ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LAMBERTO CATTABRIGA

Un problema al contorno per una equazione parabolica di ordine dispari

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 13, nº 2 (1959), p. 163-203

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1959_3_13_2_163_0>

UN PROBLEMA AL CONTORNO PER UNA EQUAZIONE PARABOLICA DI ORDINE DISPARI

di LAMBERTO CATTABRIGA (a Bologna)

Sia $\mathcal{D}$ il dominio piano $\chi_1(y) \leq x \leq \chi_2(y)$, $0 \leq y \leq 1$, con $\chi_i(y)$, $i = 1, 2$ sufficientemente regolari e $\chi_1(y) < \chi_2(y)$. Indicheremo con γ_i l'arco di equazione $x = \chi^i(y)$, $0 \leq y \leq 1$, $i = 1, 2$, con C_0 il segmento $\chi_1(0) \leq \leq x \leq \chi_2(0)$, $y = 0$ e con C_1 il segmento $\chi_1(1) \leq x \leq \chi_2(1)$, $y = 1$. Tratteremo qui il problema di *determinare una funzione* $u(x, y)$ *definita in* $\mathcal{D}$ *tale che*

$$
(1) \qquad \begin{cases}
\mathcal{L}[u] = \sum_0^3{}_i\, a_i(x, y) \dfrac{\partial^i u}{\partial x^i} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = f(x, y) & \textit{in} \quad \mathcal{D} - C_0 - \gamma_1 - \gamma_2, \\
u = \varphi_0 & \textit{su} \quad C_0 \\
u = \varphi_i & \textit{su} \quad \gamma_i,\ i = 1, 2. \\
u_x = \psi & \textit{su} \quad \gamma_1
\end{cases}
$$

con $a_3(x, y) > 0$ *in* $\mathcal{D}$, $\varphi_0(x)$ *funzione assegnata in* $\chi_1(0) \leq x \leq \chi_2(0)$, $\varphi_i(y)$, $i = 1,2$ *e* $\psi(y)$ *funzioni assegnate in* $0 \leq y \leq 1$ *e* $\varphi_1(0) = \varphi_0(\chi_1(0))$, $\varphi_2(0) = \varphi_0(\chi_2(0))$.

Per la soluzione di questo problema daremo, sotto convenienti ipotesi sul dominio $\mathcal{D}$, i coefficienti dell'equazione e i dati al contorno, teoremi di esistenza e teoremi di unicità.

Il problema considerato si presenta come un problema di tipo parabolico. L'equazione $\mathcal{L}[u] = f$ non rientra tuttavia fra le equazioni paraboliche recentemente studiate con grande generalità da vari Autori [1], poichè la

---

[1] Cfr. per es. F. E. BROWDER, *Parabolic systems of differential equations with time-dependent coefficients*, Proc. Nat. Acad. Sci., 42 (1956); J. L. LIONS, *Boundary value problems,*

definizione di parabolicità da essi adottata implica sempre che la equazione sia di ordine pari nelle derivate rispetto ad x.

Accanto al problema (1) si può porre per l'equazione $\mathcal{L}[u]=f$ anche il problema

$$(1') \quad \begin{cases} \mathcal{L}[u]=f & \text{in} \quad \mathcal{D}-C_1-\gamma_1-\gamma_2, \\ u=\varphi_0 & \text{su} \quad C_1, \\ u=\varphi_i & \text{su} \quad \gamma_i, i=1,2, \\ u_x=\psi & \text{su} \quad \gamma_2, \end{cases}$$

con $a_3(x,y)>0$ in $\mathcal{D}$ e $\varphi_1(1)=\varphi_0(\chi_1(1))$, $\varphi_2(1)=\varphi_0(\chi_2(1))$, il quale si ottiene dal precedente mutando x in $-x$ ed y in $-y$. Analoghi, problemi possono porsi se è $a_3(x,y)<0$ in $\mathcal{D}$. Essi si trattano tutti allo stesso modo di (1).

Per tutti questi problemi sussiste un teorema di unicità di soluzione che è qui provato al n. 1. Se le funzioni $\chi_i(y)$, $i=1,2$, sono dotate di derivate prime continue in $0\leq y\leq 1$, il cambiamento di variabili

$$\xi=\frac{x-\chi_1(y)}{\chi_2(y)-\chi_1(y)}, \qquad \eta=\int_0^y \frac{dt}{[\chi_2(t)-\chi_1(t)]^3},$$

muta la equazione $\mathcal{L}[u]=f$ in una equazione dello stesso tipo ed il dominio $\mathcal{D}$ nel dominio rettangolare $R, 0\leq\xi\leq 1, 0\leq\eta\leq h \left(h=\int_0^1[\chi_2(t)-\chi_1(t)]^{-3}dt\right)$.

Ci siamo quindi limitati a studiare i problemi considerati, nel caso in cui $\mathcal{D}$ sia un dominio rettangolare. Il metodo che abbiamo seguito è quello della traduzione dei problemi in equazioni integrali; esso ci ha condotto ad ottenere sempre soluzioni in senso classico. Al n. 2 sono costruiti i potenziali di linea per l'equazione ridotta $\mathcal{L}_0[u]=\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$, richiesti per questa trattazione e ne sono studiate le proprietà. Si ritrovano così

Technical reports, Univ. of Kansas, 1957; M. I. VIŠIK, *Il problema di Cauchy per equazioni con operatori come coefficienti; problemi al contorno misti per sistsmi di equazioni differenziali e metodo di approssimazione per la loro soluzione*, Mat. Sbornik, 39 (81) (1956); B. PINI, *Sul problema fondamentale di valori al contorno per una classe di equazioni paraboliche lineari*, Ann. di Mat. pura appl. 4, 43 (1957); B. PINI, *Sulle equazioni paraboliche lineari del quarto ordine*, I e II, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 27 (1957).

fra l'altro per diversa via ed in forma più precisa ed utile per i nostri scopi, alcuni risultati conseguiti da lungo tempo da H. Block [2] ed in seguito ripresi da E. Del Vecchio [3], riguardanti la soluzione fondamentale della equazione $\mathcal{L}_0[u]=0$. Per la costruzione e lo studio di questi potenziali, uno solo dei quali era stato considerato dal Block, abbiamo adottato procedimenti utilizzati da B. Pini nello studio delle equazioni $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ [4] e $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ [5], con entrambe le quali la nostra equazione ridotta rivela comuni caratteri. Alcuni dei potenziali di linea ottenuti presentano sostanziali differenze rispetto a quelli che si possono costruire per le equazioni paraboliche $\dfrac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}}+(-1)^n\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ [6], differenze che si riscontrano d'altra parte nel comportamento delle rispettive soluzioni fondamentali. Con l'uso dei potenziali di linea abbiamo risolto al n. 3 il problema (1) per l'equazione ridotta $\mathcal{L}_0[u]=0$. Questo problema era già stato considerato da Del Vecchio e Block [7], in forma peraltro piuttosto schematica e senza precisare ipotesi. Non possedendo ftutti i potenziali di linea occorrenti, essi si servivano di una opportuna unzione di Green relativa ad un problema per una semistriscia. Soltanto nel caso in cui questa ha il lato ortogonale alle caratteristiche della equazione, tale funzione di Green era effettivamente costruita dal Block [8] mediante una generalizzazione del metodo delle immagini.

Il potenziale di dominio relativo all'operatore $\mathcal{L}_0$, oggetto di un altro lavoro di Del Vecchio [9], è qui studiato al n. 4, mentre al n. 5 è risolto

---

(2) H. Block *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles à caractéristiques multiples*, I e II Arkiv för Mat. Astr. och Fysik, Bd. 7 (1912) e (specialmente) III, ibidem Bd. 8 (1913).

(3) E. Del Vecchio, *La soluzione fondamentale per* $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}-\dfrac{\partial z}{\partial y}$, Atti R. Ist. Veneto Sci. Lett. Arti, 65 (1916).

(4) Cfr. la 1ª op. di quest'A. cit. in (1).

(5) B. Pini, *Contributi allo studio dell'equazione delle vibrazioni della sbarra elastica*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 8 (1958). È questo lavoro, con cui il nostro ha parecchi contatti, che ha guidato la presente ricerca.

(6) Cfr. L. Cattabriga, *Problemi al contorno per equazioni paraboliche di ordine 2n*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 28 (1958).

(7) E. Del Vecchio, *Sur deux problèmes d'intégration pour les équations paraboliques* $\dfrac{\partial^3 z}{\partial \xi^3}-\dfrac{\partial z}{\partial \eta}=0$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial \xi^3}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}=0$; H. Block, *Remarque à la note précédente*, Arkiv för Mat. Astr. och Fys. Bd. 11 (1916).

(8) Cfr. op. cit. in (2), nota III.

(9) E. Del Vecchio, *Sulle equazioni* $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+\varphi_1(x,y)=0$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\varphi_2(x,y)=0$, Memorie R. Accad. Sci. Torino, (2), 66 (1915).

il problema (1) per l'equazione $\mathcal{L}_0[u] = g(x, y)$. Ciò è eseguito in due modi, di cui il secondo, che si serve della trasformata di Laplace, è in seguito (n. 6) utilizzato per la trattazione del problema (1) per l'equazione completa. A proposito di questa notiamo che se nel cambiamento di variabili più sopra indicato si pone

$$\eta = \int_0^y \frac{a_3(x, t)}{[\chi_2(t) - \chi_1(t)]^3} \, d\, t,$$

oltre a trasformare $\mathcal{D}$ in R, si riduce l'equazione $\mathcal{L}[u] = f$ ad una equazione dello stesso tipo con il coefficiente di $\dfrac{\partial^3 u}{\partial \xi^3}$ eguale ad uno. Se in quest'ultima il coefficiente a_2 è continuo con le sue prime due derivate rispetto ad x, il cambiamento di funzione incognita

$$u = e^{-\frac{1}{3}\int a_2 dx} v$$

conduce alla equazione, che possiamo dire di tipo canonico

$$\mathcal{L}[v] = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + a_1(x, y) \frac{\partial v}{\partial x} + a_0(x, y)\, v - \frac{\partial v}{\partial y} = f(x\, y) .$$

È del problema (1) per questa equazione, quando i coefficienti a_1 ed a_0 non dipendano da y ed i dati al contorno siano nulli, che si occupa il n. 6. Il procedimento seguito, che si serve ancora della trasformata di Laplace, si ispira alla trattazione data da B. Pini ad un problema al contorno per l'equazione

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_0^2{}_i\, a_i(x) \frac{\partial^i u}{\partial x^i} + b(x) \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y)\ (^{10}).$$

I risultati cui siamo pervenuti dovrebbero potersi stabilire anche con ipotesi meno restrittive di quelle da noi introdotte; essi possono estendersi al problema corrispondente ad (1) per l'equazione

$$\sum_0^{2n+1}{}_i\, a_i(x, y) \frac{\partial^i u}{\partial x^i} + (-1)^n \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y), \quad a_{2n+1}(x, y) > 0 \text{ in } \mathcal{D},$$

benchè l'esposizione che segue sia limitata al caso $n = 1$. Si debbono per questo tenere presenti anche i primi due numeri del mio lavoro citato in [6].

---

[10] Cfr. op. cit. in [5] pp. 115-20.

1. — Un teorema di unicità per il problema (1).

Sia $u(x, y)$ una soluzione del problema (1), con $\varphi_0 \equiv \varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv \psi \equiv 0$, $f \equiv 0$, continua in $\mathcal{D}$ con le sue prime due derivate rispetto ad x. I coefficienti di $\mathcal{L}$ siano anch'essi continui in $\mathcal{D}$ con le loro derivate rispetto ad x di ordine $\leq i$. Poniamo

$$u(x, y) = v(x, y) \exp(M x + N y)$$

con M ed N costanti da precisarsi. Si avrà allora

$$\mathcal{L}[u] = \left\{ a_3 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + (a_2 + 3 M a_3) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (a_1 + 2 M a_2 + 3 M^2 a_3) \frac{\partial v}{\partial x} + \right.$$
$$+ (a_0 + M a_1 + M^2 a_2 + M^3 a_3 - N) v -$$
$$\left. - \frac{\partial v}{\partial y} \right\} \exp(M x + N y) = \mathcal{L}'[v] \exp(M x + N y)$$

e quindi $\mathcal{L}'[v] = 0$ in $\mathcal{D} - C_0 - \gamma_1 - \gamma_2$, $v = 0$ su $C_0 + \gamma_1 + \gamma_2$, $v_x = 0$ su γ_1. Integrando allora $v \mathcal{L}'[v]$ su un dominio $\mathcal{D}'$ interno a $\mathcal{D}$ per es. con frontiera parallela alla frontiera di $\mathcal{D}$, eseguendo successive integrazioni per parti e facendo infine tendere $\mathcal{D}'$ a $\mathcal{D}$ si ottiene

$$\iint_{\mathcal{D}} \left\{ \left[\frac{3}{2} \frac{\partial a_3}{\partial x} - a_2 - 3 M a_3 \right] \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left[- \frac{1}{2} \frac{\partial^3 a_3}{\partial x^3} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a_2}{\partial x^2} + \right. \right.$$
$$+ \frac{3}{2} M \frac{\partial^2 a_3}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_1}{\partial x} - M \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{3}{2} M^2 \frac{\partial a_3}{\partial x} +$$
$$\tag{2} \left. \left. + a_0 + M a_1 + M^2 a_2 + M^3 a_3 - N \right] v^2 \right\} dx\, dy -$$
$$- \frac{1}{2} \int_{\gamma_2} a_3 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 d y - \frac{1}{2} \int_{\chi_1(1)}^{\chi_2(1)} v^2(x, 1)\, d x = 0 .$$

Poichè è $a_3(x, y) > 0$ in tutto $\mathcal{D}$, esisterà una costante positiva δ per cui è $a_3 > \delta$ in $\mathcal{D}$. Scegliamo ora la costante M in modo che sia

$$\frac{3}{2} \frac{\partial a_3}{\partial x} - a_2 - 3 M a_3 < 0$$

in $\mathcal{D}$, ciò che si ottiene prendendo

$$M > \frac{1}{3\,\delta} \max_{\mathcal{D}} \left(\frac{3}{2} \frac{\partial\, a_3}{\partial\, x} - a_2 \right).$$

Fissata allora la costante N in modo che anche il coefficiente di v^2 nell'integrale doppio di (2) sia negativo in tutto $\mathcal{D}$, la (2) stessa non potrà verificarsi se non quando sia $v \equiv 0$ in $\mathcal{D}$.

