ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

PHAM TAN HOANG

La méthode des singularités pour les équations du mouvement en relativité générale et en théorie du champ unifié

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 13, nº 1 (1959), p. 13-75
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1959_3_13_1_13_0>

LA MÉTHODE DES SINGULARITÉS POUR LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE ET EN THEORIE DU CHAMP UNIFIÉ

par PHAM TAN HOANG (Paris)

CHAPITRE III

LA THÉORIE DU CHAMP UNIFIÉ D'EINSTEIN-SCHRÖDINGER ET QUELQUES-UNS DE SES DÉVELOPPEMENTS.

En relativité générale, le champ électromagnétique est représenté par un champ de tenseurs antisymétriques $F_{\alpha\beta}$ défini sur l'espace-temps riemannien dont la métrique est fournie par le champ gravitationnel. Les équations de l'électromagnétisme sont constituées par les deux groupes d'équations de MAXWELL et d'EINSTEIN. Mais il y a séparation des deux champs, et le champ électromagnétique n'intervient pas directement dans la définition de la structure géométrique de l'univers. D'autre part les sources (matière et charges) apparaissent comme une notion étrangère à celle de champ. Or les lois de propagation des deux champs électromagnétique et gravitationnel sont identiques. On est naturellement amené à les unifier, mais cette unification est plus complexe que la fusion des champs électrique et magnétique en relativité restreinte.

Une théorie unitaire du champ est une théorie qui groupe les champs électromagnétique et gravitationnel en un même hyperchamp susceptible de décrire la structure géométrique de l'univers. Les différents essais ont abouti soit aux théories pentadimensionnelles, soit aux théories dites à connexion affine. La théorie d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER dont il est question ici est une théorie à connexion affine.

I. — VARIÉTÉ À CONNEXION AFFINE.

26. — Définition d'une connexion affine.

Considérons une variété différentiable V_n de dimension n, de classe C^r $(r \geq 2)$ et un recouvrement arbitraire de cette variété par des voisinages ouverts U. Donnons-nous dans chaque U un ensemble ordonné de n formes de Pfaff $(\theta^\alpha(x))$ de classe C^{r-1} linéairement indépendantes. Ces formes définissent pour chaque x de U un corepère θ_x^U de l'espace vectoriel T_x^* des formes linéaires au point x, et par dualité un repère R_U^x de l'espace vectoriel T_x des vecteurs tangents en x à V_n.

Si U et V sont deux voisinages de V_n et si $x \in U \cap V$, il existe une matrice $n \times n$ régulière $A_V^U(x)$, de classe C^{r-1} telle que :

$$\theta_x^U = A_V^U \theta_x^V \qquad (x \in U \cap V) \tag{26.1}$$

et :

$$R_V^x = R_U^x A_V^U \tag{26.2}$$

et l'on a $\overset{-1}{A}{}_V^U = A_U^V$.

Une *connexion affine* sur V_n est définie par la donnée dans tout voisinage muni de repères, d'une matrice ω_U de formes de Pfaff, de classe C^{r-1}, telle que pour $x \in U \cap V$ on ait :

$$\omega_V = \overset{-1}{A}{}_V^U \omega_U A_V^U + A_{UV} \qquad (A_{UV} = \overset{-1}{A}{}_V^U \, d A_V^U). \tag{26.3}$$

Soient U, V, W trois voisinages de V_n. Pour $x \in U \cap V \cap W$, on a trois matrices $\omega_U, \omega_V, \omega_W$. Ces matrices satisfont deux à deux à des relations du type (26.3) et la définition n'est pas contradictoire en elle-même.

Sur une variété différentiable V_n il existe une infinité de connexions affines. A partir d'un recouvrement dénombrable de V_n, on peut en construire une directement, par induction sur les voisinages. Une variété différentiable de classe C^r munie d'une connexion affine de classe C^{r-2} est dite une variété à connexion affine de classe C^{r-2}.

La formule (26.3) peut s'écrire sous forme explicite :

$$\omega_{\mu'}^{\lambda'} = A_\alpha^{\lambda'} \omega_\beta^\alpha A_{\mu'}^\beta + A_\sigma^{\lambda'} \, d A_{\mu'}^\sigma \qquad (x \in U \cap V). \tag{26.4}$$

On reconnait sur (26.4) la loi de transformation dans un changement de repère des formes locales définissant une connexion riemannienne. Les coefficients $\gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ définis par :

$$\omega^{\alpha}_{\beta} = \gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\, \theta^{\gamma} \qquad (x \in U)$$

sont dits les coefficients de la connexion affine envisagée au point x et pour les repères θ_x et R^x choisis. D'après (26.4) ces coefficients se transforment selon la loi :

$$\gamma^{\lambda'}_{\mu'\varrho'} = A^{\lambda'}_{\alpha}\, A^{\beta}_{\mu'}\, A^{\gamma}_{\varrho'}\, \gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + A^{\lambda'}_{\sigma}\, \partial_{\varrho'}\, A^{\sigma}_{\mu'} \tag{26.5}$$

où $\partial_{\varrho'}$ désigne la dérivée pfaffienne des A par rapport à θ^{ϱ}.

Il résulte de la formule de transformation (26.5) la propriété suivante :

Etant donné sur V_n une connexion affine, on obtient toutes les autres par addition à ses coefficients des composantes d'un tenseur arbitraire d'ordre 3 une fois contravariant, deux foix covariant.

27. — Torsion et courbure d'une variété à connexion affine.

Considérons dans chaque voisinage U la matrice à une ligne

$$\Sigma^U = d\,\theta^U + \omega_U \wedge \theta^U$$

et la matrice $n \times n$

$$\Omega_U = d\,\omega_U + \omega_U \wedge \omega_U$$

dont les éléments sont des formes différentielles quadratiques extérieures locales.

Les éléments de ces matrices sont donnés explicitement par :

$$\Sigma^{\alpha} = d\,\theta^{\alpha} + \omega^{\alpha}_{\varrho} \wedge \theta^{\varrho}$$

$$\Omega^{\alpha}_{\beta} = d\,\omega^{\alpha}_{\beta} + \omega^{\alpha}_{\varrho} \wedge \omega^{\varrho}_{\beta}\,.$$

Posons :

$$\Sigma^{\alpha} = -\, S^{\alpha}_{\beta\gamma}\, \theta^{\beta} \wedge \theta^{\gamma} \qquad (S^{\alpha}_{\beta\gamma} = -\, S^{\alpha}_{\gamma\beta}).$$

On montre que les Σ^{α} et les Ω^{α}_{β} définissent des formes tensorielles respectivement de type vectoriel et de type (1,1). Il en résulte que les $S^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sont les composantes d'un tenseur d'ordre 3, antisymétrique par rapport aux indices inférieurs. Ce tenseur est dit tenseur de torsion de la variété.

De même, si on pose :

$$\Omega^\alpha_\beta = -\frac{1}{2} R^\alpha_{\beta,\lambda\mu}\, \theta^\lambda \wedge \theta^\mu$$

les $R^\alpha_{\beta,\lambda\mu}$ sont les composantes d'un tenseur d'ordre 4 antisymétrique par rapport à λ et μ. C'est le tenseur de courbure de la variété.

28. — Différentielle absolue et dérivée covariante dans une connexion affine.

Considérons un champ de vecteurs contravariants. Ses composantes sont définies dans chaque voisinage U par la matrice à une ligne v^U ; pour $x \in U \cap V$, on a :

$$v^V = A^V_U v^U . \tag{28.1}$$

D'après (28.1) et (26.3), on établit que les quantités :

$$D v^U = d\, v^U + \omega_U v^U$$

définissent une forme différentielle linéaire à valeur vectorielle contravariante qui est dite la différentielle absolue du champ de vecteurs relativement à la connexion.

La matrice $D v^U$ a pour éléments :

$$Dv^\alpha = d\, v^\alpha + \omega^\alpha_\varrho v^\varrho .$$

Si l'on pose :

$$D\, v^\alpha = D_\beta\, v^\alpha\, \theta^\beta ,$$

la dérivée covariante est le tenseur qui a pour composantes :

$$D_\beta v^\alpha = \partial_\beta v^\alpha + \gamma^\alpha_{\varrho\beta} v^\varrho$$

où ∂_β représente une dérivée pfaffienne.

Plus généralement on peut établir pour un champ de tenseurs qu'on peut construire une forme différentielle linéaire à valeur tensorielle, qui est dite la différentielle absolue du tenseur pour la connexion envisagée.

Si, par exemple, nous considérons un champ de tenseurs une fois covariant, une fois contravariant, nous aurons sous forme explicite :

$$D\, t^\alpha_\beta = dt^\alpha_\beta + \omega^\alpha_\varrho\, t^\varrho_\beta - \omega^\varrho_\beta\, t^\alpha_\varrho .$$

La dérivée covariante correspondante est :

$$D_\gamma t^\alpha{}_\beta = \partial_\gamma t^\alpha{}_\beta + \gamma^\alpha_{\varrho\gamma} t^\varrho{}_\beta - \gamma^\varrho_{\beta\gamma} t^\alpha{}_\varrho .$$

Dans ces expressions la forme générale de la différentielle absolue apparait.

29. — Formules en repères de coordonnées locales.

En repères naturels associés aux coordonnées locales $(\theta^U_x = (d\, x^\alpha))$, nous introduirons la notation spéciale :

$$\omega^\alpha_\beta = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\, d\, x^\gamma$$

pour désigner les coefficients de la connexion affine. Dans un changement de repères naturels, ces coefficients se transforment toujours selon la formule

$$\Gamma^{\lambda'}_{\mu'\varrho'} = A^{\lambda'}_\alpha A^\beta_{\mu'} A^\lambda_\varrho \gamma^\alpha_{\beta\gamma} + A^{\lambda'}_\sigma \partial_{\varrho'} A^\sigma_{\mu'} .$$

Mais $A^\alpha_{\beta'}$ et $A^{\beta'}_\alpha$ ont maintenant les valeurs particulières

$$A^\alpha_{\beta'} = \frac{\partial\, x^\alpha}{\partial\, x^{\beta'}} \qquad A^{\beta'}_\alpha = \frac{\partial\, x^{\beta'}}{\partial\, x^\alpha}$$

et $\partial_{\varrho'}$ désigne maintenant la dérivée partielle ordinaire de $A^\sigma_{\mu'}$ par rapport à $x^{\varrho'}$ (donc $\partial_{\varrho'} A^\sigma_{\mu'} = \partial_{\mu'} A^\sigma_{\varrho'}$).

En repères naturels, les composantes du tenseur de torsion et du tenseur de courbure sont données explicitement en fonction des coefficients $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ de la connexion par :

(29.1) $$S^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}) = \Gamma^\alpha_{\underset{\smile}{\beta\gamma}}$$ ($\smile$ symbole d'antisymétrisation)

(29.2) $$R^\alpha_{\beta,\lambda\mu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\lambda} - \partial_\lambda \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\varrho\mu}\Gamma^\varrho_{\beta\lambda} - \Gamma^\alpha_{\varrho\lambda}\Gamma^\varrho_{\beta\mu} .$$

Du tenseur de torsion $\Gamma^\alpha_{\underset{\smile}{\beta\gamma}}$, on déduit par contraction le vecteur de torsion :

(29.3) $$\Gamma_\beta = \Gamma^\alpha_{\underset{\smile}{\beta\alpha}} .$$

Par contraction du tenseur de courbure on peut obtenir deux tenseurs covariants d'ordre 2 essentiellement distincts. L'un de ces tenseurs généralise le tenseur de RICCI de la géométrie riemannienne ; il est défini par :

$$R_{\lambda\mu} = R^{\alpha}_{\lambda,\mu\alpha} = \partial_\sigma \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} - \partial_\mu \Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\varrho\sigma} \Gamma^{\varrho}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\varrho\mu} \Gamma^{\varrho}_{\lambda\sigma} . \tag{29.4}$$

Ce tenseur ne présente en général aucun caractère de symétrie particulier.

Le second tenseur est obtenu en contractant α et β dans la relation (29.2):

$$V_{\lambda\mu} = R^{\alpha}_{\alpha,\lambda\mu} = \partial_\mu \Gamma^{\alpha}_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} . \tag{29.5}$$

Ce tenseur est manifestement nul dans le cas d'une connexion riemannienne. Dans le cas d'une connexion affine quelconque il est le rotationnel d'un champ de vecteurs.

II. — LES ÉQUATIONS DU CHAMP UNIFIÉ.

30. — La variété fondamentale.

L'élément primitif de la théorie d'Einstein-Schrödinger est constitué par une variété espace-temps V_4 douée de la même structure de variété différentiable que la variété qui intervient en relativité générale: la variété V_4 est donc une variété différentiable de classe (C^2, C^4 par morceaux).

Sur cette variété V_4 nous supposons définis deux éléments géométriques:

1) Un champ de tenseurs $g_{\alpha\beta}$ de classe (C^1, C^3 par morceaux). En chaque point x de V_4 nous supposons :

a) que $g = \text{dét}\,(g_{\alpha\beta}) \neq 0$;

b) que la forme quadratique $\Phi(X) = g_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta$ est une forme non dégénérée de type hyperbolique normal.

Le tenseur $g_{\alpha\beta}$ est dit le tenseur fondamental.

2) Une connexion affine arbitraire dont les coefficients $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sont continus et de classe C^2 par morceaux.

Comme $g \neq 0$ la matrice $(g_{\alpha\beta})$ admet une matrice inverse, notée $(g^{\alpha\beta})$, telle que :

$$g_{\alpha\varrho}\, g^{\beta\varrho} = g_{\varrho\alpha}\, g^{\varrho\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha}$$
$$(\delta^{\beta}_{\alpha} = 0 \text{ pour } \alpha \neq \beta\,, = 1 \text{ pour } \beta = \alpha)\,.$$

Les tenseurs $g_{\alpha\beta}$ et $g^{\alpha\beta}$ sont dits des tenseurs associés. On a :

$$\text{dét}\,(g^{\alpha\beta}) = \frac{1}{g} \neq 0\,.$$

Dans la suite nous désignerons par la même lettre d'appui — ici g — deux tenseurs associés l'un covariant, l'autre contravariant et le déterminant des composantes du tenseur covariant.

Nous poserons :

$$g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} + \varphi_{\alpha\beta} ; \qquad g^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} + f^{\alpha\beta}$$

où :

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\underline{\alpha\beta}} , \quad \varphi_{\alpha\beta} = g_{\underset{\smile}{\alpha\beta}} ; \qquad h^{\alpha\beta} = g^{\underline{\alpha\beta}} , \quad f^{\alpha\beta} = g^{\underset{\smile}{\alpha\beta}}$$

sont des tenseurs soit symétriques, soit antisymétriques (_ est le symbole de symétrisation, $\smile$ celui d'antisymétrisation).

D'après l'hypothèse b), on montre que les formes quadratiques $\gamma_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta$ et $h^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta$ sont non dégénérées de type hyperbolique normal. En particulier on a :

$$\gamma = \text{dét}\,(\gamma_{\alpha\beta}) < 0 ,$$

$$\frac{1}{h} = \text{dét}\,(h^{\alpha\beta}) < 0 .$$

Le déterminant de $g^{\alpha\beta}$ peut être exprimé en fonction des déterminants de $h^{\alpha\beta}, f^{\alpha\beta}$ suivant : (Cf. [11], p. 15)

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{h} + \frac{1}{f} + \frac{1}{2h} h_{\mu\varrho} h_{\nu\sigma} f^{\mu\nu} f^{\varrho\sigma} , \tag{30.1}$$

et la dérivée logarithmique de $|g|$ est donnée par la formule :

$$\frac{\partial_\varrho \sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} = \frac{1}{2} \partial_\varrho \operatorname{Log} |g| = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\varrho g_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \partial_\varrho g^{\alpha\beta} .$$

31. — Le principe variationnel.

Les deux éléments géométriques définis sur la variété V_4 (tenseur fondamental et connexion affine) sont astreints aux « équations du champ » que nous allons déduire, par analogie avec la relativité générale, d'un principe variationnel.

Soit C une chaine différentiable de dimension 4 de la variété et varions arbitrairement le tenseur fondamental et la connexion de façon que les variations soient nulles au bord ∂C de la chaine envisagée. Considérons la variation correspondante de l'intégrale à valeur scalaire :

$$I = \int_C g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \sqrt{|g|}\, dx^0 \wedge \ldots \wedge dx^3 ,$$

où $R_{\alpha\beta}$ est le tenseur de RICCI de la connexion affine $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$.

Les équations du champ de la théorie sont celles qui définissent l'extremum de l'intégrale I vis-à-vis de toutes variations du tenseur fondamental et de la connexion astreintes seulement à s'annuler au bord de C.

On évalue la variation de I en distinguant la contribution due à la variation de la connexion et celle due à la variation du tenseur fondamental. On obtient ainsi le système :

$$G^{\alpha\beta}_{\varrho} = D_{\varrho}\, g^{\alpha\beta} - \left(\Gamma^{\sigma}_{\varrho\sigma} - \frac{1}{2}\, \partial_{\varrho} \operatorname{Log} |g|\right) g^{\alpha\beta} + 2 g^{\dot{\alpha}\sigma}\, \Gamma^{\beta}_{\varrho\sigma} + \frac{2}{3}\, \delta^{\beta}_{\varrho}\, g^{\alpha\sigma}\, \Gamma_{\sigma} = 0 , \tag{31.1}$$

$$R_{\alpha\beta} = 0 . \tag{31.2}$$

C'est la première forme des équations du champ.

Pour simplifier la forme des équations (31.1) nous allons substituer à la connexion initiale $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ une nouvelle connexion affine. On démontre qu'étant donnée une connexion affine arbitraire $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, il existe une connexion affine et une seule définissant le même parallélisme et dont le vecteur covariant de torsion est nul. Cette connexion est :

$$L^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \frac{2}{3}\, \delta^{\dot{\alpha}}_{\beta}\, \Gamma_{\gamma} . \tag{31.3}$$

En explicitant $G^{\alpha\beta}_{\varrho}$ à l'aide de la nouvelle connexion L, on trouve que le premier système des équations du champ (31.1) est équivalent au système :

$$\partial_{\varrho}\, g^{\alpha\beta} + L^{\alpha}_{\sigma\varrho}\, g^{\sigma\beta} + L^{\beta}_{\varrho\sigma}\, g^{\alpha\sigma} = 0 , \tag{31.4}$$

$$\partial_{\varrho} \left(\sqrt{-g}\; g^{\underset{\smile}{\varrho\beta}}\right) = 0 . \tag{31.5}$$

Les quatre conditions (31.5) ne sont autres que les conditions $L_{\beta} = 0$ exprimant que la connexion L est astreinte à admettre un vecteur de torsion nul. En effet on déduit de (31.4) :

$$2 \partial_{\varrho}\, g^{\underset{\smile}{\varrho\beta}} + L^{\sigma}_{\varrho\sigma}\, g^{\varrho\beta} - L^{\sigma}_{\sigma\varrho}\, g^{\beta\varrho} = 0 .$$

Or :

$$L^{\sigma}_{\varrho\sigma}\, g^{\varrho\beta} - L^{\sigma}_{\sigma\varrho}\, g^{\beta\varrho} = L_{\varrho}\, g^{\underline{\varrho\beta}} + 2\, L^{\sigma}_{\underline{\sigma\varrho}}\, g^{\underset{\smile}{\varrho\beta}} \qquad \left(L^{\sigma}_{\underline{\sigma\varrho}} = \frac{\partial_{\varrho}\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}\right).$$

On obtient donc :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\, \partial_{\varrho}\left(\sqrt{-g}\; g^{\underset{\smile}{\varrho\beta}}\right) = -\frac{1}{2}\, L_{\varrho}\, g^{\underline{\varrho\beta}} .$$

Or dét $(g^{\underline{\alpha\beta}}) \neq 0$. Aussi, pour que le vecteur de torsion L_{ϱ} soit nul il faut et il suffit que l'on ait (31.5).

Aux formules (31.4) on peut substituer les formules équivalentes :

$$\partial_{\varrho}\, g_{\alpha\beta} - L^{\sigma}_{\alpha\varrho}\, g_{\sigma\beta} - L^{\sigma}_{\varrho\beta}\, g_{\alpha\sigma} = 0 \; . \tag{31.6}$$

Désignons par $W_{\alpha\beta}$ le tenseur de Ricci de la connexion L. On peut évaluer le tenseur $R_{\alpha\beta}$ à partir de $W_{\alpha\beta}$ suivant la relation :

$$R_{\alpha\beta} = W_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}\left(\partial_{\alpha}\, \Gamma_{\beta} - \partial_{\beta}\, \Gamma_{\alpha}\right) . \tag{31.7}$$

Il résulte qu'on peut substituer aux équations (31.2) portant sur la connexion Γ les équations :

$$W_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}\left(\partial_{\alpha}\, \Gamma_{\beta} - \partial_{\beta}\, \Gamma_{\alpha}\right) = 0 \; . \tag{31.8}$$

Nous sommes ainsi conduits à adopter comme nouvelles grandeurs déterminant le champ unitaire, outre le tenseur fondamental $g_{\alpha\beta}$, la connexion affine a priori arbitraire $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ et le vecteur covariant Γ_{α} . Les « équations du champ » sont alors fournies par les équations (31 5), (31.6) et (31.8) :

$$\partial_{\varrho}\, g_{\alpha\beta} - L^{\sigma}_{\alpha\varrho}\, g_{\sigma\beta} - L^{\sigma}_{\varrho\beta}\, g_{\alpha\sigma} = 0 \; , \tag{31.9}$$

$$\partial_{\varrho}\left(\sqrt{-g}\; g^{\underset{\smile}{\varrho\beta}}\right) = 0 \; , \tag{31.10}$$

$$W_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}\left(\partial_{\alpha}\, \Gamma_{\beta} - \partial_{\beta}\, \Gamma_{\alpha}\right) = 0 \; . \tag{31.11}$$

Les grandeurs du champ comprennent 16 $g_{\alpha\beta}$, 64 $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ et 4 Γ_{α} et nous disposons effectivement de 4 équations (31.10), de 64 équations (31.9) et de 16 équations (31.11). Mais ces équations ne sont pas indépendantes ; le procédé variationnel utilisé pour leur formation fournit 4 « identités de conservation » qui assurent comme en relativité générale le jeu des changements de coordonnées admissibles.

