ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SERGIO CAMPANATO

Sui problemi al contorno per sistemi di equazioni differenziali lineari del tipo dell'elasticità (parte I)

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 13, nº 2 (1959), p. 223-258

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1959_3_13_2_223_0>

SUI PROBLEMI AL CONTORNO PER SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL TIPO DELL'ELASTICITÀ — (parte I).

di SERGIO CAMPANATO (Genova)

Questo lavoro è dedicato ad uno studio dei problemi al contorno relativi ad un sistema di equazioni differenziali lineari alle derivate parziali del secondo ordine che generalizza in modo naturale quello classico dell'elasticità.

Indichiamo con R_n lo spazio euclideo reale ad n dimensioni di punto generico $x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Sia $\boldsymbol{u}(x)$ un vettore di componenti (complesse) $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$. Introduciamo i simboli

$$s_{ik}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \quad (i, k = 1, 2, \dots, n) \tag{I.1}$$

e indichiamo con $S_k(\boldsymbol{u})$ ed $S_k^*(\boldsymbol{u})$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ rispettivamente i vettori

$$S_k(\boldsymbol{u}) \equiv \{s_{1k}(\boldsymbol{u}), s_{2k}(\boldsymbol{u}), \dots, s_{nk}(\boldsymbol{u})\} \tag{I.2}$$

e

$$S_k^*(\boldsymbol{u}) \equiv \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial u_1}{\partial x_k}, \dots, \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_n} + \operatorname{div}\boldsymbol{u}\right), \frac{1}{2}\frac{\partial u_{k+1}}{\partial x_k}, \dots, \frac{1}{2}\frac{\partial u_n}{\partial x_k}\right\} \tag{I.3}$$ [1].

Indichiamo con $C_{hk} \equiv \| c_{hk,jl} \|$ $(h\,k\,j\,l = 1, 2, \dots, n)$ un sistema di matrici così definite:

$$c_{hk,jl} = \begin{cases} \chi + 1 & \text{se } h = k = j = l \\ \chi - 1 & \text{se } l = k,\ j = h \quad \text{ma } l \neq j \\ 1 & \text{se } h = k, j = r \text{ ma } j \neq h \text{ oppure } h = r, j = k \text{ ma } j \neq h \\ 0 & \text{negli altri casi} \end{cases} \tag{I.4}$$

[1] Più brevemente $S_k(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} u_k + D_k \boldsymbol{u})$ e $S_k^*(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(D_k \boldsymbol{u} + \operatorname{div}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{i}_k)$ con $\boldsymbol{i}_k$ versore dell'asse x_k. Si osservi che $S_k^*(\boldsymbol{u})$ è l'aggiunto « formale » di $S_k(\boldsymbol{u})$.

con χ parametro reale. Con le notazioni introdotte l'operatore dell'elasticità

$$-\Delta\, \boldsymbol{u} - \chi \,\text{grand div}\, \boldsymbol{u}$$

si può scrivere nel seguente modo

$$(\text{I}.5) \qquad -\sum_{1}^{n}{}_{hk}\, S_h^* \,(C_{hk}\, S_k\,(\boldsymbol{u}))$$

dove $\boldsymbol{u}$ è il « vettore spostamento ».

Vengono così messi in evidenza gli operatori $s_{ih}\,(\boldsymbol{u})$ i quali, come è noto, hanno un'interpretazione fisica concreta come componenti del « tensore degli sforzi ».

Questo fatto suggerisce di assegnare l'operatore dell'elasticità nella forma (I.5) nella quale vengono assunti come « operatori elementari » i vettori $S_k\,(\boldsymbol{u})$ anzichè, come d'abitudine, le singole derivate parziali $D_k \boldsymbol{u} = \dfrac{\partial\, \boldsymbol{u}}{\partial\, x_k}$.

Più in generale, sia Ω un insieme aperto di R_n, di frontiera $\partial\,\Omega$, e $C_{hk}\,(h\,k = 1\,, 2 \ldots n)$ un sistema di matrici (complesse) funzioni del punto x in Ω; consideriamo il sistema, che diremo del tipo dell'elasticità,

$$(\text{I}.6) \qquad A\,(\boldsymbol{u}) = -\sum_{1}^{n}{}_{hk}\, S_h^* \,(C_{hk}\, S_h\,(\boldsymbol{u}))\,.$$

All'operatore $A\,(\boldsymbol{u})$, definito dalla (I.6), resta associata la forma sesquilineare

$$(\text{I}.7) \qquad a\,(\boldsymbol{u}\,, \boldsymbol{v}) = \int_{\Omega} \sum_{1}^{n}{}_{hk}\, C_{hk} S_k\,(\boldsymbol{u}) \times \overline{S_h\,(\boldsymbol{u})}\, d\,x$$

dalla quale si può « formalmente » (²) dedurre, con opportune integrazioni per parti, la seguente « formula di Green ».

$$(\text{I}.8) \qquad \int_{\Omega} A\,(\boldsymbol{u}) \times \bar{\boldsymbol{v}}\, d\,x = a\,(\boldsymbol{u}\,, \boldsymbol{v}) + \int_{\partial\Omega} L\,(\boldsymbol{u}) \times \bar{\boldsymbol{v}}\, d\,\sigma$$

ove

$$L\,(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{jkml}\, (c_{mk,jl} + c_{jk,ml})\, s_{jk}\,(\boldsymbol{u})\, \nu_m\, \boldsymbol{i}_l$$

con $\boldsymbol{i}_l$ versore dell'asse x_l e ν versore della normale interna a $\partial\,\Omega$.

(²) Cioè in ipotesi di regolarità per Ω, $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ che garantiscano la validità delle integrazioni per parti che occorrono.

La (I-8) suggerisce [3] determinati problemi al contorno, ben posti, per l'operatore $A(u)$; in particolare i problemi di Dirichlet, Neumann, misto e di trasmissione, si porranno, formalmente, nel seguente modo:

(I-I). Problema di Dirichlet: *$A(u)$ assegnato in Ω, u assegnato su $\partial\Omega$ (e all'infinito se Ω non è limitato).*

(II-I). Problema di Neumann: *$A(u)$ assegnato in Ω, $L(u)$ assegnato su $\partial\Omega$ (e u assegnato all'infinito se Ω è illimitato).*

(III-I). Problema misto: *$A(u)$ assegnato in Ω, $L(u)$ assegnato su $\partial_2\Omega \subset \partial\Omega$, u assegnato su $\partial_2\Omega = \partial\Omega - \partial_2\Omega$ ($\partial_1\Omega$ di misura positiva) e all'infinito se Ω non è limitato.*

(IV-I). Problema di trasmissione: *Decomposto Ω in due insiemi Ω_1 e Ω_2 privi di punti interni in comune e tali che $\partial\Omega_1$ e $\partial\Omega_2$ abbiano in comune una varietà $(n-1)$-dimensionale Σ, assegnati in Ω_i $(i=1,2)$ due operatori $A^i(u)$ del tipo (I.6), si ricercano due vettori u^i $(i=1,2)$ con queste condizioni: $A^i(u^i)$ assegnato in Ω_i, $L^i(u^i)$ assegnato su $\partial\Omega_i - \Sigma - \gamma_i$, u^i assegnato su γ_i (e all'infinito se Ω_i non è limitato) e inoltre $u^1 = u^2$ e $L^1(u^1) + L^2(u^2) = 0$ su Σ.*

Il problema di Picone relativo al caso: Ω_1 limitato e Ω_2 complementare di un compatto (cfr. ad es. [11]) rientra in quest'ultimo tipo di problemi [4].

Naturalmente si può anche considerare l'operatore $A(u)$ decomposto negli operatori elementari $D_k u \equiv \left\{\frac{\partial u_1}{\partial x_k}, \dots \frac{\partial u_n}{\partial x_k}\right\}$, vale a dire nella forma

$$A(u) = -\sum_{1}^{n}{}_{hk} D_h (A_{hk} D_k u) \tag{I.9}$$

dove le A_{hk} sono opportune matrici complesse legate alle C_{hk} della decomposizione (I.6). Le A_{hk} non sono determinate univocamente. (cfr. ad es. [12] n. 5). Noi intenderemo di sceglierle nel seguente modo

$$A_{hk} = \| a_{hk,jr} \| = \frac{1}{4} \| c_{hk,jr} + c_{jk,hr} + c_{hk.jr} + c_{jr,hk} \| \quad (h, k = 1, 2 \dots n). \tag{I.10}$$

All'operatore $A(u)$ scritto nella forma (I.9) resta associata la forma sesquilineare

$$\tilde{a}(u, v) = \int_\Omega \Sigma_{hk} A_{hk} D_k u \times \overline{D_h v}\, dx \tag{I.11}$$

---

(3) Per il modo come i problemi al contorno per l'operatore $A(u)$ vengono suggeriti dalla formula di Green (I.8) cfr. ad es. [12] n. 5. I numeri fra [ ] si riferiscono alla bibliografia finale.

(4) È appunto da uno studio del problema di Picone per operatori del tipo (I.6) che ha avuto origine il presente lavoro. I risultati ottenuti in un primo tempo per tale problema trovansi citati in [12] e [13] sotto titolo diverso da quello del presente lavoro.

e la formula di Grenn

$$\int_{\Omega} A(u) \times \bar{v}\, dx = \tilde{a}(u, v) + \int_{\partial\Omega} \sum_{1}^{n}{}_{hk} A_{hk} \nu_h D_k u \times \bar{v}\, dx \tag{I.12}$$

dalla quale, in modo analogo a quanto fatto partendo dalla (I.8), si possono trarre determinati problemi al contorno, ben posti, per l'operatore (I.9), del tipo di Dirichlet, Neumann, misto ecc.

Però, con la scelta fatta delle matrici A_{hk}, la (I.7) e (I.11) coincidono « formalmente » ([5]) e si ha

$$L(u) = \Sigma A_{hk} \nu_h D_k u$$

per cui i problemi del tipo di Dirichlet, Neumann, misto, di trasmissione, ecc. dedotti dalla (I.8) e dalla (I.12) rimangono « formalmente » gli stessi.

Quanto finora detto ha significato in classi di vettori sufficientemente regolari, e fa comprendere come i problemi precedentemente elencati si possano studiare sia attraverso l'una che attraverso l'altra decomposizione dell'operatore $A(u)$.

Se però, come si fa d'abitudine nelle moderne teorie esistenziali dei problemi al contorno, si intendono gli operatori elementari in una forma generalizzata (o come distribuzioni appartenenti ad una certa classe, o come elementi del « completamento » rispetto ad una opportuna norma di uno spazio di vettori sufficientemente regolari) la scelta della decomposizione dell'operare $A(u)$ comporta diversità effettive sia per quanto riguarda la classe ove si cercano le soluzioni, sia per le ipotesi sui dati e sugli aperti Ω.

Così, decomponendo l'operatore $A(u)$ nella forma (1.6) saremo portati a ricercare la soluzione in una classe di vettori u tali che u e gli $S_k(u)$ siano di quadrato sommabile in Ω, mentre adottando per $A(u)$ la decomposizione (I.9) verrà spontaneo ricercare la soluzione di una classe di vettori tali che u e tutte le derivate parziali prime $D_k u$ sono di quadrato sommabile in Ω, quindi in una classe meno generale di vettori (cfr. es. I del n. 2).

Questo lavoro è dedicato allo studio dei problemi al contorno per operatori del tipo $A(u)$ che verranno considerati sia nella decomposizione (I.6) che nella decomposizione (I.9). Mi sono limitato a studiare due problemi tipici: quello misto e quello di trasmissione.

([5]) Cioè per u e v sufficientemente regolari.

La trattazione (almeno per quanto riguarda la parte esistenziale) è quindi duplice. L'impostazione attraverso la decomposizione negli operatori elementari $S_k(\boldsymbol{u})$ mi sembra nuova anche se si inquadra in uno schema generale di studio dei problemi al contorno per sistemi di equazioni differenziali d'ordine $2m$ dovuto a J. L. Lions [10] (cfr. anche [12] n. 15) e si ricollega ad un lavoro di Lions dedicato al problema di Picone [11]. I teoremi esistenziali che si daranno sono pertanto di tipo nuovo sia per quanto riguarda la classe di vettori in cui si conseguono, sia per quanto riguarda la generalità degli aperti Ω (cfr. n. 2).