Dunque

I. *Se i coefficienti* $a_i(x\,,y)$ *di* $\mathcal{L}$, $i = 0\,, \dots, 3$, *sono continui in* $\mathcal{D}$ *assieme alle loro derivate rispetto ad* x *di ordine* $\leq i$, *gli archi* $\gamma_j\,, j = 1\,, 2$, *sono sufficientemente regolari, ed è* $a_3(x\,,y) > 0$ *in* $\mathcal{D}$, *esiste al più una soluzione del problema* (1) *continua in* $\mathcal{D}$ *con le sue prime due derivate rispetto ad* x.

Lo stesso risultato si ottiene, con ragionamenti analoghi, per il problema (1') e per i problemi relativi al caso $a_3(x\,,y) < 0$ in $\mathcal{D}$.

2. — Costruzione e studio di potenziali di linea per l'equazione ridotta $\mathcal{L}_0[u] = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

Indichiamo con

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \quad \alpha_2 = -1\,, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

le radici della equazione $\alpha^3 = -1$. Per ogni punto $Q \equiv (\xi\,, \eta)$, le parti reali ed i coefficienti delle parti immaginarie delle funzioni

$$\int_0^{+\infty} \exp\left[\alpha_k\, \mu\,(x - \xi) - \mu^3\,(y - \eta)\right] d\mu\,, \quad k = 1\,, 2\,, 3\,, \qquad y > \eta\,,$$

$$\int_{-\infty}^{0} \exp\left[\alpha_k\, \mu\,(x - \xi) - \mu^3\,(y - \eta)\right] d\mu\,, \quad k = 1\,, 2\,, 3\,, \qquad y < \eta\,,$$

sono soluzioni della equazione ridotta

$$\mathcal{L}_0[u] = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

nei semipiani $y > \eta$ ed $y < \eta$ rispettivamente. Posto $t = \dfrac{x - \xi}{(y - \eta)^{1/3}}$, $\mu = \dfrac{\lambda}{(y - \eta)^{1/3}}$, tali funzioni divengono (eventualmente a meno del segno)

$$\frac{1}{(y-\eta)^{1/3}} \int_0^{+\infty} \exp(\alpha_k \lambda t - \lambda^3)\, d\lambda = \frac{1}{(y-\eta)^{1/3}} g_k(t), \quad -\infty < t < +\infty, \quad k = 1, 2, 3,$$

ove le g_k sono tali che

$$g_k''' + \frac{t}{3} g_k' + \frac{1}{3} g_k = 0,$$

ossia

$$g_k'' + \frac{t}{3} g_k = \text{cost}.$$

E poichè è

$$t\, g_k = t \int_0^{+\infty} \exp(\alpha_k \lambda t - \lambda^3)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\alpha_k} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda^3) \frac{d}{d\lambda} \exp(\alpha_k \lambda t)\, d\lambda = -\frac{1}{\alpha_k} - 3 g_k''$$

risulterà

$$g_k'' + \frac{t}{3} g_k = -\frac{1}{3\alpha_k}.$$

Da questa si trae che le funzioni $\mathfrak{Im}(\alpha_1 g_1)$ e $-\alpha_2 g_2 + \mathfrak{Re}(\alpha_1 g_1)$ soddisfano alla equazione

$$z'' + \frac{t}{3} z = 0, \qquad -\infty < t < +\infty. \tag{3}$$

Poniamo ora

$$\mathfrak{Im}(\alpha_1 g_1) = -\mathfrak{Im}(\alpha_3 g_3) =$$

$$= \int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{\lambda t}{2} - \lambda^3\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda t\right) d\lambda = f(t),$$

$$-\alpha_2 g_2 + \mathfrak{Re}(\alpha_1 g_1) =$$

$$= \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda^3) \left[\exp(-\lambda t) + \exp\left(\frac{\lambda t}{2}\right)\left(\frac{1}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda t - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda t\right)\right] d\lambda = \varphi(t).$$

Le funzioni $f(t)$ e $\varphi(t)$ sono linearmente indipendenti, poichè tali sono le $g_1, g_2, g_3 = \bar{g}_1$, inoltre, come si prova facilmente, risulta

$$\lim_{t \to -\infty} f(t) = 0\,, \qquad \lim_{t \to -\infty} \varphi(t) = +\infty\,. \tag{4}$$

Ci occorrerà nel seguito possedere una valutazione accurata delle funzioni f e φ per $t \to +\infty$ e $t \to -\infty$. Trasformiamo a questo scopo la equazione (3) con il cambiamento di variabili

$$\eta = t^{1/4} z\,, \qquad \xi = \frac{2}{3} t^{3/2} \qquad \text{per} \quad t > 0\,.$$

La $\eta(\xi)$ soddisferà allora alla equazione

$$\eta'' + \left(\frac{5}{36\xi^2} + \frac{1}{3}\right)\eta = 0\,. \tag{3'}$$

Per noti teoremi ([11]) la (3′) ha due integrali linearmente indipendenti η_1 ed η_2 tali che

$$\eta_1^{(\nu)} = (c_{1\nu} + \omega_{1\nu}(\xi)) \exp\left(\frac{i}{\sqrt{3}}\xi\right), \quad \eta_2^{(\nu)} = (c_{2\nu} + \omega_{2\nu}(\xi)) \exp\left(-\frac{i}{\sqrt{3}}\xi\right), \quad \nu = 0, 1,$$

con $\omega_{1\nu}$ ed $\omega_{2\nu}$ infinitesimi per $\xi \to +\infty$ e $c_{1\nu}$, $c_{2\nu}$ costanti non nulle. Più precisamente si vede anzi che per ξ sufficientemente grande è $\omega_{i\nu} = O(\xi^{-1})$, $i = 1, 2$, $\nu = 0, 1$. Di conseguenza per $t \to +\infty$ si avrà

$$\left.\begin{matrix} f^{(\nu)}(t) \\ \varphi^{(\nu)}(t) \end{matrix}\right\} = \left(t^{(2\nu-1)/4}\left(c_1 \operatorname{sen} \frac{2t^{3/2}}{3\sqrt{3}} + c_2 \cos \frac{2t^{3/2}}{3\sqrt{3}}\right)\right) \left\{\begin{matrix} (k_\nu + O(t^{-3/2})) \\ (h_\nu + O(t^{-3/2})) \end{matrix}\right. \quad \nu = 0, 1, \ldots, \tag{5}$$

con k_ν, h_ν costanti non nulle. Per $t < 0$, posto

$$\eta = (-t)^{1/4} z\,, \qquad \xi = \frac{2}{3}(-t)^{3/2}\,,$$

la (3) diviene

$$\eta'' + \left(\frac{5}{36\xi^2} - \frac{1}{3}\right)\eta = 0\,. \tag{3''}$$

([11]) Cfr. per es. R. BELLMANN, *Stability theory of differential equations*, Mc Graw-Hill, 1953, pp. 50-55.

Analogamente alla (3'), la (3'') ha due integrali linearmente indipendenti η_1 ed η_2 tali che

$$\eta_1^{(\nu)} = O\left(\exp\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\xi\right)\right), \qquad \eta_2^{(\nu)} = O\left(\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\xi\right)\right), \qquad \nu = 0, 1,$$

per $\xi \to +\infty$. Tenuto conto delle (4), sarà pertanto

$$f^{(\nu)}(t) = O\left(\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}|t|^{3/2}\right)\right), \qquad \varphi^{(\nu)}(t) = O\left(\exp\left(\frac{1}{\sqrt{3}}|t|^{3/2}\right)\right), \quad \nu = 0, 1, \ldots$$

per $t \to +\infty$; si potrà quindi scrivere

$$(6) \qquad |f^{(i)}(t)| < C \exp(-c|t|^{3/2}) \qquad \text{per } t < M,\ M > 0,\ i \leq \nu$$

con C e c costanti positive dipendenti soltanto da ν ed M ([12]).

Concludendo risulta

II. *In corrispondenza ad ogni punto* (ξ, η) *è possibile costruire due funzioni*

$$U(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{(y-\eta)^{1/3}} f\left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{1/3}}\right),$$

$$V(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{(y-\eta)^{1/3}} \varphi\left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{1/3}}\right), \qquad y \neq \eta$$

soluzioni della equazione $\mathcal{L}_0[u] = 0$ *in ogni punto* (x, y), *con* $y \neq \eta$ *e tali che*

$$(7_1) \qquad \left.\begin{matrix} \dfrac{\partial^{i+j} U(x, y; \xi, \eta)}{\partial x^i \partial y^j} \\[2ex] \dfrac{\partial^{i+j} V(x, y; \xi, \eta)}{\partial x^i \partial y^j} \end{matrix}\right\} = O\left(\frac{|x-\xi|^{(2i+6j-1)/4}}{|y-\eta|^{(2i+6j+1)/4}}\right) \text{ per } \frac{x-\xi}{(y-\eta)^{1/3}} \to +\infty,\ i+j \geq 1$$

$$(7_2) \qquad \left|\frac{\partial^{i+j} U(x, y; \xi, \eta)}{\partial x^i \partial y^j}\right| < \frac{C}{|y-\eta|^{(i+3j+1)/3}} \exp\left(-c\frac{|x-\xi|^{3/2}}{|y-\eta|^{1/2}}\right)$$

$$\text{per } \frac{x-\xi}{(y-\eta)^{1/3}} < M, \quad M > 0,$$

([12]) Valutazioni qualitative per la sola funzione f, meno precise delle (5) e (6), erano state ottenute anche da H. BLOCK nell'op. cit, in ([2]) nota III e poi da E. DEL VECCHIO nell'op. cit. in ([3]). La funzione $\varphi(t)$, non figura però mai nei lavori citati.

con $i+3j$ non superiore ad un arbitrario fissato numero naturale, dal quale soltanto, oltre che da M, dipendono le costanti positive C e c.

La funzione $U(x, y; \xi, \eta)$ coincide con la soluzione fondamentale della equazione $\mathcal{L}_0[u]=0$, studiata da H. Block ed E. Del Vecchio (13). Come provato da questi AA., si può anche scrivere infatti

$$f(t)=\int_0^{+\infty}\cos(\lambda^3-\lambda t)\,d\lambda \ (^{14}),$$

mentre analogamente si trova

$$\varphi(t)=\int_0^{+\infty}[\exp(-\lambda^3-\lambda t)+\operatorname{sen}(\lambda^3-\lambda t)]\,d\lambda .$$

Dalle (5) e (6) segue in particolare che $f(t)$ è integrabile in $(-\infty, +\infty)$ (15) e $\varphi(t)$ è integrabile in $(0, +\infty)$. Per calcolare questi integrali osserviamo anzitutto che con lo stesso tipo di ragionamento usato da B. Pini nel corrispondente calcolo per la equazione $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ (16), si ottiene qui

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt=\frac{\pi}{3}$$

mentre poi è

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt=\lim_{p\to 0+}\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\,dt \qquad \text{e} \qquad \int_0^{+\infty}\varphi(t)\,dt=\lim_{p\to 0+}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\varphi(t)\,dt.$$

Poichè f e φ soddisfano alla (3) le loro trasformate di Laplace $F(p)$ e $\Phi(p)$ soddisferanno alle

$$F'-3p^2F+3pf(0)+3f'(0)=0 \quad \text{e} \quad \Phi'-3p^2\Phi+3p\,\varphi(0)+3\varphi'(0)=0,$$

---

(13) Cfr. H. BLOCK, op. cit. in (2) nota III ed E. DEL VECCHIO, op. cit. in (3).

(14) Così scritta la $f(t)$ è nota come integrale di Airy e di essa si possono dare delle espressioni mediante funzioni di Bessel di ordine $1/3$ e $-1/3$. Da queste si potrebbero trarre anche valutazioni sul comportamento di $f(t)$ per $t\to+\infty$ e $t\to-\infty$. Cfr. G. N. WATSON, *Theory of Bessel functions*, Cambridge, 1944, pp. 188-90 e pp. 320-24, ove sono anche esposte alcune generalizzazioni dell'integrale di Airy dovute ad Hardy, le quali consentirebbero di scrivere anche per la $\varphi(t)$ espressioni analoghe a quelle valide per la f.

(15) Ciò non poteva dedursi dalle valutazioni di BLOCK e DEL VECCHIO cit. in (12).