Ces identités font intervenir un tenseur M_ϱ^λ formé à partir de $g_{\alpha\beta}$ et du tenseur de RICCI par :

$$2\,L_\varrho^\lambda = R_{\varrho\sigma}\,g^{\lambda\sigma} + R_{\sigma\varrho}\,g^{\sigma\lambda}, \tag{31.12}$$

$$M_\varrho^\lambda = L_\varrho^\lambda - \frac{1}{2}\,\delta_\varrho^\lambda\,L_\tau^\tau\,. \tag{31.13}$$

Elles peuvent s'écrire :

$$\partial_\lambda\,(\sqrt{-g}\,M_\varrho^\lambda) + \frac{1}{2}\,R_{\alpha\beta}\,\partial_\varrho\,(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}) = 0\,, \tag{31.14}$$

généralisant ainsi celles classiques de la relativité générale. On établit que les identités (31.14) sont satisfaites pour tout ensemble $(g_{\alpha\beta}, \Gamma_{\alpha\beta}^\varrho)$ déduit par (31.3) d'une solution $(g_{\alpha\beta}, \Gamma_{\alpha\beta}^\varrho)$ des équations (31.9), (31.10).

On peut donner aux identités de conservation une deuxième forme qui porte sur le tenseur de RICCI $W_{\alpha\beta}$ et qui est tout à fait analogue à (31.14).

32. — Le problème de Cauchy.

Les équations :

$$\partial_\sigma\,g_{\lambda\mu} - L_{\lambda\varrho}^\sigma\,g_{\sigma\mu} - L_{\varrho\mu}^\sigma\,g_{\lambda\sigma} = 0 \tag{32.1}$$

constituent une extension au cas d'un tenseur $g_{\alpha\beta}$ non symétrique et d'une connexion non symmétrique des relations classiques qui déterminent, à partir de la métrique, les coefficients d'une connexion riemannienne.

M. A. TONNELAT a résolu explicitement le système des équations (32.1) où les coefficients de la connexion sont considérés comme les inconnues. Elle a montré que la solution existe et est unique pourvu que:

$$g\left[\left(2 - \frac{g}{\gamma} + \frac{6\,\varphi}{\gamma}\right)^2 - \frac{4\,\varphi}{\gamma}\left(3 - \frac{g}{\gamma} + \frac{\varphi}{\gamma}\right)^2\right] \neq 0\,. \tag{32.2}$$

Pour un tenseur $g_{\alpha\beta}$ satisfaisant aux hypothèses faites au paragraphe 30, le seul cas exceptionnel est donc celui où l'on a simultanément :

$$\varphi = 0 \qquad g = 2\,\gamma\,.$$

Nous écartons ce cas dans la suite, parce qu'il ne se produit pas dans la pratique. On peut alors prendre comme grandeurs qui définissent le champ le tenseur fondamental $g_{\alpha\beta}$ et le vecteur covariant Γ_α, ces grandeurs satisfaisant aux équations :

$$\partial_\varrho (\sqrt{-g}\, g^{\underset{\smile}{\varrho\beta}}) = 0 \ , \tag{32.3}$$

$$W_{\alpha\beta} - \frac{2}{3} (\partial_\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha) = 0 \ , \tag{32.4}$$

où les $L^\alpha_{\beta\gamma}$ sont considérés comme les fonctions des $g_{\alpha\beta}$ et de leurs dérivées premières définies par la solution unique du système (32.1).

L'étude du problème de Cauchy montre que le système des équations (32.3) (32 4) vérifiées par les $g_{\lambda\mu}$ et Γ_α admet en général une solution déterminée localement. Les données de Cauchy sont les valeurs de $g_{\lambda\mu}$, $\partial_\gamma g_{\lambda\mu}$, Γ_α sur une hypersurface S de V_4. La solution existe et elle est unique si l'hypersurface est non caractéristique et si les données de Cauchy sont liées par un ensemble de conditions provenant des équations du champ. Les variétés caractéristiques sont définies comme solutions de l'une ou de l'autre des deux équations suivantes :

$$h^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha f\, \partial_\beta f = 0 \ ,$$

$$(h^{\alpha\beta} - 2 \frac{\gamma}{g}\, \gamma^{\alpha\beta})\, \partial_\alpha f\, \partial_\beta f = 0 \ .$$

Elles apparaissent comme les surfaces d'ondes du champ unifié envisagé. Les rayons associés sont les caractéristiques des équations précédentes, c'est à-dire les géodésiques de longueur nulle des métriques riemanniennes de signature hyperbolique normale :

$$ds^2 = h_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta,$$

$$d\,\overline{s}^2 = \overline{\gamma}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \ ,$$

où $h_{\alpha\beta}$ et $\overline{\gamma}_{\alpha\beta}$ sont respectivement les tenseurs associés de $h^{\alpha\beta}$ et $(h^{\alpha\beta} - 2 \frac{\gamma}{g}\, \gamma^{\alpha\beta})$.

L'interprétation physique des grandeurs géométriques introduites est difficile dans la théorie d'Einstein-Schrödinger. De par le caractère unitaire même de la théorie, les équations rigoureuses régissent ici un hyperchamp non décomposable et ne peuvent être fractionnées en équations de propagation du champ gravitationnel et du champ électromagnétique qu' approximativement, lorsque les conditions physiques sont telles que l'un des champs est prépondérant par rapport à l'autre.

III. — Interprétation possible dés équations fondamentales

33. — Les conditions d'isothermie dans le choix de la métrique.

Le problème de Cauchy conduit à considérer que c'est le tenseur $h_{\alpha\beta}$ ou un tenseur proportionnel qui doit définir la partie gravitionnelle du champ unifié. Posons :

$$a_{\alpha\beta} = \mathfrak{J}\, h_{\alpha\beta}\,,$$

$\mathfrak{J}$ désignant le coefficient invariant de proportionnalité. La valeur de $\mathfrak{J}$ peut s'obtenir par la considération des coordonnées isothermes.

Dans la variété V_4 de la théorie unitaire, la condition d'isothermie prend la forme :

$$g^{\alpha\beta} L^{\varrho}_{\alpha\beta} = 0\,, \tag{33.1}$$

et dans l'espace riemannien de métrique $a_{\alpha\beta}$ elle s'écrit :

$$a^{\alpha\beta} \begin{Bmatrix} \varrho \\ \alpha\ \ \beta \end{Bmatrix} = 0\,. \tag{33.2}$$

Considérons alors le premier groupe d'équations du champ :

$$\partial_\varrho\, g^{\alpha\beta} + L^{\alpha}_{\sigma\varrho}\, g^{\sigma\beta} + L^{\beta}_{\varrho\sigma}\, g^{\alpha\sigma} = 0\,, \tag{33.3}$$

$$\partial_\varrho (\sqrt{-g}\, g^{\underset{\smile}{\varrho\beta}}) = 0\,. \tag{33.4}$$

On déduit par contraction de l'équation (33.3) :

$$g^{\varrho\sigma} L^{\beta}_{\varrho\sigma} = -\,\partial_\varrho\, g^{\varrho\beta} - g^{\sigma\beta} L^{\varrho}_{\sigma\varrho}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{-g}}\, \partial_\varrho (\sqrt{-g}\, g^{\varrho\beta})\,.$$

Tenant compte de (33.4) et de l'identité :

$$a^{\alpha\beta} \begin{Bmatrix} \varrho \\ \alpha\ \ \beta \end{Bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{-a}}\, \partial_\alpha (\sqrt{-a}\, a^{\alpha\beta})\,,$$

on peut donc mettre le premier membre de (33.1) sous la forma :

$$g^{\varrho\sigma} L^{\beta}_{\varrho\sigma} = \mathfrak{J} \left(a^{\varrho\sigma} \begin{Bmatrix} \beta \\ \varrho\ \ \sigma \end{Bmatrix} \right) - \sqrt{\frac{a}{g}}\, a^{\varrho\beta}\, \partial_\varrho \left(\sqrt{\frac{g}{a}}\, \mathfrak{J} \right). \tag{33.5}$$

Il en résulte qu'on a l'énoncé :

En vertu du premier groupe d'équations du champ (33.4), (33.5), *l'invariant* $\mathfrak{I}$ *est entièrement déterminé par les deux conditions suivantes :*

1) *les équations* (33.1) *et* (33.2) *sont équivalentes ;*

2) *si* $f^{\alpha\beta} \to 0$, *le premier membre de* (33.1) *se réduit au premier membre de* (33.2).

La condition 1) donne

$$\mathfrak{I} = \lambda \sqrt{a/g} = \lambda \sqrt{g/h}$$

(λ scalaire constant) et la condition 2) montre que la constante λ est égal à 1. Il vient donc :

$$a_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{g}{h}}\, h_{\alpha\beta}, \tag{33.6}$$

$h_{\alpha\beta}$ désignant le tenseur associé de $h^{\alpha\beta}$ $(= g^{\underline{\alpha\beta}})$ et $h = \text{dét}\,(h_{\alpha\beta})$.

Désormais, la ntation $a_{\alpha\beta}$ désignera toujours, sauf indication contraire (Cf. chapitre V, paragraphe 49), le tenseur au second membre de (33.6). La métrique $a_{\alpha\beta}$ est, comme la métrique $h_{\alpha\beta}$, de type hyperbolique normal. Notons que $a = \text{dét}\,(g_{\underline{\alpha\beta}})$.

Remarque. — Si l'on ne tient pas compte de (33.2) mais seulement de (33.1) on a :

$$g^{\mu\nu} L^{\sigma}_{\mu\nu} = \sqrt{\frac{g}{h}}\, a^{\mu\nu} \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\ \nu \end{Bmatrix} + f^{\sigma\tau} \Gamma_{\tau}.$$

34. — Le tenseur $q^{\alpha\beta}$ et sa signification.

Par analogie avec $a^{\alpha\beta} = \sqrt{h/g}\, h^{\alpha\beta}$, nous introduirons dans la suite le tenseur antisymétrique :

$$q^{\alpha\beta} = \sqrt{h/g}\, f^{\alpha\beta} \qquad (f^{\alpha\beta} = g^{\underset{\smile}{\alpha\beta}}). \tag{34.1}$$

On a :

$$g^2 = ah, \qquad \frac{h}{f} = \frac{a}{q}, \tag{34.2}$$

et, d'après (30.1) :

$$\frac{g}{a} = 1 + \frac{a}{q} + \frac{1}{2}\, a_{\mu\varrho}\, a_{\nu\sigma}\, q^{\mu\nu} q^{\varrho\sigma}. \tag{34.3}$$

Notons que :

$$\sqrt{-g}\, f^{\alpha\beta} = \sqrt{-a}\, q^{\alpha\beta} .$$

Aussi l'équation (33.4) peut s'écrire encore :

$$\nabla_\varrho\, q^{\varrho\beta} = 0 , \tag{34.4}$$

∇_α étant l'opérateur de dérivation covariante dans la métrique $a_{\alpha\beta}$.

Ainsi :

Dans la variété riemannienne munie de la métrique

$$ds^2 = a_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta ,$$

le tenseur $q^{\alpha\beta}$, défini par (34.1), *est l'adjoint d'un tenseur rotationnel.*

Il existe localement un potentiel-vecteur ψ_α tel que :

$$\overset{*}{q}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\, \psi_\beta - \partial_\beta\, \psi_\alpha ,$$

et l'expression explicite de $q^{\alpha\beta}$ en fonction de ψ_λ est donnée par :

$$q^{\alpha\beta} = \frac{1}{2\sqrt{-a}}\, \varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta}\, \overset{*}{q}_{\lambda\mu} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\, \varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta}\, \partial_\lambda\, \psi_\mu . \tag{34.5}$$

35. — Décomposition du tenseur de Ricci. Forme rigoureuse des équations du champ.

Le tenseur de RICCI $W_{\alpha\beta}$ peut être séparé en deux parties : l'une est formée par le tenseur de RICCI $G_{\alpha\beta}$ d'une connexion riemannienne $\left\{ {\varrho \atop \alpha\ \beta} \right\}$ quelconque, l'autre s'exprime simplement en fonction de la différence des coefficients de connexion $L^\varrho_{\alpha\beta} - \left\{ {\varrho \atop \alpha\ \beta} \right\}$. Cette décomposition fait jouer au tenseur symétrique à deux indices qui définit la connexion riemannienne envisagée, le rôle de tenseur gravitationnel. Nous prendrons donc ce tenseur symétrique égal à $a_{\alpha\beta}$ défini par la formule (33.6).

Posons :

$$L^\alpha_{\beta\gamma} = \left\{ {\alpha \atop \beta\ \gamma} \right\} + \theta^\alpha_{\beta\gamma} , \tag{35.1}$$

$$\theta^\alpha_{\beta\gamma} = w^\alpha_{\beta\gamma} + L^\alpha_{\underset{\smile}{\beta\gamma}} \qquad (w^\alpha_{\beta\gamma} = w^\alpha_{\gamma\beta}) . \tag{35.2}$$

En portant (35.1) dans l'expression de $W_{\alpha\beta}$, on trouve :

$$W_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} + \nabla_\varrho \theta^\varrho_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\beta \operatorname{Log} |g| + \theta^\varrho_{\sigma\varrho} \theta^\sigma_{\alpha\beta} - \theta^\varrho_{\sigma\beta} \theta^\sigma_{\alpha\varrho}, \tag{35.3}$$

où ∇_ϱ désigne l'opérateur de dérivation covariante dans la connexion riemannienne. $\left(\text{On a } \theta^\varrho_{\alpha\varrho} = w^\varrho_{\alpha\varrho} = \frac{1}{2} \nabla_\alpha \operatorname{Log} |g|\right)$.

Nous pouvons utiliser (35.2) pour scinder $W_{\alpha\beta}$ en parties symétrique et antisymétrique suivant :

$$W_{\underline{\alpha\beta}} = G_{\alpha\beta} + \nabla_\varrho w^\varrho_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\beta \operatorname{Log} |g| + w^\varrho_{\sigma\varrho} w^\sigma_{\alpha\beta} - (w^\varrho_{\sigma\beta} w^\sigma_{\alpha\varrho} + L^\varrho_{\underset{\smile}{\sigma\beta}} L^\sigma_{\underset{\smile}{\alpha\varrho}}), \tag{35.4}$$

$$W_{\underset{\smile}{\alpha\beta}} = \nabla_\varrho L^\varrho_{\underset{\smile}{\alpha\beta}} + w^\varrho_{\sigma\varrho} L^\sigma_{\underset{\smile}{\alpha\beta}} - (w^\varrho_{\sigma\beta} L^\sigma_{\underset{\smile}{\alpha\varrho}} + w^\sigma_{\alpha\varrho} L^\varrho_{\underset{\smile}{\sigma\beta}}). \tag{35.5}$$

Ces formules permettent d'écrire les équations du champ sous forme rigoureuse.

CHAPITRE IV

EXTENSION DE LA MÉTHODE DES SINGULARITÉS À LA THÉORIE DU CHAMP UNIFIÉ D'EINSTEIN-SCHRÖDINGER.

I. — PRINCIPE DE LA MÉTHODE.

Pour étendre à la théorie du champ unifié d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER la méthode exposée au chapitre I, section I, il faut supposer que dans la présente théorie les sources sont encore représentées par des singularités du champ. Disons tout de suite que cette hypothèse sur les sources ne s'harmonise pas avec l'esprit de la théorie. Celui ci postule en effet la disparition du dualisme champ-particule. L'hypothèse précédente doit être acceptée seulement comme provisoire, en attendant que soit trouvée une solution partout régulière des équations du champ.

36. — **Les termes linéaires dans la connexion affine.**

Une étude rigoureuse des équations

$$W_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}(\partial_\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha) = 0$$

est difficile. L'expression explicite de la connexion affine en fonction du tenseur fondamental est très compliquée ; pratiquement elle ne se prête qu'aux calculs approchés.

Prenons $q^{\alpha\beta}$ pour infiniment petit principal et négligeons les termes du troisième ordre en $q^{\alpha\beta}$; nous noterons les termes négligés par $0(\varepsilon^3)$. Il vient alors, en se reportant à la solution de la connexion L en fonction de $h^{\alpha\beta}$, $f^{\alpha\beta}$ [42] et en tenant compte compte des équations définissant $a_{\alpha\beta}$, $q^{\alpha\beta}$: (15)

$$L^{\varrho}_{\alpha\beta} = \left\{ {\varrho \atop \alpha\ \beta} \right\} + w^{\varrho}_{\alpha\beta} + L^{\varrho}_{\underset{\smile}{\alpha\beta}},$$

(15) Ces calculs seront exposés avec plus de détails au chapitre V, paragraphe 51.

$$w^{\varrho}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\left(\delta^{\varrho}_{\alpha} \nabla_{\beta} \operatorname{Log}|g| + \delta^{\varrho}_{\beta} \nabla_{\alpha} \operatorname{Log}|g| - a_{\alpha\beta}\, a^{\varrho\sigma} \nabla_{\sigma} \operatorname{Log}|g|\right) + \tag{36.1}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(q^{\sigma}{}_{\underline{\alpha}} \nabla_{\sigma} q_{\underline{\beta}}{}^{\varrho} + q^{\sigma}{}_{\underline{\beta}} \nabla_{\sigma} q_{\underline{\alpha}}{}^{\varrho}\right) - \frac{1}{2} q^{\sigma\varrho}\left(\nabla_{\beta} q_{\underline{\sigma}\underline{\alpha}} + \nabla_{\alpha} q_{\underline{\sigma}\underline{\beta}}\right) + 0(\varepsilon^3),$$

$$\underset{\vee}{L}{}^{\varrho}_{\alpha\beta} = a^{\varrho\sigma}\left(\nabla_{\sigma} q_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} - \frac{1}{2} q_{\underline{\alpha}\underline{\beta}\underline{\sigma}}\right) + 0(\varepsilon^3), \tag{36.2}$$

où nous avons posé :

$$q_{\underline{\alpha}\underline{\beta}\underline{\gamma}} = \partial_{\alpha} q_{\underline{\beta}\underline{\gamma}} + \partial_{\beta} q_{\underline{\gamma}\underline{\alpha}} + \partial_{\gamma} q_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}, \tag{36.3}$$

$$q_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = a_{\alpha\gamma}\, a_{\beta\varrho}\, q^{\lambda\varrho}, \quad q^{\alpha}{}_{\underline{\beta}} = a_{\beta\lambda}\, q^{\alpha\lambda} = -\, q_{\underline{\beta}}{}^{\alpha}. \tag{36.4}$$

(Les indices des tenseurs élevés ou abaissés par le tenseur $a_{\alpha\beta}$ sont soulignés pour éviter les confusions avec les tenseurs associés).

La première ligne au deuxième membre de (36.1) représente la différence entre les symboles de Christoffel formés avec $h_{\alpha\beta}$ et $a_{\alpha\beta}$.

Les expressions approchées (36.1) et (36.2) nous renseignent complètement sur les termes linéaires dans la connexion affine. $\underset{\vee}{L}{}^{\varrho}_{\alpha\beta}$ étant d'ordre ε et $w^{\varrho}_{\alpha\beta}$ d'ordre ε^2, on voit en particulier qu'il y a des termes linéaires dans $\underset{\vee}{L}{}^{\varrho}_{\alpha\beta}$ mais que $w^{\varrho}_{\alpha\beta}$ n'en contient pas.

Si l'on fait les développements usuels dans le cas quasi statique (Cf. paragraphe 41) on tire de (36.2) :

$$\underset{4\vee}{L}{}^{0}_{j0} = \underset{1}{\partial_0}\, \underset{3}{q_{\underline{j}\underline{0}}} - \underset{2}{q_{\underline{j}\underline{m}}} \underset{2}{\begin{Bmatrix} m \\ 0\ 0 \end{Bmatrix}}.$$

Cette valeur est différente de celles données par L. Infeld $(\underset{4\vee}{L}{}^{0}_{j0} = \underset{1}{\partial_0}\, \underset{3}{\varphi_{j0}})$ et par J. Callaway $(\underset{4\vee}{L}{}^{0}_{j0} = 0)$.

37. — Etude de l'intégrale μ_α

Pour simplifier l'exposé, nous supposons que les singularités du champ sont ponctuelles. Il est clair que la méthode se généralise au cas où les domaines singuliers ont des dimensions finies, non négligeables devant leurs distances mutuelles. Elle peut aussi être étendue au cas d'une varieté V_n à n dimensions.