La trattazione attraverso la decomposizione negli operatori elementari $D_k \boldsymbol{u}$ rientra in un ordine di idee abituali nello studio generalizzato dei problemi al contorno; ricordiamo in proposito, fra gli Autori che si sono occupati di problemi al contorno per operatori del tipo $A(\boldsymbol{u})$, Friedrichs [7] per il problema di Dirichlet e Neumann per il sistema dell'elasticità, Fichera [5] per i problemi di Dirichlet, Neumann e misto relativi al sistema dell'elasticità, Pini [17] per il problema di Dirichlet per il sistema dell'elasticità, Lions [11] per il problema di Picone per operatori del tipo $A(\boldsymbol{u})$.

Il lavoro è stato diviso in due parti. Questa prima parte consta di tre capitoli: nel primo si introducono alcune classi vettoriali che servono nel seguito del lavoro e se ne studiano le proprietà e le mutue relazioni. Si dà altresì una definizione di insiemi aperti che interessa i teoremi esistenziali corredando la definizione di varie condizioni sufficienti che hanno un interesse anche in sé.

Nel secondo capitolo si danno i teoremi esistenziali nel caso di aperti Ω limitati mentre nel terzo capitolo si schematizza uno studio analogo a quello fatto nei precedenti capitoli per gli aperti Ω non limitati.

Sia nel problema misto che in quello di trasmissione si assumerà nullo il dato di Dirichlet ($\boldsymbol{u} = 0$ su $\partial_1 \Omega$), ma è noto come ci si possa ricondurre a questo caso sottraendo alla $\boldsymbol{u}$ un opportuno vettore $\boldsymbol{h}$ (6).

Nella seconda parte del lavoro verrà sviluppata la teoria di Riesz relativamente all'operatore $A(\boldsymbol{u}) + \lambda \boldsymbol{u}$ (λ parametro) e si daranno condizioni per la « coercività » delle forme $a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ e $\tilde{a}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Verrà anche studiato il problema della regolarizzazione delle soluzioni trovate in questa prima parte.

(6) La costruzione del vettore $\boldsymbol{h}$ richiede in pratica la risoluzione di un problema che può presentare anche notevoli difficoltà. Per l'argomento rinviamo ad es. a [12] n. 9.

CAP. I

PROPRIETÀ DI ALCUNE CLASSI DI VETTORI

1. — È utile premettere alcune definizioni e proprietà di spazi funzionali o vettoriali di cui si farà uso nel seguito.

Sia Ω un insieme aperto di R_n; indichiamo con $\mathcal{D}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni complesse indefinitamente derivabili in Ω a supporto compatto contenuto in Ω.

Con $H^k(\Omega)$ (k intero ≥ 0) si indicherà lo spazio delle funzioni complesse $g(x)$ definite in Ω tali che $D^p g \in L^2(\Omega)$, $|p| \leq k$ [7], le derivate essendo intese nel senso delle distribuzioni in Ω. In $H^k(\Omega)$ si intende introdotta la norma

$$\| g \|^2_{H^k(\Omega)} = \sum_{|p| \leq k} \| D^p g \|^2_{L^2(\Omega)} \tag{1.1}$$

rispetto alla quale $H^k(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert completo.

Si indicherà con $H_0^k(\Omega)$ la chiusura di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $H^k(\Omega)$.

Se $x_0 \in \partial\Omega$ e $I(x_0)$ è un intorno di x_0, posto $\sigma(x_0) = I(x_0) \cap \Omega$, si indicherà con $\mathcal{D}(\sigma(x_0); R_n)$ lo spazio delle «restrizioni» a $\sigma(x_0)$ delle funzioni di $\mathcal{D}(R_n)$ il cui supporto ha intersezione con Ω contenuta in $\sigma(x_0)$. $\mathcal{H}^k(\sigma(x_0))$ indicherà la chiusura di $\mathcal{D}(\sigma(x_0); R_n)$ in $H^k(\Omega)$.

Infine se $A(\Omega)$ è un generico spazio funzionale in Ω indicheremo con $A(\Omega)^n$ lo spazio dei vettori definiti in Ω le cui n componenti appartengono ad A.

---

(7) Se $p \equiv \{p_1, p_2 \cdots p_n\}$ è una n-pla di numeri interi non negativi si indica con $|p|$ la somma $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ e con D^p la derivata parziale

$$\frac{\partial^{p_1+p_2+\cdots+p_n}}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \cdots \partial x_n^{p_n}}$$

$L^2(\Omega)$ indica lo spazio delle funzioni di quadrato sommabile in Ω normato, al solito, ponendo

$$\| g \|_{L^2(\Omega)} = \| g \|_0 = \left[\int_\Omega | g |^2 dx \right]^{1/2}$$

Se in $A(\Omega)$ è stata introdotta la norma $\| \ \|_A$ in $A(\Omega)^n$ si intende sempre introdotta la norma

$$\| \boldsymbol{u} \|^2_{A(\Omega)^n} = \sum_1^n{}_k \| u_k \|^2_A \tag{1.2}$$

ed è evidente che A^n è uno spazio di Banach o di Hilbert completo rispetto alla norma $\| \ \|_{A^n}$ se e soltanto se A è uno spazio di Banach o di Hilbert completo rispetto alla norma $\| \ \|_A$.

Le proprietà delle classi funzionali precedentemente elencate sono state studiate e precisate da vari Autori; rinviamo ad es. al lavoro [12] (n. 1) già citato. Ricordiamo solo che per quanto riguarda le funzioni $g \in H^k(\Omega)$ $(k \geq 1)$, se Σ è una varietà $(n-1)$-dimensionale sufficientemente regolare, per es. di classe 1, contenuta in $\bar{\Omega}$, si possono definire le «tracce» $\gamma_s g$ su Σ della g e delle derivate normali interne d'ordine s: $\dfrac{\partial^s g}{\partial \gamma^s}$, con $s \leq k-1$ (v. ad es. [4], [12] ecc.).

Allora se $\boldsymbol{u}$ è un vettore di $H^k(\Omega)^n$ chiameremo traccia di $\boldsymbol{u}$ su Σ, e la indicheremo con $\gamma_0 \boldsymbol{u}$, il vettore $(\gamma_0 u_1, \dots, \gamma_0 u_n)$.

In maniera analoga si definiranno le tracce $\gamma_s \boldsymbol{u}$ delle derivate $\dfrac{\partial^s \boldsymbol{u}}{\partial \gamma^s}$ $(s \leq k-1)$.

2. — Sia Ω un insieme aperto limitato e connesso di R_n.

Decomponiamo $\partial \Omega$ in due insiemi disgiunti $\partial_1 \Omega$ e $\partial_2 \Omega$, aperto il primo e chiuso il secondo.

Introduciamo in Ω le seguenti classi di vettori [8]: $E(\Omega)^n$: è lo spazio dei vettori $\boldsymbol{u}$ definiti in Ω tali che

$$\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)^n$$

$$S_k(\boldsymbol{u}) \in L^2(\Omega)^n \qquad (k = 1, 2 \dots n)$$

in tale spazio si intende introdotta la norma

$$\|\boldsymbol{u}\|^2_{E^n} = \|\boldsymbol{u}^2_0\| + \|\|\boldsymbol{u}\|\|^2 \tag{2.1}$$

---

(8) Quando non ci sarà pericolo di equivoco si scriverà più semplicemente E^n, E^n_0, $V^n \dots$ anzichè $E(\Omega)^n, E_0(\Omega)^h, V(\Omega)^h \dots$

dove $|||u|||^2 = \int_\Omega \Sigma_k \, S_k(u) \times \overline{S_k(u)} \, dx$; rispetto a questa norma E^n è uno spazio di Hilbert completo (9).

$E_0(\Omega)^n$: è la chiusura di $\mathcal{D}(\Omega)^n$ in $E(\Omega)^n$.

Indichiamo con $\mathcal{D}_0(\overline{\Omega}, R_n)^n$ il sottoinsieme dei vettori di $\mathcal{D}(\overline{\Omega}, R_n)^n$ (10) che si annullano in un intorno di $\partial_1 \Omega$ (11). Allora

$V(\Omega)^n$: è la chiusura di $\mathcal{D}_0(\overline{\Omega}, R_n)^n$ rispetto alla norma (2.1).

$W(\Omega)^n$: è la chiusura di $\mathcal{D}_0(\overline{\Omega}, R_n)^n$ rispetto alla norma

$$\|u\|_0 + \|u\|_1 \tag{2.2}$$

dove

$$\|u\|_1^2 = \sum_{|p|=1} \|D^p u\|_0^2$$

E_0^n e V^n sono spazi di Hilbert completi rispetto alla norma (2.1) mentre W^n è uno spazio di Hilbert completo rispetto alla norma (2.2), valgono inoltre le inclusioni

$$E_0^n \subset V^n \subset E^n \tag{2.3}$$

e

$$H_0^1(\Omega)^n \subset W(\Omega)^n \subset H^1(\Omega)^n . \tag{2.4}$$

Elenchiamo alcune proprietà degli spazi vettoriali ora introdotti:

α) E_0^n è isomorfo algebricamente e topologicamente con lo spazio $H_0^1(\Omega)^n$; ciò è conseguenza della maggiorazione evidente

$$|||u||| \leq \|u\|_1 \tag{2.5}$$

e del fatto che (cfr. [11] n. 3) in $\mathcal{D}(\Omega)^n$ si ha:

$$\|u\|_1^2 \leq 2\, |||u|||^2. \tag{2.6}$$

Infatti, se $u \in \mathcal{D}(\Omega)^n$, mediante integrazione per parti si ottiene:

$$|||u|||^2 = \frac{1}{2}\|u\|_1^2 + \frac{1}{2}\|\operatorname{div} u\|_0^2$$

e quindi la tesi.

---

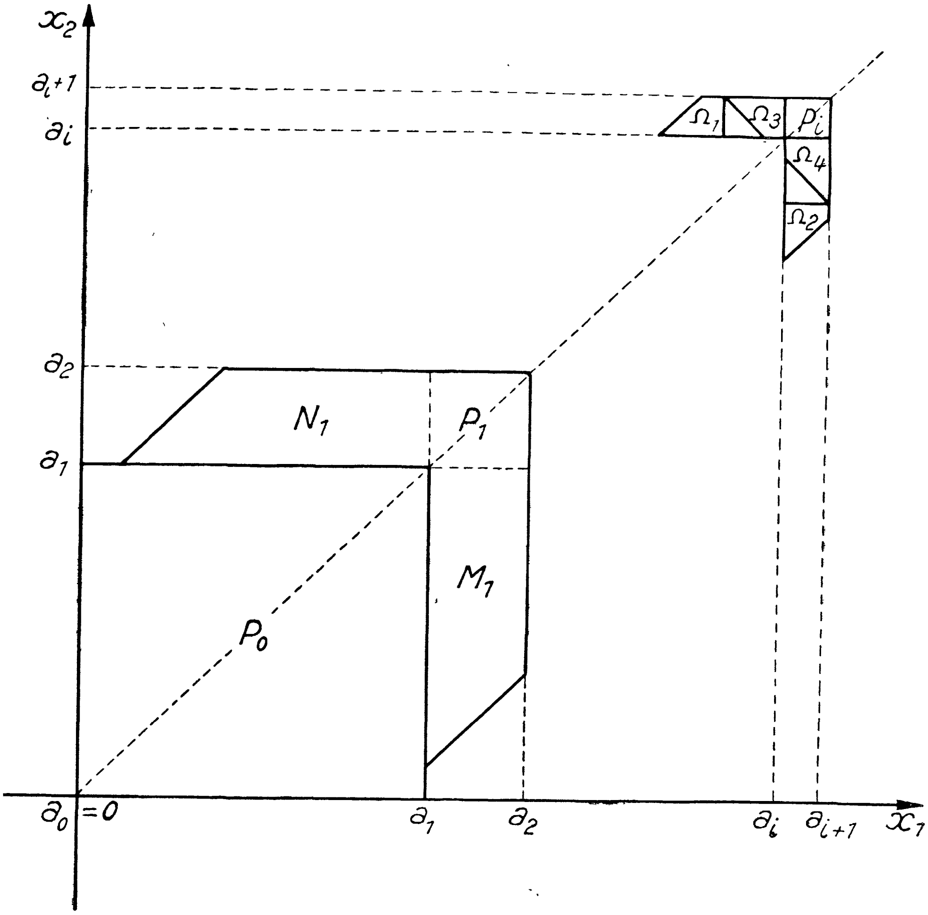
(9) Conseguenza del fatto che $S_k \in \mathcal{L}(L^2(\Omega)^h, \mathcal{D}'(\Omega)^h)$, cfr. ad es. [10] pag. 40.