(16) Cfr. op. cit. in (4) pp. 266-67.

onde sarà

$$F(p) = e^{p^3}\left(c_1 - \int_0^p [3tf(0) + 3f'(0)]\, e^{-t^3}\, dt\right)$$

e

$$\Phi(p) = e^{p^3}\left(c_2 - \int_0^p [3t\varphi(0) + 3\varphi'(0)]\, e^{-t^3}\, dt\right).$$

Le costanti c_1 e c_2 si calcolano ricordando che deve essere $\lim_{p\to+\infty} F(p) = \lim_{p\to+\infty} \Phi(p) = 0$ e quindi

$$c_1 = \int_0^{+\infty} [3tf(0) + 3f'(0)]\, e^{-t^3}\, dt\,, \qquad c_2 = \int_0^{+\infty} [3t\varphi(0) + 3\varphi'(0)]\, e^{-t^3}\, dt\,.$$

Dalle

$$f(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^3}\, dt, \qquad f'(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^{+\infty} t\, e^{-t^3}\, dt,$$

$$\varphi(0) = \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^3}\, dt, \qquad \varphi'(0) = -\frac{3}{2}\int_0^{+\infty} t\, e^{-t^3}\, dt$$

segue allora

$$c_1 = 3\sqrt{3}\int_0^{+\infty} e^{-t^3}\, dt \cdot \int_0^{+\infty} t\, e^{-t^3}\, dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\Gamma(1/3)\,\Gamma(2/3) = \frac{2}{3}\pi, \qquad c_2 = 0\,.$$

È dunque

$$\int_0^{+\infty} f\, dt = \lim_{p\to 0+} F(p) = \frac{2}{3}\pi, \qquad \int_0^{+\infty} \varphi\, dt = \lim_{p\to 0+} \Phi(p) = 0 \text{ [17]}.$$

---

(17) Limitatamente alla funzione f questo risultato, ottenuto per via più laboriosa, si trova anche in H. BLOCK, op. cit. in (2) nota I. Colgo l'occasione per segnalare che

Studiamo ora le funzioni

$$u(x,y)=\int_0^y \frac{\partial U(x,y;\,0,\eta)}{\partial \xi}\,\omega(\eta)\,d\eta\,,\qquad v(x,y)=\int_0^y \frac{\partial V(x,y;\,0,\eta)}{\partial \xi}\,\omega(\eta)\,d\eta$$

con $x \gtreqless 0$ per la u e solo $x \geq 0$ per la v. Studieremo la u trattando separatamente i due casi $x \geq 0$ ed $x \leq 0$, poichè la sostanziale differenza delle (7_1) e (7_2) ha come conseguenza un diverso comportamento della u nei due casi.

Caso $x \geq 0$ (18).

Anzitutto *se* $\omega \in C(0, h)$ *la* u *è continua nella semistriscia* $x \geq 0$, $0 \leq y \leq h$, come segue dal fatto che per (7_1) la $\dfrac{\partial U(x,y;\,0,\eta)}{\partial \xi}$ è sommabile in $0 \leq \eta \leq y$, qualunque sia $x \geq 0$. *Supponiamo di più che sia* $\omega \in CVL$ (19) *in* $(0, h)$. *L'integrale*

$$\int_0^y \frac{\partial^2 U(x,y;\,0,\eta)}{\partial x\,\partial \xi}\,\omega(\eta)\,d\eta$$

---

anche gli integrali

$$\int_0^{+\infty} (\cos\lambda - e^{-a_k\lambda}\cos b_k\lambda)\,\lambda^{-1}\,d\lambda \qquad a_k>0\,,\quad b_k \geq 0\,,\quad a_k^2+b_k^2=1\,,$$

che figurano a p. 381 della mia nota cit. in (6), sono nulli. È infatti

$$\int_0^{+\infty} (\cos\lambda - e^{-a_k\lambda}\cos b_k\lambda)\,\lambda^{-1}\,d\lambda = \lim_{p\to 0+}\int_0^{+\infty} e^{-p\lambda}(\cos\lambda - e^{-a_k\lambda}\cos b_k\lambda)\,\lambda^{-1}\,d\lambda =$$

$$= \lim_{p\to 0+} \log\frac{p+1}{(p^2+1)^{1/2}} = 0\,.$$

Questa circostanza non altera per altro alcuna delle conclusioni nè lo svolgimento del lavoro stesso.

(18) L'esame di questo caso, così come lo studio della funzione $v(x,y)$ per $x \geq 0$, non si trovano nei lavori citati di BLOCK e DEL VECCHIO. Per le analogie che questo caso presenta con i potenziali di linea relativi alla equazione $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, cfr. l'op. di B. PINI cit. in (5), da cui abbiamo ripreso il procedimento qui seguito.

(19) Con la notazione $\omega \in CVL$ intenderemo che ω è continua ed a variazione limitata nell'intervallo specificato; indicheremo poi con $\mathcal{V}_a^b(\omega)$ la variazione totale di ω in (a, b).

esiste in tale ipotesi per ogni $x > 0$. È infatti, tenuto conto della (3), per $0 < y_1 < y_2 < y$

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^2 U(x, y; 0, \eta)}{\partial x \, \partial \xi} \omega(\eta) \, d\eta = - \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{(y-\eta)} f''\left(\frac{x}{(y-\eta)^{1/3}}\right) \omega(\eta) \, d\eta =$$

$$= \frac{1}{3} \int_{y_1}^{y_2} \frac{x}{(y-\eta)^{4/3}} f\left(\frac{x}{(y-\eta)^{1/3}}\right) \omega(\eta) \, d\eta =$$

$$= \frac{1}{3} [\max_{y_1 \leq \eta \leq y_2} |\omega| + \mathcal{V}_{y_1}^{y_2}(\omega)] \int_{y_1'}^{y_2'} \frac{x}{(y-\eta)^{4/3}} f\left(\frac{x}{(y-\eta)^{1/3}}\right) d\eta =$$

$$= [\max_{y_1 \leq \eta \leq y_2} |\omega| + \mathcal{V}_{y_1}^{y_2}(\omega)] \int_{\frac{x}{(y-y_1')^{1/3}}}^{\frac{x}{(y-y_2')^{1/3}}} f(t) \, dt ,$$

ove è $0 < y_1 < y_1' < y_2' < y_2 < y$ e si è posto $t = \dfrac{x}{(y-\eta)^{1/3}}$. La integrabilità di $f(t)$ in $(0, +\infty)$, assicura allora la esistenza dell'integrale considerato per ogni $x > 0$. Notiamo che se $\omega \in C(0, h)$, ma non è CVL in $(0, h)$, tale integrale può anche non esistere. Poniamo infatti per es.

$$\omega(\eta) = \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{(h-\eta)^{1/3}}\right) & \text{per} \quad 0 \leq \eta < h \\ 0 & \text{per} \quad \eta = h . \end{cases}$$

La $\omega(\eta)$ così definita non è CVL in $(0, h)$. La funzione $\omega'(\eta) = = \dfrac{1}{3(h-\eta)^{4/3}} f'\left(\dfrac{1}{(h-\eta)^{1/3}}\right)$ non è infatti sommabile in $(0, h)$, poichè dalla (5) segue che per $t > 0$ sufficientemente grande risulta

$$|f'(t)| > \frac{|k_1|}{2} t^{1/4} \left| c_1 \operatorname{sen} \frac{2t^{3/2}}{3\sqrt{3}} + c_2 \cos \frac{2t^{3/2}}{3\sqrt{3}} \right| .$$

D'altra parte si ha

$$\int_0^{h-\varepsilon} \frac{\partial^2 U(1, h; 0, \eta)}{\partial x \, \partial \xi} f\left(\frac{1}{(h-\eta)^{1/3}}\right) d\eta = \frac{1}{3} \int_0^{h-\varepsilon} \frac{1}{(h-\eta)^{4/3}} f^2\left(\frac{1}{(h-\eta)^{1/3}}\right) d\eta = \int_{h^{-1/3}}^{\varepsilon^{-1/3}} f^2(t) \, dt ,$$

con $t = (h - \eta)^{-1/3}$ e quindi l'integrale a primo membro diverge per $\varepsilon \to 0+$, poichè la funzione $f(t)$ non è di quadrato sommabile in $(0, +\infty)$, come si vede mediante la eguaglianza di Parseval ricordando la espressione della trasformata di Laplace della $f(t)$ data più sopra.

Per $P \equiv (x, y)$, $P + \Delta x \equiv (x + \Delta x, y)$ con $x > 0$, $x + \Delta x > 0$, si ha poi se $\omega \in CVL$ in $(0, h)$

$$\left| \frac{u(P + \Delta x) - u(P)}{\Delta x} - \int_0^y \frac{\partial^2 U(P; 0, \eta)}{\partial x\, \partial \xi} \omega(\eta)\, d\eta \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_0^{y-\delta} \left(\frac{\partial^2 U(P + \vartheta \Delta x; 0, \eta)}{\partial x\, \partial \xi} - \frac{\partial^2 U(P; 0, \eta)}{\partial x\, \partial \xi} \right) \omega(\eta)\, d\eta \right| +$$

$$+ \left| \int_{y-\delta}^{y} \frac{\partial^2 U(P + \vartheta \Delta x; 0, \eta)}{\partial x\, \partial \xi} \omega(\eta)\, d\eta \right| + \left| \int_{y-\delta}^{y} \frac{\partial^2 U(P; 0, \eta)}{\partial x\, \partial \xi} \omega(\eta)\, d\eta \right|, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Gli ultimi due integrali a secondo membro si possono però rendere arbitrariamente piccoli prendendo $\delta > 0$ sufficientemente piccolo, mentre per δ fissato il primo integrale tende a zero per $\Delta x \to 0$. Dunque *se* $\omega \in CVL$ *in* $(0, h)$ *è*

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \int_0^y \frac{\partial^2 U(x, y; 0, \eta)}{\partial x\, \partial \xi} \omega(\eta)\, d\eta$$

per ogni $x > 0$. Risulta inoltre per $0 < z \leq h$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \int_0^y \frac{\partial^2 U(x, y; 0, \eta)}{\partial x\, \partial \xi} [\omega(\eta) - \omega(z)]\, d\eta +$$

$$+ \omega(z) \int_0^y \frac{\partial^2 U(x, y; 0, \eta)}{\partial x\, \partial \xi} d\eta = I_1 + \omega(z) I_2,$$

con

$$\lim_{(x,y) \to (0+, z)} I_2 = \lim_{(x,y) \to (0+, z)} \frac{1}{3} \int_0^y \frac{x}{(y - \eta)^{4/3}} f\left(\frac{x}{(y - \eta)^{1/3}} \right) d\eta =$$

$$= \lim_{(x,y) \to (0+, z)} \int_{\frac{x}{y^{4/3}}}^{+\infty} f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} f\, dt = \frac{2}{3} \pi,$$

ove al solito si è posto $t = \dfrac{x}{(y-\eta)^{1/3}}$, e

$$I_1 = \left(\int_0^{y-\delta} + \int_{y-\delta}^{y}\right) \frac{x}{3\,(y-\eta)^{4/3}} f\left(\frac{x}{(y-\eta)^{1/3}}\right) [\omega(\eta) - \omega(z)]\, d\eta = I_{11} + I_{12}, \qquad \delta > 0 .$$

Fissato $\delta > 0$ è però

$$\lim_{(x,y)\to(0+,z)} I_{11} = 0 ,$$

mentre per y_1 ed y_2 opportuni e tali che $y - \delta < y_1 < y_2 < y$, si ha

$$| I_{12} | = [\max_{y-\delta\leq\eta\leq y} | \omega(\eta) - \omega(z) | + \mathcal{V}_{y-\delta}^{y}(\omega)] \left| \int_{y_1}^{y_2} \frac{x}{3\,(y-\eta)^{4/3}} f\left(\frac{x}{(y-\eta)^{1/3}}\right) d\eta \right| <$$

$$< K [\max_{y-\delta\leq\eta\leq y} | \omega(\eta) - \omega(z) | + \mathcal{V}_{y-\delta}^{y}(\omega)]$$

e quindi I_{12} si potrà rendere arbitrariamente piccolo non appena $y - \delta$ ed y siano sufficientemente vicini a z. *Per* $\omega \in CVL$ *in* $(0, h)$ *si ha così*

$$\lim_{(x,y)\to(0+,z)} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{2}{3}\,\pi\,\omega(z) .$$

Supponiamo ora che ω sia dotata di derivata prima in $(0, h)$ e che questa sia sommabile con una potenza che preciseremo. Possiamo allora scrivere

$$\frac{\partial u(P)}{\partial x} = \int_0^y \frac{\partial^2 U(P, 0, \eta)}{\partial x\, \partial \xi}\, \omega(\eta)\, d\eta = \omega(0) \int_0^y \frac{\partial^2 U(P; 0, \tau)}{\partial x\, \partial \xi}\, d\tau +$$

$$+ \int_0^y \omega'(\eta)\, d\eta \int_\eta^y \frac{\partial^2 U(P; 0, \tau)}{\partial x\, \partial \xi}\, d\tau .$$

Se poniamo

$$W(P; 0, \eta) = \int_\eta^y \frac{\partial U(x, y; 0, \tau)}{\partial \xi}\, d\tau = -\int_\eta^y \frac{1}{(y-\tau)^{2/3}} f'\left(\frac{x}{(y-\tau)^{1/3}}\right) d\tau =$$

$$= -\,3\,(y-\eta)^{1/3} f'\left(\frac{x}{(y-\eta)^{1/3}}\right) + x \int_{\frac{x}{(y-\eta)^{1/3}}}^{+\infty} f(t)\, dt ,$$

risulterà per la (3)

$$\frac{\partial W(P;0,\eta)}{\partial x} = \int\limits_{\frac{x}{(y-\eta)^{1/3}}}^{+\infty} f(t)\,dt = \int\limits_{\eta}^{y} \frac{\partial^2 U(P;0,\tau)}{\partial x\,\partial \xi}\,d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 W(P;0,\eta)}{\partial x^2} = -\frac{1}{(y-\eta)^{1/3}} f\left(\frac{x}{(y-\eta)^{1/3}}\right) = -U(x,y;0,\eta)$$

$$\frac{\partial^3 W(P;0,\eta)}{\partial x^3} = \frac{\partial W(P;0,\eta)}{\partial y} = -\frac{1}{(y-\eta)^{2/3}} f'\left(\frac{x}{(y-\eta)^{1/3}}\right).$$