La variété espace-temps V_4 est supposée rapportée à un système de coordonnées dans lequel x^0 joue le rôle de variable temporelle ($g_{00} > 0$) et les x^i celui de variables spatiales ($g^{00} > 0$). Soit W_3 une section déterminée $x^0 = \text{const.}$ de V_4. Nous supposons défini sur W_3 un champ de tenseurs contravariants d'ordre 2, g^{*ij} tel que :

$$(37.1) \qquad g^{*ij} = g^{ij} .$$

On peut vérifier immédiatement que le tenseur associé de g^{*ij} a pour composantes :

$$(37.2) \qquad g^*_{ij} = g_{ij} - \frac{g_{i0}\, g_{0j}}{g_{00}} .$$

Car :

$$g^{*ik}\, g^*_{ih} = g^{ik}\, g_{ih} - \frac{g_{0h}}{g_{00}}\, g_{i0}\, g^{ik} = g^{\lambda k}\, g_{\lambda h} - g^{0k}\, g_{0h} - \frac{g_{0h}}{g_{00}}\, (g_{\lambda 0}\, g^{\lambda k} - g_{00}\, g^{0k})$$

et

$$g^{*kj}\, g^*_{hj} = g^{kj}\, g_{hj} - \frac{g_{h0}}{g_{00}}\, g_{0j}\, g^{kj} = g^{k\lambda}\, g_{h\lambda} - g^{k0}\, g_{h0} - \frac{g_{h0}}{g_{00}}\, (g_{0\lambda}\, g^{k\lambda} - g_{00}\, g^{k0})$$

soit, compte tenu de $g_{\lambda\alpha}\, g^{\lambda\beta} = \delta^\beta_\alpha$, $g_{\alpha\lambda}\, g^{\beta\lambda} = \delta^\beta_\alpha$:

$$g^{*ik}\, g^*_{ih} = g^{*ki}\, g^*_{hi} = \delta^k_h .$$

Le changement de coordonnées locales :

$$(37.3) \qquad x^i = f^i\,(x^{j'}) \qquad x^0 = x^{0'}$$

conserve W_3.

Considérons le tenseur M^λ_ϱ défini par (31.12), (31.13). Dans le changement de coordonnées (37.3), les quantités $M^i_{(\varrho)}$ où l'indice ϱ est fixé se transforment selon la loi tensorielle :

$$M^i_{(\varrho)} = A^i_{\lambda'}\, M^{\lambda'}_{(\varrho)} = A^i_{j'}\, M^{j'}_{(\varrho)} ,$$

qui est la loi de transformation d'un vecteur de W_3. A ce vecteur on peut attacher la forme différentielle extérieure d'ordre 2 :

$$(37.4) \qquad \Omega_{(\varrho)} = \frac{1}{2\,!}\, \eta^*_{ijk}\, M^k_{(\varrho)}\, d\,x^i \wedge d\,x^j ,$$

où η^*_{ijk} désigne le tenseur complètement antisymétrique attaché à la forme élément de volume de W_3.

Considérons des champs d'intégration à trois dimensions C^3 de la variété W_3. Soient ∂C^3 leurs frontières. Posons :

(37.5)
$$\mu_{(\varrho)} = \int_{\partial C^3} \Omega_{(\varrho)}$$

Si la forme $\Omega_{(\varrho)}$ est régulière dans C^3, il est évident d'après le théorème de STOKES que :

(37.6)
$$d\,\Omega_{(\varrho)} = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale (37.5) soit nulle.

Prenons au contraire un champ d'intégration contenant dans son intérieur une singularité et une seule, la k-ème par exemple. Désignons le champ d'intégration par $\overset{k}{C}{}^3$, sa frontière par $\partial\, \overset{k}{C}{}^3$ et l'intégrale correspondante par :

(37.7)
$$\overset{k}{\mu}_{(\varrho)} = \int_{\partial \overset{k}{C}{}^3} \Omega_{(\varrho)}\,.$$

L'application du théorème de STOKES au domaine compris entre deux frontières $\partial\, \overset{k}{C}{}'^3$ et $\partial\, \overset{k}{C}{}''^3$ dont l'une est intérieure à l'autre (domaine dans lequel la forme est régulière), montre alors que (37.6) est la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale $\overset{k}{\mu}_{(\varrho)}$ ait une valeur indépendante du choix de $\overset{k}{C}{}^3$.

38. — Propriétés fondamentales de l'intégrale $\overset{k}{\mu}_\alpha$.

Faisons maintenant les deux hypothèses suivantes :

a) les champs symétriques $a_{\alpha\beta}$ et antisymétriques $q^{\alpha\beta}$ admettent des développements limités en fonction d'un paramètre λ ($\lambda = 1/c$) :

$$a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{p=1}^{q} \lambda^p \underset{p}{a}_{\alpha\beta} + 0\,(\lambda^{q+1})\,,$$

$$q^{\alpha\beta} = \sum_{p=1}^{q} \lambda^p \underset{p}{q}{}^{\alpha\beta} + 0\,(\lambda^{q+1})\,;$$

(En fait dans les développements que nous utiliserons, tous les coefficients de λ^p ne sont pas différents de 0; voir plus loin paragraphe 41).

b) la dérivée ∂_0 est telle qu'on puisse poser :

$$\partial_0 = \lambda \underset{1}{\partial_0},$$

où $\underset{1}{\partial_0}$ est du même ordre de grandeur que les ∂_i.

En substituant à $a_{\alpha\beta}$ et $q^{\alpha\beta}$ leurs développements limités, on obtient :

$$R_{\alpha\beta} = \sum_{p=1}^{q} \lambda^p \underset{p}{R_{\alpha\beta}} + 0\,(\lambda^{q+1}),$$

$$\overset{k}{\mu}_{(\varrho)} = \sum_{p=1}^{q} \lambda^p \underset{p}{\overset{k}{\mu}_{(\varrho)}} + 0\,(\lambda^{q+1}),$$

$$d\,\Omega_{(\varrho)} = \sum_{p=1}^{q} \lambda^p \,(d\,\Omega_{(\varrho)})_p + 0\,(\lambda^{q+1}).$$

Nous nous proposons d'établir le théorème suivant :

THÉORÈME 2.

1° *Pour que la condition* $d\,\Omega_{(\varrho)} = 0$ *d'ordre* m *soit vérifiée, il suffit que les équations du champ* $R_{\alpha\beta} = 0$ *soient satisfaites jusqu'à l'ordre* $(m - 1)$ *inclus ;*

2°) *La valeur de* $\underset{m}{\overset{k}{\mu}_{(\varrho)}}$ *ne dépend effectivement que des* $\underset{p}{a_{\alpha\beta}}$ *et* $\underset{p}{q^{\alpha\beta}}$ *pour* $p \leq m - 1$. *Elle est indépendante de* $\underset{m}{a_{\alpha\beta}}$ *et* $\underset{m}{q^{\alpha\beta}}$.

1°/ Evaluons la différentielle extérieure de la forme $\Omega_{(\varrho)}$. D'après (37.4) on a :

$$d\,\Omega_{(\varrho)} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\,\partial_l\,(\sqrt{|g^*|}\,M^l_{(\varrho)})\,d\,x^i \wedge d\,x^j \wedge d\,x^k \qquad (g^* = \text{dét}\,(g^*_{ij}))$$

soit

$$d\,\Omega_{(\varrho)} = \partial_k\,(\sqrt{|g^*|}\,M^k_{(\varrho)})\,d\,x^1 \wedge d\,x^2 \wedge d\,x^3.$$

La condition $d\,\Omega_{(\varrho)} = 0$ se traduit par :

$$\partial_k(\sqrt{|g^*|}\,M^k_{(\varrho)}) = 0, \tag{38.1}$$

et l'on a :

$$(d\,\Omega_{(\varrho)})_m = (\partial_k\,(\sqrt{|g^*|}\,M^k_{(\varrho)}))_m.$$

On peut écrire les identités de conservation sous la forme suivante :

$$\partial_k\,(\sqrt{|g|}\,M^k_\varrho) + \partial_0\,(\sqrt{|g|}\,M^0_\varrho) + \frac{1}{2}\,R_{\alpha\beta}\,\partial_\varrho\,(\sqrt{|g|}\,g^{\alpha\beta}) = 0. \tag{38.2}$$

Multiplions les deux membres de (38.2) par $\sqrt{g^*/g}$ puis transformons de manière à faire apparaître la quantité au premier membre de (38.1). Les identités (38.2) peuvent alors s'écrire :

$$\partial_k (\sqrt{|g^*|}\, M^k_{(\varrho)}) = - [\partial_0 (\sqrt{|g|}\, M^0_{(\varrho)}) + M^k_{(\varrho)}\, \partial_k \sqrt{\frac{g}{g^*}} + \\ + \frac{1}{2} R_{\alpha\beta}\, \partial_\varrho (\sqrt{|g|}\, g^{\alpha\beta})] \sqrt{\frac{g^*}{g}} . \tag{38.3}$$

On voit que la condition (38.1) ne peut pas être satisfaite identiquement.

Désignons par A_ϱ le deuxième membre de (38.3). Il est commode de l'écrire sous la forme :

$$A_\varrho = - [\partial_0 (M^0_\varrho (1 + 0(\lambda)) + \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{2} R_{\alpha\beta}\, 0_\varrho(\lambda) + M_\varrho^k\, 0_k(\lambda)] (1 + 0(\lambda)) ,$$

c'est-à dire, en mettant à part le terme $-\partial_0 M^0_\varrho$ qui ne contient pas $0(\lambda)$ en facteur :

$$A_\varrho = - \partial_0 M^0_\varrho + 0(\lambda) [\partial_0 M^0_\varrho + \sum_{\alpha,\beta} R_{\alpha\beta} + \sum_\alpha M^\alpha_\varrho] .$$

D'après l'expression de A_ϱ, et en tenant compte de l'hypothèse b) d'une part, de la définition de M^λ_ϱ d'autre part, on voit que $(A_\varrho)_m$ ne fait intervenir que $\underset{p}{R_{\alpha\beta}}\ (p \leq m-1)$. On en déduit que les équations

$$\underset{p}{R_{\alpha\beta}} = 0 \qquad (p \leq m-1)$$

entraînent $(A_\varrho)_m = 0$. On a donc aussi :

$$[\partial_k (\sqrt{|g^*|}\, M^k_{(\varrho)})]_m = 0 .$$

2°/ Nous devons étudier les termes de $M^i_{(\varrho)}$ linéaires par rapport aux champs. Plus exactement nous aurons à considérer ceux qui ne comportent aucune dérivation par rapport à la variable x^0. Nous les appellerons termes linéaires d'indice zéro.

On peut écrive :

$$M^\lambda_\varrho = (R_{\underline{\varrho\sigma}}\, h^{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} \delta^\lambda_\varrho\, R_{\underline{\alpha\beta}}\, h^{\alpha\beta}) + (R_{\underset{\smile}{\varrho\sigma}}\, f^{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} \delta^\lambda_\varrho\, R_{\underset{\smile}{\alpha\beta}}\, f^{\alpha\beta})$$

$$= h^{\lambda\sigma} (R_{\underline{\varrho\sigma}} - \frac{1}{2} a_{\varrho\sigma}\, R_{\underline{\alpha\beta}}\, a^{\alpha\beta}) + (R_{\underset{\smile}{\varrho\sigma}}\, f^{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} \delta^\lambda_\varrho\, R_{\underset{\smile}{\alpha\beta}}\, f^{\alpha\beta}) ,$$

ce qui montre que les termes linéaires de M_ϱ^λ proviennent de

$$\delta^{\lambda\sigma}\left(\underline{R_{\varrho\sigma}} - \frac{1}{2}\,\delta_{\varrho\sigma}\,\underline{R_{\alpha\beta}}\,\delta^{\alpha\beta}\right). \tag{38.4}$$

Nous poserons

$$\underline{R^*_{\alpha\beta}} = \underline{R_{\alpha\beta}} - \frac{1}{2}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta^{\lambda\mu}\,R_{\lambda\mu}\,,$$

$$\underline{R_{\alpha\beta}} = G_{\alpha\beta} + Z_{\alpha\beta}\,.$$

D'après (38.4) les termes linéaires de $M^i_{(\varrho)}$ sont contenus dans la quantité $-\underline{R^*_{\varrho i}}$ qui est égal à

$$-\underline{R^*_{\varrho i}} = -\,G^*_{\varrho i} - Z^*_{\varrho i}\,,$$

$G^*_{\alpha\beta}$ et $Z^*_{\alpha\beta}$ ayant la même signification que la notation $\underline{R^*_{\alpha\beta}}$.

En considérant l'expression de $Z_{\alpha\beta}$:

$$Z_{\alpha\beta} = \nabla_\varrho\, w^\varrho_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,\nabla_\alpha \nabla_\beta \operatorname{Log}|g| + w^\varrho_{\sigma\varrho}\, w^\sigma_{\alpha\beta} - (w^\varrho_{\sigma\beta}\, w^\varrho_{\alpha\varrho} + \check{L}^\varrho_{\sigma\beta}\, \check{L}^\sigma_{\alpha\sigma})$$

et les expressions de la connexion affine (36.1) (36.2), on constate que $Z_{\alpha\beta}$ (donc $Z^*_{\alpha i}$) ne contient pas de termes linéaires par rapport aux champs.

D'autre part, les termes linéaires d'indice zéro de $G^*_{\alpha i}$, qui sont les mêmes que ceux de $S_{\alpha i}$, ont été étudiés au chapitre II (paragraphe 13), où il a été montré que leur contribution dans l'intégrale est nulle.

Comme $\underset{m}{a_{\alpha\beta}}$ et $\underset{m}{q^{\alpha\beta}}$ ne peuvent intervenir dans l'intégrale $\overset{k}{\underset{m}{\mu_\varrho}}$ que par l'intermédiaire des termes linéaires d'indice zéro de $M^i_{(\varrho)}$, la 2ème partie du théorème est établie.

Ce théorème a une conséquence immédiate: on peut étendre la définition de $\overset{k}{\underset{m}{\mu_\varrho}}$ à la valeur $m = q + 1$, où q est l'ordre des développements limités des champs $a_{\alpha\beta}\,, q^{\alpha\beta}$.

Dans la suite, lorsque nous calculons $\overset{k}{\underset{m}{\mu_\varrho}}$, les équations $\underset{p}{R_{\alpha\beta}} = 0$ $(p \leq m - 1)$ sont supposées satisfaites. L'expression de $\overset{k}{\underset{m}{\mu_\varrho}}$ se réduit alors à:

$$\overset{k}{\underset{m}{\mu_\varrho}} = \int_{\partial\Delta} -\,\underset{m}{R^*_{\varrho i}}\, n^i\, d\,\Sigma \tag{38.5}$$

$\partial\,\Delta$ désigne l'image de $\partial\,\overset{k}{C}{}^3$ dans l'espace euclidien de représentation $\mathcal{E}_3$, et $d\,\Sigma$ est l'élément d'aire de $\partial\,\Delta$.

La formule (38.5) devient en vertu du théorème précédent:

$$\overset{k}{\underset{m}{\mu_\varrho}} = \int_{\partial\Delta} - \underset{m}{\Lambda_{\varrho i}}\, n^i\, d\,\Sigma + \int_{\partial\Delta} - \underset{m}{Z^*_{\varrho i}}\, n^i\, d\,\Sigma\,. \tag{38.6}$$

L'intégrale

$$\overset{k}{\underset{m}{\sigma_\varrho}} = \int_{\partial\Delta} \underset{m}{\Lambda_{\varrho i}}\, n^i\, d\,\Sigma$$

a été définie au chapitre II. Mais il faut remarquer que la valeur de l'intégrale $\overset{k}{\underset{m}{\sigma_\varrho}}$ en théorie unitaire est différente de sa valeur en relativité générale (sauf en première approximation) car la solution des équations du champ n'est pas la même dans les deux théories.

39. — Définition des équations de mouvement.

Du théorème précédent, on déduit par un raisonnement identique à celui qui a été fait au chapitre I, paragraphe 14 que les $4N$ conditions suivantes:

$$\overset{k}{\mu_\varrho} = \sum_{m=1}^{q+1} \lambda^m \overset{k}{\underset{m}{\mu_\varrho}} + 0\,(\lambda^{q+2}) = 0\,, \qquad (k = 1\,, 2\,, \ldots\,, N) \tag{39.1}$$

nécessairement satisfaites pour tout système $(a_{\alpha\beta}\,, q^{\alpha\beta})$ solution des équations du champ $R_{\alpha\beta} = 0$, permettent de déterminer les trajectoires d'univers du système de N particules.

Nous poserons comme définition des équations de mouvement en théorie unitaire:

$$\overset{k}{\mu_i} = 0\,. \tag{39.2}$$

40. — Rôle joué par la partie antisymétrique du tenseur de Ricci dans le problème du mouvement.

Si nous considérons plus attentivement l'expression de $\overset{k}{\mu_\varrho}$ nous constatons que le champ antisymétrique $q^{\alpha\beta}$ intervient par l'intermédiaire de $Z_{\alpha\beta}$, mais que la partie antisymétrique $\underset{\smile}{R_{\alpha\beta}}$ du tenseur de Ricci n'intervient pas directement. Il en résulte que le résultat ne serait pas changé si nous avions utilisé un tenseur autre que M_ϱ^{λ}. En particulier nous pourrions introduire

$$R_{\underline{\alpha\beta}} - \frac{1}{2}\, a_{\alpha\beta}\, a^{\lambda\mu}\, R_{\underline{\lambda\mu}}\,,$$

c'est-à-dire le tenseur d'EINSTEIN.

On peut se demander si l'on peut mettre en évidence une contribution de $R_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}$, en considérant séparément cette partie antisymétrique et les équations

$$R_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} = W_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} - \frac{2}{3}\,(\partial_\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha) = 0\,, \tag{40.1}$$

qu'elle vérifie. Nous allons montrer qu'il n'en est rien.

Introduisons les formes différentielles quadratiques extérieures locales :

$$R = \frac{1}{2}\, R_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}\, d\,x^\alpha \wedge d\,x^\beta\,,$$

$$W = \frac{1}{2}\, W_{\underset{\vee}{\alpha\beta}}\, d\,x^\alpha \wedge d\,x^\beta\,,$$

$$\Gamma = \frac{1}{2}\,(\partial_\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha)\, d\,x^\alpha \wedge d\,x^\beta = d\,(\Gamma_\alpha\, d\,x^\alpha)\,.$$

Considérons maintenant des champs d'intégration quelconques à trois dimensions de la variété V_4. Soient ∂C^3 leurs frontières. Etudions l'intégrale:

$$\varrho = \int_{\partial C^3} R\,. \tag{40.2}$$

D'après la relation entre les tenseur de Ricci $R_{\alpha\beta}$ et $W_{\alpha\beta}$, on a:

$$\varrho = \int_{\partial C^3} W - \frac{2}{3}\int_{\partial C^3} \Gamma = \int_{\partial C^3} W\,,$$

l'intégrale portant sur la forme Γ est nulle parce que Γ est la différentielle extérieure d'une autre forme et que ∂C^3 est un champ d'intégration à bord nul.

La différentielle extérieure de la forme W s'écrit:

$$\begin{aligned} d\,W &= \frac{1}{2}\,\partial_\gamma\,(W_{\underset{\vee}{\alpha\beta}})\, d\,x^\gamma \wedge d\,x^\alpha \wedge d\,x^\beta \\ &= \frac{1}{6}\,(\partial_\gamma\, W_{\underset{\vee}{\alpha\beta}} + \partial_\alpha\, W_{\underset{\vee}{\beta\gamma}} + \partial_\beta\, W_{\underset{\vee}{\gamma\alpha}})\, d\,x^\alpha \wedge d\,x^\beta \wedge d\,x^\gamma\,, \end{aligned}$$

et la condition $d\,R = d\,W = 0$ se traduit par :

$$\partial_\alpha W_{\underset{\smile}{\beta\gamma}} + \partial_\beta W_{\underset{\smile}{\gamma\alpha}} + \partial_\gamma W_{\underset{\smile}{\alpha\beta}} = 0 . \tag{40.3}$$

Supposons cette condition satisfaite. Alors, si C^3 ne contient pas de singularité l'intégrale (40.2) est nulle ; si C^3 contient une singularité déterminée cette intégrale, qui est indépendante de ∂C^3, ne peut dépendre que des coordonnées de la singularité. Cependant il n'existe pas de théorème analogue au théorème 1 (chapitre II, paragraphe 13) ou 2 (paragraphe 39) qui s'applique à cette intégrale.

Tout d'abord, on voit que la condition (40.3) pour être satisfaite à l'ordre m, exige que les équations du champ (40.1) soient satisfaites également à l'ordre m.

Ensuite, si l'on calcule les termes linéaires de $W_{\underset{\smile}{\alpha\beta}}$, on trove d'après les formules (36.1) (36.2) l'expression suivante

$$\frac{1}{2}\,\delta^{\varrho\sigma}\,\partial_{\varrho\sigma}\,q_{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}} + \frac{1}{2}\,\delta^{\varrho\sigma}\,(\partial_{\varrho\beta}\,q_{\underline{\alpha}\,\underline{\sigma}} - \partial_{\varrho\alpha}\,q_{\underline{\beta}\,\underline{\sigma}})$$

Le deuxième terme qui a la forme d'un rotationnel ne contribue pas à l'intégrale. Mais il n'y a acune raison pour que le premier terme donne une contribution nulle.

Nous obtenons donc le résultat suivant :

1°) *Pour que la condition $d\,W = 0$ d'ordre m soit vérifiée, il ne suffit pas que les équations $\underset{p}{R}_{\underset{\smile}{\alpha\beta}} = 0$ $(p \leq m - 1)$ soient vérifiées, il faut encore qu' elles soient vérifiées pour $p = m$.*

2°) *La valeur de $\underset{m}{\varrho}$ dépend effectivement de $\underset{p}{q}^{\alpha\beta}$ $(p \leq m\ 1)$ et aussi de $\underset{m}{q}^{\alpha\beta}$.*

Remarque. Si l'intégrale ϱ possède les propriétés des intégrales σ_α et μ_α, on peut obtenir, à partir de l'équation (40.1), 4 relations pour chaque singularité de la façon suivante :

Donnons à l'indice α une valeur quelconque mais fixée, et soit $W_3^{(\alpha)}$ une section déterminée $x^\alpha =$ const. de V_4 (α fixé). Désignons par A, B, C des indices qui peuvent prendre les 3 valeurs de la suite $(0, 1, 2, 3)$ distinctes de α.