(10) Con questo simbolo si indica l'insieme delle restrizioni ad $\overline{\Omega}$ dei vettori di $\mathcal{D}(R_n)^n$.

(11) Cioè in un aperto che contiene $\partial_1 \Omega$.

β) $W^n \subset V^n$ e l'inizione di W^n in V^n è continua; questo è conseguenza della (2.5) Però, se non si fa qualche ipotesi sull'aperto Ω, W^n non coincide (algebricamente e topologicamente) con V^n. La cosa si prova facilmente con un esempio:

ESEMPIO I (v. figura).



Siano $\{a_0 = 0 < a_1 < a_2 \ldots\}$ e $\{\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \alpha_2 \ldots\}$ due successioni numeriche la prima convergente e la seconda divergente.

Consideriamo queste tre successioni di insiemi del piano (x_1, x_2):

$$P_i \equiv \begin{cases} a_i < x_1 < a_{i+1} \\ a_i < x_2 < a_{i+1} \end{cases} \qquad i = 0, 1, 2 \ldots$$

$$N_i \equiv \begin{cases} x_2 - (h^2 + 2h + 2)(a_{i+1} - a_i) < x_1 \leq a_i \\ a_i \leq x_2 < a_{i+1} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots$$

$$M_i \equiv \begin{cases} a_i \leq x_1 < a_{i+1} \\ x_1 - (h^2 + 2h + 2)(a_{i+1} - a_i) < x_2 \leq a_{i+1} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots$$

con h numero intero e positivo tale che, per ogni $i \geq 1$,

$$(h^2 + 3h + 2)(a_{i+1} - a_i) \leq (a_i - a_{i-1}).$$

Poniamo

$$Q_0 \equiv P_0; \qquad Q_i \equiv P_i \cup N_i \cup M_i \qquad \text{per} \quad i \geq 1.$$

Sia Ω l'insieme aperto, connesso, limitato del piano (x_1, x_2) dato da (12)

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} Q_i$$

e assumiamo come $\partial_1 \Omega$ l'insieme dei due segmenti $\{0 \leq x_1 < a_1;\ x_2 = 0\}$ e $\{x_1 = 0;\ 0 \leq x_2 < a_1\}$.

Consideriamo in Ω il vettore $u = (u_1, u_2)$ definito nel seguente modo:

$$(2.7) \qquad \begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \begin{cases} \alpha_i (x_2 - a_i) + \gamma_i & \text{in} \quad P_i \cup N_i \cup M_{i+1} \quad i \geq 1 \\ 0 & \text{in} \quad P_0 \cup M_1 \end{cases} \\ u_2(x_1, x_2) &= \begin{cases} 0 & \text{in} \quad P_0 \cup N_1 \\ -\alpha_i (x_1 - a_i) - \gamma_i & \text{in} \quad P_i \cup N_{i+1} \cup M_i \quad i \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

ove si è posto

$$\gamma_i = \sum_{1}^{i-1}{}_k \, \alpha_k (a_{k+1} - a_k).$$

(12) Si potrebbero scegliere naturalmente aperti Ω di tipo diverso. L'aperto qui introdotto sarà però utile anche in un esempio successivo.

Si prova facilmente che

$$(2.8) \qquad \int_{\Omega} (u_1^2 + u_2^2)\, dx_1\, dx_2 \leq \frac{2}{3}(h^2+2h+3) \sum_1^{\infty}{}_i \frac{a_{i+1}-a_i}{\alpha_i} [\gamma_{i+1}^3 - \gamma_i^3] +$$

$$+ \frac{2}{3} \sum_1^{\infty}{}_i \frac{a_{i+1}-a_i}{a_i} [\gamma_{i+1}^3 - (\gamma_{i+1} - \alpha_i (h^2+2h+2)(a_{i+2}-a_{i+1}))^3]$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 dx_1\, dx_2 = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 dx_1\, dx_2 = 0.$$

$$(2.9) \qquad \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 dx_1\, dx_2 = \left(h^2 + 2h + \frac{5}{2}\right) \sum_1^{\infty}{}_i \alpha_i^2 (a_{i+1} - a_i)^2 +$$

$$+ \left(h^2 + 2h + \frac{3}{2}\right) \sum_1^{\infty}{}_i \alpha_i^2 (a_{i+2} - a_{i+1})^2.$$

$$(2.10) \qquad \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 dx_1\, dx_2 = \left(h^2 + 2h + \frac{5}{2}\right) \sum_1^{\infty}{}_i \alpha_i^2 (a_{i+1} - a_i)^2 +$$

$$+ \left(h^2 + 2h + \frac{3}{2}\right) \sum_1^{\infty}{}_i \alpha_i^2 (a_{i+2} - a_{i+1})^2.$$

$$(2.11) \qquad \int_{\Omega} [s_{11}^2(u) + s_{22}^2(u) + 2s_{12}^2(u)]\, dx_1\, dx_2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 dx_1\, dx_2 =$$

$$= 2\alpha_1^2 (h^2 + 2h + 2)(a_2 - a_1)^2 + 2(h^2 + 2k + 2) \sum_2^{\infty}{}_i (\alpha_i - \alpha_{i-i})^2 (a_{i+1} - a_i)^2.$$

È allora possibile scegliere le successioni $\{\alpha_n\}$ e $\{a_n\}$ in modo che le serie (2.8) e (2.11) siano convergenti mentre le (2.9) e (2.10) siano divergenti. Basta prendere ad esempio le due successioni:

$$(2.12) \qquad a_0 = 0\,, \quad a_n = \sum_0^{n-1}{}_i \frac{1}{(h^2 + 3h + 2)^i} + \frac{n+1}{n} \quad \text{per } n \geq 1$$

e

$$\alpha_0 = 0\,, \quad \alpha_n = \frac{1}{a_{n+1} - a_n} \quad \text{per } n \geq i.$$

Si ottiene così un vettore u che appartiene a V^2 ma non a W^2.

Quindi i vettori di V^n non sono dotati, in generale, di derivate prime tutte di quadrato sommabile [13].

Sarà comodo per il seguito dare la seguente definizione.

DEFINIZIONE (2.1) — *Fissato l'insieme* $\partial_1 \Omega \subset \partial \Omega$ *che determina le classi* V^n *e* W^n *diremo che l'insieme aperto, limitato e connesso* Ω *è di primo, secondo, terzo tipo secondo che in* Ω *valgono le disuguaglianze* (c_1 ; c_2 , c_3 costanti > 0).

$$\|u\|_0 \leq c_1 \, |||u||| \quad \text{per ogni } u \in V^n \tag{2.13}$$

oppure

$$\|u\|_0 \leq c_2 \, \|u\|_1 \quad \text{per ogni } u \in W^n \tag{2.14}$$

oppure [14]

$$\|u\|_1 \leq c_3 \, |||u||| \quad \text{per ogni } u \in W^n. \tag{2.15}$$

Si provano facilmente le seguenti proposizioni :

α) — *Condizione necessaria e sufficiente perchè* $W^n \equiv V^n$ (algebricamente e topologicamente) *è che* Ω *sia di terzo tipo.*

β) — *Ogni insieme di primo tipo è anche di secondo tipo.*

γ) — *Ogni insieme di secondo e terzo tipo è anche di primo tipo.*

Infatti, per quanto riguarda il punto α), se Ω è di terzo tipo sono equivalenti in virtù delle (2.5) e (2.15) le norme $\| \ \|_{H^1(\Omega)^n}$ e $\| \ \|_{E^n}$. La proposizione β) è conseguenza della maggiorazione (2.5), mentre la γ) segue dalle maggiorazioni (2.14) e (2.15).

Vogliamo ora dimostrare con un esempio che la proposizione γ) non è invertibile cioè che esistono insiemi aperti limitati e connessi che sono di primo (e quindi di secondo) tipo ma non di terzo tipo. La cosa avrà particolare interesse nel seguito.

ESEMPIO II (v. figura).

Consideriamo lo stesso insieme aperto Ω introdotto nell' esempio I, le successioni numeriche $\{\alpha_n\}$ e $\{a_n\}$ essendo date dalle (2.12).

---

(13) Si può dire solo che $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ e quindi $\operatorname{div} u \in L^2(\Omega)$.

(14) La disuguaglianza (2.15) è una disuguaglianza del tipo di Korn. Per disuguaglianze analoghe, in classi funzionali diverse, stabilite per lo studio del problema di Dirichlet e di Neumann per il sistema dell'elasticità cfr. [7] e per il problema di Picone cfr. [11].

È subito visto che Ω non è di terzo tipo; detto infatti u il vettore (2.7) e considerata la successione di vettori $u^n \in W^2$

$$u^n \equiv \begin{cases} u & \text{in } \bigcup_{i=1}^{n} Q_i + M_{i+1} \\ \gamma_{i+1} & \text{altrove} \end{cases}$$

non vale per essa, per quanto provato nell'esempio I, una maggiorazione del tipo (2.15). Dimostriamo invece che Ω è di primo tipo. Procederemo per gradi.

Sia u un generico vettore di $\mathcal{D}_0(\overline{\Omega}, R_2)^2$. Si dimostra facilmente che in Q_0 vale la maggiorazione

$$\|u\|^2_{0,Q_0} \leq a_1^2 \, |||u|||^2_{Q_0} \cdot \tag{2.16}$$

Infatti tenuto conto che u si annulla sui due segmenti $(0 \leq x_1 < a_1,\ x_2 = 0)$ e $(x_1 = 0,\ 0 \leq x_2 < a_1)$, si ha, per $x \in Q_0$,

$$u_1(x) = \int_0^{x_1} \frac{\partial u_1(t, x_2)}{\partial x_1} dt$$

$$u_2(x) = \int_0^{x_2} \frac{\partial u_2(x_1, t)}{\partial x_2} dt$$

di qui, quadrando e integrando su Q_0, si ottiene

$$\int_{Q_0} u_1^2 \, dx \leq \int_{Q_0} dx \left(\int_0^{x_1} \frac{\partial u_1(t, x_2)}{\partial x_1} dt \right)^2 \leq a_1^2 \int_{Q_0} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 dx$$

e

$$\int_{Q_0} u_2^2 \, dx \leq a_1^2 \int_{Q_0} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 dx$$

e sommando membro a membro si ha la (2.16).

Consideriamo ora il generico insieme Q_i $(i \geq 1)$ e decomponiamolo nei sottoinsiemi (non disgiunti) $Q_i = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4 \cup P_i$, dove

$$\Omega_1 \equiv \begin{cases} x_2 - (h^2 + 2h + 2)(a_{i+1} - a_i) \leq x_1 \leq h(a_{i+1} - a_i) - x_2 \\ a_i \leq x_2 \leq a_{i+1} \end{cases}$$

$$\Omega_2 \equiv \begin{cases} a_i \leq x_1 \leq a_{i+1} \\ x_1 - (h^2 + 2h + 2)(a_{i+1} - a_i) \leq x_2 \leq h(a_{i+1} - a_i) - x_1 \end{cases}$$

$$\Omega_3 \equiv \begin{cases} a_i - (h+1)(a_{i+1} - a_i) \leq x_1 \leq a_i \\ a_i \leq x_2 \leq a_{i+1} \end{cases}$$

$$\Omega_4 \quad \begin{cases} a_i \leq x_1 \leq a_{i+1} \\ a_i - (h+1)(a_{i+1} - a_i) \leq x_2 \leq a_i \end{cases}$$

