r l'equazione

$$-\Sigma_{hk} \frac{\partial}{\partial \xi_h}\left(A^*_{hk} \frac{\partial u}{\partial \xi_k}\right) = f^* \tag{6.8}$$

si ottiene [13]

$$-A^*_{nn} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi_n^2} = f^* - \sum_{1}^{n}{}_{ij} \frac{\partial}{\partial \xi_i} (A^*_{ij} - \delta^n_{ij} A^*_{nn}) \frac{\partial u^*}{\partial \xi_j}. \tag{6.9}$$

Di qui, per la (6.7), si ha che se $f^* \in L^2(\sigma_r)^n$ e le A^*_{ij} appartengono a $C^1(\sigma_r)$ allora $\dfrac{\partial^2 u^*}{\partial \xi_n^2} \in L^2(\sigma_r)^n$. Derivando poi la (6.9) rispetto a ξ_h $(h \neq n)$ si ottiene

$$-A^*_{nn} \frac{\partial^3 u^*}{\partial \xi_n^2 \partial \xi_h} = \frac{\partial f^*}{\partial \xi_h} + \sum_{1}^{n}{}_{ij} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{\partial A^*_{ij}}{\partial \xi_h} \frac{\partial u^*}{\partial \xi_j}\right) + \sum_{1}^{n}{}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} (A^*_{ij} - \delta^n_{ij} A^*_{nn}) \frac{\partial u^*}{\partial \xi_j}. \tag{6.10}$$

---

[12] A^* trasformato di A secondo $\mathcal{T}$.

[13] $\delta^n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j = n \\ 0 & \text{negli altri casi.} \end{cases}$

Quindi se $f^* \in H'(\sigma_r)^n$ e le A^*_{ij} appartengono a $C^2(\sigma_r)$ anche $\dfrac{\partial^3 u^*}{\partial \xi_n^2 \partial \xi_h} \in L^2(\sigma_r)^n$.

Deriviamo ora la (6.9) rispetto a ξ_n; sfruttando l'ultimo risultato, nelle stesse ipotesi per f^* e A^*_{ij} si ha che anche $\dfrac{\partial^3 u^*}{\partial \xi_n^3} \in L^2(\sigma_r)^n$.

Il procedimento evidentemente si può iterare.

I risultati precedenti permettono già di concludere nel caso del problema misto con i seguenti teoremi.

TEOREMA (6. V). — *Se* $f \in H^k(\Omega)^n$ *con* $k > \dfrac{n}{2} - 2$, $\partial_1 \Omega$ *è di classe* $l > \dfrac{n}{2}$, *l'operatore* $A(u)$ *è fortemente ellittico e le matrici* A_{hk} *appartengono a* $C^{k+1}(\Omega)$, *allora* u *coincide quasi-ovunque in* $\Omega \cup \partial_1 \Omega$ *con una funzione continua la quale si annulla in senso classico su* $\partial_1 \Omega$.

TEOREMA (6.VI). — Se $f \in H^k(\Omega)^n$, $\delta \in H^k(\partial_2 \Omega)^n$, $\partial_1 \Omega$ *è di classe* $k + 1$, $\partial_2 \Omega$ *è di classe* $k + 2$, *l'operatore* $A(u)$ *è fortemente ellittico e le matrici* $A_{hk} \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$ *con* $k > \dfrac{n}{2} - 1$ *allora* u *coincide quasi-ovunque in* $\bar{\Omega} -$ $- \overline{\partial_1 \Omega} \cap \dot{\partial}_1 \Omega$ *con una funzione di classe* 1 *soddisfacente in senso classico alle*

$$u = 0 \qquad su \qquad \partial_1 \Omega$$

e

$$L(u) = \delta \qquad su \qquad \partial_2 \Omega \quad (aperto).$$

Nel caso che il problema da regolarizzare sia un problema di trasmissione, oltre ai teoremi precedentemente stabiliti, che danno risultati validi quando il punto x_0 è interno a Ω_1, Ω_2 oppure a $\partial_i \Omega - \Sigma$ $(i = 1, 2)$, si deve studiare anche cosa succede quando x_0 è un punto interno alla varietà Σ. Uno studio analogo per il problema di Picone relativo al sistema dell'elasticità si trova svolto in [2]. Ci limitiamo quì ad osservare che se x_0 è interno a Σ, detto $I(x_0)$ un intorno di x_0 trasformabile mediante un omeomorfismo di classe $l \geq 2$ in una sfera $\sigma_r \equiv \{\Sigma \xi_i^2 \leq r^2\}$ la regolarità in σ_r delle derivate di u^* rispetto alle variabili $\xi_1 \ldots \xi_{n-1}$, si può ottenere cen gli stessi ragionamenti che ci sono serviti quando x_0 era interno a Ω_1 o ad Ω_2; si ricava poi separata mente in $\sigma_r \cap (\xi_n < 0)$ e $\sigma_r \cap (\xi_u > 0)$ la regolarità delle derivate di u in cui figurano derivazioni anche rispetto a ξ_n dalle equazioni $A^*(u^*) = f^{*(1)}$ e $A^*(u^*) = f^{(2)}$, sfruttando sempre l'artificio di Nirenberg che ci è servito nel caso di $x_0 \in \partial_i \Omega - \Sigma$.

Si hanno così i seguenti teoremi:

TEOREMA (6.VII). — *Se* $f^{(i)} \in H^k(\Omega_i)^n$, $\delta^{(i)} \in H^k(\partial_2 \Omega \cap \partial \Omega_i)$, $\partial_2 \Omega_0 - \Sigma$ *è di classe* $k + 2$, *l'operatore* $A(u)$ *è fortemente ellittico e le matrici* $A^{(i)}_{hk} \in C^{k+1}(\overline{\Omega}_i)$, *con* $k > \frac{n}{2} - 1$, *allora* $u^{(i)}$ *coincide quasi-ovunque in* $\overline{\Omega}_i - \Sigma$ *con un vettore di classe* 1 *il quale soddisfa in senso classico su* $\partial_2 \Omega \cap \partial \Omega_i$ *la relazione*

$$L^{(i)}(u^{(i)}) = \delta^{(i)} \qquad (i = 1, 2)$$

TEOREMA (6.VIII). — *Se* $f^{(i)} \in H^k(\Omega_i)^n$, Σ *è di classe* $k + 2$ *l'operatore* $A(u)$ *è fortemente ellittico e le matrici* $A^{(i)}_{hk} \in C^{k+1}(\Omega_i + \Sigma)$ *con* $k > \frac{n}{2} - 1$ *allora* u *coincide quasi-ovunque in* Ω *con un vettore continuo di classe* 1 *in* Ω_1 *e* Ω_2 *separatamente il quale verifica in senso classico le relazioni*

$$u^{(1)} = u^{(2)} \qquad su \qquad \Sigma$$

$$L^1(u^{(1)} + L^2(u^{(2)}) = 0 \qquad su \qquad \Sigma .$$

Rimane aperta sia per il problema misto che per quello di trasmissione, la regolarizzazione delle soluzioni « deboli » nell'intorno dei punti delle varietà $\overline{\partial_1 \Omega} \cap \partial_2 \Omega$ e $\Sigma \cap \partial \Omega$.

Va da sè che i procedimenti di regolarizzazione precedentemente esposti si applicano anche ai problemi misto e di trasmissione relativi all'operatore $A(u) + \lambda u$.