Considérons un 3-champ $\overset{k}{C}{}^3_{(\alpha)}$ de la variété $W_3^{(\alpha)}$, contenant seulement la k-ème singularité. L'intégrale (40.2) prise sur la frontière de ce 3-champ a pour valeur :

$$\overset{k}{\varrho}_\alpha = \int_{\partial \overset{k}{C}{}^3_{(\alpha)}} \frac{1}{2}\, W_{\underset{\smile}{AB}}\, d\,x^A \wedge d\,x^B .$$

On peut interpréter cette intégrale en disant qu'elle représente la flux du vecteur adjoint de $W_{\underset{\smile}{AB}}$ à travers l'hypersurface frontière $\partial \overset{k}{C}{}^3_{(\alpha)}$:

$$\overset{k}{\varrho}_\alpha = \int_{\partial \overset{k}{C}{}^3_{(\alpha)}} B^A \nu_A \, d\, S \,,$$

$$B^C = \frac{1}{2} \eta^{*ABC} \, W_{\underset{\smile}{AB}} \,.$$

Les équations du champ (40.1) entraînent les relations :

$$\overset{k}{\varrho}_\alpha = 0 \,. \tag{40.4}$$

Elles expriment que le flux du vecteur (B^A) est nul pour toute solution de (40.1). Mais ici, les relations (40.4) ne sont que de simples conséquences de (40.1) ; elles n'imposent aucune condition supplémentaire aux champs solution de (40.1), par conséquent elles ne peuvent pas contribuer aux équations de mouvement.

II. — Première approximation des équations du champ et équations de mouvement.

41. — Les équations du champ.

Sur les développements limités du tenseur métrique $a_{\alpha\beta}$ et sur le comportement à l'infini de ce tenseur, nous faisons les mêmes hypothèses qu'en relativité générale. Nous admettons qu'il existe un système de coordonnées isothermes (33.1) dans lequel on a :

$$a_{00} = 1 + \frac{1}{c^2} \underset{2}{a}_{00} + \ldots + \frac{1}{c^{2p}} \underset{2p}{a}_{00} + 0\,(1/c^{2p+2}) \,,$$

$$a_{0i} = \frac{1}{c^3} \underset{3}{a}_{0i} + \ldots + \frac{1}{c^{2p+1}} \underset{2p+1}{a}_{0i} + 0\,(1/c^{2p+3}) \,,$$

$$a_{ij} = -\,\delta^i_j + \frac{1}{c^2} \underset{2}{a}_{ij} + \ldots + \frac{1}{c^{2p}} \underset{2p}{a}_{ij} + 0\,(1/c^{2p+2}),$$

avec la condition :

$$a_{\underset{2}{ij}} = \delta^i_j \, a_{\underset{2}{00}} \,. \tag{41.2}$$

Par analogie avec (41.1), nous faisons les développement suivants de $q^{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} q^{ij} &= \frac{1}{c^2} \underset{2}{q^{ij}} + \dots + \frac{1}{c^{2p}} \underset{2p}{q^{ij}} + 0\,(1/c^{2p+2}), \\ q^{j0} &= \frac{1}{c^3} \underset{3}{q^{j0}} + \dots + \frac{1}{c^{2p+1}} \underset{2p+1}{q^{j0}} + 0\,(1/c^{2p+3}) \,. \end{aligned} \tag{41.3}$$

Notons que ce développement n'est pas obligatoire. Nous en discuterons les différentes modalités au paragraphe 46.

Nous supposons également que les particules se meuvent lentement par rapport à la lumière, de sorte que l'on a $\partial_0 = \frac{1}{c} \underset{1}{\partial_0}$, où $\underset{1}{\partial_0}$ est du même ordre de grandeur que ∂_i $\left(\underset{1}{\partial_0} = \frac{\partial}{\partial t}\right)$.

Nous allons calculer en coordonnées isothermes une solution approchée des équations du champ :

$$\partial_\varrho (\sqrt{-g}\, g^{\underset{\smile}{\varrho\beta}}) = 0 \,, \tag{41.4}$$

$$W_{\underline{\alpha\beta}} = 0 \,, \tag{41.5}$$

$$W_{\underset{\smile}{\alpha\beta}} - \frac{2}{3} (\partial_\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha) = 0 \,. \tag{41.6}$$

Nous avons déjà vu que la solution de (41.4) est donnée par :

$$q^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta} \partial_\lambda \psi_\mu \,. \tag{41.7}$$

Aussi nous pouvons prendre pour inconnues le tenseur $a_{\alpha\beta}$ et le potentiel ψ_λ, ces grandeurs étant astreintes à vérifier les équations (41.5) (41.6).

Désormais, nous nous occuperons donc uniquement du système (41.5) (41.6), dans lequel ψ_α figure par l'intermédiaire de $q^{\alpha\beta}$ selon la formule (41.7). Pour pouvoir utiliser des résultats du chapitre II, substituons à (41.5) les équations tensorielles suivantes qui leur sont équivalentes :

$$W_{\underline{\alpha\beta}} - \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} W_{\underline{\lambda\varrho}} a^{\lambda\varrho} = 0 \,; \tag{41.8}$$

D'autre part, comme il ne s'agit ici que de problèmes locaux, nous pouvons remplacer (41.6) par le système:

$$(41.9) \qquad \partial_{[\alpha}\, W_{\underset{\smile}{\beta\gamma}]} \equiv \partial_\alpha\, W_{\underset{\smile}{\beta\gamma}} + \partial_\beta\, W_{\underset{\smile}{\gamma\alpha}} + \partial_\gamma\, W_{\underset{\smile}{\alpha\beta}} = 0\,.$$

En portant dans (41.8) (41,9) les développements limités (41.1) (41.3), nous obtenons à chaque étape d'approximation des équations approchées, qui sont des équations de POISSON : au premier membre figure le laplacien ordinaire de l'une des fonctions $\underset{l}{n}_{\alpha\beta}\left(= \underset{l}{a}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta^{\lambda\varrho}\,\underset{l}{a}_{\lambda\varrho}\right)$ ou $\underset{l}{q}_{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}\,\underline{\gamma}}$; au second membre, des quantités que l'on peut regarder comme connues en vertu des approximations antérieures. En particulier, ces équations se réduisent à des équations de LAPLACE en première approximation.

42. — Expression approchée du tenseur de Ricci $W_{\alpha\beta}$.

Pour former les équations approchées (41.8) (41.9), il faut connaître l'expression explicite du tenseur de RICCI en fonction de $a_{\alpha\beta}$ et $q^{\alpha\beta}$, au moins aux premières approximations qui nous intéressent.

1) De (35.4) et des valeurs (36.1) (36.2) de la connexion, on déduit:

$$(42.1) \qquad Z_{\alpha\beta} = \nabla_\varrho\, w^\varrho_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,\nabla_\alpha \nabla_\beta \operatorname{Log}|g| - L^\varrho_{\underset{\smile}{\sigma\beta}}\, L^\sigma_{\underset{\smile}{\alpha\varrho}} + 0\,(1/c^8) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\nabla^\varrho\,[q^\sigma{}_{\underline{\alpha}}\,\nabla_\sigma\, q_{\underline{\beta}\,\underline{\varrho}} + q^\sigma{}_{\underline{\beta}}\,\nabla_\sigma\, q_{\underline{\alpha}\,\underline{\varrho}} - q^\sigma{}_{\underline{\varrho}}\,(\nabla_\beta\, q_{\underline{\sigma}\,\underline{\alpha}} + \nabla_\alpha\, q_{\underline{\sigma}\,\underline{\beta}})] -$$

$$-\frac{1}{8}\,a_{\alpha\beta}\,\nabla^\varrho\,\nabla_\varrho\,(q_{\underline{\lambda}\,\underline{\mu}}\,q^{\lambda\mu}) - \left(\nabla^\lambda\, q_{\underline{\alpha}\,\underline{\varrho}} - \frac{1}{2}\,q_{\underline{\alpha}\,\underline{\varrho}}{}^\lambda\right)\left(\nabla^\varrho\, q_{\underline{\lambda}\,\underline{\beta}} - \frac{1}{2}\,q_{\underline{\lambda}\,\underline{\beta}}{}^\varrho\right) + 0\,(1/c^8)\,.$$

En explicitant et en tenant compte de l'équation (41.4) on obtient:

$$(42.2) \qquad Z_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\,q^{\sigma\varrho}\,(\partial_{\varrho\beta}\, q_{\underline{\sigma}\,\underline{\alpha}} + \partial_{\varrho\alpha}\, q_{\underline{\sigma}\,\underline{\beta}}) - \frac{1}{8}\,a_{\alpha\beta}\,a^{\varrho\sigma}\,\partial_{\varrho\sigma}\,(q_{\underline{\lambda}\,\underline{\mu}}\,q^{\lambda\mu}) +$$

$$+ q^{\sigma\varrho}\left[\begin{Bmatrix}\lambda\\ \alpha\ \ \varrho\end{Bmatrix}\partial_\beta\, q_{\underline{\sigma}\,\underline{\lambda}} + \begin{Bmatrix}\lambda\\ \beta\ \ \varrho\end{Bmatrix}\partial_\alpha\, q_{\underline{\sigma}\,\underline{\lambda}} + \partial_\varrho\left(\begin{Bmatrix}\lambda\\ \alpha\ \ \beta\end{Bmatrix} q_{\underline{\sigma}\,\underline{\lambda}}\right)\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\,q^{\sigma\varrho}\left(\begin{Bmatrix}\lambda\\ \alpha\ \ \varrho\end{Bmatrix} q_{\underline{\beta}\,\underline{\sigma}\,\underline{\lambda}} + \begin{Bmatrix}\lambda\\ \beta\ \ \varrho\end{Bmatrix} q_{\underline{\alpha}\,\underline{\sigma}\,\underline{\lambda}}\right) -$$

$$-\frac{1}{4}\,(q_{\underline{\alpha}\,\underline{\varrho}\,\underline{\lambda}}\,\nabla_\beta\, q^{\varrho\lambda} + q_{\underline{\beta}\,\underline{\varrho}\,\underline{\lambda}}\,\nabla_\alpha\, q^{\varrho\lambda}) + \frac{1}{4}\,q_{\underline{\alpha}\,\underline{\varrho}\,\underline{\lambda}}\,q_{\underline{\beta}}{}^{\varrho\lambda} +$$

$$+ G_{\sigma\tau}\,q_{\underline{\alpha}}{}^\sigma\,q_{\underline{\beta}}{}^\tau + \frac{1}{8}\,a_{\alpha\beta}\,F^\sigma\,\partial_\sigma\,(q_{\underline{\lambda}\,\underline{\mu}}\,q^{\lambda\mu}) + 0\,(1/c^8)\,,$$

où

$$F^{\lambda} \equiv - g^{\alpha\beta} L^{\lambda}_{\alpha\beta} = - \mathcal{J} a^{\alpha\beta} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha \ \beta \end{Bmatrix} \qquad \left(\mathcal{J} = \sqrt{\frac{g}{h}}\right).$$

En nous limitant à l'approximation précédemment définie, on n'a pas à tenir compte du terme $G_{\sigma\tau} q_{\alpha}^{\ \sigma} q_{\beta}^{\ \tau}$. Les 2ème et 3ème lignes de (42.2) sont utiles pour le calcul de $\overset{\ \ }{\underset{6}{\overline{Z}^{*}_{ij}}}$, mais elles n'interviennent pas dans la formation des équations (41.8) en première et seconde approximation. On déduit ainsi de (42.2):

$$Z^{*(\mathcal{J})}_{\alpha\beta} = - \frac{1}{2} q^{\sigma\varrho} \partial_{\alpha\beta} q_{\underline{\sigma}\,\underline{\varrho}} + \frac{1}{8} a_{\alpha\beta} a^{\varrho\sigma} \partial_{\varrho\sigma} (q_{\underline{\lambda}\,\underline{\mu}} q^{\lambda\mu}) + \tag{42.3}$$

$$+ \frac{1}{4} q^{\sigma\varrho} (\partial_{\beta} q_{\underline{\sigma}\,\underline{\varrho}\,\underline{\alpha}} + \partial_{\alpha} q_{\underline{\sigma}\,\underline{\varrho}\,\underline{\beta}}) - \frac{1}{4} (q_{\underline{\alpha}\,\underline{\varrho}\,\underline{\lambda}} \partial_{\beta} q^{\varrho\lambda} + q_{\underline{\beta}\,\underline{\varrho}\,\underline{\lambda}} \partial_{\alpha} q^{\varrho\lambda}) +$$

$$+ \frac{1}{4} q_{\underline{\alpha}\,\underline{\varrho}\,\underline{\lambda}} q_{\underline{\beta}}^{\ \varrho\lambda} - \frac{1}{24} a_{\alpha\beta} q_{\underline{\sigma}\,\underline{\varrho}\,\underline{\lambda}} q^{\sigma\varrho\lambda} + 0\,(1/c^6).$$

Les équations approchées (41.8) se mettent donc sous la forme:

$$G^{*(\mathcal{J})}_{\alpha\beta} + Z^{*(\mathcal{J})}_{\alpha\beta} + M^{(\mathcal{J})}_{\alpha\beta} = 0. \tag{42.4}$$

Dans ces équations, $G^{*(\mathcal{J})}_{\alpha\beta}$ a été calculé au chapitre II, $Z^{*(\mathcal{J})}_{\alpha\beta}$ est donné par (42.3), tandis que $M_{\alpha\beta}$ est une quantité qui disparaitra.

2) Calculons de même la partie antisymétrique $W_{\underset{\smile}{\alpha\beta}}$. D'après (35.5) (36.2):

$$W_{\underset{\smile}{\alpha\beta}} = \nabla_{\varrho} L^{\varrho}_{\underset{\smile}{\alpha\beta}} + 0\,(1/c^6) \tag{42.5}$$

$$= \nabla^{\varrho} \nabla_{\varrho} q_{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}} - \frac{1}{2} \nabla_{\varrho} q_{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}\,\underline{\varrho}} + 0\,(1/c^6).$$

Il est plus simple de considérer séparément les deux termes. Développons les dérivées covariantes, il vient:

$$W_{\underset{\smile}{\alpha\beta}} = a^{\varrho\sigma} \partial_{\varrho\sigma} q_{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}} - \frac{1}{2} a^{\varrho\sigma} \partial_{\sigma} q_{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}\,\underline{\varrho}} - 2 a^{\varrho\sigma} \left(\begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha\varrho \end{Bmatrix} \partial_{\sigma} q_{\underline{\lambda}\,\underline{\beta}} + \begin{Bmatrix} \lambda \\ \beta\varrho \end{Bmatrix} \partial_{\sigma} q_{\underline{\alpha}\,\underline{\lambda}} \right) - \tag{42.6}$$

$$= a^{\varrho\sigma} \left(\partial_{\sigma} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha\varrho \end{Bmatrix} q_{\underline{\lambda}\,\underline{\beta}} + \partial_{\sigma} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \beta\varrho \end{Bmatrix} q_{\underline{\alpha}\,\underline{\lambda}} \right) - F^{\lambda} \nabla_{\lambda} q_{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}} + \frac{1}{2} F^{\lambda} q_{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}\,\underline{\lambda}} +$$

$$+ \frac{1}{2} a^{\varrho\sigma} \left(\begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha\sigma \end{Bmatrix} q_{\underline{\lambda}\,\underline{\beta}\,\underline{\varrho}} + \begin{Bmatrix} \lambda \\ \beta\sigma \end{Bmatrix} q_{\underline{\alpha}\,\underline{\lambda}\,\underline{\varrho}} \right) + 0\,(1/c^6).$$

A partir de (42.6) on déduit immédiatement les équations approchées (41.9) par dérivation et permutation circulaire. Dans ces équations n'interviendront que la première ligne de (42.6). En effet, si nous remplaçons les symboles de Christoffel par leurs valeurs, nous trouvons que les termes :

$$- a^{\varrho\sigma}\left(\partial_\sigma \begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha\,\varrho \end{Bmatrix} q_{\underline{\lambda}\,\underline{\beta}} + \partial_\sigma \begin{Bmatrix} \lambda \\ \beta\,\varrho \end{Bmatrix} q_{\underline{\alpha}\,\underline{\lambda}}\right)$$

sont égaux à

$$-\frac{1}{2}\, a^{\varrho\sigma}\,(\partial_{\varrho\sigma}\, a_{\alpha\lambda}\, q^{\lambda}{}_{\underline{\beta}} + \partial_{\varrho\sigma}\, a_{\beta\lambda}\, q_{\underline{\alpha}}{}^{\lambda}) - \frac{1}{2}\,(\partial_\alpha\, F^\lambda\, q_{\underline{\lambda}\,\underline{\beta}} + \partial_\beta\, F^\lambda\, q_{\underline{\alpha}\,\underline{\lambda}}) +$$

$$+\frac{1}{2}\,\partial_\lambda\, F^\gamma\,(a_{\alpha\gamma}\, q^{\lambda}{}_{\underline{\beta}} + a_{\beta\gamma}\, q_{\underline{\alpha}}{}^{\lambda}) + 0\,(1/c^6),$$

et qu'ils peuvent être négligés. D'autre part, nous verrons au paragraphe 44 que $q_{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}\,\underline{\gamma}}$ est nul en première approximation, d'après la solution choisie pour le potentiel ψ_α (Cf. (44.1)).

43. — Le potentiel électromagnétique dans le cas quasi-statique.

Ce que nous désirons savoir, en faisant la présente étude, c'est la possibilité qu'offre la théorie d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER pour une éventuelle déduction des équations de mouvement de LORENTZ. Nous serons donc amené à chercher une solution des équations du champ représentant un système de particules chargées ; cela nous conduira naturellement à essayer d'identifier le potentiel ψ_α avec le potential électromagnétique [16].

Considérons donc, dans l'espace-temps muni de la métrique riemannienne:

(43.1) $$d\,s^2 = a_{\alpha\beta}\, d\,x^\alpha\, d\,x^\beta\,,$$

le potentiel électromagnétique créé par un système de particules chargées $\overset{s}{P}\,(s = 1\,,2\,,\ldots,N)$. Ce potentiel, rapporté à un repère quelconque, a pour expression :

(43.2) $$\varphi_\lambda = \sum_{s=1}^{N} \overset{s}{\varphi}_\lambda\,,$$

où :

(43.3) $$\overset{s}{\varphi}_\lambda = \overset{s}{\varphi}\,\overset{s}{u}_\lambda = (\overset{s}{e}\,/\,\overset{s}{r})\,\overset{s}{u}_\lambda\,,$$

([16]) C'est-à-dire identifier le tenseur $q^{\alpha\beta}$ avec l'adjoint du tenseur champ électromagnétique.

$\overset{s}{e} / \overset{s}{r}$ est le potentiel électromagnétique créé par la particule $\overset{s}{P}$ dans son repère propre, $\overset{s}{u}_\lambda$ est le vecteur vitesse unitaire de cette particule. Dans le repère propre, la particule étant au repos, le potentiel est purement électrique.