In Ω_1 consideriamo la trasformazione $x \to \overline{x}$

$$\overline{x}_1 = x_1 - (h+1)(x_2 - a_i)$$
$$\overline{x}_2 = a_i - h(x_2 - a_i) \tag{2.17}$$

che muta Ω_1 in un insieme $T_1 \subset P_{i-1} \subset Q_{i-1}$. Si ha allora per $x \in \Omega_1$

$$u_1(x) + u_2(x) = u_1(\overline{x}) + u_2(\overline{x}) + \int_0^1 \frac{\partial\,[u_1(\xi(t)) + u_2(\xi(t))]}{\partial t}\, dt =$$

$$= u_1(\overline{x}) + u_2(\overline{x}) + \frac{r(x, \overline{x})}{\sqrt{2}} \int_0^1 [s_{11}(\boldsymbol{u}) + s_{22}(\boldsymbol{u}) + 2\, s_{12}(\boldsymbol{u})]_{\xi(t)}\, dt$$

ove si è posto: $\xi(t) = \overline{x} + t(x - \overline{x})$ $0 \leq t \leq 1$ e $r(x, \overline{x})$ è la distanza di x da $\overline{x}$, maggiorabile con $(h+1)(a_{i+1} - a_i)$. Di qui, quadrando e integrando su Ω_1, si ottiene

$$\int_{\Omega_1} (u_1 + u_2)^2\, dx \leq \frac{2}{h} \int_{T_1} (u_1 + u_2)^2\, dx + 2\,(h+1)^2 (a_{i+1} - a_i)^2 \cdot$$

$$\cdot \int_{\Omega_1} dx \left(\int_0^1 [s_{11}(\boldsymbol{u}) + s_{22}(\boldsymbol{u}) + 2\, s_{12}(\boldsymbol{u})]_{\xi(t)}\, dt \right)^2$$

e poichè

$$\int_{\Omega_1} dx \left(\int_0^1 [s_{11}(\boldsymbol{u}) + s_{22}(\boldsymbol{u}) + 2\, s_{12}(\boldsymbol{u})]_{\xi(t)}\, d\,t \right)^2 \leq$$

$$\leq \int_0^1 d\,t \int_0^1 d\,\tau \int_{\Omega_1} |s_{11}(\boldsymbol{u}) + s_{22}(\boldsymbol{u}) + 2 s_{12}(\boldsymbol{u})|_{\xi(t)} \cdot |s_{11}(\boldsymbol{u}) + s_{22}(\boldsymbol{u}) + 2 s_{12}(\boldsymbol{u})|_{\xi(\tau)}\, dx \leq$$

$$\leq \left(\int_0^1 d\,t \sqrt{\int_{\Omega_1} (s_{11}(\boldsymbol{u}) + s_{22}(\boldsymbol{u}) + 2\, s_{12}(\boldsymbol{u}))^2_{\xi(t)}\, dx} \right)^2 \leq 16\, \frac{(\sqrt{h} + 1)^2}{(1 + h)^2}\, |||\, \boldsymbol{u}\, |||^2_{\Omega_1 \cup Q_{i-1}}$$

si ha in definitiva

$$\int_{\Omega_1} (u_1 + u_2)^2\, dx \leq \frac{2}{h} \int_{Q_{i-1}} (u_1 + u_2)^2\, dx + 32\, (\sqrt{h} + 1)^2\, (a_{i+1} - a_i)^2\, |||\boldsymbol{u}|||^2_{\Omega_1 \cup Q_{i-1}} \tag{2.18}$$

Consideriamo invece la trasformazione $x \to \overline{x}$

$$\begin{aligned} \overline{x}_1 &= x_1 + (x_2 - a_i)(1 + h) \\ \overline{x}_2 &= a_i - h\,(x_2 - a_i) \end{aligned} \tag{2.19}$$

che muta Ω_1 in un insieme $T_2 \subset P_{i-1} \subset Q_{i-1}$. Si ha per $x \in \Omega_1$

$$u_1(x) - u_2(x) = u_1(\overline{x}) - u_2(\overline{x}) + \frac{r(x, \overline{x})}{\sqrt{2}} \int_0^1 (s_{11}(\boldsymbol{u}) + s_{22}(\boldsymbol{u}) - 2\, s_{12}(\boldsymbol{u}))_{\xi(t)}\, dt$$

ove $\xi(t) = \overline{x} + t\,(x - \overline{x})$ $0 \leq t \leq 1$, e con ragionamento del tutto analogo a quello fatto precedentemente si prova che

$$\int_{\Omega_1} (u_1 - u_2)^2\, dx \leq \frac{2}{h} \int_{Q_{i-1}} (u_1 - u_2)^2\, dx + 32\, (\sqrt{h} + 1)^2\, (a_{i+1} - a_i)^2\, |||\, \boldsymbol{u}\, |||^2_{\Omega_1 \cup Q_{i-1}} \tag{2.20}$$

Dalle (2.18) e (2.20), sommando membro a membro e maggiorando $(a_{i+1} - a_i)$ con $\dfrac{a_1}{(h^2 + 3h + 2)^i}$ si ottiene

$$\|\, \boldsymbol{u}\, \|^2_{0, \Omega_1} \leq \frac{2}{h}\, \|\, \boldsymbol{u}\, \|^2_{0, Q_{i-1}} + 64\, a_1^2\, |||\, \boldsymbol{u}\, |||^2_{\Omega_1 \cup Q_{i-1}}\,. \tag{2.21}$$

In modo analogo si può ragionare su Ω_2; alle trasformazioni (2.17) e (2.19) basterà sostituire le seguenti

$$\begin{aligned} \overline{x}_1 &= a_i - h(x_1 - a_i) \\ \overline{x}_2 &= x_2 - (h+1)(x_1 - a_i) \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \overline{x}_1 &= a_i - h(x_1 - a_i) \\ \overline{x}_2 &= x_2 + (h+1)(x_1 - a_i) \end{aligned}$$

e si giungerà ad una maggiorazione analoga alla (2.21):

$$\| u \|^2_{0,\Omega_2} \leq \frac{2}{h} \| u \|^2_{0,Q_{i-1}} + 64\, a_1^2 \,|||\, u \,|||^2_{\Omega_2 \cup Q_{i-1}} . \tag{2.22}$$

Consideriamo ora in Ω_3 la trasformazione $x \to \overline{x}$

$$\begin{aligned} \overline{x}_1 &= h(x_1 - a_i) + a_i - (h+1)(a_{i+1} - a_i) \\ \overline{x}_2 &= x_2 \end{aligned}$$

la quale muta Ω_3 nell'insieme

$$a_i - (h+1)^2 (a_{i+1} - a_i) \leq x_1 \leq a_i - (h+1)\, a_i$$

$$a_i \leq x_2 \leq a_{i+1}$$

contenuto in Ω_1. Si ha per $x \in \Omega_3$

$$u_1(x) = u_1(\overline{x}) + \int_{\overline{x}_1}^{x_1} \frac{\partial u_1(t, x_2)}{\partial x_1}\, dt$$

da cui

$$u_1^2(x) \leq 2\, u_1^2(\overline{x}) + 2\,(x_1 - \overline{x}_1) \int_{\overline{x}_1}^{x} \left(\frac{\partial u_1(t, x_2)}{\partial x_1} \right)^2 dt \leq$$

$$\leq 2\, u_1^2(\overline{x}) + 2\,(h+1)^2 (a_{i+1} - a_i) \int_{a_i - (h+1)^2 (a_{i+1} - a_i)}^{a_i} \left(\frac{\partial u_1(t, x_2)}{\partial x_1} \right)^2 dt$$

e integrando su Ω_3

$$\int_{\Omega_3} u_1^2(x)\, dx \leq \frac{2}{h} \int_{\Omega_1} u_1^2\, dx + 2\,(h+1)^3 (a_{i+1} - a_i)^2 \int_{\Omega_3 \cup \Omega_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 dx \tag{2.23}$$

Analogamente consideriamo la trasformazione $x \to \bar{x}$

$$\bar{x}_1 = x_1$$

$$\bar{x}_2 = a_i - h\,(a_{i+1} - x_2)$$

che muta Ω_3 in un sottoinsieme T_3 di P_{i-1}. Si ha allora

$$u_2(x) = u_2(\bar{x}) + \int_{\bar{x}_2}^{x_2} \frac{\partial u_2(x_1, t)}{\partial x_2}\, dt$$

da cui

$$u_2^2(x) \leq 2\, u_2^2(\bar{x}) + 2\,(h+1)\,(a_{i+1} - a_i) \int_{a_i - h(a_{i+1} - a_i)}^{a_{i+1}} \left[\frac{\partial u_2(x_1, t)}{\partial x_2}\right]^2 dt$$

e integrando su Ω_3

$$(2.24) \qquad \int_{\Omega_3} u_2^2 \leq \frac{2}{h} \int_{T_3} u_2^2\, dx + 2\,(h+1)^2\,(a_{i+1} - a_i)^2 \int_{\Omega_3 \cup T_3} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 dx \leq$$

$$\leq \frac{2}{h} \int_{Q_{i-1}} u_2^2\, dx + 2\,(h+1)^2\,(a_{i+1} - a_i)^2 \int_{\Omega_3 \cup Q_{i-1}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 dx$$

dalle (2.23) e (2.24), tenuto conto della (2.21), nell'ipotesi $h > 1$, si ha:

$$(2.25) \qquad \| \boldsymbol{u} \|_{0,\Omega_3}^2 \leq \frac{6}{h} \| \boldsymbol{u} \|_{0,Q_{i-1}}^2 + 129\, a_1^2\, [\, |||\boldsymbol{u}|||_{\Omega_3}^2 + |||\boldsymbol{u}|||_{\Omega_1}^2 + |||\boldsymbol{u}|||_{Q_{i-1}}^2]$$

Ragionando sull'insieme Ω_4 in modo analogo a come si è fatto per Ω_3 si ottiene la maggiorazione

$$(2.26) \qquad \| \boldsymbol{u} \|_{0,\Omega_3}^2 \leq \frac{6}{h} \| \boldsymbol{u} \|_{0,Q_{i-1}}^2 + 129\, a_1^2\, [\, |||\boldsymbol{u}|||_{\Omega_4}^2 + |||\boldsymbol{u}|||_{\Omega_2}^2 + |||\boldsymbol{u}|||_{Q_{i-1}}^2]$$

Consideriamo infine il quadrato P_i. La trasformazione $x \to \bar{x}$

$$\bar{x}_1 = x_1 - (a_{i+1} - a_i)$$

$$\bar{x}_2 = x_2$$

muta P_i in un sottoinsieme di Ω_3. Si ha allora per $x \in P_i$

$$u_1(x) = u_1(\bar{x}) + \int_{\bar{x}_1}^{x_1} \frac{\partial u_1(t, x_2)}{\partial x_1} dt$$

da cui

$$u_1^2(x) \leq 2\, u_1^2(\bar{x}) + 2\,(a_{i+1} - a_i) \int_{2a_i - a_{i+1}}^{a_{i+1}} \left(\frac{\partial u_1(t, x_2)}{\partial x_1}\right)^2 dt$$

e integrando su P_i

$$\int_{P_i} u_1^2\, dx \leq 2 \int_{\Omega_3} u_1^2\, dx + 2\,(a_{i+1} - a_i)^2 \int_{P_i \cup \Omega_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 dx. \tag{2.27}$$

Similmente, considerata la trasformazione $x \to \bar{x}$

$$\bar{x}_1 = x_1$$

$$\bar{x}_2 = x_2 - (a_{i+1} - a_i)$$

che muta P_i in un sottoinsieme di Ω_4, si ha per $x \in P_i$

$$u_2(x) = u_2(\bar{x}) + \int_{\bar{x}_2}^{x_2} \frac{\partial u_2(x_1, t)}{\partial x_2} dt$$

di qui, con ragionamento ormai abituale,

$$\int_{P_i} u_2^2\, dx \leq 2 \int_{\Omega_4} u_2^2\, dx + 2\,(a_{i+1} - a_i)^2 \int_{P_i \cup \Omega_4} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 dx. \tag{2.28}$$

Dalle (2.27) e (2.28) si ottiene

$$\| \boldsymbol{u} \|_{0, P_i}^2 \leq 2\, \| \boldsymbol{u} \|_{0, \Omega_3 \cup \Omega_4}^2 + a_1^2\, ||| \boldsymbol{u} |||_{\Omega_3 \cup \Omega_4 \cup P_i}. \tag{2.29}$$

Sommando membro a membro le (2.21), (2.22), (2.25), (2.26), (2.29) si ha in definitiva la maggiorazione

$$\| \boldsymbol{u} \|_{0, Q_i}^2 \leq \frac{40}{h} \| \boldsymbol{u} \|_{0, Q_{i-1}}^2 + a_1^2\,(10^3 + 2)\,[||| \boldsymbol{u} |||_{Q_i}^2 + ||| \boldsymbol{u} |||_{Q_{i-1}}^2] \tag{2.30}$$

valida per ogni $i \geq 1$. Dalla (2.30) e dalla (2.16) si ottiene

$$\sum_0^\infty{}_i \| u \|^2_{0,Q_i} \leq \frac{40}{h} \sum_0^\infty{}_i \| u \|^2_{0,Q_i} + 2\, a_1^2 (10^3 + 2) \sum_0^\infty{}_i ||| u |||^2_{Q_i}$$

di qui, supposto h intero sufficientemente grande ($h > 40$), si deduce che

$$\| u \|^2_{0,\Omega} \leq c\, ||| u |||^2_\Omega \tag{2.31}$$

per ogni $u \in \mathcal{D}_0(\overline{\Omega}, R_2)^2$. Tenuto conto ora che V^2 è la chiusura di $\mathcal{D}_0(\overline{\Omega}, R_2)^2$ rispetto alla norma (2.1) si ha la validità della (2.31) in V^2 e quindi Ω è di primo tipo.