Per ogni $x > 0$ è dunque

$$\frac{\partial^2 u(P)}{\partial x^2} = \omega(0)\frac{\partial^2 W(P;0,0)}{\partial x^2} +$$

$$+\int\limits_0^y \frac{\partial^2 W(P;0,\eta)}{\partial x^2}\,\omega'(\eta)\,d\eta = -\frac{\omega(0)}{y^{1/3}} f\left(\frac{x}{y^{1/3}}\right) - \int\limits_0^y \frac{1}{(y-\eta)^{1/3}} f\left(\frac{x}{(y-\eta)^{1/3}}\right)\omega'(\eta)\,d\eta,$$

poichè riesce

$$\left|\int\limits_{y_1}^{y} \frac{\partial^2 W(P;0,\eta)}{\partial x^2}\,\omega'(\eta)\,d\eta\right| < K\int\limits_{y_1}^{y} \frac{|\omega'(\eta)|}{(y-\eta)^{1/3}}\,d\eta < \varepsilon,$$

uniformemente rispetto ad x, non appena y_1 sia sufficientemente vicino ad y ed $\omega' \in L_p(0,h)$, con $p > 3/2$. Inoltre

$$\frac{\partial^3 u(P)}{\partial x^3} = -\frac{\omega(0)}{y^{2/3}} f'\left(\frac{x}{y^{1/3}}\right) - \int\limits_0^y \frac{1}{(y-\eta)^{2/3}} f'\left(\frac{x}{(y-\eta)^{1/3}}\right)\omega'(\eta)\,d\eta,$$

poichè per la (5) è

$$\left|\int\limits_{y_1}^{y} \frac{1}{(y-\eta)^{2/3}} f'\left(\frac{x}{(y-\eta)^{1/3}}\right)\omega'(\eta)\,d\eta\right| < Kx^{1/4}\int\limits_{y_1}^{y} \frac{|\omega'(\eta)|}{(y-\eta)^{3/4}}\,d\eta < \varepsilon$$

uniformemente rispetto ad x in ogni intervallo limitato, non appena y_1 sia sufficientemente vicino ad y ed $\omega' \in L_p(0,h)$, con $p > 4$. Infine, con quest'ultima ipotesi per ω', dalla

$$u(P) = \omega(0)\, W(P;\, 0\,, 0) + \int_0^y W(P\,;\, 0\,, \eta)\, \omega'(\eta)\, d\eta$$

segue analogamente a qui sopra

$$\frac{\partial\, u(P)}{\partial y} = -\frac{\omega(0)}{y^{2/3}} f'\left(\frac{x}{y^{2/3}}\right) - \int_0^y \frac{1}{(y-\eta)^{2/3}} f'\left(\frac{x}{(y-\eta)^{1/3}}\right) \omega'(\eta)\, d\eta = \frac{\partial^3 u(P)}{\partial x^3}\,.$$

Riassumendo abbiamo provato che

III. *Se* $\omega(\eta) \in C(0\,, h)$ *la funzione*

$$u(x\,, y) = \int_0^y \frac{\partial\, U(x\,, y\,;\, 0\,, \eta)}{\partial \xi}\, \omega(\eta)\, d\eta$$

è continua in tutta la semistriscia $x \geq 0\,,\ \ 0 \leq y \leq h$. *Se poi* $\omega \in CVL$ *in* $(0\,, h)$, *per* $x > 0\,,\ 0 \leq y \leq h$ *risulta*

$$\frac{\partial\, u(x\,, y)}{\partial x} = \int_0^y \frac{\partial^2 U(x\,, y;\, 0\,, \eta)}{\partial x\, \partial \xi}\, \omega(\eta)\, d\eta$$

e

$$\lim_{(x,y)\to(0+,z)} \frac{\partial\, u(x\,, y)}{\partial x} = \frac{2}{3}\, \pi\, \omega(z)\,.$$

Se di più è $\omega' \in L_p(0\,, h)\,,\ p > 4$, *la* u *è soluzione (regolare) della equazione* $\mathcal{L}_0[u] = 0$ *per* $x > 0\,,\ 0 < y \leq h$.

Gli stessi risultati valgono per la funzione

$$v(x\,, y) = \int_0^y \frac{\partial\, V(x\,, y\,;\, 0\,, \eta)}{\partial \xi}\, \omega(\eta)\, d\eta$$

con la sola variante che per essa è

$$\lim_{(x,y)\to(0+,z)} \frac{\partial v(x\,, y)}{\partial x} = 0.$$

Caso $x \leq 0$.

Da (7_2) si trae che la funzione $U(x, y; 0, \eta)$ si comporta per $x < 0$ in modo analogo alla soluzione fondamentale della equazione $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ [20]; alla funzione $u(x, y)$ si possono pertanto applicare in questo caso gli stessi tipi di ragionamenti utilizzati per i potenziali di linea relativi a tale equazione [21]. Si può così concludere che

IV. *Se* $\omega \in C(0, h)$ *la funzione*

$$u(x, y) = \int_0^y \frac{\partial U(x, y; 0, \eta)}{\partial \xi} \omega(\eta) \, d\eta$$

è soluzione (*regolare*) *della equazione* $\mathcal{L}_0[u] = 0$ *per* $x < 0$, $0 < y \leq h$ *ed ivi si ha*

$$\frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \, \partial y^j} = \int_0^y \frac{\partial^{i+1+j} U(x, y; 0, \eta)}{\partial x^i \, \partial y^j \, \partial \xi} \omega(\eta) \, d\eta, \qquad i, j = 0, 1, 2, \ldots;$$

la u *è poi continua in* $x \leq 0$, $0 \leq y \leq h$, *mentre risulta*

$$\lim_{(x,y) \to (0-, z)} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = -\frac{\pi}{3} \omega(z) \ [22].$$

Risultati analoghi a III. e IV. valgono per le funzioni

$$\int_y^h \frac{\partial U(x, y; 0, \eta)}{\partial \xi} \omega(\eta) \, d\eta, \qquad \int_y^h \frac{\partial V(x, y; 0, \eta)}{\partial \xi} \omega(\eta) \, d\eta,$$

Consideriamo infine la funzione

$$u_0(x, y) = \int_a^b U(x, y; \xi, 0) \, \omega(\xi) \, d\xi$$

---

[20] Cfr. op. cit. in [4] p. 264.

[21] Cfr. op. cit. in [4] pp. 265-67.

[22] Questo risultato era già stato ottenuto da BLOCK nell'op. cit. in [2] nota III.

con $\omega \in CVL$ in $a \leq x \leq b$. Essa è evidentemente soluzione di $\mathcal{L}_0[u] = 0$ per $y \neq 0$ ([23]). Si può scrivere

$$u_0(x, y) = \omega(x_0) \int_a^b U(x, y; \xi, 0)\, d\xi + \int_a^b U(x, y; \xi, 0)\,[\omega(\xi) - \omega(x_0)]\, d\xi$$

ed è

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0+)} \int_a^b U(x, y; \xi, 0)\, d\xi = \lim_{(x,y)\to(x_0,0+)} \int_{\frac{x-b}{y^{1/3}}}^{\frac{x-a}{y^{1/3}}} f(t)\, dt = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f\, dt = \pi & \text{se } a < x_0 < b \\ 0 & \text{se } x_0 < a,\ x_0 > b. \end{cases}$$

Si ha poi

$$\left| \int_a^b U(x, y; \xi, 0)\,[\omega(\xi) - \omega(x_0)] \right| =$$

$$= \left| \left(\int_{\frac{x-b}{y^{1/3}}}^{-T} + \int_{-T}^{T} + \int_{T}^{\frac{x-a}{y^{1/3}}} \right) f(t)\,[\omega(x - t\, y^{1/3}) - \omega(x_0)]\, dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{-T}^{T} f(t)\,[\omega(x - t\, y^{1/3}) - \omega(x_0)]\, dt \right| +$$

$$+ \left| \left(\int_{\frac{x-b}{y^{1/3}}}^{-T} + \int_{T}^{\frac{x-a}{y^{1/3}}} \right) f(t)\, \omega(x - t\, y^{1/3})\, dt \right| + \left| \omega(x_0) \left(\int_{\frac{x-b}{y^{1/3}}}^{-T} + \int_{T}^{\frac{x-a}{y^{1/3}}} \right) f(t)\, dt \right| =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3$$

Se $a < x < b$ ed $y > 0$ sufficientemente piccolo si potrà anzitutto scegliere $T > 0$ in modo che I_3 sia minore di $\varepsilon/3$. Dalla

$$\left| \int_{\frac{x-b}{y^{1/3}}}^{-T} f(t)\, \omega(x - t y^{1/3})\, dt \right| \leq [\max_{a \leq x \leq b} |\omega| + \mathcal{V}_a^b(\omega)] \left| \int_{T_1}^{T_2} f(t)\, dt \right|$$

([23]) Ciò si verifica anche sotto ipotesi meno restrittive per la ω.

con $\frac{x-b}{y^{1/3}} \leq T_1 < T_2 \leq -T$ e dall'altra analoga per l'altro termine di I_2 si vede poi che se $y > 0$ è abbastanza piccolo si può scegliere T in modo che anche I_2 sia minore di $\varepsilon/3$. Fissato in tal modo T, si potrà rendere $x - t\,y^{1/3}$ in I_1 vicino ad x_0 quando si vuole pur di scegliere x sufficientemente vicino ad x_0 ed $y > 0$ sufficientemente piccolo. Per la continuità di ω anche I_1 si potrà perciò rendere minore di $\varepsilon/3$. Alla stessa conclusione si giunge evidentemente se $x < a$ od $x > b$. Ragionamenti analoghi valgono se è $y < 0$. Si conclude così che

V. *Se $\omega \in CVL$ in $a \leq x \leq b$, la u_0 è soluzione (regolare) di $\mathcal{L}_0[u] = 0$ per $y \neq 0$ e riesce*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} u_0(x, y) = \begin{cases} \pm \pi\,\omega(x_0) & se \quad a < x_0 < b, \\ 0 & se \quad x_0 < a \text{ od } x_0 > b, \end{cases}$$

il segno + od il segno — scegliendosi a seconda che y tenda a zero per valori positivi o per valori negativi [24].

3. — Il problema (1) per l'equazione ridotta omogenea.

Passiamo ora a trattare il problema (1) quando $\mathcal{L}$ si riduca all'operatore $\mathcal{L}_0$ ed il dominio $\mathcal{D}$ al rettangolo $R: 0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq h$.

Se $\varphi_0(x) \in CVL$ in $(0, 1)$, prolungata tale funzione con la stessa regolarità in un intervallo (a, b), $a < 0 \leq x \leq 1 < b$, potremo ricondurci, utilizzando la funzione

$$u_0(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_a^b U(x, y; \xi, 0)\,\varphi_0(\xi)\,d\xi,$$

ad un problema in cui sia $\varphi_0 \equiv 0$. Dovrà allora essere $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$. Cerchiamo di risolvere questo problema con una funzione del tipo

$$(8) \qquad u(x,y) = \int_0^y \frac{\partial U(x,y;0,\eta)}{\partial \xi} \alpha_1(\eta)\,d\eta + \int_0^y \frac{\partial^2 U(x,y;1,\eta)}{\partial \xi^2} \alpha_2(\eta)\,d\eta + \\ + \int_0^y \frac{\partial V(x,y;0,\eta)}{\partial \xi} \beta(\eta)\,d\eta,$$

[24] In forma un pò diversa questo enunciato si trova anche in E. DEL VECCHIO, op. cit. in [9] p. 5.

con α_1 e β continue ed a variazione limitata in $(0, h)$ ed α_1', $\beta' \in L_p(0, h)$, $p > 4$, e con α_2 continua in $(0, h)$. Le condizioni al contorno del problema impongono che sia

$$(9_1) \qquad -f'(0)\int_0^y \frac{1}{(y-\eta)^{2/3}}\alpha_1(\eta)\,d\eta +$$
$$+\int_0^y \frac{1}{y-\eta} f''\left(\frac{-1}{(y-\eta)^{1/3}}\right)\alpha_2(\eta)\,d\eta - \varphi'(0)\int_0^y \frac{1}{(y-\eta)^{2/3}}\beta(\eta)\,d\eta = \varphi_1(y),$$

$$(9_2) \qquad -\int_0^y \frac{1}{(y-\eta)^{2/3}} f'\left(\frac{1}{(y-\eta)^{1/3}}\right)\alpha_1(\eta)\,d\eta +$$
$$+\frac{\pi}{3}\alpha_2(y) - \int_0^y \frac{1}{(y-\eta)^{2/3}}\varphi'\left(\frac{1}{(y-\eta)^{1/3}}\right)\beta(\eta)\,d\eta = \varphi_2(y),$$

$$(9_3) \qquad \frac{2}{3}\pi\,\alpha_1(y) + \int_0^y \frac{1}{(y-\eta)^{4/3}} f'''\left(\frac{-1}{(y-\eta)^{1/3}}\right)\alpha_2(\eta)\,d\eta = \psi(y), \quad 0 \leq y \leq h.$$

La prima di queste equazioni si può trasformare in una equazione integrale di seconda specie. Per questo basta moltiplicarla per $(z-y)^{-1/3}$, integrarla rispetto ad y da 0 a z e quindi derivarla rispetto a z, dopo aver eseguito uno scambio nell'ordine delle integrazioni. Se $\varphi_1(y) \in C^{(1)}(0, h)$ si ha in tal modo

$$-f'(0)\frac{d}{dz}\int_0^z \alpha_1(\eta)\,d\eta\int_\eta^z \frac{dy}{(z-y)^{1/3}(y-\eta)^{2/3}} +$$
$$+\frac{1}{3}\frac{d}{dz}\int_0^z \alpha_2(\eta)\,d\eta\int_\eta^z \frac{1}{(z-y)^{1/3}(y-\eta)^{4/3}} f\left(\frac{-1}{(y-\eta)^{1/3}}\right)dy -$$
$$-\varphi'(0)\frac{d}{dz}\int_0^z \beta(\eta)\,d\eta\int_\eta^z \frac{dy}{(z-y)^{1/3}(y-\eta)^{2/3}} = \int_0^z \frac{\varphi_1'(y)}{(z-y)^{1/3}}\,dy,$$

da cui, tenendo conto che

$$\int_\eta^z \frac{dy}{(z-y)^{1/3}(y-\eta)^{2/3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

qualunque siano η e z e che per la (6) è

$$\lim_{\eta \to z-} \int_\eta^z \frac{1}{(z-y)^{1/3}(y-\eta)^{4/3}} f\left(\frac{-1}{(y-\eta)^{1/3}}\right) d\,y = 0\,,$$

si ricava la

$$(9_1') \quad -\frac{2\pi}{\sqrt{3}} f(0)\,\alpha_1(z) + \frac{1}{3}\int_0^z \alpha_2(\eta)\,d\eta\,\frac{\partial}{\partial z}\int_\eta^z \frac{1}{(z-y)^{1/3}(y-\eta)^{4/3}} f\left(\frac{-1}{(y-\eta)^{1/3}}\right) dy -$$

$$-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\varphi'(0)\,\beta(z) = \int_0^z \frac{\varphi_1'(y)}{(z-y)^{1/3}}\,d\,y\,.$$