En portant dans (43.1) les développements limités de $a_{\alpha\beta}$, on obtient avec l'hypothèse quasi-statique :

$$d\, s^2 = \left(1 + \frac{1}{c^2} \underset{2}{a}_{00}\right) (d\, x^0)^2 - \delta^i_j\, d\, x^i\, d\, x^j + 0\,(1/c^4)\,, \tag{43.4}$$

Le vecteuer vitesse unitaire $u^\lambda = d\, x^\lambda / d\, s$ peut être calculé à un ordre d'approximation quelconque. Si l'on se limite en ce qui concerne φ_λ aux termes du cinquième ordre, il suffit de considérer l'expression approchée suivante du ds^2 :

$$ds'^2 = \left(1 + \frac{1}{c^2} \underset{2}{a}_{00}\right) (dx^0)^2 - \delta^i_j\, dx^i\, dx^j\,.$$

Sur la trajectoire d'univers de la particule $\overset{s}{P}$, de coordonnées ($x^0 = x^0$, $x^i = \overset{s}{\xi}{}^i$) ce ds^2 approché est égal à :

$$ds'^2 = \left(1 + \frac{1}{c^2} \underset{2}{a}_{00}\right) (dx^0)^2 - \delta^i_j\, d\overset{s}{\xi}{}^i\, d\overset{s}{\xi}{}^j$$

ce qui donne, jusqu'au quatrième ordre :

$$\left\{\begin{aligned} \overset{s}{u}{}^0 &\simeq \frac{d\,x^0}{d\,s'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{c^2}\left(\overset{s}{v}{}^2 - \underset{2}{a}_{00}\right)}} & \qquad \left(\frac{1}{c^2}\, \overset{s}{v}{}^2 = \delta^i_j\, \frac{d\,\overset{s}{\xi}{}^i}{d\,x^0}\, \frac{d\,\overset{s}{\xi}{}^j}{d\,x^0}\right), \\ \overset{s}{u}{}^i &\simeq \frac{d\,\overset{s}{\xi}{}^i}{d\,s'} = \frac{\dfrac{1}{c}\, \dot{\overset{s}{\xi}}{}^i}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{c^2}\left(\overset{s}{v}{}^2 - \underset{2}{a}_{00}\right)}} & \qquad \left(\frac{1}{c}\, \dot{\overset{s}{\xi}}{}^i = \frac{d\,\overset{s}{\xi}{}^i}{d\,x^0}\right). \end{aligned}\right. \tag{43.5}$$

On en déduit les valeurs approchées des composantes covariantes :

$$\overset{s}{u}_\lambda = a_{\lambda\mu}\, \overset{s}{u}{}^\mu\,.$$

Substituant celles-ci dans l'expression de φ_λ, et faisant les développements limités suivants pour $\overset{s}{e}$:

$$\overset{s}{e} = \frac{1}{c^2}\overset{s}{\underset{2}{e}} + \frac{1}{c^4}\overset{s}{\underset{4}{e}} + 0\,(1/c^6), \tag{43.6}$$

il vient :

$$\varphi_\lambda = \sum_{s=1}^{N}\left(\frac{1}{c^2}\overset{s}{\underset{2}{\varphi_\lambda}} + \frac{1}{c^3}\overset{s}{\underset{3}{\varphi_\lambda}} + \frac{1}{c^4}\overset{s}{\underset{4}{\varphi_\lambda}} + \frac{1}{c^5}\overset{s}{\underset{5}{\varphi_\lambda}}\right) + 0\,(1/c^6),$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\overset{s}{\underset{2}{\varphi_0}} = \overset{s}{\underset{2}{e}} / \overset{s}{r}, \\
&\overset{s}{\underset{3}{\varphi_i}} = -\,\overset{s}{\dot{\xi}^i}\,(\overset{s}{\underset{2}{e}} / \overset{s}{r}) = -\,\overset{s}{\dot{\xi}^i}\,\overset{s}{\underset{2}{\varphi_0}} \\
&\overset{s}{\underset{4}{\varphi_0}} = \overset{s}{\underset{4}{e}} / \overset{s}{r} + \frac{1}{2}\overset{s}{\underset{2}{\varphi_0}}\,(\overset{s}{v^2} + \underset{2}{a_{00}}), \\
&\overset{s}{\underset{5}{\varphi_i}} = -\,\overset{s}{\dot{\xi}^i}\,(\overset{s}{\underset{4}{e}} / \overset{s}{r}) + \frac{1}{2}\overset{s}{\dot{\xi}^j}\,\overset{s}{\underset{2}{\varphi_0}}\,[2\,\underset{2}{a_{ij}} - \delta^i_j\,(\overset{s}{v^2} - \underset{2}{a_{00}})] + \overset{s}{\underset{2}{\varphi_0}}\,\underset{3}{a_{i0}}\,.
\end{aligned}\right. \tag{43.7}$$

Ce sont les deux premières valeurs de (43.7) qu'ont prises L. INFELD et J. CALLAWAY pour satisfaire en première approximation aux équations (41.4) (41.9).

44. — La première approximation des équations du champ.

A la première approximation, les champ symétrique et antisymétrique se séparent.

1) Les équations (41.5) s'écrivent exactement comme en relativité générale :

$$\Delta\,\underset{2}{n_{00}} = 0\,,$$

$$\Delta\,\underset{3}{n_{0i}} = 0\,,$$

avec la même condition de coordonnées :

$$-\,\partial_r\,\underset{3}{n_{r0}} + \partial_0\,\underset{1\,2}{n_{00}} = 0\,.$$

La solution de ces équations est donnée par les formules:

$$U = \sum_{s=1}^{N} \overset{s}{U}, \quad \overset{s}{U} = -\, G \, \overset{s}{m}_0 \,/\, \overset{s}{r},$$

$$\underset{2}{n}_{00} = 4\, U,$$

$$\underset{3}{n}_{0i} = -\, 4 \sum_{s=1}^{N} \overset{s}{U} \, \dot{\overset{s}{\xi}}{}^{i},$$

La constante d'intégration $\overset{s}{m}_0$ ne dépend pas du temps d'après l'équation $\underset{3}{\overset{s}{\mu}}_0 = 0$.

2) Les équations (41.9) s'écrivent:

$$\varDelta \, \underset{2}{q}_{\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{k}} = 0$$

$$\varDelta \, \underset{3}{q}_{\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{0}} = 0$$

où $q_{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}\,\underline{\gamma}}$ doit être remplacé par son expression en fonction de ψ_α

$$q_{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}\,\underline{\gamma}} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \, (\partial_{\mu\nu} \, \psi_\varrho - \partial_{\mu\varrho} \, \psi_\nu) \, \delta^{\mu\nu} \, \delta^{\varrho\delta} + 0 \, (1/c^4) \, .$$

On aura une solution de ces équations en prenant pour $\underset{2}{\psi}_0$ et $\underset{3}{\psi}_i$ des fonctions harmoniques; ceci aura lieu, en particulier, si nous identifions ψ_α avec le potentiel électromagnétique:

$$\psi_\alpha = \sum_{s=1}^{N} \overset{s}{\psi}_\alpha \, , \quad \underset{2}{\overset{s}{\psi}}_0 = \underset{2}{\overset{s}{e}} \,/\, \overset{s}{r} \, , \quad \underset{3}{\overset{s}{\psi}}_i = -\, \dot{\overset{s}{\xi}}{}^{i} \, \underset{2}{\overset{s}{e}} \,/\, \overset{s}{r} \, . \tag{44.1}$$

Cette solution entraîne deux conséquences:

a) $\underset{2}{q}_{\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{k}} = 0 \, , \quad \underset{3}{q}_{\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{0}} = 0 \, ;$

b) $\partial_i \, \underset{2}{\Gamma}_j - \partial_j \, \underset{2}{\Gamma}_i = 0 \, , \quad \partial_j \, \underset{3}{\Gamma}_0 - \underset{1}{\partial}_0 \, \underset{2}{\Gamma}_j = 0$, de sorte que le champ de vecteurs Γ_α est en première approximation un champ de gradient.

45. — **Les équations du mouvement.**

Elles sont définies en première approximation par les équations :

$$\text{(45.1)} \qquad \overset{k}{\mu}_i = -\frac{1}{c^4}\left(\underset{4}{\overset{k}{\sigma}}_i + \int_{\partial\Delta} \underset{4}{Z}^*_{ir}\, n^r\, d\,\Sigma\right) + 0\,(1/c^6) = 0\,,$$

où $\underset{4}{\overset{k}{\sigma}}_i$ a la valeur calculée en relativité générale.

De (42.3) on déduit :

$$\text{(45.2)} \qquad \underset{4}{Z}^*_{ij} = -\frac{1}{2}\underset{2}{q}^{sr}\,\partial_{ij}\,\underset{2}{q}_{\underline{r}\,\underline{s}} + \frac{1}{8}\,\delta^i_j\,\Delta\,(\underset{2}{q}_{\underline{a}\,\underline{b}}\,\underset{2}{q}^{ab})$$

Cette exprsssion peut s'écrire encore :

$$\text{(45.3)} \qquad \underset{4}{Z}^*_{ij} = -\frac{1}{2}\,\partial_r\,[\underset{2}{q}^{sr}\,\partial_i\,\underset{2}{q}^{sj} - \underset{2}{q}^{sj}\,\partial_i\,\underset{2}{q}^{sr} + \frac{1}{4}\,\delta^i_r\,\partial_j\,(\underset{2}{q}^{ab}\,\underset{2}{\dot{q}}^{ab}) - \\ - \frac{1}{4}\,\delta^i_j\,\partial_r\,(\underset{2}{q}^{ab}\,\underset{2}{q}^{ab})]$$

le crochet étant antisymétrique par rapport aux indices j, r (17). D'après le lemme du chapitre II (Cf. paragraphe 12), il en résulte que l'on a identiquement :

$$\text{(45.4)} \qquad \int_{\partial\Delta} \underset{4}{Z}^*_{ir}\, n^r\, d\,\Sigma \equiv 0\,.$$

L'équation (45.1) se réduit donc à :

$$\frac{1}{c^4}\,\underset{4}{\overset{k}{\sigma}}_i + 0\,(1/c^6) = 0\,.$$

Dans cette équation n'interviennent pas les $q^{\alpha\beta}$. Aussi n'obtient-on pas l'action du champ électromagnétique sur la particule chargée. On re-

(17) Si $q_{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}\,\underline{\gamma}}$ n'est pas nul en première approximation, le second membre de (45.3) contiendra en plus le terme :

$$\frac{1}{4}\,(q^{\sigma\varrho}\,\partial_j\,q_{\underline{\sigma}\,\underline{\varrho}\,\underline{i}} - q_{\underline{i}\,\underline{\varrho}\,\underline{\lambda}}\,\partial_j\,q^{\varrho\lambda} + q_{\underline{i}\,\underline{\varrho}\,\underline{\lambda}}\,q_{\underline{j}}^{\;\varrho\lambda} + \frac{1}{6}\,\delta^i_j\,q_{\underline{\varrho}\,\underline{\lambda}\,\underline{\sigma}}\,q^{\varrho\lambda\sigma})\,.$$

trouve seulement un résultat fondamental de la relativité générale, qui permet d'obtenir les équations de mouvement d'une masse dans un champ de gravitation.

Ainsi, en prenant $a^{\alpha\beta}$ comme métrique et $q^{\alpha\beta}$ comme champ électromagnétique, on n'obtient que les équations de mouvement des particules matérielles (sans charges). Ce résultat est donc équivalent à celui obtenu par J. CALLAWAY [34] en prennant $\gamma_{\alpha\beta}$ et $\varphi_{\alpha\beta}$.

46. — Interprétation du résultat négatif. Discussion des possibilités laissées à cette méthode.

Les équations de mouvement des particules chargées contiennent des produits quadratiques des charges. Pour cette raison, si l'on peut obtenir ces équations ce doit être seulement en première approximation. Faut-il donc conclure, en se basant sur le résultat négatif (45.4), que la théorie d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER ne donne pas les équations de mouvement des particules chergées ? Nous ne le pensons pas, car ce résultat négatif tient d'abord aux valeurs particulières (44.1) choisies pour ψ_α, qui font disparaitre les termes en $q_{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}\,\underline{\gamma}}$ de $\underset{4}{Z_{ij}^{*}}$. La solution (44.1) parait naturelle, mais elle n'est pas imposée par les équations du champ.

W. B. BONNOR [33] fait remarquer aussi que même si l'intégrale (45.4) n'est pas identiquement nulle, elle ne pourrait pas donner une loi de force en $1/r^2$. Cette loi nécessiterait la présence dans le tenseur de RICCI des termes quadratiques par rapport aux champs antisymétriques eux mêmes, et non par rapport à leurs dérivées.

Nous pouvons dire maintenant que le problème qui se pose est le suivant : Trouver une solution ψ_α telle que :

1) les *dérivées* de ψ_α soient d'ordre $1/r$ dans le voisinage de chaque particule ;

2) le « courant » $q_{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}\,\underline{\gamma}}$ ne soit pas nul pour celle solution.

Avant d'avoir résolu ce problème, il serait peut-être prématuré d'affirmer l'impuissance de la théorie, et d'abandonner par là tout espoir d'obtenir une influence des champs antisymétriques dans les équations de mouvement en première approximation.

Nous avons essayé vainement de déterminer une solution ψ_α satisfaisant aux conditions 1) et 2). Tout d'abord nous sommes amenés à modifier les développements limités de q^{j0} et q^{ij} en les commençant respectivement par $0\,(1/c^2)$ et par $0\,(1/c^3)$:

$$q^{j0} = \frac{1}{c^2}\underset{2}{q^{j0}} + \dots \qquad q^{ij} = \frac{1}{c^3}\underset{3}{q^{ij}} + \dots$$

Nous devons alors considérer les développements limités suivants de ψ_a, en accord avec ceux de $q^{\alpha\beta}$:

$$\psi_i = \frac{1}{c^2} \underset{2}{\psi_i} + \dots \qquad \psi_0 = \frac{1}{c^3} \underset{3}{\psi_0} + \dots$$

Nous pouvons ainsi satisfaire aux équations de champ $\Delta \underset{2}{q_{\underline{ijk}}} = 0$, $\Delta \underset{3}{q_{\underline{ijk}}} = 0$, en prenant la solution:

$$\psi_\gamma = \sum_{s=1}^{N} \overset{s}{\psi_\gamma}, \quad 2 \underset{2}{\overset{s}{\psi_i}} = (x^i - \overset{s}{\xi^i})\, \underset{2}{\overset{s}{e}}/\overset{s}{r}, \quad 2 \underset{3}{\overset{s}{\psi_0}} = - \overset{s}{\dot{\xi}^r} (x^r - \overset{s}{\xi^r})\, \underset{2}{\overset{s}{e}}/\overset{s}{r}.$$

Cette solution vérifie la condition 1). Malheureusement, elle entraîne encore $\underset{2}{q_{\underline{ij0}}} = 0$ (et $\underset{3}{q_{\underline{ijk}}} = 0$), et l'on retombe sur une intégrale identiquement nulle:

$$\underset{4}{Z^*_{ij}} = \frac{1}{2} \partial_r [\underset{2}{q^{0r}} \partial_i \underset{2}{q^{0j}} - \underset{2}{q^{0j}} \partial_i \underset{2}{q^{0r}} + \frac{1}{2} \delta^i_r \partial_i (\underset{2}{q^{0b}} \underset{2}{q^{0b}}) - \frac{1}{2} \delta^i_j \partial_r (\underset{2}{q^{0b}} \underset{2}{q^{0b}})]$$

$$\int_{\partial\Delta} \underset{4}{Z^*_{ir}}\, n^r \, d\Sigma = 0 .$$

III. — Les équations du champ en seconde approximation

47. — Remarques sur la solution des équations relatives au champ symétrique.

Nous allons former les équations du champ (41.8) (41.9) en seconde approximation pour avoir une idée de leur solution, relativement complexe par rapport à la solution des équations du champ en relativité générale, et pour montrer que l'identification du potentiel ψ_a de la formule (41.7) avec le potentiel électromagnétique défini par (43.2) (43.3), c'est-à-dire l'interprétation du tenseur $\overset{*}{q}_{\alpha\beta}$ comme tenseur champ électromagnétique n'est plus possible au delà de la première approximation.

A l'aide des formules du paragraphe 42 et des calculs déjà faits en relativité générale, les « équations de la gravitation » s'écrivent:

$$(47.1) \qquad \Delta \underset{4}{n_{ij}} = 4\, \partial_i U\, \partial_j U + 2\, \delta^i_j\, \partial_s U\, \partial_s U + [\underset{2}{q^{sr}}\, \partial_{ij}\, \underset{2}{q_{\underline{sr}}} + \frac{1}{4} \partial_{rr} (\underset{2}{q^{ab}}\, \underset{2}{q_{\underline{ab}}}) \delta^i_j],$$

(47.2) $$\underset{4}{\Delta}\, n_{00} = 4\, \partial_{00} \underset{11}{U} - 2\, \partial_s\, U\, \partial_s\, U + \left[\frac{1}{4}\, \partial_{rr} (\underset{2}{q^{ab}}\, \underset{2}{q_{\underline{a\,b}}})\right],$$

(47.3) $$\underset{5}{\Delta}\, n_{0i} = \partial_{00} \underset{11\,3}{n_{0i}} + 4\, \partial_i \underset{3}{n_{0s}}\, \partial_s\, U - 12\, \partial_i\, U\, \partial_0 \underset{1}{U} + [\underset{2}{q^{sr}}\, \partial_{0i}\, \underset{1\,2}{q_{\underline{s\,r}}}],$$

avec les mêmes conditions de coordonnées qu'on relativité générale $\left(g^{\alpha\beta}\, L^{\varrho}_{\alpha\beta} = \mathfrak{I}\, a^{\alpha\beta} \begin{Bmatrix} \varrho \\ \alpha\ \beta \end{Bmatrix}\right)$:

(47.4) $$\partial_r \underset{4}{n_{ri}} - \partial_0 \underset{1\,3}{n_{0i}} - 4\, U\, \partial_i\, U = 0\,,$$

(47.5) $$- \partial_r \underset{5}{n_{r0}} + \partial_0 \underset{1\,4}{n_{00}} + 2 \underset{3}{n_{0r}}\, \partial_r\, U - 4\, U\, \partial_0 \underset{1}{U} = 0\,.$$

Nous intégrons les équations du champ comme nous l'avons fait en relativité générale. Nous cherchons une solution particulière des équations avec second membre, à laquelle nous devons ajouter la solution générale constituée par les fonctions harmoniques des équations homogènes. Ces fonctions harmoniques seront déterminées de manière à satisfaire les conditions de coordonnées et la condition d'intégrabilité $\overset{k}{\underset{5}{\mu_0}} = 0$.

Ecrivons les équations de champ sous la forme générale :

(47.6) $$\underset{l}{\Delta}\, n_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta}\,,$$

$B_{\alpha\beta}$ désignant les termes du second membre placés entre crochets ($B_{\alpha\beta} = - 2 \underset{l}{Z^{*}_{\alpha\beta}}$). Soit :

$$x_{\alpha\beta} + y_{\alpha\beta}\,.$$

une intégrale particulière de l'équation (47.6), $x_{\alpha\beta}$ et $y_{\alpha\beta}$ se rapportant respectivement aux quantités $A_{\alpha\beta}$ et $B_{\alpha\beta}$ du second membre. On a déjà calculé $x_{\alpha\beta}$ dans le cas de la relativité générale. Le calcul de $y_{\alpha\beta}$ est (comme celui de $x_{\alpha\beta}$) immédiat pour l'équation (47 1) si $i = j$ et pour l'équation (47.2); mais, pour l'équation (47.1) si $i \neq j$, et pour l'équation (47.3) nous ne pouvons chercher qu'une solution perticulière dans le voisinage de chaque particule.

Le tenseur $q^{\alpha\beta}$ étant défini en fonction de ψ_α par la formule (41.7), si nous adoptons pour le potential ψ_α la solution (44.1) — considérée par divers auteurs — nous aurons :

$$\underset{2}{q^{ij}} \,(= \underset{2}{q_{\underline{i\,j}}}) = \varepsilon^{p0ij}\, \partial_p \underset{2}{\varphi_0}\,,$$

d'où :

$$\underset{2}{q}^{sr}\, \partial_{ij}\, \underset{2}{q}_{\underline{s\,r}} = \varepsilon^{p0sr}\, \varepsilon_{q0sr}\, \partial_p \underset{2}{\varphi_0}\, \partial_{qj} \underset{2}{\varphi_0} = 2\, \partial_m \underset{2}{\varphi_0}\, \partial_{mij} \underset{2}{\varphi_0}\,, \tag{47.7}$$

$$\underset{2}{q}^{sr}\, \underset{1}{\partial_{0i}}\, q_{\underline{s\,r}} = 2\, \partial_m \underset{2}{\varphi_0}\, \underset{1}{\partial_{m0i}} \underset{2}{\varphi_0}\,.$$

Comme

$$\underset{1}{\partial_0} \underset{2}{\varphi_0} = \partial_r \underset{3}{\varphi_r} = \partial_r \sum_{s=1}^{N} \underset{2}{\overset{s}{\varphi_0}}\, \overset{s}{\dot{\xi}}{}^r$$

tout se ramène à chercher une intégrale particulière pour le terme (47.7). Développons ce terme dans le voisinage de la k-ème particule, en posant pour simplifier l'écriture :

$$X^r = x^r - \overset{k}{\xi}{}^r\,; \qquad \widetilde{\partial}_m \underset{2}{\varphi_0} = \sum_{l \neq k} \widetilde{\partial}_m \underset{2}{\overset{l}{\varphi_0}}\,, \qquad \widetilde{\partial}_{mi} \underset{2}{\varphi_0} = \sum_{l \neq k} \widetilde{\partial}_{mi} \underset{2}{\overset{l}{\varphi_0}}\,, \text{ etc} \ldots$$

Il vient :

$$\partial_m \underset{2}{\varphi_0}\, \partial_{mij} \underset{2}{\varphi_0} = \partial_m \underset{2}{\overset{k}{\varphi_0}}\, \partial_{mij} \underset{2}{\overset{k}{\varphi_0}} + \partial_m \underset{2}{\overset{k}{\varphi_0}}\, \widetilde{\partial}_{mij} \underset{2}{\varphi_0} +$$

$$+ \partial_{mij} \underset{2}{\overset{k}{\varphi_0}} \left(\widetilde{\partial}_m \underset{2}{\varphi_0} + X^r\, \widetilde{\partial}_{mr} \underset{2}{\varphi_0} + \frac{1}{4} X^r X^s\, \widetilde{\partial}_{mrs} \underset{2}{\varphi_0}\right) + 0\,(1/\overset{k}{r})\,.$$

Nous avons donc à considérer les termes suivants, à un facteur près indépendant des variables (x^r) :

$$\partial_m \underset{2}{\overset{k}{\varphi_0}}\, \partial_{mij} \underset{2}{\overset{k}{\varphi_0}}\,, \qquad \partial_m \underset{2}{\overset{k}{\varphi_0}}\,, \qquad \partial_{mij} \underset{2}{\overset{k}{\varphi_0}}\,, \qquad X^r\, \partial_{mij} \underset{2}{\overset{k}{\varphi_0}}\,, \qquad X^r X^s\, \partial_{mij} \underset{2}{\overset{k}{\varphi_0}}\,.$$

Le premier terme, par son ordre de grandeur, n'intervient pas dans l'intégrale $\overset{k}{\mu}_a$. Les deuxième et troisième termes s'intègrent d'après les relations :

$$\Delta\left(\frac{1}{2} X^m \underset{2}{\overset{k}{\varphi_0}}\right) = \partial_m \underset{2}{\overset{k}{\varphi_0}}\,, \qquad \Delta\left(\frac{1}{2} X^m\, \partial_{ij} \underset{2}{\overset{k}{\varphi_0}}\right) = \partial_{mij} \underset{2}{\overset{k}{\varphi_0}}\,.$$

Pour calculer une intégrale particulière correspondant au quatrième terme, partons de la relation :

$$\frac{1}{2} \Delta\left(X^r X^m\, \partial_{ij} \underset{2}{\overset{k}{\varphi_0}}\right) = X^r\, \partial_{ijm} \underset{2}{\overset{k}{\varphi_0}} + X^m\, \partial_{ijr} \underset{2}{\overset{k}{\varphi_0}} + \delta^r_m\, \partial_{ij} \underset{2}{\overset{k}{\varphi_0}}\,. \tag{47.8}$$

Or, on peut d'après l'expression de $\underset{2}{\overset{k}{\varphi}}_0 \left(= \underset{2}{\overset{s}{e}}/\overset{s}{r}\right)$ vérifier que l'on a :

$$\partial_{ij} \underset{2}{\overset{k}{\varphi}}_0 = 3 \left(\underset{2}{\overset{k}{\varphi}}_0/r^4\right) X^i X^j - \left(\underset{2}{\overset{k}{\varphi}}_0/r^2\right) \delta^i_j \qquad (X^i = x^i - \overset{k}{\xi}{}^i)$$

$$\partial_{ijr} \underset{2}{\overset{k}{\varphi}}_0 = -15 \left(\underset{2}{\overset{k}{\varphi}}_0/r^6\right) X^i X^j X^r + 3 \left(\underset{2}{\overset{k}{\varphi}}_0/r^4\right) (X^r \delta^i_j + X^i \delta^j_r + X^j \delta^i_r).$$

A l'aide de ces formules on peut exprimer $X^m \partial_{ijr} \underset{2}{\overset{k}{\varphi}}_0$ en fonction de $X^r \partial_{ijm} \underset{2}{\overset{k}{\varphi}}_0$:

$$X^m \partial_{ijr} \underset{2}{\overset{k}{\varphi}}_0 = X^r \partial_{ijm} \underset{2}{\overset{k}{\varphi}}_0 + \partial_{mi} \underset{2}{\overset{k}{\varphi}}_0 \delta^j_r + \partial_{mj} \underset{2}{\overset{k}{\varphi}}_0 \delta^i_r - \partial_{ri} \underset{2}{\overset{k}{\varphi}}_0 \delta^j_m - \partial_{rj} \underset{2}{\overset{k}{\varphi}}_0 \delta^i_m .$$

En portant cette expression dans (47.8) on déduit la relation :

$$\frac{1}{2} \Delta \left[X^r X^m \partial_{ij} \underset{2}{\overset{k}{\varphi}}_0 - \delta^r_m X^i \partial_j \underset{2}{\overset{k}{\varphi}}_0 - X^m (\delta^r_j \partial_i \underset{2}{\overset{k}{\varphi}}_0 + \delta^r_i \partial_j \underset{2}{\overset{k}{\varphi}}_0) + \right.$$

$$\left. + X^r (\delta^m_j \partial_i \underset{2}{\overset{k}{\varphi}}_0 + \delta^m_i \partial_j \underset{2}{\overset{k}{\varphi}}_0)\right] = 2 X^r \partial_{ijm} \underset{2}{\overset{k}{\varphi}}_0 ,$$

sur laquelle apparait en évidence une intégrale particulière de $X^r \partial_{ijm} \underset{2}{\overset{k}{\varphi}}_0$.