Nella dimostrazione della maggiorazione (2.16) si è sfruttata esclusivamente l'ipotesi che ogni punto $x \in Q_0$ si può congiungere con $\partial_1 Q_0$ mediante due segmenti, paralleli agli assi coordinati e contenuti in Q_0. Questa condizione si può generalizzare come ora mostreremo. Ci limiteremo solo per comodità al caso $n = 2$, l'estensione al caso di n qualunque è puramente formale.

TEOREMA (2.I) — *Sia Ω un aperto limitato e connesso di R_2. Se esistono due direzioni ortogonali r_1 e r_2 tali che*

1^0) *ogni punto $x \in \Omega$ si può congiungere con $\partial_1 \Omega$ mediante due segmenti (x, y) e (x, w) $(y, x \in \partial_1 \Omega)$ contenuti in Ω, e paralleli rispettivamente alle direzioni r_1 e r_2,*

2^0) *y_1, y_2 e w_1, w_2, pensati come funzioni di x, siano di classe 1 in Ω, allora Ω è di primo tipo.*

Infatti se r_1 e r_2 sono le direzioni degli assi x_1 e x_2 il teorema si prova facilmente con un ragionamento analogo a quello usato per dimostrare la maggiorazione (2.16) del quadrato Q_0.

Se r_1 e r_2 non sono di quel tipo, allora ci si riporta al caso precedente mediante una rotazione degli assi che, come è noto, lascia invariati tanto $\| u \|_0$ che $||| u |||$.

Il criterio ora dato assicura implicitamente che Ω è di secondo tipo. Criteri più specifici verranno dati nei teoremi che seguono.

TEOREMA (2.II) — *Se $\partial \Omega$ è sufficientemente regolare, per esempio di classe 1, Ω è di secondo tipo.*

Infatti, nella sottoclasse dei vettori $u \in W^n$ per i quali $\| u \|_0 = 1$ consideriamo il funzionale

$$\mathcal{I}(u) = \| u \|_1^2 .$$

Con ragionamenti analoghi a quelli esposti ad esempio in [21] si dimostra che questo funzionale ha minimo nella classe di vettori ora detta.

Sia λ questo minimo. Deve essere $\lambda > 0$ perchè se $\lambda = 0$ a W^n dovrebbe appartenere almeno un vettore costante non nullo il che è assurdo perchè, nelle ipotesi poste, i vettori di W^n hanno traccia nulla su $\partial_1 \Omega$.

Ne segue che $\boldsymbol{u}$ è un generico vettore di W^n (15)

$$\| \boldsymbol{u} \|_0^2 \leq \frac{1}{\lambda} \| \boldsymbol{u} \|_1^2$$

e quindi la tesi.

Sia x un punto generico di Ω; indichiamo con $[\partial_1 \Omega]_x$ l'insieme dei punti $y \in \partial_1 \Omega$ per i quali il segmento (x, y) è tutto interno ad Ω, con $S(x)$ il «cono» che proietta $[\partial_1 \Omega]_x$ dal punto x, con $\sigma(x)$ l'ipersuperficie sferica di centro x e raggio 1, con $\sigma_1(x)$ la proiezione di $[\partial_1 \Omega]_x$ su $\sigma(x)$ e con ω_x la misura $(n-1)$-dimensionale di $\sigma_1(x)$. Allora

TEOREMA (2.III) — *Se esiste un numero positivo ω tale che $\omega_x \geq \omega$ per ogni $x \in \Omega$, l'aperto Ω è di secondo tipo* (16).

Fissato x, per ogni $y \in S(x)$ indichiamo con ξ la sua proiezione su $\sigma_1(x)$ e con r la distanza di y di x. Ad ogni punto $\xi \in \sigma_1(x)$ viene a corrispondere un punto $y \in [\partial_1 \Omega]_x$ la cui distanza da x verrà indicata con $r(\xi)$.

Sia $\boldsymbol{u}$ un vettore di W^n; poniamo, in $S(x)$, $\boldsymbol{u}(y) = \boldsymbol{u}(\xi, r)$. Si avrà per ogni $\xi \in \sigma_1(x)$

$$u_i(x) = -\int_0^{r(\xi)} \frac{d}{d\,r} u_i(\xi, r)\, d\,r \qquad (i = 1, 2 \dots n)$$

e integrando su $\sigma_1(x)$

$$\omega_x\, u_i(x) = -\int_{\sigma_1(x)} d\,\xi \int_0^{r(\xi)} \frac{d}{d\,r} u_i(\xi, r)\, d\,r \qquad (i = 1, \dots, n)$$

da cui

$$\omega\, |\, u_i(x)\, | \leq \omega_x\, |\, u_i(x)\, | \leq \int_{\delta(x)} \sum_1^n{}_j \left| \frac{\partial\, u_i(y)}{\partial\, y_j} \right| \frac{1}{|\, x - y\,|^{n-1}}\, d\,y \leq$$

$$\leq \int_\Omega \sum_1^n{}_j \left| \frac{\partial\, u_i(y)}{\partial\, y_j} \right| \frac{1}{|\, x - y\,|^{n-1}}\, d\,y\,.$$

---

(15) Si può dimostrare che λ è il più piccolo autovalore del problema misto

$$\begin{array}{lll} \Delta_2 \boldsymbol{u} + \lambda \boldsymbol{u} = 0 & & \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{u} & = 0 & \text{su } \partial_1 \Omega \\ \dfrac{d\,\boldsymbol{u}}{d\,\nu} & = 0 & \text{su } \partial_2 \Omega \end{array}$$

(16) Questa condizione è stata introdotta da G. Stampacchia nel lavoro [22].

Di qui, tenuto conto che $\sum_{1}^{n}{}_j \left| \frac{\partial u_i(y)}{\partial y_j} \right| \in L^2(\Omega)$, si ha, per noti risultati della teoria dei potenziali (cfr. ad. es. [14] teor. 12.VII pag. 22),

$$\omega^2 \int_\Omega u_i^2(x)\, d\,x \leq \text{cost.} \int_\Omega |\, \text{grad}\, u_i \,|^2\, d\,x \qquad (i = 1\,, 2 \ldots n)$$

e quindi

$$\| \boldsymbol{u} \|_0^2 \leq \frac{\text{cost}}{\omega^2} \| \boldsymbol{u} \|_1^2 \,.$$

Il teorema (2.III) si può generalizzare in modo abbastanza immediato. Supponiamo ad esempio che l'aperto Ω sia decomponibile in due aperti Ω_1 e Ω_2 (17) tali che $\partial_1 \Omega \subset \partial\, \Omega_1$, Ω_1 sia di secondo tipo (per es. valga la condizione del teorema (2.III)) $\sigma_1 = \partial\, \Omega_1 \cap \partial\, \Omega_2$ sia di classe 1 e inoltre da ogni punto di Ω_2 si « veda » σ_1 sotto un « angolo » la cui misura ha estremo inferiore $\omega > 0$. Sotto questa condizione Ω è ancora di secondo tipo.

Infatti sia $\boldsymbol{u}$ un vettore di W^n e $\gamma_0 \boldsymbol{u}$ la sua traccia su σ_1. Varranno le maggiorazioni

$$\int_{\Omega_1} |\, \boldsymbol{u} \,|^2\, d\,x \leq \text{cost} \int_{\Omega_1} \Sigma_i \;|\; \text{grad}\, u_i \,|^2\, d\,x \tag{2.32}$$

$$\int_{\sigma_1} |\; \gamma_0\, \boldsymbol{u} \,|^2\, d\, \sigma_1 \leq \text{cost} \int_{\Omega_1} \Sigma_i \;|\; \text{grad}\, u_i \,|^2\, d\,x \tag{2.33}$$

Sia $x \in \Omega_2$. Ragionando come nella dimostrazione del teorema (2.III) si prova che

$$\omega^2 \int_{\Omega_2} |\, \boldsymbol{u} \,|^2\, d\,x \leq \text{cost} \left[\int_{\Omega_2} d\,x \int_{\sigma_1} |\, \gamma_0\, \boldsymbol{u}\,(y) \,| \frac{1}{|\, x - y \,|^{n-1}}\, d\,y \int_{\sigma_1} |\, \gamma_0\, \boldsymbol{u}\,(z) \,| \frac{1}{|\, z - x \,|^{n-1}}\, d\,z + \right.$$
$$\left. + \int_{\Omega_2} \Sigma_i \;|\; \text{grad}\, u_i \,|^2\, d\,x \right]$$

(17) Solo per semplicità ci limitiamo al caso di due aperti ma è ovvio che si potrebbe supporre Ω decomponibile in m aperti del tipo detto nel testo.

ossia

$$\omega^2 \int_{\Omega_2} | \boldsymbol{u} |^2 \, dx \leq \text{cost} \left[\int_{\sigma_1} | \gamma_0 \boldsymbol{u}(y) | \, dy \int_{\sigma_1} | \gamma_0 \boldsymbol{u}(z) | \frac{1}{| y - z |^{n-2}} \, dz + \int_{\Omega_2} \Sigma \, | \operatorname{grad} u_i |^2 \, dx \right]$$

e quindi

$$\int_{\Omega_2} | \boldsymbol{u} |^2 \, dx \leq \text{cost} \left\{ \int_{\sigma_1} | \gamma_0 \boldsymbol{u} |^2 \, dy + \int_{\Omega_1} \Sigma_i \, | \operatorname{grad} u_i |^2 \, dx \right\}. \tag{2.34}$$

Dalle (2.32) (2.33) (2.34) si ha la tesi

$$\| \boldsymbol{u} \|_0^2 \leq \text{cost} \, \| \boldsymbol{u} \|_1^2 .$$

TEOREMA (2. IV) — *L'aperto Ω goda delle seguenti proprietà*

1°) *Ogni distribuzione $\boldsymbol{u}$ per cui $D^p u \in L^2(\Omega)^n$, $|p| = 1$, è in $L^2(\Omega)$.*

2°) *Esiste un punto $x_0 \in \partial_1 \Omega$ in un intorno del quale $\partial_1 \Omega$ è di classe 1* ([18]).

Allora Ω è di secondo tipo.

DIMOSTRAZIONE. Sia Γ l'intorno del punto x su $\partial_1 \Omega$ che per l'ipotesi 2°) è di classe 1. Per ogni $\boldsymbol{u} \in H^1(\Omega)^n$ indichiamo con $\gamma_0 \boldsymbol{u}$ la traccia su Γ. Consideriamo in $H^1(\Omega)^n$ le due norme

$$| \boldsymbol{u} |^2 = \| \gamma_0 \boldsymbol{u} \|^2_{L^2(\Gamma)^n} + \| \boldsymbol{u} \|^2_1 \tag{2.35}$$

e

$$\| \boldsymbol{u} \|^2_{H^1(\Omega)^n} = \| \boldsymbol{u} \|^2_0 + \| \boldsymbol{u} \|^2_1 . \tag{2.36}$$

Queste due norme sono equivalenti come è dimostrato in Lions [10] (pag. 56 n. b). Per comodità del lettore tratteggiamo la dimostrazione.

Decomponiamo $H^1(\Omega)^n$ in $C \oplus X^n$ dove C è lo spazio dei vettori costanti e X^n lo spazio ortogonale rispetto alla norma (2.36). Indichiamo con $B L^{\cdot}(\Omega)^n$ lo spazio quoziente dello spazio delle distribuzioni aventi derivate prime in $L^2(\Omega)^n$ rispetto ai vettori costanti. In $B L^{\cdot}(\Omega)^n$ introduciamo la norma $\| \boldsymbol{u} \|_1$. Gli spazi X^n e $B L^{\cdot}(\Omega)^n$ sono isomorfi perchè l'iniezione di X^n in $B L^{\cdot}(\Omega)^n$ è lineare, continua, biunivoca ed è anche *su* in quanto Ω gode la proprietà 1°). Allora per ogni $\boldsymbol{u} \in H^1(\Omega)^n$, posto

---

([18]) L'ipotesi 2°) potrebbe sostituirsi con la seguente: esiste un punto $x_0 \in \partial_1 \Omega$ e un intorno $I(x_0)$ di x_0 tale che l'aperto $[I(x_0) \cap \Omega]$ soddisfi l'ipotesi del teorema (2 III) ove si assuma $\partial_1 [I(x_0) \cap \Omega] \equiv \partial_1 \Omega \cap I(x_0)$.