Il problema considerato è stato così tradotto nel sistema $(9_1')$, (9_2), (9_3) [25], in cui il determinante dei coefficienti delle α_1, α_2, β è diverso da zero, come subito si verifica. Tenuto conto poi che è

$$\lim_{\eta \to y-} \frac{1}{(y-\eta)^{4/3}} f\left(\frac{-1}{(y-\eta)^{1/3}}\right) = 0\,,$$

si ha

$$\frac{\partial}{\partial z}\int_\eta^z \frac{1}{(z-y)^{1/3}(y-\eta)^{4/3}} f\left(\frac{-1}{(y-\eta)^{1/3}}\right) d\,y =$$

$$= \int_\eta^z \frac{1}{(z-y)^{1/3}}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{(y-\eta)^{4/3}} f\left(\frac{-1}{(y-\eta)^{1/3}}\right)\right] d\,y = \mathrm{O}\left((z-\eta)^{2/3}\right),$$

mentre per le (5) è

$$\frac{\partial U(1\,,y\,;0\,,\eta)}{\partial\,\xi} = -\frac{1}{(y-\eta)^{2/3}} f'\left(\frac{1}{(y-\eta)^{1/3}}\right) = \mathrm{O}\left((y-\eta)^{-3/4}\right),$$

$$\frac{\partial V(1\,,y\,;0\,,\eta)}{\partial\,\xi} = -\frac{1}{(y-\eta)^{2/3}} \varphi'\left(\frac{1}{(y-\eta)^{1/3}}\right) = \mathrm{O}\left((y-\eta)^{-3/4}\right).$$

Infine

$$\frac{\partial^3 U(0\,,y\,;1\,,\eta)}{\partial\,x\,\partial\,\xi^2} = \frac{1}{(y-\eta)^{4/3}} f'''\left(\frac{-1}{(y-\eta)^{1/3}}\right)$$

---

[25] Si ponga z in luogo di y nelle (9_2) e (9_3).

tende a zero per $\eta \to y$ — come conseguenza della (6). I nuclei del sistema $(9_1')$, (9_2), (9_3) sono dunque al più $O((z-\eta)^{-3/4})$. Se $\varphi_1 \in C^{(1)}(0,h)$, $\varphi_2 \in C(0,h)$, $\psi \in C(0,h))$, il sistema avrà quindi una ed una sola soluzione costituita da funzioni continue. Dalle $(9_1')$ e (9_3) si trae poi che se di più $\varphi_1 \in C^{(2)}(0,h)$, $\varphi_1'(0)=0$, $\psi \in C^{(1)}(0,h)$ è pure $\alpha_1, \beta \in C^{(1)}(0,h)$. Da III. e IV. segue allora che

VI. *Se* $\varphi_1 \in C^{(2)}(0,h), \varphi_2 \in C(0,h), \psi \in C^{(1)}(0,h)$ *ed è* $\varphi_1(0)=\varphi_1'(0)=\varphi_2(0)=0$, *il problema*

$$\begin{cases} \mathscr{L}_0[u]=0 & \textit{in} \quad 0<x<1, \quad 0<y\leq h, \\ u(0,y)=\varphi_1(y) & \textit{per} \quad 0\leq y\leq h, \\ u(1,y)=\varphi_2(y) & \textit{per} \quad 0\leq y\leq h, \\ u_x(0,y)=\psi(y) & \textit{per} \quad 0\leq y\leq h, \\ u(x,0)=0 & \textit{per} \quad 0\leq x\leq 1, \end{cases}$$

ha una soluzione del tipo (8). *Se di più* $\varphi_2(y) \in H^{\left(\frac{2+\lambda}{3}\right)}(0,h)$(26) *e* $\psi(0)=0$, *allora la* (8) *è continua con le sue due prime derivate rispetto ad* x *in* $R\,(0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq h)$ *e per I. rappresenta l'unica soluzione del problema considerato, dotata di tale regolarità.*

L'ultima affermazione è conseguenza del fatto che nella ipotesi indicata per φ_2, dalla (9_2) si trae che pure α_2 ha la stessa regolarità di φ_2. Di qui, poichè il potenziale

$$\int_0^y \frac{\partial^2 U(x,y;1,\eta)}{\partial \xi^2}\,\alpha_2(\eta)\,d\eta$$

ha per $x\leq 1$ lo stesso comportamento dei potenziali di linea della equazione $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$, si trae, con ragionamenti di tipo noto (27), che le funzioni

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i}\int_0^y \frac{\partial^2 U(x,y;1,\eta)}{\partial \xi^2}\,\alpha_2(\eta)\,d\eta\,, \qquad i=1,2$$

---

(26) Con la notazione $g(y) \in H^{(\mu)}(0,h)$, $0<\mu<1$, intenderemo che la funzione $g(y)$ è in $(0,h)$ uniformemente hölderiana di esponente μ.

(27) Cfr. B. Pini, *Su una equazione parabolica non lineare del quarto ordine,* Rend. Sem. Mat. Fis. Univ. Cagliari, 27 (1957) pp. 147-51.

sono in R lipschitziane rispetto ad x ed hölderiane rispetto ad y di esponente $\dfrac{2+\lambda-i}{3}$.

4. — Il potenziale di dominio per l'equazione ridotta.

Consideriamo il potenziale di dominio

$$u(P)=\iint_{R_y} U(P,Q)\,g(Q)\,dQ\,,\qquad R_y: 0\leq\xi\leq 1\,,\,0\leq\eta\leq y\,;\,P\equiv(x,y)\,,\,Q\equiv(\xi,\eta)\,.$$

Ricordando le (5), (7_1) e (7_2) risulta

$$(10)\qquad |U(P,Q)|<\frac{K}{(y-\eta)^{1/3}}\,,\qquad \left|\frac{\partial\, U(P,Q)}{\partial x}\right|<\frac{K'}{(y-\eta)^{3/4}}$$

in R, con K eK' costanti positive. La $u(P)$ è perciò definita in tutto R ed ivi è

$$\frac{\partial\, u(P)}{\partial x}=\iint_{R_y}\frac{\partial\, U(P,Q)}{\partial x}\,g(Q)\,dQ\,,$$

anche se è soltanto $g\in C(R)$.

Poniamo ora

$$W(P,Q)=3\,(y-\eta)^{1/3}f'\left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{1/3}}\right)+(x-\xi)\int_{-\infty}^{\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{1/3}}} f(t)\,dt\,.$$

Da questa segue successivamente, ricordando anche la (3)

$$(11)\qquad \frac{\partial\, W(P,Q)}{\partial x}=\int_{-\infty}^{\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{1/3}}} f(t)\,dt\,,\ \frac{\partial^2 W(P,Q)}{\partial x^2}=\frac{1}{(y-\eta)^{1/3}}f\left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{1/3}}\right)=U(P,Q)$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}=-\frac{\partial\, W(P,Q)}{\partial\eta}=\frac{1}{(y-\eta)^{2/3}}f'\left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{1/3}}\right)=\frac{\partial\, U(P,Q)}{\partial x}\,.$$

Supposta allora di più la g dotata di derivata prima rispetto ad y continua in R, si potrà scrivere

$$\frac{\partial u(P)}{\partial x} = -\iint_{R_y} \frac{\partial W(P, Q)}{\partial \eta} g(Q)\, d\,Q = \int_{FR_y} W(P, Q)\, g(Q)\, d\,\xi +$$

$$+ \iint_{R_y} W(P, Q) \frac{\partial g(Q)}{\partial \eta} d\,Q,$$

da, cui osservato che è

$$\text{(12)} \qquad \lim_{\eta \to y-} W(P, Q) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad \xi \geq x \\ \pi(x - \xi) & \text{per} \quad \xi < x, \end{cases}$$

si trae

$$\frac{\partial u(P)}{\partial x} = \int_0^1 W(P; \xi, 0)\, g(\xi, 0)\, d\,\xi - \pi \int_0^x (x - \xi)\, g(\xi, y)\, d\,\xi +$$

$$+ \iint_{R_y} W(P, Q) \frac{\partial g(Q)}{\partial \eta} d\,Q.$$

Da questa, per le (10) e (11) segue

$$\frac{\partial^2 u(P)}{\partial x^2} = \int_0^1 \frac{\partial W(P; \xi, 0)}{\partial x} g(\xi, 0)\, d\,\xi - \pi \int_0^x g(\xi, y)\, d\,\xi +$$

$$+ \iint_{R_y} \frac{\partial W(P, Q)}{\partial x} \frac{\partial g(Q)}{\partial \eta} d\,Q,$$

$$\text{(13)} \quad \frac{\partial^3 u(P)}{\partial x^3} = \int_0^1 U(P, Q)\, g(\xi, 0)\, d\,\xi - \pi\, g(x, y) + \iint_{R_y} U(P, Q) \frac{\partial g(Q)}{\partial \eta} d\,Q.$$

Passiamo a calcolare la derivata rispetto ad y della $u(P)$, sempre nell'ipotesi che g sia continua in R con la sua derivata rispetto ad y. Si ha

$$\frac{u(P + \Delta y) - u(P)}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y} \left\{ \iint_{R_{y+\Delta y}} U(P + \Delta y, Q)\, g(Q)\, dQ - \iint_{R_y} U(P, Q)\, g(Q)\, dQ \right\}.$$

Mediante il cambiamento di variabile $\eta' = \eta - \Delta y$ si ha d'altra parte

$$\iint\limits_{R_{y+\Delta y}} U(P + \Delta y, Q)\, g(Q)\, d\, Q = \iint\limits_{R_y} U(P, Q)\, g(\xi, \eta + \Delta y)\, d\, Q +$$

$$+ \int_0^1 d\,\xi \int_{-\Delta y}^0 U(P, Q)\, g(\xi, \eta + \Delta y)\, d\,\eta$$

e quindi

$$\frac{u(P + \Delta y) - u(P)}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y} \left\{ \iint\limits_{R_y} U(P, Q)\, [g(\xi, \eta + \Delta y) - g(\xi, \eta)]\, d\, Q + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 d\,\xi \int_{-\Delta y}^0 U(P, Q)\, g(\xi,\, \eta + \Delta y)\, d\eta \right\} = I + J\,.$$

Posto poi

$$I = \iint\limits_{R_y} U(P, Q) \left[\frac{\partial\, g(\xi, \eta + \Delta y)}{\partial\, \eta} - \frac{\partial\, g(\xi, \eta)}{\partial\, \eta} \right] d\, Q +$$

$$+ \iint\limits_{R_y} U(P, Q) \frac{\partial\, g(Q)}{\partial\, \eta}\, d\, Q = I_1 + I_2\,,$$

con $0 < \vartheta < 1$, per la uniforme continuità di $\dfrac{\partial\, g(Q)}{\partial\, \eta}$ in R si ha $\lim\limits_{\Delta y \to 0} I_1 = 0$, mentre risulta

$$J = \int_0^1 U(P; \xi, \bar{\eta})\, g(\xi, \bar{\eta} + \Delta y)\, d\, \xi\,,$$

con $\bar{\eta}$ compreso fra 0 e $-\Delta y$, e quindi

$$\lim_{\Delta y \to 0} J = \int_0^1 U(P; \xi, 0)\, g(\xi, 0)\, d\, \xi\,.$$

Avremo dunque

$$\frac{\partial\, u(P)}{\partial\, y} = \int_0^1 U(P; \xi, 0)\, g(\xi, 0)\, d\, \xi + \iint\limits_{R_y} U(P, Q) \frac{\partial\, g(Q)}{\partial\, \eta}\, d\, Q,$$

e quindi per la (13)

$$\mathcal{L}_0 [u] = - \pi\, g(P) .$$

Abbiamo così provato che

VII. *Se* $g \,,\, \dfrac{\partial g}{\partial y} \in C(R)$, *la funzione*

$$(14) \qquad - \frac{1}{\pi} \iint_{R_y} U(P, Q)\, g(Q)\, dQ$$

è soluzione (*regolare*) *della equazione* $\mathcal{L}_0 [u] = 0$ *in* $0 < x < 1 \,,\, 0 < y \leq h$ (28).