Le calcul est analogue pour le cinquième terme. Nous ne donnons pas le résultat qui est plus compliqué, notre intention n'étant pas de calculer l'intégrale $\underset{\sigma}{\overset{k}{\mu}}_i$, mais d'examiner l'interprétation du tenseur $q^{\alpha\beta}$.

48. — Interprétation des champs antisymétriques.

On déduit de : (Cf. (42.6))

$$W_{\underset{\smile}{\alpha\beta}} = a^{\varrho\sigma} \partial_{\varrho\sigma} q_{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}} - \frac{1}{2} a^{\varrho\sigma} \partial_\sigma q_{\underline{\alpha}\,\underline{\beta}\,\underline{\varrho}} - 2 a^{\varrho\sigma} \left(\begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha\,\varrho \end{Bmatrix} \partial_\sigma q_{\underline{\lambda}\,\underline{\beta}} + \begin{Bmatrix} \lambda \\ \beta\,\varrho \end{Bmatrix} \partial_\sigma q_{\alpha\lambda} \right) + 0(1/c^6)$$

les expressions de $\underset{4}{W}_{\underset{\smile}{ij}}$ et $\underset{5}{W}_{\underset{\smile}{j0}}$:

$$(48.1) \qquad \underset{4}{W}_{\underset{\smile}{ij}} = - \Delta \underset{4}{q}_{\underline{i}\,\underline{j}} + \partial_{\underset{11}{00}} \underset{4}{q}_{\underline{i}\,\underline{j}} + \frac{1}{2} \partial_r \underset{4}{q}_{\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{r}} - \frac{1}{2} \partial_r \underset{2}{n}_{00} \partial_r \underset{2}{q}_{\underline{i}\,\underline{j}} ,$$

$$(48.2)\qquad \underset{5}{W}_{\underbrace{j0}} = -\varDelta \underset{5}{q}_{\underline{j0}} + \underset{11}{\partial_{00}} \underset{3}{q}_{\underline{j0}} + \frac{1}{2} \partial_r \underset{2}{n}_{00} \partial_r \underset{3}{q}_{\underline{j0}} + \underset{5}{\delta^{\lambda\mu} (\partial_j q_{\underline{r\lambda}} \partial_r n_{\underline{0\mu}})} .$$

Formons la permutation circulaire $\partial_{[\alpha} W_{\underbrace{\beta\gamma]}} \equiv \partial_\alpha W_{\underbrace{\beta\gamma}} + \partial_\beta W_{\underbrace{\gamma\alpha}} + \partial_\gamma W_{\underbrace{\alpha\beta}}$; en remarquant que l'on a identiquement :

$$\partial_\alpha q_{\underline{\beta\gamma\varrho}} + \partial_\beta q_{\underline{\gamma\alpha\varrho}} + \partial_\gamma q_{\underline{\alpha\beta\varrho}} = \partial_\varrho q_{\underline{\alpha\beta\gamma}} ,$$

on obtient les « équations approchées de l'électromagnétisme » sous la forme :

$$(48.3)\qquad -2\,\partial_{[k} \underset{4}{W}_{\underbrace{ij]}} = \varDelta \underset{4}{q}_{\underline{ijk}} + \partial_r \underset{2}{q}_{\underline{[ij}} \partial_{k]r} \underset{2}{n}_{00} = 0 ,$$

$$(48.4)\qquad -2\,\partial_{[i} \underset{5}{W}_{\underbrace{j0]}} = \varDelta \underset{5}{q}_{\underline{ij0}} + \partial_r \underset{3}{q}_{\underline{[j0}} \partial_{i]r} \underset{2}{n}_{00} +$$

$$+ 2\,\underset{5}{\delta^{\lambda\mu} (\partial_i q_{\underline{r\lambda}} \partial_{jr} n_{0\mu} - \partial_j q_{\underline{r\lambda}} \partial_{ir} n_{0\mu})} = 0 .$$

Trois indices placés entre crochets indiquent qu'il faut faire la sommation sur les termes déduits par permutation circulaire de ces indices.

La relation $q_{\underline{\alpha\beta}} = a_{\alpha\lambda} a_{\beta\mu} q^{\lambda\mu}$ a pour conséquence :

$$\underset{4}{q}_{\underline{ij}} = \underset{4}{q}^{ij} - \underset{2}{n}_{00} \underset{2}{q}^{ij},$$

$$\underset{5}{q}_{\underline{j0}} = -\underset{5}{q}^{j0} - \underset{3}{n}_{0r} \underset{2}{q}^{jr},$$

où $q^{\alpha\beta}$ s'exprime en fonction de ψ_α au moyen des expressions suivantes :

$$\underset{2}{q}^{ij} = \varepsilon^{p0ij} \partial_p \underset{2}{\psi}_0 \qquad\qquad (\underset{2}{\psi}_0 = \underset{2}{\varphi}_0) ,$$

$$\underset{3}{q}^{j0} = \varepsilon^{pqij} \partial_p \underset{3}{\psi}_q \qquad\qquad (\underset{3}{\psi}_i = \underset{3}{\varphi}_i) .$$

$$\underset{4}{q}^{ij} = \varepsilon^{p0ij} (\partial_p \underset{4}{\psi}_0 - \underset{1}{\partial_0} \underset{3}{\psi}_p) + \frac{1}{2} \underset{2}{n}_{00} \underset{2}{q}^{ij} ,$$

$$\underset{5}{q}^{j0} = \varepsilon^{pqj0} \partial_p \underset{5}{\psi}_q + \frac{1}{2} \underset{2}{n}_{00} \underset{3}{q}^{j0} .$$

Les équations (48.3) (49.4) qui défissent $\underset{4}{\psi}_0$ et $\underset{5}{\psi}_i$ s'écrivent donc :

$$(48.5)\qquad \varepsilon_{ijk0} \varDelta \varDelta \underset{4}{\psi}_0 = 0 ,$$

$$(48.6) \qquad \varepsilon_{0ijk}\,[\Delta\,(-\,\Delta\,\underset{5}{\psi_k} + \partial_{kr}\,\underset{5}{\psi_r} - \partial_{k0}\,\underset{1\,4}{\psi_0}) + 2\,\delta^{\lambda\mu}\,\partial_r\,(\partial_{k\lambda}\,\underset{2}{\psi_0}\,\partial_r\,n_{0\mu} -$$

$$-\,\partial_{r\lambda}\,\underset{2}{\psi_0}\,\partial_k\,n_{0\mu})_5] = 0\,,$$

c'est-à-dire, pour (48.6) :

$$(48.7) \quad \varepsilon_{0ijk}\,\Delta\,[(-\,\Delta\,\underset{5}{\psi_k} + \partial_{kr}\,\underset{5}{\psi_r} - \partial_{k0}\,\underset{1\,4}{\psi_0}) + \delta^{\lambda\mu}\,(\partial_{k\lambda}\,\underset{2}{\psi_0}\,n_{0\mu} - \partial_\lambda\,\underset{2}{\psi_0}\,\partial_k\,n_{0\mu})_5] = 0.$$

Or, si l'on calcule par exemple le laplacien itéré de l'expression $\underset{4}{\varphi_0}$ du potentiel électromagnétique :

$$(48.8) \qquad \underset{4}{\varphi_0} = \sum_{s=1}^{N}\left[\overset{s}{\underset{4}{e}}/\overset{s}{r} + \frac{1}{2}\,\underset{2}{\varphi_0}\left(\overset{s}{v}{}^2 + \frac{\underset{2}{n_{00}}}{2}\right)\right],$$

on trouve :

$$\Delta\,\Delta\,\underset{4}{\varphi_0} = \sum_{s=1}^{N} 2\,\partial_{rm}\,\overset{s}{\underset{2}{\varphi_0}}\,\partial_{rm}\,\underset{2}{n_{00}} \neq 0\,.$$

Ainsi (48.8) ne satisfait pas à l'équation (48.5). On verrait de même que $\underset{4}{\varphi_0}$ et $\underset{5}{\varphi_0}$ ne peuvent pas être solution de l'équation (48.6).

Il semble que *le tenseur $\overset{*}{q}_{\alpha\beta}$ ne peut jouer le rôle de tenseur champ électromagnétique qu'en première approximation.*

Cette conclusion s'applique également aux tenseurs $\overset{*}{f}_{\alpha\beta}$ et $\overset{*}{\varphi}_{\alpha\beta}$ car, dans la seconde approximation, les équations des champs antisymétriques sont les mêmes, qu'on les écrive avec $a_{\alpha\beta}$, $q_{\underline{\alpha\beta}}$ ou $h_{\alpha\beta}$, $f_{\underline{\alpha\beta}}$ ou $\gamma_{\alpha\beta}$, $\varphi_{\alpha\beta}$.

En particulier elle est valable aussi pour

$$H_{\alpha\beta} = \sqrt{-g}\,\frac{f_{\alpha\beta}}{\sqrt{f}} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\sqrt{-g}\,f^{\gamma\delta}$$

tenseur choisi par certains auteurs pour représenter le champ électromagnétique [17].

---

[17] F. MAURER. Comptes rendus 242 (1956) p. 3042.

CHAPITRE V

LES ÉQUATIONS APPROCHÉES DE LA THÉORIE D'EINSTEIN-SCHRÖDINGER ET LE TENSEUR D'IMPULSION-ÉNERGIE.

Dans le cadre de la relativité générale, les équations d'EINSTEIN :

$$S_{\alpha\beta} = \chi \, T_{\alpha\beta} \, ,$$

limitent la généralité de la métrique. Elles présentent un caractère très particulier, puisqu'elles établissent le lien entre un tenseur $S_{\alpha\beta}$ d'origine géométrique et un tenseur $T_{\alpha\beta}$ de nature physique.

Le tenseur d'impulsion-énergie $T_{\alpha\beta}$, qui joue le rôle de sources du champ, est absolument étranger à la structure géometrique de la variété espace-temps.

En théorie unitaire, l'introduction artificielle des sources est à éviter. Si l'on admet que la théorie d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER unifie champ et sources dans un même schéma géométrique — et c'était certainement conforme à la pensée d'EINSTEIN — on doit écrire les équations sans second membre :

$$R_{\alpha\beta} = 0 \, .$$

Il conviendra de constituer un second membre au moyen de certains termes tirés de $R_{\alpha\beta}$. Les nouveaux premiers membres doivent encore satisfaire à des conditions de conservation. On pourra alors interpréter le second membre comme tenseur d'impulsion-énergie.

49. — Conditions de conservation pour le tenseur d'impulsion-énergie.

Les équations du champ sont, nous l'avons vu, définies par l'ensemble des systèmes :

(49.1) $$\partial_\varrho \, g_{\alpha\beta} - L^{\sigma}_{\alpha\varrho} \, g_{\sigma\beta} - L^{\sigma}_{\varrho\beta} \, g_{\alpha\sigma} = 0 \, ,$$

(49.2) $$\partial_\varrho \, (\sqrt{-g} \, g^{\underset{\vee}{\varrho\beta}}) = 0,$$

(49.3) $$R_{\underline{\alpha\beta}} = W_{\underline{\alpha\beta}} = 0 \, ,$$

(49.4) $$R_{\underset{\smile}{\alpha\beta}} = W_{\underset{\smile}{\alpha\beta}} - \frac{1}{2}(\partial_\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha) = 0 \,.$$

Leur premiers membres sont liés par les identités de conservation :

(49.5) $$\partial_\lambda \mathfrak{M}_\varrho^\lambda + \frac{2}{3} R_{\alpha\beta}\, \partial_\varrho\, \mathfrak{g}^{\alpha\beta} = 0 ,$$

où

$$\mathfrak{M}_\varrho^\lambda = \sqrt{-g}\, M_\varrho^\lambda \qquad \mathfrak{g}^{\alpha\beta} = \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}$$

et M_ϱ^λ est défini à partir de $R_{\alpha\beta}$ et de $g_{\alpha\beta}$ par :

$$2\, L_\varrho^\lambda = R_{\varrho\sigma}\, g^{\lambda\sigma} + R_{\sigma\varrho}\, g^{\sigma\lambda},$$

$$M_\varrho^\lambda = L_\varrho^\lambda - \frac{1}{2}\, \delta_\varrho^\lambda\, L_\tau^\tau \,.$$

Ces identités sont satisfaites pour tout ensemble $(g_{\alpha\beta}, \Gamma_{\alpha\beta}^\varrho)$ déduit d'une solution $(g_{\alpha\beta}, L_{\alpha\beta}^\varrho)$ des équations (49.1) (49.2).

Considérons un tenseur symétrique à deux indices $a_{\alpha\beta}$, sur lequel aucune hypothèse n'est faite a priori excepté les hypothèses connues que doit vérifier tout tenseur métrique. Soient $G_{\alpha\beta}$ le tenseur de RICCI formé avec les symboles de CHRISTOFFEL relatifs à $a_{\alpha\beta}$ et $S_{\alpha\beta}\left(\equiv G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, G\, a_{\alpha\beta}\right)$ le tenseur d'EINSTEIN correspondant. On obtient un tenseur d'impulsion-énergie en théorie unitaire en décomposant la partie symétrique du tenseur de RICCI $R_{\underline{\alpha\beta}}$ en la somme du tenseur $G_{\alpha\beta}$ et des termes complémentaires. Il vient ainsi :

(49.6) $$R_{\underline{\alpha\beta}} - \frac{1}{2}\, a_{\alpha\beta}\, R_{\underline{\varrho\sigma}}\, a^{\varrho\sigma} = S_{\alpha\beta} - \chi\, T_{\alpha\beta} ,$$

où nous avons représenté par $-\chi\, T_{\alpha\beta}$ l'ensemble des termes complémentaires :

(49.7) $$-\chi\, T_{\alpha\beta} = Z_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, a_{\alpha\beta}\, Z_{\varrho\sigma}\, a^{\varrho\sigma} \qquad (Z_{\alpha\beta} = R_{\underline{\alpha\beta}} - G_{\alpha\beta}) \,.$$

Les équations :

(49.8) $$S_{\alpha\beta} - \chi\, T_{\alpha\beta} = 0$$

sont équivalentes aux équations du champ (49.3). Si l'on fait passer $-\chi\, T_{\alpha\beta}$ au second membre, ces équations auront la forme des équations du cas intérieur de la relativité générale, $T_{\alpha\beta}$ y jouant le rôle du tenseur d'im pulsion-énergie. Nous nous proposons d'étudier si le tenseur $T_{\alpha\beta}$ satisfait aux conditions de conservation :

$$\nabla_\alpha T^{\alpha}_{\ \beta} = 0 , \tag{49.9}$$

∇_α étant l'opérateur de dérivation covariante dans la métrique $a_{\alpha\beta}$

En séparant les termes contenant $\underline{R_{\alpha\beta}}$ de ceux contenant $\underset{\vee}{R_{\alpha\beta}}$, on voit que le premier membre de (49.5) est égal à :

$$\partial_\lambda \left(\underline{R_{\varrho\sigma}}\, \mathfrak{g}^{\underline{\lambda\sigma}} - \frac{1}{2}\, \delta^\lambda_\sigma\, \underline{R_{\alpha\beta}}\, \mathfrak{g}^{\underline{\alpha\beta}}\right) + \frac{1}{2}\, \underline{R_{\alpha\beta}}\, \partial_\varrho\, \mathfrak{g}^{\underline{\alpha\beta}}$$

$$- \frac{1}{2} \left(\partial_\varrho \underset{\vee}{R_{\alpha\beta}} + \partial_\alpha \underset{\vee}{R_{\beta\varrho}} + \partial_\beta \underset{\vee}{R_{\varrho\alpha}}\right) \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{\alpha\beta}} + \underset{\vee}{R_{\varrho\sigma}}\, \partial_\lambda\, \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{\lambda\sigma}}$$

Cherchons à quelle condition la quantité

$$\frac{1}{\sqrt{-a}} \left[\partial_\lambda \left(\underline{R_{\varrho\sigma}}\, \mathfrak{g}^{\underline{\lambda\sigma}} - \frac{1}{2}\, \delta^\lambda_\varrho\, \underline{R_{\alpha\beta}}\, \mathfrak{g}^{\underline{\alpha\beta}}\right) + \frac{1}{2}\, \underline{R_{\alpha\beta}}\, \partial_\varrho\, \mathfrak{g}^{\underline{\alpha\beta}}\right] \tag{49.10}$$

est la divergence, dans la métrique $a_{\alpha\beta}$, d'un tenseur. La forme bien connue de (49.10) montre qu'il suffit de choisir le tenseur :

$$\lambda \left(\underline{R_{\alpha\beta}} - \frac{1}{2}\, a_{\alpha\beta}\, \underline{R_{\varrho\sigma}}\, a^{\varrho\sigma}\right) \qquad (\lambda\text{, scalaire constant})$$

dont la divergence peut s'écrire :

$$\frac{\lambda}{\sqrt{-a}} \left[\partial_\lambda \left(\underline{R_{\varrho\sigma}}\, a^{\lambda\sigma} \sqrt{-a} - \frac{1}{2}\, \delta^\lambda_\varrho\, \underline{R_{\alpha\beta}}\, a^{\alpha\beta} \sqrt{-a}\right) + \underline{R_{\alpha\beta}}\, \partial_\varrho \left(a^{\alpha\beta} \sqrt{-a}\right)\right].$$

L'identification de cette expression avec (49.10) donne la relation :

$$(\mathfrak{g}^{\alpha\beta} =)\ g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} = \lambda\, a^{\alpha\beta} \sqrt{-a}$$

d'où l'on tire :

$$g^2 = \lambda^4\, a\, h , \quad a^{\alpha\beta} = \lambda \sqrt{h/g}\, h^{\alpha\beta} .$$

Lorsque la partie antisymétrique $g^{\underset{\vee}{\alpha\beta}}$ tend vers zéro ($g^{\underset{\vee}{\alpha\beta}} \to 0$), $a^{\alpha\beta}$ qui joue le rôle de métrique doit tendre vers $g^{\alpha\beta}$; on en déduit :

$$\lambda = 1 \text{ et } a^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} \sqrt{h/g} .$$

C'est le tenseur que nous avons obtenu au chapitre III (Cf. paragraphe 33, formule (34.6)).