$u = c + v$ con $c \in C$ e $v \in X^n$, vale la maggiorazione

$$\| c \|_0^2 + \| v \|_1^2 \leq \text{cost} \| u \|_1^2 . \tag{2.37}$$

Tenuto conto che $\gamma_0 u = c + \gamma_0 v$ si ha

$$| c | \leq \| \gamma_0 u \|_{L^2(\Gamma)^n} + \| \gamma_0 v \|_{L^2(\Gamma)^n} \leq \| \gamma_0 u \|_{L^2(\Gamma)^n} + \| v \|_{H^1(\Omega)^n} \leq$$
$$\leq \| \gamma_0 u \|_{L^2(\Gamma)^n} + \text{cost} \| u \|_1$$

e quindi

$$\| u \|_0 + \| u \|_1 \leq \| v \|_0 + \| v \|_1 + | c | \leq \| \gamma_0 u \|_{L^2(\Gamma)^n} + \text{cost} \| u \|_1 \tag{2.38}$$

per ogni $u \in H^1(\Omega)^n$.

In particolare se $u \in V_1^n \subset H^1(\Omega)^n$ allora $\gamma_0 u = 0$ e dalla (2.38) si ha

$$\| u \|_0 \leq \text{cost} \| u \|_1 .$$

Per condizioni che assicurano la validità della ipotesi 1°) rinviamo a Deny-Lions [4] (19). Ad esempio l'ipotesi 1°) è verificata se Ω è stellato rispetto ad un punto di R_n (cfr. [4] n. 6 pag. 332) oppure se Ω è di Sobolev (20) o ancora se Ω gode della proprietà di cono (21), in questo caso infatti Ω, essendo limitato, è anche di Sobolev (cfr. [8] teor. 1.V).

Particolarmente importante è il seguente teorema che poggia sulla nozione di aperto di Friedrichs (22).

---

(19) Nel lavoro citato gli aperti nei quali vale l'ipotesi 1°) sono chiamati di Nikodym.

(20) Un aperto di misura finita, connesso, di R_n $(n \geq 3)$ si dice aperto di Sobolev (cfr. [4] n. 5 pag. 327) se ogni distribuzione T con derivate prime di quadrato sommabile è in $L^q(\Omega)$ con q (esponente di Sobolev) dato da $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}$. Se Ω è di misura infinita la definizione si modifica nel senso che per ogni distribuzione T avente derivate prime in $L^2(\Omega)$ deve esistere una costante $c(T)$ tale che $T + c(T) \in L^q$ con q esponente di Sobolev.

(21) Ricordiamo che un aperto Ω gode della proprietà di cono se per ogni $x \in \Omega$ esiste un cono circolare, di vertice x, completamente contenuto in Ω, avente altezza e apertura indipendenti da x. Per una caratterizzazione di questi insiemi cfr. [8] teor. [1 . I].

(22) (Cfr. [11] pag. 212). Ricordiamo che un aperto Ω connesso, limitato o illimitato, si dice aperto di Friedrichs se esiste un compatto $K \subset \Omega$ e una costante $c > 0$ tale che per ogni vettore u soluzione dell'equazione

$$\Delta u + \text{grad div } u = 0$$

TEOREMA (2.V). — *Se Ω è di secondo tipo e inoltre è un aperto di Friedrichs allora Ω è anche di terzo tipo.*

Questo teorema si dimostra in modo del tutto analogo a quello con cui in [10] è dimostrato il teorema fondamentale del n. 5, tenuto conto che se Ω è di secondo tipo allora W^n è uno spazio di Hilbert completo rispetto alla norma $\| u \|_1$.

Da questo teorema discende come corollario che *se Ω è di secondo tipo e di Friedrichs allora è anche di primo tipo e $W^n \equiv V^n$* (algebricamente e topologicamente).

Criteri sufficienti abbastanza semplici perchè un aperto sia di Friedrichs sono stati dati da Friedrichs medesimo nel lavoro [6]; ci limitiamo ad enunciarli:

1) *L'aperto Ω è di Friedrichs se $\partial \Omega$ è sufficientemente regolare ad esempio di classe* 2.

2) *L'aperto Ω è di Friedrichs se esiste un intorno I di $\partial \Omega$ e una trasformazione $x_i = x_i(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n)$ $(i = 1 \dots n)$ che muta $I \cap \bar{\Omega}$ nella «corona» $S \equiv \{\varrho_0 \leq \Sigma\, \xi_i^2 \leq 1\}$, le funzioni x_i essendo di classe* 1 *e con Jacobiano $\neq 0$ in S.*

Più in generale $\partial \Omega$ può essere costituito da un numero finito di porzioni di superficie per ognuna delle quali vale la proprietà ora detta.

3) *Un aperto Ω è di Friedrichs anche se possiede «punti angolosi o spigoli di tipo rettangolare»* ([23]) *o che si possono ottenere da quelli di tipo rettangolare mediante una trasformazione $x_i = x_i(\xi)$ $(i = 1, \dots n)$ a Jacobiano positivo e con derivate seconde limitate.*

Ad esempio un «parallelepipedo» di R_n è un aperto di Friedrichs.

Concludendo questo capitolo voglio segnalare una proprielà notevole dello spazio V^n.

Sia $u \in V^n$ e φ una funzione di $\mathcal{D}(\Omega)$, allora $\varphi u \in E_0^n$, *ciò implica che localmente le $u_i \in H^1$ $(i = 1, \dots, n)$. Ne segue che se Σ è una varietà $(n-1)$-dimensionale contenuta in Ω e sufficientemente regolare, ad esempio di classe*

---

e tale che $D^p u \in L^2(\Omega)^n$, $|p| = 1$, sia

$$Ru \leq c\{R_k u + ||| u |||^2\}$$

avendo posto

$$Ru = \sum_{1}^{n}{}_{k} \left\| \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)^n}$$

e

$$R_k u = \sum_{\nu}^{n}{}_{kl} \left\| \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)\right\|^2_{L^2(K)^n}$$

([23]) Diciamo che in un punto x $\partial \Omega$ ha un punto angoloso o uno spigolo di tipo rettangolare se, in un intorno di x può essere rappresentato, rispetto ad una opportuna n-pla di assi cartesiani ortogonali con origine in x, da $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_k > 0$ con $k \leq n$.

1, *esiste la traccia di u su Σ nel senso visto nel n.* 1. *Il risultato si estende al caso che $\Sigma \subset \partial \Omega$*; sia infatti x_0 un punto interno a Σ e $I(x_0)$ un intorno di x_0 tale che $I(x_0) \cap \bar{\Omega}$ sia trasformato da un omeomorfismo di classe 1, $x = \mathcal{C}(\xi)$, in una semisfera $\sigma_\varrho \equiv \left\{ \sum_1^m \xi_i^2 \leq \varrho \, , \, \xi_m \geq 0 \right\}$ dello spazio Ξ_n. σ_ϱ è un aperto di Friedrichs; posto allora $u(\xi) = u(\mathcal{C}^{-1}(x))$ per ogni $\varphi(\xi) \in \mathcal{D}(\sigma_\varrho, \Xi_n)$, uguale ad 1 in un intorno $\mathcal{J}$ di $\xi \equiv \{0\}$, si ha $\varphi u(\xi) \in W(\sigma_\varrho)^n$ e per il teorema (2.V)

$$\| u(\xi) \|_{1,\mathcal{J}} \leq \text{cost} \, ||| \varphi \cdot u(\xi) |||_{\sigma_\varrho}$$

e quindi anche

$$\| u(x) \|_1 \leq \text{cost} \, ||| \mathcal{C} \varphi \cdot u(x) |||$$

in $\mathcal{C}(\mathcal{J}) \cap \bar{\Omega}$. Pertanto $u(x)$ coincide quasi-ovunque in $\mathcal{C}(\mathcal{J}) \cap \bar{\Omega}$ con una distribuzione di $H^1(\Omega)^n$ e ha traccia, nel senso visto nel n. 1, su $\Sigma \cap \overline{\mathcal{C}(\mathcal{J})}$. E poichè la varietà Σ si può ricoprire con un numero finito di intorni del tipo di $I(x_0)$, si ha la tesi.

CAP. II

TEOREMI DI ESISTENZA ED UNICITÀ IN DOMINI LIMITATI.

3. — Consideriamo l'operatore $A(u)$ decomposto nella forma (I.6) e supponiamo che le matrici C_{hk} $(h\, k = 1 \ldots n)$ siano misurabili e limitate in Ω. All'operatore $A(u)$ resta associata la forma sesquilineare e continua in $V^n \times V^n$

$$a(u, v) = \int_\Omega \sum_{1}^{n}{}_{hk} \, C_{hk} \, S_k(u) \times \overline{S_h(v)} \, dx \, . \tag{3.1}$$

Sia Q uno spazio normale di distribuzioni vettoriali, localmente convesso e separato (cfr. [18]) tale che $Q \supset V^n$ e l'iniezione di V^n in Q è continua; sia Q' il duale forte di Q. Indichiamo con $\mathcal{V}^n$ il sottoinsieme dei vettori di V^n tale che $A\, u \in Q'$. Sia infine f una distribuzione vettoriale di Q' e $\langle d, v \rangle$ un funzionale lineare e continuo su V^n nullo su $E_0(\Omega)^n$.

Abbiamo già osservato nella prefazione che si può supporre nullo il dato di Dirichlet su $\partial_1 \Omega$. Il pooblema al contorno misto (III-I) per l'operatore $A(u)$, definito da (I.6) si può generalizzare, secondo un'impostazione ormai abituale, nel seguente modo (cfr. ad es. [12]).

PR. (3.I) — *Assegnati* $\boldsymbol{f}$ *e* $\langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{v} \rangle$ *nel modo detto, trovare un vettore* $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}^n$ *tale che*

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{v} \rangle \tag{3.2}$$

per ogni $\boldsymbol{v} \in V^n$, *ove il primo* $\langle \quad \rangle$ *indica la dualità fra* Q *e* Q'.

Osserviamo che se $\boldsymbol{u}$ è soluzione del Pr. (3.I) esso risolve l'equazione $A(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}$ nel senso delle distribuzioni. Ragionando ad esempio come in [12] n. 9 si può dare anche un'interpretazione del modo generalizzato in cui $\boldsymbol{u}$ assume i dati al contorno, precisamente supposto $\partial_2 \Omega$ sufficientemente regolare, per esempio di classe 1, indichiamo con $V(\partial_2 \Omega)^n$ il sottospazio lineare e chiuso di $L^2(\partial_2 \Omega)^n$ delle traccie su $\partial_2 \Omega$ dei vettori di $V^n(\Omega)$ (cfr. osserv. finale pel Cap. I).

È possibile (cfr. [12] n. 9.b)) munire $V(\partial_2 \Omega)^n$ di una topologia tale che il suo duale forte che indicheremo con $[V(\partial_2 \Omega)^n]'$ sia isomorfo (algebricamente e topologicamente) allo spazio dei funzionali lineari e continui su $V(\Omega)^n$ nulli su $E_0(\Omega)^n$. Ciò posto, esiste un elemento $\boldsymbol{g} \in [V(\partial_2 \Omega)^n]'$ tale che

$$\langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{g}, \gamma_0 \boldsymbol{v} \rangle \qquad \text{per ogni } \boldsymbol{v} \in V(\Omega)^n. \tag{3.3}$$

Inoltre, fissato $\boldsymbol{u}$, l'espressione $a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - \langle A(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v} \rangle$ è una forma sesquilineare e continua su V^n che si annulla su E_0^n quindi, per quanto detto, esiste un ben determinato elemento $T\boldsymbol{u}$ di $[V(\partial_2, \Omega)^n]'$ tale che

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - \langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle T\boldsymbol{u}, \gamma_0 \boldsymbol{v} \rangle \qquad \text{per } \boldsymbol{v} \in V^n. \tag{3.4}$$

Quindi se $\boldsymbol{u}$ è soluzione del problema (3.I) $\boldsymbol{u}$ si annulla in un certo senso generalizzato su $\partial_1 \Omega$ e inoltre su $\partial_2 \Omega$ si ha che $T\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}$ nel senso di $[V(\partial_2 \Omega)^n]'$.