Si possono fare sulla g ipotesi di tipo diverso dalle precedenti, atte tuttavia ad assicurare il risultato di VII. Per es. se è $g, \dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} \in C(R)$ si può scrivere

$$u(P) = \int_0^y \frac{\partial W(P; 1, \eta)}{\partial \xi} g(1, \eta)\, d\eta -$$

$$- \int_0^y \frac{\partial W(P; 0, \eta)}{\partial \xi} g(0, \eta)\, d\eta - \int_0^y W(P; 1, \eta) \frac{\partial g(1, \eta)}{\partial \xi} d\eta +$$

$$+ \int_0^y W(P; 0, \eta) \frac{\partial g(0, \eta)}{\partial \xi} d\eta + \iint_{R_y} W(P, Q) \frac{\partial^2 g(Q)}{\partial \xi^2} dQ .$$

Se allora è $g(0, y) \in CVL$ in $(0, h)$, ricordando (11) si ha

$$\frac{\partial^3 u(P)}{\partial x^3} = \int_0^y \frac{\partial^2 U(P; 1, \eta)}{\partial x\, \partial \xi} g(1, \eta)\, d\eta -$$

$$- \int_0^y \frac{\partial^2 U(P; 0, \eta)}{\partial x\, \partial \xi} g(0, \eta)\, d\eta - \int_0^y \frac{\partial U(P; 1, \eta)}{\partial x} \frac{\partial g(1, \eta)}{\partial \xi} d\eta +$$

---

(28) A questo stesso risultato era già giunto E. Del Vecchio nella op. cit. in (9), considerando il caso di un dominio non necessariamente rettangolare e supponendo $g, \dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial g}{\partial y}$ continue in tale dominio. Notiamo che anche la VII, si può estendere senza difficoltà al caso domini non rettangolari sufficientemente regolari, con lo stesso tipo di ragionanento tenuto qui sopra.

$$+\int_0^y \frac{\partial U(P;0,\eta)}{\partial x}\frac{\partial g(0,\eta)}{\partial \xi}d\eta+\iint_{R_y}\frac{\partial U(P;Q)}{\partial x}\frac{\partial^2 g(Q)}{\partial \xi^2}dQ,$$

ed inoltre, per (12) e l'analoga a questa per $\dfrac{\partial W(P,Q)}{\partial \xi}$,

$$\frac{\partial u(P)}{\partial y}=\int_0^y \frac{\partial^2 U(P;1,\eta)}{\partial x\,\partial \xi}g(1,\eta)\,d\eta+\pi g(0,y)-$$

$$-\int_0^y \frac{\partial^2 U(P;0,\eta)}{\partial x\,\partial \xi}g(0,\eta)\,d\eta-\int_0^y \frac{\partial U(P;1,\eta)}{\partial x}\frac{\partial g(1,\eta)}{\partial \xi}d\eta+$$

$$+\pi x\frac{\partial g(0,y)}{\partial \xi}+\int_0^y \frac{\partial U(P;0,\eta)}{\partial x}\frac{\partial g(0,\eta)}{\partial \xi}d\eta+$$

$$+\pi\int_0^x (x-\xi)\frac{\partial^2 g(\xi,y)}{\partial \xi^2}d\xi+\iint_{R_y}\frac{\partial U(P,Q)}{\partial x}\frac{\partial^2 g(Q)}{\partial \xi^2}dQ.$$

Da queste, riuscendo

$$\int_0^x (x-\xi)\frac{\partial^2 g(\xi,y)}{\partial \xi^2}d\xi=-x\frac{\partial g(0,y)}{\partial \xi}+g(x,y)-g(0,y)$$

segue che

VII'. *Se* $g,\dfrac{\partial g}{\partial x},\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}\in C(R)$ *e* $g(0,y)\in CVL$ *in* $(0,h)$, ***il risultato di VII. continua a sussistere.***

Analogamente si mostra che un'altra condizione sotto cui è valida la VII. è che sia $g\in C(R)$, $g(0,y)\in CVL$ in $(0,h)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial x}\in CVL$ rispetto ad y uniformemente rispetto ad x.

5. — Il problema per l'equazioue ridotta non omogenea.

Consideriamo ora il problema (1) per l'equazione ridotta non omogenea $\mathcal{L}_0[u]=g(P)$. Supposto $\varphi_0\equiv 0$ e supposte soddisfatte dai dati al contorno le ipotesi di VI., possiamo ricondurci, mediante una funzione del tipo (8), al problema

$$(15)\quad \begin{cases} \mathcal{L}_0[u] = g(P) & \text{per} \quad 0 < x < 1\,, \quad 0 < y \leq h\,, \\ u(0\,,y) = u(1\,,y) = u_x(0\,,y) = 0 & \text{per} \quad 0 \leq y \leq h\,, \\ u(x\,,0) = 0 & \text{per} \quad 0 \leq x \leq 1\,. \end{cases}$$

Se g soddisfa alle ipotesi di VII. una soluzione di questo problema si può ottenere sommando al potenziale di dominio (14) ancora una funzione del tipo (8), la quale dovrà essere soluzione del problema considerato in VI. con

$$(16)\quad \begin{gathered} \varphi_1(y) = \iint\limits_{R_y} U(0\,,y\,;Q)\, g(Q)\, dQ\,, \qquad \varphi_2(y) = \iint\limits_{R_y} U(1\,,y\,;Q)\, g(Q)\, dQ\,. \\ \psi(y) = \iint\limits_{R_y} \frac{\partial\, U(0\,,y\,;Q)}{\partial x}\, g(Q)\, dQ\,. \end{gathered}$$

Dovremo fare sulla g ipotesi atte ad assicurare che queste funzioni soddisfino alle condizioni richieste da VI. Se $g(x\,,0) \equiv 0\,,\ 0 \leq x \leq 1$, si può scrivere

$$\varphi_1'(y) = \iint\limits_{R_y} U(0\,,y\,;Q) \frac{\partial\, g(Q)}{\partial \eta}\, dQ\,, \qquad \psi'(y) = \iint\limits_{R_y} \frac{\partial\, U(0\,,y\,;Q)}{\partial x} \frac{\partial\, g(Q)}{\partial \eta}\, dQ\,.$$

Imponiamo che $\frac{\partial g}{\partial y}$ soddisfi in R ad una condizione di Hölder di esponente $\lambda\,,\ 0 < \lambda < 1$, rispetto ad x, uniformemente rispetto ad y e ad una condizione di Hölder di esponente $\lambda/3$ rispetto ad y uniformemente rispetto ad x, o come indicheremo brevemente, che sia $\frac{\partial g}{\partial y} \in H^{(\lambda,\lambda/3)}(R)$. Tenendo conto allora che il potenziale (14) si comporta per $x{=}0$ analogamente al potenziale di dominio relativo all'operatore $\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial y}$, si avrà [29] $\varphi_1'' \in H^{(\lambda/3)}(0,h), \psi' \in H^{\left(\frac{2+\lambda}{3}\right)}(0,h), \varphi_2 \in C^{(1)}(0,h)$, con che riescono soddisfatte le condizioni di VI., onde

VIII. *Se* $g \in C(R)\,,\ \frac{\partial g}{\partial y} \in H^{(\lambda,\lambda/3)}(R)\,,\ g(x\,,0) \equiv 0$, *il problema* (15) *ha una soluzione espressa dalla somma del potenziale* (14) *e di una funzione del tipo* (8); *essa è l'unica soluzione del problema continua in* R *con le sue prime due derivate rispetto ad* x.

([29]) Cfr. B. PINI, op. cit. in ([27]) pp. 157-60.

Per gli sviluppi che segoono ci servirà determinare anche una soluzione del problema (15), espressa come somma del potenziale (14) e di una funzione del tipo

$$(8') \quad u(x, y) = \int_0^y U(x, y; 0, \eta)\, \alpha_1(\eta)\, d\eta + \int_0^y U(x, y; 1, \eta)\, \alpha_2(\eta)\, d\eta +$$

$$+ \int_0^y V(x, y; 0, \eta)\, \beta(\eta)\, d\eta .$$

Quest'ultima dovrà allora essere soluzione del problema considerato in VI. con i dati al contorno forniti dalle (16), sicchè dovrà riuscire, per $0 \leq y \leq h$

$$f(0) \int_0^y \frac{1}{(y-\eta)^{1/3}}\, \alpha_1(\eta)\, d\eta + \int_0^y \frac{1}{(y-\eta)^{1/3}}\, f\left(\frac{-1}{(y-\eta)^{1/3}}\right) \alpha_2(\eta)\, d\eta +$$

$$+ \varphi(0) \int_0^y \frac{1}{(y-\eta)^{1/3}}\, \beta(\eta)\, d\eta = \varphi_1(y),$$

$$\int_0^y \frac{1}{(y-\eta)^{1/3}}\, f\left(\frac{1}{(y-\eta)^{1/3}}\right) \alpha_1(\eta)\, d\eta + f(0) \int_0^y \frac{1}{(y-\eta)^{1/3}}\, \alpha_2(\eta)\, d\eta +$$

$$+ \int_0^y \frac{1}{(y-\eta)^{1/3}}\, \varphi\left(\frac{1}{(y-\eta)^{1/3}}\right) \beta(\eta)\, d\eta = \varphi_2(y),$$

$$f'(0) \int_0^y \frac{1}{(y-\eta)^{2/3}}\, \alpha_1(\eta)\, d\eta + \int_0^y \frac{1}{(y-\eta)^{2/3}}\, f'\left(\frac{-1}{(y-\eta)^{1/3}}\right) \alpha_2(\eta)\, d\eta +$$

$$+ \varphi'(0) \int_0^y \frac{1}{(y-\eta)^{2/3}}\, \beta(\eta)\, d\eta = \psi(y).$$

Indicando con $g_1 * g_2$ il prodotto integrale

$$\int_0^y g_1(\eta)\, g_2(y-\eta)\, d\eta = \int_0^y g_1(y-\eta)\, g_2(\eta)\, d\eta ,$$

il sistema ottenuto potrà anche scriversi

$$f(0)\frac{1}{y^{1/3}}*\alpha_1+\frac{1}{y^{1/3}}f\left(\frac{-1}{y^{1/3}}\right)*\alpha_2+\varphi(0)\frac{1}{y^{1/3}}*\beta=\varphi_1(y),$$

$$\frac{1}{y^{1/3}}f\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right)*\alpha_1+f(0)\frac{1}{y^{1/3}}*\alpha_2+\frac{1}{y^{1/3}}\varphi\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right)*\beta=\varphi_2(y),$$

$$f'(0)\frac{1}{y^{2/3}}*\alpha_1+\frac{1}{y^{2/3}}f'\left(\frac{-1}{y^{1/3}}\right)*\alpha_2+\varphi'(0)\frac{1}{y^{2/3}}*\beta=\psi(y).$$

Poniamo

$$L\{z(y)\}=\int_0^{+\infty}e^{-py}z(y)\,dy=Z(p)$$

e pensiamo le $\varphi_1, \varphi_2, \psi$ prolungate per $y>h$ in modo da mantenere in $0\leq y<+\infty$ la stessa regolarità che hanno in $0\leq y\leq h$. Basterà per questo pensare per es. la g prolungata in tutta la semistriscia $0\leq x\leq 1$, $y\geq 0$ in modo che abbia ivi almeno la stessa regolarità che ha in R e sia per es. nulla per $y\geq h'>h$.

Applicando la trasformazione di Laplace al sistema di equazioni integrali scritto, otterremo per $\Re e\,(p)>0$

$$(17)\quad\begin{cases} f(0)\,\Gamma(2/3)\,A_1+p^{2/3}L\left\{\frac{1}{y^{1/3}}f\left(\frac{-1}{y^{1/3}}\right)\right\}A_2+\varphi(0)\,\Gamma(2/3)\,B=p^{2/3}\Phi_1(p)\\ p^{2/3}L\left\{\frac{1}{y^{1/3}}f\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right)\right\}A_1+f(0)\,\Gamma(2/3)\,A_2+p^{2/3}L\left\{\frac{1}{y^{1/3}}\varphi\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right)\right\}B=p^{2/3}\Phi_2(p)\\ f'(0)\,\Gamma(1/3)\,A_1+p^{1/3}L\left\{\frac{1}{y^{1/3}}f'\left(\frac{-1}{y^{1/3}}\right)\right\}A_2+\varphi'(0)\,\Gamma(1/3)\,B=p^{1/3}\Psi(p).\end{cases}$$

Il determinante $\Delta(p)$ dei coefficienti delle $A_1(p)$, $A_2(p)$, $B(p)$ in questo sistema è

$$\Delta(p)=\begin{vmatrix} f(0)\,\Gamma(2/3) & p^{2/3}L\left\{\frac{1}{y^{1/3}}f\left(\frac{-1}{y^{1/3}}\right)\right\} & \varphi(0)\,\Gamma(2/3)\\ p^{2/3}L\left\{\frac{1}{y^{1/3}}f\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right)\right\} & f(0)\,\Gamma(2/3) & p^{2/3}L\left\{\frac{1}{y^{1/3}}\varphi\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right)\right\}\\ f'(0)\,\Gamma(1/3) & p^{1/3}L\left\{\frac{1}{y^{2/3}}f'\left(\frac{-1}{y^{1/3}}\right)\right\} & \varphi'(0)\,\Gamma(1/3)\end{vmatrix}.$$

Per esaminare il comportamento di $\Delta(p)$ nel semipiano $(\Re e)(p) > 0$, osserviamo in primo luogo che per (6) le funzioni $\frac{1}{y^{1/3}} f\left(\frac{-1}{y^{1/3}}\right)$, $\frac{1}{y^{2/3}} f'\left(\frac{-1}{y^{1/3}}\right)$ hanno le derivate di tutti gli ordini L-trasformabili per $\Re e\,(p) > 0$ ed infinitesime per $y \to 0+$ e quindi sarà

$$L\left\{\frac{1}{y^{1/3}} f\left(\frac{-1}{y^{1/3}}\right)\right\} = p^{-n} L\left\{D^{(n)}\left[\frac{1}{y^{1/3}} f\left(\frac{-1}{y^{1/3}}\right)\right]\right\},$$

$$L\left\{\frac{1}{y^{2/3}} f'\left(\frac{-1}{y^{2/3}}\right)\right\} = p^{-n} L\left\{D^{(n)}\left[\frac{1}{y^{2/3}} f'\left(\frac{-1}{y^{1/3}}\right)\right]\right\}, \quad \Re e\,(p) > 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Da (7_2) segue poi che per $\Re e\,(p) \geq 0$ è

$$\left| L\left\{ D^{(n)} \left[\frac{1}{y^{1/3}} f\left(\frac{-1}{y^{1/3}}\right)\right]\right\}\right| < C \int_0^{+\infty} y^{-(3n+1)/3} \exp\left(-c\, y^{-1/2}\right) dy < K_n,$$

$$\left| L\left\{ D^{(n)} \left[\frac{1}{y^{2/3}} f'\left(\frac{-1}{y^{1/3}}\right)\right]\right\}\right| < C \int_0^{y} y^{-(3n+2)/3} \exp\left(-c\, y^{-1/2}\right) dy < K_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

con K_n costante positiva dipendente solo da n e quindi

$$\left.\begin{array}{l} \left| L\left\{\frac{1}{y^{1/3}} f\left(\frac{-1}{y^{1/3}}\right)\right\}\right| \\ \left| L\left\{\frac{1}{y^{2/3}} f'\left(\frac{-1}{y^{1/3}}\right)\right\}\right| \end{array}\right\} < K_n\, |p|^{-n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \Re e\,(p) > 0. \tag{18}$$