Ainsi en prenant $a^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta}\sqrt{h/g}$ comme tenseur métrique, les identités (49.5) s'écrivent :

$$\frac{1}{\sqrt{-a}}\left[\nabla_\lambda (S_\varrho^\lambda - \chi\, T_\varrho^\lambda) - \frac{1}{2}(\partial_\varrho\, R_{\underset{\smile}{\alpha\beta}} + \partial_\alpha\, R_{\underset{\smile}{\beta\varrho}} + \partial_\beta\, R_{\underset{\smile}{\varrho\alpha}})\, g^{\underset{\smile}{\alpha\beta}}\sqrt{h/g}\right] \equiv 0\,. \tag{49.11}$$

Le tenseur $S_{\alpha\beta}$ étant conservatif, ces identités deviennent :

$$\nabla_\lambda (\chi\, T_\varrho^\lambda) \equiv -\frac{1}{2}(\partial_\varrho\, R_{\underset{\smile}{\alpha\beta}} + \partial_\alpha\, R_{\underset{\smile}{\beta\varrho}} + \partial_\beta\, R_{\underset{\smile}{\varrho\alpha}})\, g^{\underset{\smile}{\alpha\beta}}\sqrt{h/g}\,. \tag{49.12}$$

Pour que les conditions de conservation (49.9) soient satisfaites, il est nécessaire et suffisant que le second membre de (49.12) soit nul, c'est-à-dire si l'on suppose $f^{-1} = \text{dét}\,(g^{\underset{\smile}{\alpha\beta}}) \neq 0$, que l'on ait :

$$\partial_\alpha\, R_{\underset{\smile}{\beta\gamma}} + \partial_\beta\, R_{\underset{\smile}{\gamma\alpha}} + \partial_\gamma\, R_{\underset{\smile}{\alpha\beta}} = 0\,,$$

condition d'ailleurs identique à $\partial_\alpha\, W_{\underset{\smile}{\beta\gamma}} + \partial_\beta\, W_{\underset{\smile}{\gamma\alpha}} + \partial_\gamma\, W_{\underset{\smile}{\alpha\beta}} = 0$, d'après la relation entre $R_{\alpha\beta}$ et $W_{\alpha\beta}$. Sur (49.12) on voit, en particulier, que les équations de champ $R_{\underset{\smile}{\alpha\beta}} = 0$ entrainent (49.9).

Le coefficient $\sqrt{h/g}$ peut être introduit par différentes considérations. On est arrivé à cette valeur d'abord par des considérations sur la théorie de BORN-INFELD [19]. Nous le trouvons ensuite par les conditions d'isothermie, étroitement liées aux variétés caractéristiques et également par les conditions de conservation du tenseur d'énergie que l'on extrait des équations du champ. Nous pouvons dire que dans le choix de la métrique, le problème de CAUCHY joue un rôle fondamental en déterminant ce tenseur (à un coefficient de proportionnalité près). Le rôle des autres considérations est secondaire ; il consiste simplement à préciser la valeur de ce coefficient. On conçoit par exemple, que les conditions d'isothermie, au nombre de quatre, ne suffisent pas à nous donner les dix composantes du tenseur métrique.

([19]) S. MAVRIDES. J. Physique Rad. 16 (1955) p. 482.

50. — Les équations rigoureuses des champs.

Nous formons les équations de la théorie d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER en fonction des champs symétrique $a^{\alpha\beta}$ et antisymétrique $q^{\alpha\beta}$ définis par les relations :

$$a^{\alpha\beta} = \sqrt{h/g}\, h^{\alpha\beta}\,, \qquad q^{\alpha\beta} = \sqrt{h/g}\, f^{\alpha\beta}\,. \tag{50.1}$$

Nous avons d'abord, d'après (50.1) :

$$\partial_\varrho (\sqrt{-g}\, f^{\varrho\beta}) = \partial_\varrho (\sqrt{-a}\, q^{\varrho\beta}) = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \nabla_\varrho\, q^{\varrho\beta}\,,$$

l'équation (49.2) est donc équivalente à :

$$\nabla_\varrho\, q^{\varrho\beta} = 0\,. \tag{E}$$

Scindons la connexion L en parties symétrique et antisymétrique en posant :

$$L^\varrho_{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} \varrho \\ \alpha\ \beta \end{Bmatrix} + w^\varrho_{\alpha\beta} + \underset{\smile}{L}{}^\varrho_{\alpha\beta} \qquad \left(\underline{L}{}^\varrho_{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} \varrho \\ \alpha\ \beta \end{Bmatrix} + w^\varrho_{\alpha\beta} \right) \tag{50.2}$$

$\begin{Bmatrix} \varrho \\ \alpha\ \beta \end{Bmatrix}$ représentant les symboles de CHRISTOFFEL formés avec les $a_{\alpha\beta}$.

Les équations (49.4) et (49.3) s'écrivent ainsi :

$$\underset{\smile}{R}{}_{\alpha\beta} = \nabla_\varrho\, \underset{\smile}{L}{}^\varrho_{\alpha\beta} + \underset{\smile}{L}{}^\varrho_{\alpha\beta}\, w^\lambda_{\varrho\lambda} - (w^\lambda_{\alpha\varrho}\, \underset{\smile}{L}{}^\varrho_{\lambda\beta} + w^\varrho_{\lambda\beta}\, \underset{\smile}{L}{}^\lambda_{\alpha\varrho}) - \frac{2}{3}(\partial_\alpha \Gamma_\beta - \partial_\beta \Gamma_\alpha) = 0\,, \tag{E'}$$

$$\underline{R}{}_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} + \nabla_\varrho\, w^\varrho_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \nabla_\alpha \nabla_\beta \operatorname{Log} |\, g\, | + w^\varrho_{\alpha\beta}\, w^\lambda_{\varrho\lambda} - \tag{G}$$

$$- (w^\lambda_{\alpha\varrho}\, w^\varrho_{\lambda\beta} + \underset{\smile}{L}{}^\lambda_{\alpha\varrho}\, \underset{\smile}{L}{}^\varrho_{\lambda\beta}) = 0\,.$$

Dans ces équations, la connexion affine, considérée comme fonction des champs et de leurs dérivées premières, est fournie par la solution (unique dans les hypothètes faites) du système (49.1).

Les équations rigoureuses du champ unifié sont alors :

a) pour l'électromagnétisme : les deux systèmes (E) et (E') ;

b) pour la gravitation : le système (G).

Le système (G) écrit sous la forme (49.8) nous donnera l'expression du tenseur d'impulsion-énergie.

Il est aisé, en utilisant les formules de la connexion L en fonction de $h^{\alpha\beta}, f^{\alpha\beta}$ [42], de calculer L en fonction des tenseurs proportionnels $a^{\alpha\beta}$, $q^{\alpha\beta}$. On trouve ainsi :

$$(50.3)\qquad w^{\varrho}_{\mu\nu} = \left\{ {\varrho \atop \mu\ \nu} \right\}_h - \left\{ {\varrho \atop \mu\ \nu} \right\} -$$

$$-\frac{1}{2} a^{\varrho\lambda} [q^{\sigma}{}_{\underline{\mu}} (L_{\sigma\lambda,\nu} - L_{\sigma\nu,\lambda}) + q^{\sigma}{}_{\underline{\nu}} (L_{\sigma\lambda,\mu} - L_{\sigma\mu,\lambda}) -$$

$$- q^{\sigma}{}_{\underline{\lambda}} (L_{\sigma\mu,\nu} + L_{\sigma\nu,\mu})] ,$$

où la différence entre les symboles de CHRISTOFFEL relatifs à $h_{\alpha\beta}$ et à $a_{\alpha\beta}$ est égale à :

$$\left\{ {\varrho \atop \mu\ \nu} \right\}_h - \left\{ {\varrho \atop \mu\ \nu} \right\} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{g}}\, a^{\varrho\sigma} \left(a_{\nu\sigma} \partial_\mu \sqrt{\frac{g}{a}} + a_{\mu\sigma} \partial_\nu \sqrt{\frac{g}{a}} - a_{\mu\nu} \partial_\sigma \sqrt{\frac{g}{a}} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\delta^{\varrho}_{\nu} \nabla_\mu \operatorname{Log} \frac{g}{a} + \delta^{\varrho}_{\mu} \nabla_\nu \operatorname{Log} \frac{g}{a} - a_{\mu\nu} a^{\varrho\sigma} \nabla_\sigma \operatorname{Log} \frac{g}{a} \right)$$

et où la partie antisymétrique $L_{\underset{\smile}{\mu\nu}\,\varrho} = a_{\lambda\varrho} L^{\lambda}_{\underset{\smile}{\mu\nu}}$ est donnée par des formules explicites mais qu'il serait trop long de reproduire ici ; nous n'indiquerons que sa valeur approchée, au paragraphe suivant.

51. — Les équations approchées.

Supposons que le champ $q^{\alpha\beta}$ soit petit devant l'unité ainsi que ses dérivées et qu'il admet des développements limités jusqu'à un certain ordre en fonction d'un paramètre ε. Dans les applications, ε joue le rôle du paramètre $1/c^2$. Pour écrire les équations approchées du champ, il n'est pas nécessaire de faire a priori une hypothèse sur l'ordre de grandeur du champ symétrique $a_{\alpha\beta}$. On obtient de cette façon des expressions synthétiques, à partir desquelles on peut déduire si l'on veut les équations approchées pour un développement donné des $a_{\alpha\beta}$.

L'emploi de la solution générale du système (49.1) permet d'obtenir les valeurs approchées de la connexion à un ordre quelconque, sans avoir besoin de faire des approximations successives. On en déduit ensuite les équations approchées du champ au même ordre. L'approximation du deuxième ordre est suffisante pour les applications physiques ; les équations du champ y prennent une forme relativement simple, et elles fournissent des résultats intéressants.

Nous supposons donc :

$$q^{\alpha\beta} = \varepsilon \underset{1}{q^{\alpha\beta}} + \varepsilon^2 \underset{2}{q^{\alpha\beta}} + 0\,(\varepsilon^3)\,, \tag{51.1}$$

alors la partie antisymétrique de la connexion a pour valeur :

$$L^{\varrho}_{\underset{\smile}{\mu\nu}} = a^{\varrho\sigma}\,(\nabla_\sigma\, q_{\underline{\mu}\,\underline{\nu}} - \frac{1}{2}\, q_{\underline{\mu}\,\underline{\nu}\,\underline{\sigma}}) + 0\,(\varepsilon^3)\,, \tag{51.2}$$

d'où :

$$w^{\varrho}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left(\delta^{\varrho}_{\nu}\,\nabla_\mu \operatorname{Log}\frac{g}{a} + \delta^{\varrho}_{\mu}\,\nabla_\nu \operatorname{Log}\frac{g}{a} - a_{\mu\nu}\, a^{\varrho\sigma}\,\nabla_\sigma \operatorname{Log}\frac{g}{a}\right) + \tag{51.3}$$

$$+ \frac{1}{2}\,(q^{\sigma}{}_{\underline{\mu}}\,\nabla_\sigma\, q_{\underline{\nu}}{}^{\varrho} + q^{\sigma}{}_{\underline{\nu}}\,\nabla_\sigma\, q_{\underline{\mu}}{}^{\varrho}) - \frac{1}{2}\, q^{\sigma\varrho}\,(\nabla_\nu\, q_{\underline{\sigma}\underline{\mu}} + \nabla_\mu\, q_{\underline{\sigma}\underline{\nu}}) + 0\,(\varepsilon^3)$$

avec

$$\frac{g}{a} = 1 + \frac{a}{q} + \frac{1}{2}\, q_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}\, q^{\alpha\beta} = 1 + \frac{1}{2}\, q_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}\, q^{\alpha\beta} + 0\,(\varepsilon^4)\,. \tag{51.4}$$

Posons :

$$\partial^\alpha\, \Gamma_\beta - \partial_\beta\, \Gamma_\alpha = -\frac{3}{4}\,\chi\, F_{\alpha\beta}\,, \tag{51.5}$$

On déduit immédiatement de (E), (E′) et de (G) :

a) pour l'électromagnétisme :

$$\nabla_\alpha\, q^{\alpha\beta} = 0\,, \tag{51.6}$$

$$\nabla_\varrho\, \nabla^\varrho\, q_{\underline{\mu}\underline{\nu}} - \frac{1}{2}\,\nabla^\varrho\, q_{\underline{\mu}\underline{\nu}\underline{\varrho}} = -\frac{\chi}{2}\, F_{\mu\nu} + 0\,(\varepsilon^3) \qquad \nabla^\alpha = a^{\alpha\lambda}\,\nabla_\lambda\,; \tag{51.7}$$

b) pour la gravitation :

$$G_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\nabla_\varrho\,[(q^{\sigma}{}_{\underline{\mu}}\,\nabla_\sigma\, q_{\underline{\nu}}{}^{\varrho} + q^{\sigma}{}_{\underline{\nu}}\,\nabla_\sigma\, q_{\underline{\mu}}{}^{\varrho}) - q^{\sigma\varrho}\,(\Delta_\nu\, q_{\underline{\sigma}\underline{\mu}} + \nabla_\mu\, q_{\underline{\sigma}\underline{\nu}})] - \tag{51.8}$$

$$- \frac{1}{4}\, a_{\mu\nu}\,\nabla_\varrho\,\nabla^\varrho \operatorname{Log}|\,g\,| - (\nabla^\lambda\, q_{\underline{\mu}\underline{\varrho}} - \frac{1}{2}\, q_{\underline{\mu}\underline{\varrho}}{}^{\lambda})\,(\nabla^\varrho\, q_{\underline{\lambda}\underline{\nu}} - \frac{1}{2}\, q_{\underline{\lambda}\underline{\nu}}{}^{\varrho}) = 0\,(\varepsilon^3)\,.$$

Nous allons transformer les équations (51.7), (51.8) en tenant compte de (51.6).

52. — Les équations électromagnétiques [19].

Considérons maintenant les équations (51.6) (51.7). Pour transformer l'équation (51.7), formons l'expression $\nabla^{\varrho} q_{\underline{\mu\nu\varrho}}$ à partir de la définition des $q_{\underline{\mu\nu\varrho}}$:

$$q_{\underline{\mu\nu\varrho}} = \nabla_{\mu} q_{\underline{\nu\varrho}} + \nabla_{\nu} q_{\underline{\varrho\mu}} + \nabla_{\varrho} q_{\underline{\mu\nu}} \,.$$

En faisant apparaître $\nabla_{\varrho} \nabla^{\varrho} q_{\underline{\mu\nu}}$, il vient :

$$\nabla^{\varrho} q_{\underline{\mu\nu\varrho}} = \nabla_{\varrho} \nabla^{\varrho} q_{\underline{\mu\nu}} + \tag{52.1}$$

$$+ a^{\varrho\lambda} [(\nabla_{\lambda} \nabla_{\mu} - \nabla_{\mu} \nabla_{\lambda}) q_{\underline{\nu\varrho}} + (\nabla_{\lambda} \nabla_{\nu} - \nabla_{\nu} \nabla_{\lambda}) q_{\underline{\varrho\mu}}] +$$

$$+ \nabla_{\mu} \nabla^{\varrho} q_{\underline{\nu\varrho}} + \nabla_{\nu} \nabla^{\varrho} q_{\underline{\varrho\mu}} \,.$$

En utilisant les relations de commutation des dérivées covariantes :

$$(\nabla_{\varrho} \nabla_{\sigma} - \nabla_{\sigma} \nabla_{\varrho} q_{\underline{\mu\nu}}) = G^{\tau}{}_{\mu\varrho\sigma} q_{\underline{\tau\nu}} + G^{\tau}{}_{\nu\varrho\sigma} q_{\underline{\mu\tau}} \,, \tag{52.2}$$

et les identités sur le tenseur de Riemann-Christoffel $G^{\varrho}{}_{\mu\nu\sigma}$, et en tenant compte aussi de (51.6), on obtient :

$$\nabla^{\varrho} q_{\underline{\mu\nu\varrho}} = \nabla_{\varrho} \nabla^{\varrho} q_{\underline{\mu\nu}} - G^{\varrho\sigma}_{\ \ \mu\nu} q_{\underline{\varrho\sigma}} - (G^{\tau}{}_{\mu} q_{\underline{\nu\tau}} + G^{\tau}{}_{\nu} q_{\underline{\tau\mu}}) \,, \tag{52.3}$$

c'est-à-dire, d'après (51.8) :

$$\nabla^{\varrho} q_{\underline{\mu\nu\varrho}} = \nabla_{\varrho} \nabla^{\varrho} q_{\underline{\mu\nu}} - G^{\varrho\sigma}_{\ \ \mu\nu} q_{\underline{\varrho\sigma}} + 0 (\varepsilon^{3}) \,. \tag{52.4}$$

Les équations fondamentales de l'électromagnétisme (51.6) (51.7) s'écrivent donc encore :

$$\nabla_{\varrho} q^{\varrho\beta} = 0 \,, \tag{52.5}$$

$$\square\, q_{\underline{\mu\nu}} = - \chi F_{\mu\nu} - G^{\tau\sigma}_{\ \ \mu\nu} q_{\underline{\tau\sigma}} + 0 (\varepsilon^{3}) \,, \quad (\square = \nabla^{\varrho} \nabla_{\varrho}). \tag{52.6}$$

---

[20] Cf. M. A. Tonnelat. [13].

De ces équations on peut déduire les deux conséquences suivantes :

1) En appliquant l'opérateur ∇^ν à (52.6), on obtient l'équation :

$$\nabla^\nu (\nabla^\varrho \nabla_\varrho \underline{\underline{q_{\mu\nu}}}) = - \nabla^\nu (\chi F_{\mu\nu}) - (\nabla^\nu G^{\tau\sigma}_{\mu\nu}) \underline{\underline{q_{\tau\sigma}}} - G^{\tau\sigma}_{\mu\nu} \nabla^\nu \underline{\underline{q_{\tau\sigma}}} + 0(\varepsilon^3), \tag{52.7}$$

que l'on transforme en :

$$2\, G^{\lambda\nu}_{\mu\varrho} \nabla^\varrho \underline{\underline{q_{\lambda\nu}}} + \frac{3}{2} (\nabla_\varrho G^{\varrho\lambda\nu}_{\mu}) \underline{\underline{q_{\lambda\nu}}} = - \nabla^\nu (\chi F_{\mu\nu}) + 0(\varepsilon^3). \tag{52.8}$$

Mais on a en contractant les identités de BIANCHI :

$$\nabla_\varrho G^\varrho_{\mu\nu\sigma} = \nabla_\sigma G_{\mu\nu} - \nabla_\nu G_{\mu\sigma} .$$

Par conséquent, le second terme de (52.8) est d'après (51.8) du troisième ordre. On a donc simplement :

$$\nabla^\alpha (\chi F_{\mu\alpha}) = - 2\, G^{\lambda\alpha}_{\mu\varrho} \nabla^\varrho \underline{\underline{q_{\lambda\alpha}}} + 0(\varepsilon^3). \tag{52.9}$$

2) Appliquons maintenant ∇_λ à (52.6) et effectuons une permutations circulaire sur les indices λ, μ, ν. En tenant compte de l'équation (51.6), on obtient :

$$\begin{aligned} \square\, \underline{\underline{q_{\mu\nu\lambda}}} &= 2\,(G^{\tau\varrho}_{\mu\lambda} \nabla_\nu \underline{\underline{q_{\tau\varrho}}} + G^{\tau\varrho}_{\lambda\nu} \nabla_\mu \underline{\underline{q_{\tau\varrho}}} + G^{\tau\varrho}_{\nu\mu} \nabla_\lambda q_{\tau\varrho}) - \\ &\quad - (G^{\tau\varrho}_{\mu\lambda} \underline{\underline{q_{\tau\varrho\nu}}} + G^{\tau\partial}_{\lambda\nu} \underline{\underline{q_{\tau\varrho\mu}}} + G^{\tau\varrho}_{\nu\mu} \underline{\underline{q_{\tau\mu\lambda}}}) + 0(\varepsilon^3), \end{aligned} \tag{52.10}$$

On montre que le deuxième terme du second membre est égal à $G^{\varrho\sigma}_{\varrho\sigma}\, q_{\mu\nu\lambda}$, qui est du troisième ordre. L'équation (52.10) s'écrit encore :

$$\square\, \underline{\underline{q_{\mu\nu\lambda}}} = 2\,(G^{\tau\varrho}_{\mu\lambda} \nabla_\nu \underline{\underline{q_{\tau\varrho}}} + G^{\tau\varrho}_{\lambda\nu} \nabla_\mu \underline{\underline{q_{\tau\varrho}}} + G^{\tau\varrho}_{\nu\mu} \nabla_\lambda \underline{\underline{q_{\tau\varrho}}}) + 0(\varepsilon^3),$$

ou, en multipliant les deux membres par $(1/6)\, \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ et en sommant :

$$\frac{1}{6} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \square\, \underline{\underline{q_{\mu\nu\lambda}}} = - \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} G^{\tau\varrho}_{\mu\nu} (\nabla_\lambda \underline{\underline{q_{\tau\varrho}}}) + 0(\varepsilon^3). \tag{52.11}$$

Sous cette forme,on reconnait l'expression indiquée par E. SCHRÖDINGER pour mettre en évidence l'existence d'un courant lié directement à la présence d'une courbure riemannienne [21].

---

[21] E. SCHRÖDINGRR. Proc. Roy. Ir. Acad. 56 A (1956) p. 13.

53. — Les équations de la gravitation.