Osserviamo che se i dati $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{d}, \Omega)$ e i vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ sono sufficientemente regolari la (3.4) coincide proprio con la formula di Green (I.8), $T\boldsymbol{u}$ non è altro che l'operatore $L(\boldsymbol{u})$ e in particolare $\boldsymbol{u}$ si annulla in senso classico su $\partial_1 \Omega$.

Relativamente al problema generalizzato (3.1) si dimostra, con un tipo di ragionamento assai noto (v. ad es. [12] n. 6), il seguente teorema di esistenza ed unicità.

TEOREMA (3.1). — *Se esiste una costante* $\alpha > 0$ *tale che per ogni* $\boldsymbol{v} \in V^n$

$$| a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) | \geq \alpha \| \boldsymbol{v} \|^2_{E^n} \tag{3.5}$$

allora esiste uno ed un solo vettore $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}^n$ *che risolve la* (3.2) *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V^n$ [24].

Uno dei problemi che tale impostazione impone è quello di assegnare delle condizioni algebriche sull'operatore $A(\boldsymbol{u})$ e condizioni di regolarità sull'aperto Ω che assicurino la validità della (3.5). Riprenderemo in seguito soprattutto nella seconda parte questo problema; osserviamo però subito che può essere utile sostituire la maggiorazione (3.5) con una equivalente che sia di verifica più immediata. In questo ordine di idee si ha il seguente teorema, che è immediata conseguenza del teorema (3.1) e della definizione (2.1).

TEOREMA (3.II). — *Se Ω è di primo tipo e se esiste una costante $\alpha > 0$ tale per ogni $\boldsymbol{v} \in V^n$*

$$|\, a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \,| \geq \alpha \, |||\, \boldsymbol{v} \,|||^2 \tag{3.6}$$

allora esiste uno ed un solo vettore $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}^n$ che verifica la (3.2) *per ogni $\boldsymbol{v} \in V^n$.*

Per la validità della maggiorazione (3.6) una condizione algebrica che si presenta spontaneamente è che:

per quasi-tutti gli $x \in \Omega$ e per ogni n-pla di vettori complessi $\{\lambda^i\}$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ tali che $\lambda^i_r = \lambda^r_i$ si abbia

$$\mathcal{R}e \sum_{1}^{n}{}_{hk} \, C_{hk} \, \lambda^k \, x \, \lambda^h \geq \alpha \sum_{1}^{n}{}_{ir} \, |\, \lambda^i_r \,|^2 \tag{3.7}$$

con α numero positivo indipendente da x.

4. — Come è stato osservato nella prefazione si può decomporre l'operatore $A(\boldsymbol{u})$ anche nella forma (1.9), prendendo come operatori elementari anziché gli $S_k(\boldsymbol{u})$ le singole derivate parziali prime. Questo porta, nella trattazione dei problemi al contorno, a varie modifiche riguardanti la classe ove si cerca la soluzione, i dati e gli aperti Ω, modifiche che metteremo ora in rilievo prendendo in esame, come nel numero precedente, il problema misto.

Supponiamo che nell'operatore (I.9) le matrici A_{hk} (date dalle (1.10)) siano misurabili e limitate [25] e consideriamo in $W^n \times W^n$ la forma sesquilineare e continua $\tilde{a}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ associata all'operatore $A(\boldsymbol{u})$.

---

[24] La condizione (3,5) è chiamata da alcuni Autori condizione di V^n — ellitticità della forma $a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

[25] Lo saranno sicuramente se tali sono le A_{hk}.

Siano Q e Q' i due spazi di distribuzioni introdotti nel n. 3. Poichè $W^n \subset V^n$ sarà $Q \supset W^n$ e l'iniezione di W^n in Q è continua. Sia $f \in Q'$ e $\langle \delta, v \rangle$ un funzionale lineare e continuo in W^n, nullo su $H_0^1(\Omega)^n$. Indichiamo con $\mathcal{W}^n$ il sottoinsieme dei vettori di W^n tali che $A(u) \in Q'$. Supponiamo nullo il dato di Dirichlet su $\partial_1 \Omega$. Il problema misto per l'operatore $A(u)$ nella forma (I.9) si può dare una formulazione debole astratta analoga a quella vista nel numero precedente.

PR. (4.I). — *Assegnati f e $\langle \delta, v \rangle$ nel modo detto, trovare un vettore $u \in \mathcal{W}^n$ tale che per ogni $v \in W^n$ sia*

$$\tilde{a}(u, v) = \langle f, v \rangle + \langle \delta, v \rangle. \tag{4.1}$$

Il teorema di esistenza e di unicità cui si perviene è ora il seguente

TEOREMA (4.I). — *Se esiste una costante $\alpha > 0$ tale che, per ogni $v \in W^n$,*

$$| \tilde{a}(v, v) | \geq \alpha \| v \|^2_{H^1(\Omega)^n} \tag{4.2}$$

allora esiste uno ed un solo vettore $u \in \mathcal{W}^n$ che risolve il problema (4.I).

Si possono fare considerazioni analoghe a quelle del n. 3 sia per quanto riguarda l'interpretazione dal modo generalizzato in cui il vettore u, soluzione del Pr. (4.I), risolve l'equazione $A(u) = f$ e assume i dati al contorno, sia sulla opportunità di sostituire, per determinati tipi di aperti la condizione (4.2) con una di più facile verifica.

Ad esempio dal teorema (4.I) e dalla definizione (2.I) seguono immediatamente questi teoremi esistenziali:

TEOREMA (4.II). — *Se Ω è un aperto di secondo tipo e se esiste una costante $\alpha > 0$ tale che per ogni $v \in W^n$*

$$| \tilde{a}(v, v) | \geq \alpha \| v \|_1^2 \tag{4.3}$$

allora esiste uno ed un solo vettore $u \in \mathcal{W}^n$ che risolve il problema (4.I).

TEOREMA (4.III). — *Se Ω è un aperto di secondo e terzo tipo e se esiste una costante $\alpha > 0$ tale che per ogni $v \in W^n$*

$$| \tilde{a}(v, v) | \geq \alpha ||| v |||^2 \tag{4.4}$$

allora esiste uno ed un solo vettore $u \in \mathcal{W}^n$ che risolve il problema (4.I).

Per la validità della maggiorazione (4.4), come già per la (3.6), una condizione algebrica immediata è rappresentuta dalla (3.7) mentre per la maggiorazione (4.3) la condizione algebrica corrispondente è che *per quasi-tutti gli* $x \in \Omega$ *e per ogni n-pla di vettori complessi* $\{\lambda^i\}$ *si abbia*

$$\mathcal{R}e \sum_{1}^{n}{}_{hk} A_{hk} \lambda^k \times \lambda^h \geq \alpha \sum_{1}^{n}{}_{hk} \mid \lambda_h^k \mid^2 \tag{4.5}$$

con α *costante* > 0 *indipendente da* x.

Confrontando la (3.7) con la (4.5) si dimostra facilmente che quest'ultima è più restrittiva della prima: la (4.5) implica la (3.7) ma non è vero il viceversa; un esempio di questo fatto è offerto dal sistema dell'elasticità (I.5); si dimostra facilmente, tenuto conto delle (I.4), che per quel sistema la condizione (3.7) è verificata per $\chi > 0$ se $n = 2$, per $\chi > \frac{1}{3}$ se $n = 3$, e così via, mentre la (4.5) non è verificata per alcun valore di χ (26) se $n > 2$. Questa osservazione permette di affermare che adottando sia la decomposizione (I.6) sia la decomposizione (I.9) per il problema misto per l'operatore dell'elasticità, si ha un teorema di esistenza e di unicità in senso generalizzato per i suddetti valori di χ.

Però adottando la decomposizione in operatori elementari $S_k(u)$ *il teorema che si ottiene è più generale sia perchè dà la soluzione in una classe di vettori,* V^n, *non ad integrale pi Dirichlet finito, che è più generale della* W^n (cfr. es. (§ I)) *sia perchè è relativa ad aperti* Ω *che sono soltanto di primo tipo e quindi più generali* (cfr. es. (211)) *degli aperti* (di II e III tipo) *che si considerano nel teorema* (4.III). In questo teorema infatti si fa ricorso ad una diseguaglianza del tipo di Korn di cui invece non si ha bisogno nella precedente impostazione. Si osservi che anche nella trattazione del problema misto data da G. Fichera in [5] si fa uso di una diseguaglianza del tipo di Korn, precisamente di quella stabilita da Friedrichs in [7]. Notiamo infine che i teoremi esistenziali del n. 3 e del n. 4 si equivalgono solo se Ω è di (I) II e III tipo. Coincidono in questo caso le soluzioni del problema misto ottenute attraverso le due decomposizioni dell'operatore $A(u)$.

5. — Nello studio esistenziale che è stato fatto nei n. 3 e 4 rientra anche il problema di trasmissione per l'operatore $A(u)$ (cfr. introduzione), problema che nella impostazione debole da noi seguita non si diversifica da un problema di tipo misto nel quale si suppongono i coefficienti dell'opera-

---

(26) Se $n = 2$ la (4.5) è verificata per $1 < \chi < 2$,

tore $A(u)$ soltanto misurabili e limitati in Ω (cfr. ad es [20]). Questa del resto è l'unica ipotesi fatta sulle matrici C_{hk} e A_{hk} quando si sono dati i teoremi di esistenza e unicità dei n. 3 e 4.

Tenuto conto di quanto si è osservato nel n. 1 a proposito della traccia dei vettori di V^n, anche per il problema di trasmissione si può assumere come classe in cui ricercare la soluzione la classe V^n, o la W^n, secondo la decomposizione adottata per l'operatore $A(u)$. I teoremi esistenziali precedentemente trovati e le condizioni algebriche (3.7) e (4.5) sono tuttora validi.

CAP. III

TEOREMI DI ESISTENZA ED UNICITÀ IN DOMINI NON LIMITATI

6. Nel capitolo I e II si sono studiati i prolemi misto e di trasmissione per l'operatore $A(u)$ in aperti Ω limitati. Vogliamo ora fare un analogo studio nel caso che Ω sia un aperto non limitato, mettendo in rilievo le modifiche che si devono apportare a quanto detto nei numeri precedenti, e soprattutto le classi nelle quali sarà ora opportuno ricercare la soluzione di quei problemi.

Anche nel caso di Ω non limitato si possono assumere come operatori elementari gli $S_k(u)$ oppure le singole derivate parziali. In rapporto a ciò è necessario introdurre alcune classi di vettori, come si è fatto nel n. 1.

Con $B(\Omega)^n$ indichiamo la chiusura di $\mathcal{D}_0(\Omega, R_0)^n$ rispetto alla norma

$$\| u \|_{B^n} = \| u \|_{L^q(\Omega)^n} + ||| u ||| \tag{6.1}$$

dove $q = \dfrac{2n}{n-2}$ se $n > 2$ e $q = +\infty$ se $n = 2$.

Con $B_1(\Omega)^n$ indichiamo la chiusura della classe $\mathcal{D}_0(\overline{\Omega}, R_n)^n$ rispetto alla norma

$$\| u \|_{L^q(\Omega)^n} + \| u \|_1 \tag{6.2}$$

ove q è dato come sopra.

Infine con $B_0(\Omega)^n$ indichiamo la chiusura di $\mathcal{D}(\Omega)$ rispetto alla norma (6.1).

Notiamo che a differenza degli analoghi spazi E_0^n, V^n, W^n gli spazi ora introdotti B_0^n, B^n, B_1^n non sono spazi di Hilbert ma di Banach e ciò obbliga *quando si danno i teoremi esistenziali, ad imporre sull'aperto Ω opportune condizioni che permettano di sostituire le norme* (6.1) e (6.2) *con norme equivalenti ma hilbertiane.*

Tra gli spazi B_0^n, B^n, B_1^n intercorrono relazioni analoghe a quelle viste nel n. 2 per gli spazi E_0^n, V^n, W^n. In particolare $B_1^n \subset B^n$ e l'iniezione di B_1^n in B^n è continua però, in generale, B_1^n non coincide con B^n come si può mostrare con un esempio anologo all'esempio I del n. 2.

Anche i vettori di B^n sono localmente in $H'(\Omega)^n$, per cui, con ragionamento analogo a quello fatto per lo spazio V^n, si dimostra l'esistenza della traccia dei vettori di B^n su ogni varietà $(n-1)$-dimensionale di classe 1 contenuta in $\overline{\Omega}$.