Si verifica inoltre facilmente che $L\left\{\frac{1}{y^{1/3}} f\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right)\right\}$ ed $L\left\{\frac{1}{y^{1/3}} \varphi\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right)\right\}$ convergono uniformemente su ciascuna retta $\Re e\,(p) = \lambda > 0$ e ciò assicura [30] che entrambe tali trasformate sono limitate in ciascuno dei semipiani $\Re e\,(p) \geq \lambda > 0$. Pertanto nella espressione di $\Delta(p)$, soltanto i due termini $f^2(0)\, \varphi'(0)\, \Gamma^2(2/3)\, \Gamma(1/3)$ e $-f'(0)\, f(0)\, \varphi(0)\, \Gamma(1/3)\, \Gamma^2(2/3)$ non tenderanno a zero per $|p| \to +\infty$ onde sarà

$$|\Delta(p)|^2 = [f^2(0)\, \varphi'(0)\, \Gamma^2(2/3)\, \Gamma(1/3) - f'(0)\, f(0)\, \varphi(0)\, \Gamma(1/3)\Gamma^2(2/3)]^2 + 0\,(p),$$

---

[30] Cfr. per es. G. DOETSCH, *Handbuch der Laplace-Transformation*, I, Birkhäuser, 1950, p. 172. Daremo più oltre una espressione per entrambe queste funzioni.

per $|p| \to +\infty$. Il numero $f(0)\,\varphi'(0) - f'(0)\,\varphi(0)$ è però certamente diverso da zero, poichè rappresenta il wronskiano delle due soluzioni di (3) linearmente indipendenti $f(t)$ e $\varphi(t)$. Pertanto non appena sia $\Re(p) \geq \lambda_0 > 0$, con λ_0 sufficientemente grande, si avrà

$$|\Delta(p)| > \Lambda\,, \qquad \Lambda \neq 0. \tag{19}$$

Esaminiamo ora i secondi membri del sistema (17). Risulta

$$\Phi_1(p) = L\left\{\iint_{R_y} U(0\,,y\,;\,Q)\,g(Q)\,d\,Q\right\} = \int_0^1 L\left\{\frac{1}{y^{1/3}}\,f\left(\frac{-\xi}{y^{1/3}}\right)\right\} G(\xi\,,p)\,d\,\xi$$

e similmente

$$\Phi_2(p) = \int_0^1 L\left\{\frac{1}{y^{1/3}}\,f\left(\frac{1-\xi}{y^{1/3}}\right)\right\} G(\xi,p)\,d\xi, \qquad \Psi(p) = \int_0^1 L\left\{\frac{1}{y^{2/3}}\,f'\left(\frac{-\xi}{y^{1/3}}\right)\right\} G(\xi,p)\,d\xi\,.$$

Per $0 < \xi < 1$ scriviamo poi

$$p^{2/3}\,L\left\{\frac{1}{y^{1/3}}\,f\left(\frac{-\xi}{y^{1/3}}\right)\right\} = p^{2/3}\,\xi^{-1}\,L\,\{(\xi^{-3}\,y)^{-1/3}\,f\,(-(\xi^{-3}\,y)^{-1/3})\} =$$

$$= (p\,\xi^3)^{2/3}\int_0^{+\infty} e^{-p\xi^3 y}\,\frac{1}{y^{1/3}}\,f\left(\frac{-1}{y^{1/3}}\right) dy = s^{2/3}\int_0^{+\infty} e^{-sy}\,\frac{1}{y^{1/3}}\,f\left(\frac{-1}{y^{1/3}}\right) dy\,,$$

avendo posto $s = p\,\xi^3$; e analogamente

$$p^{1/3}\,L\left\{\frac{1}{y^{2/3}}\,f'\left(\frac{-\xi}{y^{1/3}}\right)\right\} = (p\,\xi^3)^{1/3}\int_0^{+\infty} e^{-p\xi^3 y}\,\frac{1}{y^{2/3}}\,f'\left(\frac{-1}{y^{1/3}}\right) dy =$$

$$= s^{1/3}\int_0^{+\infty} e^{-sy}\,\frac{1}{y^{2/3}}\,f'\left(\frac{-1}{y^{1/3}}\right) dy\,, \quad p^{2/3}\,L\left\{\frac{1}{y^{1/3}}\,f\left(\frac{1-\xi}{y^{1/3}}\right)\right\} =$$

$$= [p\,(1-\xi)^3]^{2/3}\int_0^{+\infty} e^{-p(1-\xi)^3 y}\,\frac{1}{y^{1/3}}\,f\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right) dy = s^{2/3}\int_0^{+\infty} e^{-sy}\,\frac{1}{y^{1/3}}\,f\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right) dy\,,$$

avendo posto in quest'ultima $s = p\,(1-\xi)^3$. Mostriamo che le tre funzioni ad ultimo membro in queste tre eguaglianze e cioè

$$s^{2/3}\,L\left\{\frac{1}{y^{1/3}}\,f\left(\frac{-1}{y^{1/3}}\right)\right\}, \quad s^{1/3}\,L\left\{\frac{1}{y^{2/3}}\,f'\left(\frac{-1}{y^{1/3}}\right)\right\}, \quad s^{2/3}\,L\left\{\frac{1}{y^{1/3}}\,f\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right)\right\} \tag{20}$$

analitiche nel semipiano $\Re e\,(s) > 0$, sono limitate in tale semipiano. Posto $h(y) = \dfrac{1}{y^{1/3}} f\left(\dfrac{-1}{y^{1/3}}\right)$ e $k(y) = \dfrac{1}{y^{1/3}} f\left(\dfrac{1}{y^{1/3}}\right)$, poichè $f(t)$ è soluzione della (3) risulta

$$y^3 h''(y) + 2y^2 h'(y) + \left(\frac{2}{9} y - \frac{1}{27}\right) h(y) = 0$$

e

$$y^3 k''(y) + 2y^2 k'(y) + \left(\frac{2}{9} y + \frac{1}{27}\right) k(y) = 0.$$

Per $\Re e\,(s) > 0$ la $H(s) = L\left\{\dfrac{1}{y^{1/3}} f\left(\dfrac{-1}{y^{1/3}}\right)\right\}$ soddisfa quindi alla equazione

$$(21_1) \qquad s^2 v''' + 4sv'' + \frac{20}{9} v' + \frac{1}{27} v = 0\,.$$

Mediante le (7_1) si riconosce poi che le funzioni $y^3 k''$, $y^2 k'$, $y\,k$ sono L-trasformabili per $\Re e\,(s) > 0$ e che riesce

$$L\{y\,k\} = -K'(s)\,, \qquad L\{y^2 k'\} = s\,K''(s) + 2\,K'(s)\,,$$

$$L\{y^3 k''\} = -s^2 K'''(s) - 6\,s\,K''(s) - 6\,K'(s)\,,$$

con $K(s) = L\left\{\dfrac{1}{y^{1/3}} f\left(\dfrac{1}{y^{1/3}}\right)\right\}$. Per $\Re e\,(s) > 0$ $K(s)$ sarà perciò soluzione della equazione

$$(21_2) \qquad s^2 w''' + 4s\,w'' + \frac{20}{9} w' - \frac{1}{27} w = 0\,.$$

Effettuando il cambiamento di variabili

$$t = s^{1/3}\,, \qquad z(t) = s^{2/3} v \quad \text{o} \quad z(t) = s^{2/3} w$$

le (21_1) e (21_2) si trasformano rispettivamente nelle

$$z''' + z = 0 \quad \text{e} \quad z''' - z = 0\,.$$

Le funzioni

$$(22) \qquad v_j = s^{-2/3} \exp(\lambda_j s^{1/3}) \quad \text{e} \quad w_j = s^{-2/3} \exp(\mu_j s^{1/3})\,, \qquad j = 1,\ 2,\ 3,$$

ove λ_j e μ_j sono le radici cubiche rispettivamente dell'unità negativa e dell'unità positiva, rappresenteranno perciò un sistema fondamentale di integrali delle (21_1) e (21_2) rispettivamente. La funzione $H(s)$ sarà data perciò da una combinazione lineare a coefficienti costanti delle v_j e la $K(s)$ da una combinazione lineare delle w_j. Osserviamo tuttavia che al variare di s nel semipiano $\Re e\,(s) > 0$ uno solo dei tre numeri $\lambda_j\, s^{1/3}$ ha sempre parte reale negativa, e precisamente compresa fra $-|s|^{1/3}$ e $-\sqrt{3}/2\,|s|^{1/3}$, gli altri due invece sempre parte reale positiva. Analogamente dei tre numeri $\mu_j\, s^{1/3}$ due avranno sempre parte reale negativa per $\Re e\,(s) > 0$, e precisamente compresa fra 0 e $-\sqrt{3}/2\,|s|^{1/3}$, ed uno solo parte reale sempre positiva. D'altra parte le funzioni $H(s)$ e $K(s)$, in quanto L-trasformate aventi il semipiano $\Re e\,(s) > 0$ come semipiano di convergenza, tendono a zero quando s tende all'infinito lungo un qualunque raggio uscente da un punto di tale semipiano e formante un angolo compreso fra $-\pi/2$ e $\pi/2$ con l'asse reale. Nella loro espressione come combinazioni lineari delle (22) non potranno quindi figurare quelle fra queste in cui i numeri $\lambda_j\, s^{1/3}$ o $\mu_j\, s^{1/3}$ hanno parte reale sempre positiva per $\Re e\,(s) > 0$. A meno di un fattore costante la $H(s)$ sarà dunque data da

$$s^{-2/3} \exp(-s^{1/3}), \qquad \Re e\,(s) > 0,$$

in accordo con le valutazioni (18), mentre $K(s)$ sarà combinazione lineare a coefficienti costanti delle funzioni

$$(23) \qquad s^{-2/3} \exp(s^{1/3}\, e^{2\pi i/3}), \qquad s^{-2/3} \exp(s^{1/3}\, e^{4\pi i/3}), \qquad \Re e\,(s) > 0.$$

Possiamo quindi concludere che la prima e la terza delle (20) sono limitate nel semipiano $\Re e\,(s) > 0$. Quanto alla seconda di queste la stessa conclusione si ottiene osservando che da

$$\frac{1}{y^{2/3}} f'\left(-\frac{1}{y^{1/3}}\right) = 3y\, D\left[\frac{1}{y^{1/3}}\, f\left(-\frac{1}{y^{1/3}}\right)\right] + \frac{1}{y^{1/3}}\, f\left(-\frac{1}{y^{1/3}}\right)$$

segue

$$L\left\{\frac{1}{y^{2/3}}\, f'\left(-\frac{1}{y^{1/3}}\right)\right\} = -2\, H(s) - 3\, s\, H'(s),$$

nella quale il secondo membro, a meno di un fattore costante, è dato da $s^{-1/3} \exp(-s^{1/3})$. Le stesse considerazioni valide per $K(s)$ si applicano alla funzione $L\left\{\frac{1}{y^{1/3}}\, \varphi\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right)\right\}$, cosicchè anche la funzione $s^{2/3} L\left\{\frac{1}{y^{1/3}}\, \varphi\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right)\right\}$ è analitica e limitata nel semipiano $\Re e\,(s) > 0$.

Dall'analisi ora eseguita e dalla (19) si trae dunque che, per $\Re e\,(p) \geq \lambda_0 > 0$, con λ_0 sufficientemente grande, il sistema (17) ha una ed una sola soluzione fornita da

$$(24)\qquad A_j(p)=\int_0^1 \frac{M_j(\xi\,,p)}{\Delta(p)}\,G(\xi\,,p)\,d\xi\,,\quad j=1,2,\qquad B(p)=\int_0^1 \frac{N(\xi,p)}{\Delta(p)}\,G(\xi\,,p)\,d\xi\,,$$

con $M_j(\xi\,,p)$ ed $N\,(\xi,p)$ analitiche rispetto a p e limitate per $\mathcal{R}e(p)>0$, $0<\xi<1$.

Affinchè (8′) rappresenti una soluzione del problema qui considerato, richiederemo che le $\alpha_1(y)$ e $\beta(y)$ siano dotate di derivate prime continue in $(0\,,h)$ ([31]). Se risulta

$$(25)\qquad G(\xi\,,p)=O\left(\frac{1}{p^k}\right),\quad k>2\,,$$

per $\mathcal{R}e\,(p)\geq\lambda_0$, uniformemente rispetto a ξ in $(0\,,1)$ si avrà

$$(26)\qquad \alpha_j(y)=\frac{1}{2\,\pi\,i}\lim_{\tau\to+\infty}\int_{\lambda-i\tau}^{\lambda+i\tau} e^{py}\,A_j(p)\,dp\,,\qquad j=1\,,2\,,$$

$$\beta(y)=\frac{1}{2\pi\,i}\lim_{\tau\to+\infty}\int_{\lambda-i\tau}^{\lambda+i\tau} e^{py}\,B(p)\,d\,p$$

e

$$\alpha_j'=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\tau\to+\infty}\int_{\lambda-i\tau}^{\lambda+i\tau} e^{py}\,p\,A_j(p)\,dp\,,\qquad j=1\,,2\,,$$

$$\beta'=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\tau\to+\infty}\int_{\lambda-i\tau}^{\lambda+i\tau} e^{py}\,p\,B(p)\,dp\,,\qquad \lambda\geq\lambda_0\,.$$

con $\alpha_j(y)\,,\,j=1\,,2\,,\ \beta(y)$ continue con la loro derivata prima per $y\geq0$ e nulle con essa per $y=0$.