Introduciamo i seguenti aperti:

DEFINIZIONE (6.I). *Fissato l'insieme $\partial_1 \Omega \subset \partial \Omega$, diremo che Ω, insieme aperto, connesso, non limitato, è di primo, secondo o terzo tipo secondo che in Ω valgono le diseguaglianze* (c_1 c_2 c_3 costanti > 0)

$$\| u \|_{L^q(\Omega)^n} \leq c_1 ||| u ||| \qquad \text{per ogni} \quad u \in B^n \tag{6.3}$$

oppure

$$\| u \|_{L^q(\Omega)^n} \leq c_2 \| u \|_1 \qquad \text{per ogni} \quad u \in B_1^n \tag{6.4}$$

oppure

$$\| u \|_1 \leq c_3 ||| u ||| \qquad \text{per ogni} \quad u \in B_1^n \tag{6.5}$$

Sono evidenti le seguenti proposizioni:

α) *Condizione necessaria e sufficiente perchè $B^n \equiv B_1^n$* (algebricamente e topologicamente) *è che Ω sia di terzo tipo.*

β) *Ogni insieme di primo tipo è anche di secondo tipo.*

γ) *Ogni insieme di secondo e terzo tipo è anche di primo tipo.*

δ) *Se Ω è un aperto di Sobolev è anche di secondo tipo* (cfr. [4] n. 5) ([27]).

Ricordiamo anche il risultato notevole ottenuto da Lions in [11] che se Ω è un aperto di Sobolev e di Friedrichs allora è di terzo tipo.

Con un esempio analogo all'esempio II del n. 2 si potrebbe dimostrare l'esistenza di aperti Ω del primo tipo che non sono necessariamente di terzo tipo.

([27]) Cfr. nota ([20]).

È di essenziale importanza per poter applicare il metodo generale alla dimostrazione dei teoremi esistenziali che enunceremo nel seguito, provare risultati di questo genere:

TEOREMA (6.I) — *Se Ω è di primo tipo e $\partial_1 \Omega$ è di classe* 1, *allora* $|||\, u \,|||$ *è in B^n una norma di Hilbert equivalente alla norma* (6.1).

Si verifica immediatamente che

$$\int_\Omega \Sigma_{hk}\, S_k(u) \times \overline{S_h(u)}\, dx$$

è un effettivo prodotto scalare in B^n. Dimostriamo che $u \in B^n$ e $|||\, u \,||| = 0$ implicano che $u \equiv 0$ in Ω. Infatti se $|||\, u \,||| = 0$ le componenti u_k del vettore u sono del tipo (cfr. [10] pag. 206)

$$u_k = \Sigma\, c_{ik}\, x_i + c_k$$

con c_{ik} e c_k costanti e $c_{ik} = - c_{ki}$. E poichè u ha traccia nulla su $\partial_1 \Omega$ si ha su $\partial_1 \Omega$

$$\Sigma_i\, c_{ik}\, x_i + c_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots n). \tag{6.6}$$

Quindi $\partial_1 \Omega$ dovrebbe essere contenuto nelle n varietà lineari (6.6) di dimensione $(n - 1)$. Ciò è possibile solo se quelle varietà coincidono e quindi solo se $c_{ik} = c_k = 0$, quindi $u \equiv 0$.

Infine la completezza di B^n rispetto alla norma $|||\, u \,|||$ deriva dall'equivalenza tra questa norma e la norma (6.1) dovuta al fatto che Ω è di primo tipo.

Con ragionamento del tutto analogo si prova che

TEOREMA (6.11). *Se Ω è di secondo tipo e $\partial_1 \Omega$ è di classe* 1, *allora* $\|\, u \,\|_1$ *è in B_1^n una norma di Hilbert equivalente alla norma* (6.2).

Sia ora Q uno spazio normale di distribuzioni vettoriali localmente convesso e separato tale che $Q \supset B^n$ e l'iniezione di B^n in Q è continua. Sia Q' il duale di Q. Supponiamo $A(u)$ decomposto nella forma (I.6) con C_{hk} matrici misurabili e limitate in Ω. Indichiamo con $\mathcal{B}^n$ il sottoinsieme dei vettori di B^n per i quali $A(u) \in Q'$. Sia f una distribuzìone di Q' e $\langle d, v \rangle$ un funzionale lineaıe e continuo in B^n nullo su B_0^n.

Analogamente a quanto si è fatto nel caso di Ω limitato, il problema misto (111-I) per l'operatore $A(u)$ dato nella forma (I.6), con dato di Dirichlet nullo, si può generalizzare nel seguente modo.

Pr. (6.I). *Trovare un vettore* $\boldsymbol{u} \in \mathcal{B}^n$ *che suddisfa l'equazione*

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{v} \rangle \tag{6.7}$$

per ogni $\boldsymbol{v} \in B^n$.

Analogamente se $A(\boldsymbol{u})$ è decomposto nella forma (1.9) con A_{hk} matrici misurabili e limitate in Ω, detto $\boldsymbol{f}$ un vettore di Q' e $\langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{v} \rangle$ un funzionale lineare continuo su B_1^n nullo su B_0^n, $\mathcal{B}_1^n$ il sottoinsieme dei vettori di B_1^n per i quali $A(\boldsymbol{u}) \in Q'$ la forma astratta debole in cui si può enunciare il problema misto con dato di Dirichlet nullo è la seguente:

Pr. (6.II) — *Trovare un vettore* $\boldsymbol{u} \in \mathcal{B}_1^n$ *tale che*

$$\tilde{a}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{v} \rangle \tag{6.8}$$

per ogni $\boldsymbol{v} \in B_1^n$.

Relativamente ai problemi (6.I) e (6.II) si possono dare i seguenti teoremi di esistenza ed unicità.

Teorema (6.III) — *Se Ω è di primo tipo, $\partial_1 \Omega$ è di classe 1, e se esiste una costante $\alpha > 0$ tale che per ogni $\boldsymbol{v} \in B^n$*

$$|a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})| \geq \alpha \, |||\boldsymbol{v}|||^2 \tag{6.9}$$

allora esiste uno ed un solo vettore $\boldsymbol{u} \in \mathcal{B}^n$ che verifica la (6.7) *per ogni $\boldsymbol{v} \in B^n$.*

Teorema (6.IV) — *Se Ω è di secondo tipo, $\partial_1 \Omega$ è di classe 1, e se esiste una costante $\alpha > 0$ tale che per ogni $\boldsymbol{v} \in B_1^n$*

$$|\tilde{a}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})| \geq \alpha \, \|\boldsymbol{v}\|_1^2 \tag{6.10}$$

allora esiste uno ed un solo vettore $\boldsymbol{u} \in \mathcal{B}_1^n$ che verifica la (6.8) *per ogni $\boldsymbol{v} \in B_1^n$.*

Questi teoremi si dimostrano con lo stesso ragionamento con cui si provano i teoremi (3.11) e (4.11) tenuto conto dei teoremi (6.I) e (6.II) riguardanti il carattere hilbertiano delle norme $|||\ \ |||$ e $\|\ \ \|_1$ nelle ipotesi poste per Ω.

Come si è già osservato nel caso di Ω limitato, lo studio del problema di trasmissione rientra in quello precedentemente fatto per il problema misto nell'ipotesi che i coefficienti dell'operatore $A(\boldsymbol{u})$ siano soltanto misurabili e limitati in Ω.

Osserviamo che le condizioni algebriche (3.7) e (4.5) sono sufficienti anche per la validità delle maggiorazioni (6.9) e (6.10).

In modo del tutto analogo si può trattare anche il problema di Picone che si ottiene supponendo $\partial_1 \Omega$ vuoto, Ω_1 limitato e Ω_2 complementare di un compatto.

Questo problema è stato studiato da J. L. Lions (cfr. [11]) per operatori $A(u)$ di tipo generale ma in una classe K di vettori che coincide con la chiusura dei vettori di classe 2 e di quadrato sommabile in Ω rispetto alla norma (6.2). Il Lions dà un teorema esistenziale in cui la condizione di K-ellitticità per la forma $a(u, v)$ è del tipo della (6.9). Notiamo però che nella trattazione del Lions Ω è supposto aperto di Sobolev e di Friedrichs quindi, secondo la nomenclatura precedentemente introdotta, aperto di I, II e III tipo. Per aperti siffatti non c'è distinzione tra una condizione del tipo (6.9) e una del tipo (6.10) cioè i teoremi (6.III) e (6.IV) non sono che formalmente diversi.

Osserviamo che il problema di Picone si potrebbe studiare più in generale secondo lo schema esposto precedentemente, decomponendo l'operatore $A(u)$ negli operatori elementari $S_k(u)$ e cercando la soluzione in una classe di vettori, più generale di quella di Lions, ottenuta come chiusura della classe dei vettori sufficientemente regolari in Ω, per esempio di classe 2, rispetto alla norma (6.1) anzichè alla (6.2), e in aperti Ω non necessariamente di terzo tipo.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. AGMON - « *The coerciveness problem for integro-differential forms* » - Journal d'Analyse Math. vol. VI - 1958 p. 183-223.

[2] S. CAMPANATO - « *Sul problema di M. Picone relativo all'equilibrio di un corpo elastico incastrato* » - Ricerche di Matem. - vol. VI - 1957 - p. 125-149.

[3] S. CAMPANATO - « *Sui problemi al contorno relativi al sistema di equazioni differenziali dell'elastostatica piana* » - Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova - 1956 - XXV - p. 307-342.

[4] J. DENY-J. L. LIONS - « *Les espaces du type de Beppo Levi* » - Ann. de l'Inst. Fourier - 5 - (1953-54) - p. 305-370.

[5] G. FICHERA - « *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno relativi all'equilibrio di un corpo elastico* » - Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa - Serie III - Vol. IV - Fasc. I - II - (1950).

[6] K. O. FRIEDRICHS - « *An inequality for potential functions* » - Americ. Journal of Mathem. - Vol. LXVIII - 1946 - p. 581-592.

[7] K. O. FRIEDRICHS - « *On the boundary-value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality* » - Ann. of Mathem. - serie III - vol. 48 - 1947 - p. 441-471.

[8] E. GAGLIARDO - « *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili* » - Ricerche di Matem. vol. VII - 1958 - p. 102-137.

[9] L. GÅRDING - « *Dirichlet's problems for linear elliptic partial differential equations* » - Mathem. Scandinavica - vol. I - 1953 - p. 55-72.

[10] J. L. LIONS - « *Problèmes aux limites en théorie des distributions* » - Acta Matematica - n. 94 - 1955 - p. 13-153.

[11] J. L. LIONS - « *Contributions à un problème de M. M. Picone* » - Ann. di Mat. pura e applic. - serie IV - t. XLI - 1955 - p. 201-219.

[12] E. MAGENES e G. STAMPACCHIA - « *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico* » - Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa - Serie III - Vol. XII - Fas. III (1958) p. 247-258.

[13] E. MAGENES - « *Sui problemi al contorno per i sistemi di equazioni differenziali lineari ellittici di ordine qualunque* » - Rend. sem. mat. Univ. Torino - vol. XVII - 1957-58 - p. 25-45.

[14] C. MIRANDA - « *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico* » - Springer-Verlag Berlin - 1955.

[15] L. NIRENBERG - « *Remarks on strongly elliptic partial differentials equations* » - Commun. on pure and appl. Mathem. - vol. VIII - 1955.

[16] M. PICONE - « *Sur un problème nouveau pour l'équation linéaire aux dérivées partielles de la théorie mathematique classique de l'élasticité* » - Colloque sur les équations aux dérivées partielles, Bruxelles, Mai 1954.

[17] B. PINI - « *Sul primo problema di valori al contorno della teoria dell'elasticità* - Rend. Sem. Matem. dell'Univ. di Padova - vol. XXI - 1952.

[18] L. SCHWARTZ - « *Théorie des distributions* » - vol. I e II - Paris, Hermann.

[19] S. L. SOBOLEV - « *Qualche applicazione dell'analisi funzionale alla fisica matematica* » - Leningrado 1950 (in Russo).

[20] G. STAMPACCHIA - « *Su un problema relativo alle equazioni di tipo ellittico del secondo ordine* » - Ricerche di Matem. vol. V - 1956.

[21] G. STAMPACCHIA - « *Problemi al contorno misti per equazioni del calcolo delle variazioni* » - Ann. di Matem. pura e appl. - serie IV t. XL - 1955 - p. 193-209.

[22] G. STAMPACCHIA - « *Lavoro in corso di stampa sugli Annali di matematica pura e applicata dell'anno 1959* ».

[23] N. I. VISHIK - « *Sui sistemi fortemente ellittici di equazioni differenziali* » - Mat. Sbornik - 29 - 1951 - p. 615-676 (in russo).