([31]) Per quanto esposto al n. 2 sarebbe sufficiente richiedere che tali derivate fossero sommabili con una potenza $>3/2$ in $(0\,,h)$. Risulterebbero tuttavia complicate in tal caso le condizioni da imporsi alla g affinchè ciò si verifichi.

In particolare

IX. *Se* g, $\frac{\partial g}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \in C(R)$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \in CVL$ *rispetto ad* y *in* $(0, h)$ *uniformemente rispetto ad* x *e* $g(x, 0) \equiv \frac{\partial g(x, 0)}{\partial y} \equiv 0$ *in* $0 \leq x \leq 1$, *il problema* (15) *ha una soluzione data dalla somma del potenziale* (14) *e di una funzione del tipo* (8′).

Le ipotesi indicate per la g sono infatti sufficienti ad assicurare il verificarsi della (25) (32).

6. — Il problema per l'equazione completa.

Passiamo a considerare il problema (15) per l'equazione

$$\mathcal{L}[u] = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a_1(x) \frac{\partial u}{\partial x} + a_0(x) u - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y), \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y \leq h,$$

anzichè per l'equazione ridotta. Sia $a_0, a_1 \in C(0, 1)$. Utilizzando la trattazione del n. precedente, cerchiamo se esiste una soluzione di tale problema del tipo

$$u(x, y) = -\frac{1}{\pi} \iint_{R_y} U(P, Q) g(Q) dQ + \tag{27}$$
$$+ \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^y U(P; 0, \eta) \alpha_1(\eta) d\eta + \int_0^y U(P; 1, \eta) \alpha_2(\eta) d\eta + \int_0^y V(P; 0, \eta) \beta(\eta) d\eta \right\}.$$

Quando si prendano come funzioni $\alpha_j(y)$, $j = 1, 2$, $\beta(y)$ le (26) questa funzione soddisfa alle condizioni al contorno del problema. Resta perciò soltanto da provare che estiste una funzione $g(P)$ per cui $\mathcal{L}[u] = f(P)$. Si è condotti in tal modo alla equazione

$$g(P) - \frac{1}{\pi} \iint_{R_y} \left[a_1(x) \frac{\partial U(P, Q)}{\partial x} + a_0(x) U(P, Q) \right] g(Q) dQ + \tag{28}$$
$$+ \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^y \left[a_1(x) \frac{\partial U(P; 0, \eta)}{\partial x} + a_0(x) U(P; 0, \eta) \right] \alpha_1(\eta) d\eta + \right.$$

---

(32) Cfr. G. Doetsch, op. cit. in (30) p. 480.

$$+\int_0^y \left[a_1(x)\frac{\partial U(P;1,\eta)}{\partial x}+a_0(x)\,U(P;1,\eta)\right]\alpha_2(\eta)\,d\eta+$$

$$+\int_0^y \left[a_1(x)\frac{\partial V(P;0,\eta)}{\partial x}+a_0(x)\,V(P;0,\eta)\right]\beta(\eta)\,d\eta\Big\}=f(P).$$

Supponiamo la $f(x,y)$ prolungata in tutta la semistriscia $0\leq x\leq 1$, $y\geq 0$ con la regolarità che sarà richiesta e nulla per $y\geq h_1>h$. La (28) L-trasformata diviene

$$G(x,p)+\int_0^1 K(x,\xi,p)\,G(\xi,p)\,d\xi=F(x,p), \tag{28'}$$

ove, tenuto conto delle (24) si è posto

$$K(x,\xi,p)=-M(x,\xi,p)+\sum_1^2{}_i\,R_i(x,p)\frac{M_i(\xi,p)}{\Delta(p)}+S(x,p)\frac{N(\xi,p)}{\Delta(p)},$$

con

$$M(x,\xi,p)=\frac{1}{\pi}L\left\{a_1(x)\frac{1}{y^{2/3}}f'\left(\frac{x-\xi}{y^{1/3}}\right)+a_0(x)\frac{1}{y^{1/3}}f\left(\frac{x-\xi}{y^{1/3}}\right)\right\},$$

$$R_1(x,p)=\frac{1}{\pi}L\left\{a_1(x)\frac{1}{y^{2/3}}f'\left(\frac{x}{y^{1/3}}\right)+a_0(x)\frac{1}{y^{1/3}}f\left(\frac{x}{y^{1/3}}\right)\right\},$$

$$R_2(x,p)=\frac{1}{\pi}L\left\{a_1(x)\frac{1}{y^{2/3}}f'\left(\frac{x-1}{y^{1/3}}\right)+a_0(x)\frac{1}{y^{1/3}}f\left(\frac{x-1}{y^{1/3}}\right)\right\},$$

$$S(x,p)=\frac{1}{\pi}L\left\{a_1(x)\frac{1}{y^{2/3}}\varphi'\left(\frac{x}{y^{1/3}}\right)+a_0(x)\frac{1}{y^{1/3}}\varphi\left(\frac{x}{y^{1/3}}\right)\right\}.$$

Posto per $x>\xi$, $s=p\,(x-\xi)^3$, si può scrivere

$$L\left\{\frac{1}{y^{2/3}}f'\left(\frac{x-\xi}{y^{1/3}}\right)\right\}=\frac{s^{1/3}}{p^{1/3}}\int_0^{+\infty}e^{-sy}\frac{1}{y^{2/3}}f'\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right)dy,$$

$$L\left\{\frac{1}{y^{1/3}}f\left(\frac{x-\xi}{y^{1/3}}\right)\right\}=\frac{s^{2/3}}{p^{2/3}}\int_0^{+\infty}e^{-sy}\frac{1}{y^{1/3}}f\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right)dy=\frac{s^{2/3}}{p^{2/3}}K(s),$$

ed analogamente per $x < \xi$ posto $s = p\,(\xi - x)^3$

$$L\left\{\frac{1}{y^{2/3}} f'\left(\frac{x-\xi}{y^{1/3}}\right)\right\} = \frac{s^{1/3}}{p^{1/3}} \int_0^{+\infty} e^{-sy} \frac{1}{y^{2/3}} f'\left(-\frac{1}{y^{1/3}}\right) dy = -\frac{s^{1/3}}{p^{1/3}} [2H(s) + 3sH'(s)]\,,$$

$$L\left\{\frac{1}{y^{1/3}} f\left(\frac{x-\xi}{y^{1/3}}\right)\right\} = \frac{s^{2/3}}{p^{2/3}} \int_0^{+\infty} e^{-sy} \frac{1}{y^{1/3}} f\left(-\frac{1}{y^{1/3}}\right) dy = \frac{s^{2/3}}{p^{2/3}} H(s)\,.$$

Allo stesso modo risulta

$$L\left\{\frac{1}{y^{2/3}} f'\left(\frac{x}{y^{1/3}}\right)\right\} = \frac{s^{1/3}}{p^{1/3}} \int_0^{+\infty} e^{-sy} \frac{1}{y^{2/3}} f'\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right) dy\,,$$

$$L\left\{\frac{1}{y^{1/3}} f\left(\frac{x}{y^{1/3}}\right)\right\} = \frac{s^{2/3}}{p^{2/3}} \int_0^{+\infty} e^{-sy} \frac{1}{y^{1/3}} f\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right) dy = \frac{s^{2/3}}{p^{2/3}} K(s)\,,$$

$$L\left\{\frac{1}{y^{2/3}} \varphi'\left(\frac{x}{y^{1/3}}\right)\right\} = \frac{s^{1/3}}{p^{1/3}} \int_0^{+\infty} e^{-sy} \frac{1}{y^{2/3}} \varphi'\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right) dy\,,$$

$$L\left\{\frac{1}{y^{1/3}} \varphi\left(\frac{x}{y^{1/3}}\right)\right\} = \frac{s^{2/3}}{p^{2/3}} \int_0^{+\infty} e^{-sy} \frac{1}{y^{1/3}} \varphi\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right) dy\,, \qquad \text{con} \quad s = p\,x^3\,;$$

$$L\left\{\frac{1}{y^{2/3}} f'\left(\frac{x-1}{y^{1/3}}\right)\right\} = \frac{s^{1/3}}{p^{1/3}} \int_0^{+\infty} e^{-sy} \frac{1}{y^{2/3}} f'\left(-\frac{1}{y^{1/3}}\right) dy = -\frac{s^{1/3}}{p^{1/3}} [2\,H(s) + 3s\,H'(s)]\,,$$

$$L\left\{\frac{1}{y^{1/3}} f\left(\frac{x-1}{y^{1/3}}\right)\right\} = \frac{s^{2/3}}{p^{2/3}} \int_0^{+\infty} e^{-sy} \frac{1}{y^{1/3}} f\left(-\frac{1}{y^{1/3}}\right) dy = \frac{s^{2/3}}{p^{2/3}} H(s), \quad \text{con} \quad s = p(1-x)^3.$$

I risultati del n. precedente assicurano che le funzioni

$$s^{2/3} K(s)\,, \quad s^{1/3} [2H(s) + 3sH'(s)]\,, \quad s^{2/3} H(s)\,, \quad s^{2/3} L\left\{\frac{1}{y^{1/3}} \varphi\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right)\right\},$$

sono tutte analitiche e limitate nel semipiano $\Re e\,(s) > 0$; lo stesso si verifica subito che accade per le

$$s^{1/3}\, L\left\{\frac{1}{y^{2/3}} f'\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right)\right\}, \qquad s^{1/3}\, L\left\{\frac{1}{y^{2/3}}\, \varphi'\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right)\right\}.$$

Risulta infatti per es.

$$\frac{1}{y^{2/3}} f'\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right) = -\frac{1}{y^{1/3}} f\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right) - 3y\, D\left[\frac{1}{y^{1/3}} f\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right)\right],$$

e quindi

$$L\left\{\frac{1}{y^{2/3}} f'\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right)\right\} = 2K(s) + 3sK'(s)\,.$$

Ricordando che $K(s)$ è combinazione lineare delle (23), si vede che $L\left\{\frac{1}{y^{2/3}} f'\left(\frac{1}{y^{1/3}}\right)\right\}$ è combinazione lineare delle $s^{-1/3}\exp\,(s^{1/3}\,e^{2\pi i/3})$ e $s^{-1/3}\cdot$ $\cdot\exp\,(s^{1/3}\,e^{4\pi i/3})$, $\Re e\,(s) > 0$.

Possiamo dunque concludere che è

$$\left.\begin{array}{l} |\, M(x\,,\xi\,,p)\,| \\ |\, R_i(x\,,p)\,| \\ |\, S\,(x\,,p)\,| \end{array}\right\} < \frac{C_1}{|\,p\,|^{1/3}}, \quad i = 1\,,2\,, \quad \Re e\,(p) \geq \lambda_0, \quad 0 < \xi < 1\,, \quad 0 < x < 1\,,$$

con C_1 costante positiva. Da questa e dalla (19) si trae che per $\Re e\,(p) \geq$ $\geq \lambda_0 > 0$, $0 < x < 1$, $0 < \xi < 1$, è

$$|\, K\,(x\,,\xi\,,p)\,|^2 < \frac{C_2}{(\Re e\,(p))^{2/3}}$$

con C_2 costante positiva. Scegliendo λ_0 sufficientemente grande, potremo fare in modo che si abbia

$$\int_0^1\int_0^1 |\, K\,(x\,,\xi\,,p)\,|^2\, dx\, d\xi < 1\,, \qquad \text{per} \quad \Re e\,(p) \geq \lambda_0.$$

La equazione integrale (28′) ammetterà perciò per ogni p del semipiano $\Re e\,(p) \geq \lambda_0$ la (unica) soluzione

$$G\,(x\,,p) = F\,(x\,,p) - \int_0^1 \Gamma\,(x\,,\xi\,,p)\; F\,(\xi\,,p)\; d\xi$$

ove con $\Gamma(x\,,\xi\,,p)$ si è indicato il nucleo risolvente della (28′) stessa. La analiticità del nucleo $K(x\,,\xi\,,p)$ per $\mathcal{R}e\,(p) \geq \lambda_0$ assicura pure la analiticità di tutti i nuclei iterati e della $\Gamma(x\,,\xi\,,p)$ nello stesso semipiano. Dunque anche $G(x\,,p)$ risulterà analitica e limitata per $\mathcal{R}e\,(p) \geq \lambda_0$. Se quindi è

$$F(x\,,p) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{|\,p\,|^k}\right), \qquad k > 2\,,$$

uniformemente rispetto ad x, la $G(x\,,p)$ verifica la (25) ed inoltre risulta

$$g\,(x\,,y) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\tau\to+\infty}\int_{\lambda-i\tau}^{\lambda+i\tau} e^{py}\,G\,(x\,,p)\,dp\,, \qquad \lambda > \lambda_0\,,$$

con $g\,,\ \dfrac{\partial g}{\partial y} \in C\,(R)\,,\ g\,(x\,,0) \equiv \dfrac{\partial\,g\,(x\,,0)}{\partial y} \equiv 0\,, 0 \leq x \leq 1$. In particolare

X. *Se* $f\,,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\,,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial\,y^2} \in C\,(R)\,,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial\,y^2} \in CVL$ *rispetto ad y in* $(0\,,h)$, *uniformemente rispetto ad* x, $f\,(x\,,0) \equiv \dfrac{\partial f\,(x\,,0)}{\partial y} \equiv 0\,,\ 0 \leq x \leq 1$, *ed* $a_0\,,\,a_1 \in C\,(0\,,1)$ *il problema* (15) *per l'equazione* $\mathcal{L}[u] = f\,(P)$ *ammette una soluzione del tipo* (27). *Se di più* $a_1 \in C^{(1)}\,(0\,,1)$, *essa è l'unica soluzione del problema continua in R con le sue prime due derivate rispetto ad* x.