Les équations (51.8) s'écrivent encore :

(53.1) $$G_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left[q_{\underline{\sigma\mu}}\left(\nabla^{\varrho}\nabla^{\sigma} - \nabla^{\sigma}\nabla^{\varrho}\right)q_{\underline{\nu\varrho}} + q_{\underline{\sigma\nu}}\left(\nabla^{\varrho}\nabla^{\sigma} - \nabla^{\sigma}\nabla^{\varrho}\right)q_{\underline{\mu\varrho}}\right] -$$

$$-\frac{1}{2}q^{\sigma\varrho}\nabla_{\varrho}\left(\nabla_{\nu}q_{\underline{\sigma\mu}} + \nabla_{\mu}q_{\underline{\sigma\nu}}\right) - \frac{1}{8}a_{\mu\nu}\nabla_{\varrho}\nabla^{\varrho}\left(q_{\underline{\alpha\beta}}q^{\alpha\beta}\right) -$$

$$-\frac{1}{4}\left(q_{\underline{\mu\varrho\lambda}}\nabla_{\nu}q^{\varrho\lambda} + q_{\underline{\nu\varrho\lambda}}\nabla_{\mu}q^{\varrho\lambda}\right) + \frac{1}{4}q_{\underline{\mu\varrho\lambda}}q_{\nu}{}^{\varrho\lambda} = 0\,(\varepsilon^{3}),$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (51.6) (52.2) :

(53.2) $$G_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\left(q^{\sigma}{}_{\underline{\mu}}G^{\tau\varrho}{}_{\sigma\nu} + q^{\sigma}{}_{\nu}G^{\tau\varrho}{}_{\sigma\mu}\right)q_{\underline{\tau\varrho}} - \frac{1}{2}q^{\sigma\varrho}\nabla_{\varrho}\left(\nabla_{\nu}q_{\underline{\sigma\mu}} + \nabla_{\mu}q_{\underline{\sigma\nu}}\right) -$$

$$-\frac{1}{8}a_{\mu\nu}\nabla_{\varrho}\nabla^{\varrho}\left(q_{\underline{\alpha\beta}}q^{\alpha\beta}\right) - \frac{1}{4}\left(q_{\underline{\mu\varrho\lambda}}\nabla_{\nu}q^{\varrho\lambda} + q_{\underline{\nu\varrho\lambda}}\nabla_{\mu}q^{\varrho\lambda}\right) + \frac{1}{4}q_{\underline{\mu\varrho\lambda}}q_{\underline{\nu}}^{\varrho\lambda} = 0\,(\varepsilon^{3}).$$

Par contraction des indices μ, ν dans (53.2) il vient :

$$G - \frac{1}{2}q^{\lambda\sigma}G^{\tau\varrho}_{\lambda\sigma}q_{\underline{\tau\varrho}} - \frac{1}{2}\nabla_{\varrho}\nabla^{\varrho}\left(q_{\underline{\alpha\beta}}q^{\alpha\beta}\right) + \frac{1}{12}q_{\underline{\tau\varrho\lambda}}q^{\tau\varrho\lambda} = 0\,(\varepsilon^{3}).$$

Ecrivons les équations (53.2) sous la forme (49.8)

$$S_{\alpha\beta} = \chi\,T_{\alpha\beta},$$

pour mettre en évidence l'expression approchée au second ordre du tenseur d'impulson-énergie. On trouve :

(53.3) $$T_{\mu\nu} = \left(A_{\mu\nu} + M_{\mu\nu} + X_{\mu\nu} + Y_{\mu\nu}\right) + 0\,(\varepsilon^{3}),$$

en posant :

(53.4) $$A_{\mu\nu} = \frac{1}{4}a_{\mu\nu}q^{\varrho\sigma}F_{\varrho\sigma},$$

(24.5) $$M_{\mu\nu} = \frac{1}{4\chi}\left(-q_{\underline{\mu\varrho\lambda}}q_{\nu}{}^{\varrho\lambda} + \frac{1}{6}a_{\mu\nu}q_{\underline{\tau\sigma\lambda}}q^{\tau\sigma\lambda}\right),$$

(53.6) $$X_{\mu\nu} = \frac{1}{4\chi}[2\, q^{\sigma\varrho}\, \nabla_\varrho (\nabla_\nu\, q_{\underline{\sigma\mu}} + \nabla_\mu\, q_{\underline{\sigma\nu}}) + (q_{\underline{\mu\varrho\lambda}}\, \nabla_\nu\, q^{\varrho\lambda} + q_{\underline{\nu\varrho\lambda}}\, \nabla_\mu\, q^{\varrho\lambda}) - - a_{\mu\nu}\, \nabla_\varrho\, q_{\underline{\lambda\sigma}}\, \nabla^\varrho\, q^{\lambda\sigma}],$$

(53.7) $$Y_{\mu\nu} = \frac{1}{4\chi}(G^{\tau\varrho}{}_{\sigma\nu}\, q^{\sigma}{}_{\underline{\mu}} + G^{\tau\varrho}{}_{\sigma\mu}\, q^{\sigma}{}_{\underline{\nu}})\, q_{\underline{\tau\varrho}}\,.$$

$A_{\mu\nu}$ fait intervenir les produits des $q^{\alpha\beta}$ et $F_{\alpha\beta}\ (= -\frac{4}{3\chi}(\partial_\alpha\, \Gamma_\beta - \partial_\beta\, \Gamma_\alpha))$; $M_{\mu\nu}$ ne dépend que du courant $q_{\underline{\alpha\beta\lambda}}$ et joue le rôle d'un tenseur matériel ; $X_{\mu\nu}$ contient les dérivées secondes de $q^{\alpha\beta}$; $Y_{\mu\nu}$ introduit explicitement la courbure riemannienne rapportée aux $a_{\alpha\beta}$.

On est assuré, par le résultat du paragraphe 49, que l'ensemble du tenseur (53.3) vérifie les conditions :

$$\nabla_\alpha (\chi\, T^{\alpha}{}_{\beta}) = 0\,(\varepsilon^3)\,,$$

et qu'il possède ainsi les propriétés qui caractérisent le tenseur d'impulsion-énergie.

D'une façon générale, l'expression $\underline{R_{\alpha\beta}}$ d'ordre p ne contient que les $q^{\alpha\beta}$ d'ordre $\leq p-1$; à la p ème approximation, nour devons supposer que les équations du champ d'ordre $(p-1)$ sont satisfaites. en particulier nous avons $\underset{\smile}{R_{\alpha\beta}} = 0\,(\varepsilon^p)$ et les conditions de conservation du tenseur d'énergie d'ordre p sont certainement satisfaites.

L'expression du tenseur d'énergie que nous obtenons est assez différente de crlle que l'on obtient avec la métrique $\gamma_{\alpha\beta}$ et le champ $\varphi_{\alpha\beta}$, expression dans laquelle figure un tenseur d'énergie électromagnétique symétrisé, dans le cas où existent à la fois champ et induction : [22]

$$\tau_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\varphi_{\mu\tau}\, F_\nu{}^\tau + \varphi_{\nu\tau}\, F_\mu{}^\tau) + \frac{1}{4}\gamma_{\mu\nu}\, \varphi_{\lambda\tau}\, F^{\lambda\tau}\,.$$

REMARQUE. — Les formules de $w^\varrho_{\alpha\beta}\left(= L^\varrho_{\underline{\alpha\beta}} - \left\{ {\varrho \atop \alpha\ \beta} \right\}\right)$, les équations de la gravitation et l'expression du tenseur d'énergie qui s'en déduit, ont été écrites à la seconde approximation. En réalité, elles sont encore valables, sans changement, à la troisième approximation. Mais les équations de l'électromagnétisme (51.7) sont strictement valables à la seconde approximation.

---

[22] M. A. TONNELAT. [3].

54. — Introduction des coordonnées isothermes dans les équations approchées.

Rappelons qu'en théorie du champ unifié, un système de coordonnées (x^α) est dit isotherme si les quatre quantités $(-g^{\mu\nu} L^{\alpha}_{\mu\nu})$ sont nulles :

$$F^\alpha \equiv -g^{\mu\nu} L^{\alpha}_{\mu\nu} = 0 . \tag{54.1}$$

D'après le premier groupe des équations du champ (44-1) (49.2), les conditions (54.1) sont les mêmes que les suivantes :

$$\Delta_2 (x^\alpha) = -a^{\mu\nu} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu \ \nu \end{Bmatrix} = 0 , \tag{54.2}$$

qui sont les conditions d'isothermie de la relativité générale.

On sait qu'en relativité générale, les quantités $\Delta_2 (x^\alpha)$ inierviennent de façon simple dans le tenseur de Ricci. Les équations d'Einstein du cas extérieur peuvent ainsi se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} a^{\varrho\sigma} \partial_{\varrho\sigma} a_{\mu\nu} - \frac{1}{2} a_{\mu\sigma} \partial_\nu (\Delta_2 x^\sigma) - \frac{1}{2} a_{\nu\sigma} \partial_\mu (\Delta_2 x^\sigma) + \\ + H_{\mu\nu} (a_{\alpha\beta}, \partial_\gamma a_{\alpha\beta}) = 0 . \end{aligned} \tag{54.3}$$

Par conséquent, si les coordonnées sont isothermes la séparation des potentiels, dans les dérivées secondes, est complète.

Considérons maintenant les équations de l'électromagnétisme (52.5) (52.6) et de la gravitation (53.2) que nous récrivons :

$$\nabla_\varrho q^{\varrho\beta} = 0 , \tag{54.4}$$

$$\nabla_\varrho \nabla^\varrho \underline{\underline{q_{\mu\nu}}} = -\chi F_{\mu\nu} - G^{\tau\varrho}_{\ \ \mu\nu} \underline{\underline{q_{\tau\sigma}}} + 0 (\varepsilon^3) ; \tag{54.5}$$

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} - \frac{1}{4} (q^{\sigma}_{\ \underline{\mu}} G^{\tau\varrho}_{\ \ \sigma\nu} + q^{\sigma}_{\ \underline{\nu}} G^{\tau\varrho}_{\ \ \sigma\mu}) \underline{\underline{q_{\tau\varrho}}} - \frac{1}{2} q^{\sigma\varrho} \nabla_\varrho (\nabla_\nu \underline{\underline{q_{\sigma\mu}}} + \nabla_\mu \underline{q_{\sigma\nu}}) - \\ - \frac{1}{8} a_{\mu\nu} \nabla_\varrho \nabla^\varrho (\underline{\underline{q_{\alpha\beta}}} q^{\alpha\beta}) - \frac{1}{4} (\underline{\underline{q_{\mu\varrho\lambda}}} \nabla_\nu q^{\varrho\lambda} + \underline{\underline{q_{\nu\varrho\lambda}}} \nabla_\mu q^{\varrho\lambda}) + \\ + \frac{1}{4} \underline{\underline{q_{\mu\varrho\lambda}}} \underline{q_{\nu}}^{\varrho\lambda} = 0 (\varepsilon^3) , \end{aligned} \tag{54.6}$$

et cherchons ce qu'elle deviennent en coordonnées isothermes. Le terme $G_{\mu\nu}$ se simplifie suivant (54.3); mais il y aura peu de simplification pour les autres termes, les quantités F^{α} interviennent seulement dans $\nabla_{\varrho} \nabla^{\varrho} \underline{q}_{\mu\nu}$ et $-\frac{1}{8} a_{\mu\nu} \nabla_{\varrho} \nabla^{\varrho} (\underline{q}_{\alpha\beta} q^{\alpha\beta})$. Nous n'expliciterons que les dérivées secondes; le symbole $\sim$ désignera une congruence modulo des fonctions additives des champs et de leurs dérivées premières.

a) Il n'y a aucun changement dans (54.4). Dans (54.5) les dérivées secondes du premier membre se réduisent au dalembertien $a^{\varrho\sigma} \partial_{\varrho\sigma} \underline{q}_{\mu\nu}$ et à des dérivées de F^{α}, compte tenu de (54.3) (54.6):

$$\nabla^{\varrho} \nabla_{\varrho} q_{\mu\nu} \sim a^{\varrho\sigma} \partial_{\varrho\sigma} \underline{q}_{\mu\nu} - a^{\varrho\sigma} (\partial_{\sigma} [\mu\, \varrho\, , \lambda]\, \underline{q}^{\lambda}{}_{\nu} + \partial_{\sigma} [\nu\, \varrho\, , \lambda]\, \underline{q}_{\mu}{}^{\lambda})$$

$$\sim a^{\varrho\sigma} \partial_{\varrho\sigma} \underline{q}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} a^{\varrho\sigma} (\partial_{\varrho\sigma} a_{\mu\lambda}\, \underline{q}^{\lambda}{}_{\nu} + \partial_{\varrho\sigma} a_{\nu\lambda}\, \underline{q}_{\mu}{}^{\lambda})$$

$$-\frac{1}{2} (\partial_{\mu} F^{\lambda}\, \underline{q}_{\lambda\nu} + \partial_{\nu} F^{\lambda}\, \underline{q}_{\mu\lambda}) + \frac{1}{2} (a_{\mu\lambda}\, \underline{q}^{\gamma}{}_{\nu} + a_{\nu\lambda}\, \underline{q}_{\mu}{}^{\gamma})\, \partial_{\gamma} F^{\lambda} + 0\,(\varepsilon^3),$$

d'autre part:

$$- G^{\tau\sigma}{}_{\mu\tau}\, \underline{q}_{\tau\sigma} \sim - q^{\tau\sigma} (\partial_{\nu\sigma} a_{\mu\tau} - \partial_{\mu\sigma} a_{\nu\tau}) .$$

En coordonnées isothermes, les équations (54.5) s'écrivent donc:

$$a^{\varrho\sigma} \partial_{\varrho\sigma} \underline{q}_{\mu\nu} = - q^{\tau\sigma} (\partial_{\nu\sigma} a_{\mu\tau} - \partial_{\mu\sigma} a_{\nu\tau}) - \chi\, F_{\mu\nu} + \Phi_{\mu\nu} + 0\,(\varepsilon^3)\,, \tag{54.7}$$

$\Phi_{\mu\nu}$ étant une fonction des champs et de leurs dérivées premières.

b) Les dérivées secondes des champs qui figurent dans les équations (54.6) sont contenues dans $G_{\mu\nu}$ suivant la formule (54.3), et dans les termes:

$$-\frac{1}{4} (\underline{q}^{\sigma}{}_{\mu} G^{\tau\varrho}{}_{\sigma\nu} + \underline{q}^{\sigma}{}_{\nu}\, G^{\tau\varrho}{}_{\sigma\mu})\, \underline{q}_{\tau\varrho} - \frac{1}{2} q^{\sigma\varrho} \nabla_{\varrho} (\nabla_{\nu} \underline{q}_{\sigma\mu} + \nabla_{\mu} \underline{q}_{\sigma\nu}) -$$

$$-\frac{1}{8} a_{\mu\nu} \nabla_{\varrho} \nabla^{\varrho} (\underline{q}_{\alpha\beta}\, q^{\alpha\beta})\,,$$

qui sont congrus $\sim$ à:

$$-\frac{1}{4} [\underline{q}^{\sigma}{}_{\mu} (\partial_{\varrho\nu} a_{\sigma\tau} - \partial_{\varrho\sigma} a_{\nu\tau}) + \underline{q}^{\sigma}{}_{\nu} (\partial_{\varrho\mu} a_{\sigma\tau} - \partial_{\varrho\sigma} a_{\mu\tau})]\, q^{\tau\varrho} -$$

$$-\frac{1}{2} q^{\sigma\varrho} (\partial_{\varrho\nu} \underline{q}_{\sigma\mu} + \partial_{\varrho\mu} \underline{q}_{\sigma\nu} - \partial_{\varrho} [\sigma\, \mu\, , \lambda]\, \underline{q}^{\lambda}{}_{\nu} - \partial_{\varrho} [\sigma\, \nu\, , \lambda]\, \underline{q}^{\lambda}{}_{\mu} -$$

$$- 2\, \partial_{\varrho} [\mu\, \nu\, , \lambda]\, \underline{q}_{\sigma}{}^{\lambda}) - \frac{1}{4} a_{\mu\nu}\, q^{\alpha\beta} (a^{\varrho\sigma} \partial_{\varrho\sigma} \underline{q}_{\alpha\beta})\,,$$

après simplification on obtient :

$$-\frac{1}{2}\, q^{\sigma\varrho}\,(\partial_{\varrho\nu}\, q_{\underline{\sigma\mu}} + \partial_{\varrho\mu}\, q_{\underline{\sigma\nu}}) + q^{\sigma\varrho}\,\partial_\varrho\,[\mu\,\nu\,,\lambda]\, q_{\underline{\sigma}}{}^{\lambda} - \frac{1}{4}\, a_{\mu\nu}\, q^{\alpha\beta}\,(a^{\varrho\sigma}\,\partial_{\varrho\sigma}\, q_{\underline{\alpha\beta}})\,.$$

En coordonnées isothermes, les équations (54.6) prennent donc la forme :

$$-\frac{1}{2}\, a^{\varrho\sigma}\,\partial_{\varrho\sigma}\, a_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, q^{\sigma\varrho}\,(\partial_{\varrho\nu}\, q_{\underline{\sigma\mu}} + \partial_{\varrho\mu}\, q_{\underline{\sigma\nu}}) - q^{\varrho\sigma}\,\partial_\varrho\,[\mu\,\nu\,,\lambda]\, q_{\underline{\sigma}}{}^{\lambda} +$$

$$+\frac{1}{4}\, a_{\mu\nu}\, q^{\alpha\beta}\,(a^{\varrho\sigma}\,\partial_{\varrho\sigma}\, q_{\underline{\alpha\beta}}) + \psi_{\mu\nu} + 0\,(\varepsilon^3)\,,$$

$\psi_{\mu\nu}$ désignant une fonction des champs et de leurs dérivées premières.

Sur (54.7) et (54.8) on voit que la séparation des champs n'existe pas pour l'ensemble des dévivées secondes (excepté évidemment pour l'équation (54.8) du premier ordre). Mais elle a lieu pour les dérivées secondes ne contenant pas en facteur le champ petit $q^{\alpha\beta}$, dérivées que nous avons isolées au premier membre. Si l'on tient compte des hypothèses quasi-galiléennes, la séparation des champs devient donc effective, et l'on peut résoudre les équations (54.7) (54.8) par des méthodes d'approximation. Les équations que l'on obtient par (54.7) (54.8) en faisant les développements limités :

$$a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \varepsilon\, \underset{1}{a_{\alpha\beta}} + \varepsilon^2\, \underset{2}{a_{\alpha\beta}} + 0\,(\varepsilon^3)\,,$$

ne sont autres que les équations approchées écrites au paragraphe 42 du chapitre IV.

NOTE. — Considérons les conditions plus générales:

$$-\, g^{\mu\nu}\, \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \equiv F^{\alpha} - \frac{2}{3}\, g^{\alpha\lambda}\, \Gamma_\lambda = 0 \qquad (F^{\alpha} \equiv -\, g^{\mu\nu}\, L^{\alpha}_{\mu\nu}).$$

Dans un système de coordonnées satisfaisant à ces conditions, on a :

$$-\frac{1}{2}\, a_{\mu\alpha}\,\partial_\nu\,(F^{\alpha}) - \frac{1}{2}\, a_{\nu\mu}\,\partial_\mu\,(F^{\alpha}) = \frac{1}{3}\, a_{\mu\alpha}\,\partial_\nu\,(g^{\alpha\lambda}\,\Gamma_\lambda) +$$

$$+\frac{1}{3}\, a_{\nu\alpha}\,\partial_\mu\,(g^{\alpha\lambda}\,\Gamma_\lambda)$$

$$\sim \frac{1}{3}\, g^{\alpha\lambda}\,(a_{\mu\alpha}\,\partial_\nu\,\Gamma_\lambda + a_{\nu\alpha}\,\partial_\mu\,\Gamma_\lambda)\,.$$

Supposons que les champs soient quasi-galiléens. En prenant par exemple :

$$\Gamma_\lambda = \frac{3}{2}\, q^{\sigma\varrho}\, \nabla_\varrho\, q_{\underline{\sigma\lambda}}\,,$$

les équations (54.9) deviennent simplement :

$$-\frac{1}{2}\, a^{\varrho\sigma}\, \partial_{\varrho\sigma}\, a_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + 0\,(\varepsilon^3)\,.$$

55. — Le tenseur d'énergie et les équations de mouvement.

Nous avons remurqué à la fin du paragraphe 53, la différence principale entre les tenseurs d'énergie obtenus suivant que l'on écrit les équations du champ avec $a^{\alpha\beta}$, $q^{\alpha\beta}$ ou avec $\gamma_{\alpha\beta}$, $\varphi_{\alpha\beta}$. L'absence d'un tenseur de MAXWELL dans le premier cas et sa présence dans le deuxième cas s'expliquent par les valeurs différentes des écarts de $L^\varrho_{\underline{\mu\nu}}$ aux symboles de CHRISTOFFEL. Si l'on pose :

$$L^\varrho_{\underline{\mu\nu}} = \begin{Bmatrix} \varrho \\ \mu\ \ \nu \end{Bmatrix}_a + w^\varrho_{\mu\nu}\,,$$

$$L^\varrho_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} \varrho \\ \mu\ \ \nu \end{Bmatrix}_\gamma + u^\varrho_{\mu\nu}\,,$$

l'expression de $u^\varrho_{\mu\nu}$ contient des termes $\nabla^\varrho\,\varphi_{\mu\nu\varrho}$, alors que les termes analogues $\nabla^\varrho\, q_{\underline{\mu\nu}\varrho}$ n'existent pas dans $w^\varrho_{\mu\nu}$. Or c'est par l'intermédiaire des termes $\nabla^\varrho\,\varphi_{\mu\nu\varrho}$, et aussi de $\nabla_\varrho\,\nabla^\varrho\,\varphi_{\mu\nu}$, que $F_{\mu\nu}$, intervient dans les équatiens de la gravitation pour donner le tenseur de MAXWELL $\tau_{\mu\nu}$. C'est pourquoi, dans le cas des équations (53.2), écrites sous la forme (49.8), à la place de $\tau_{\mu\nu}$ on ne trouve que le tenseur $A_{\mu\nu} = (1/4)\, a_{\mu\nu}\, q^{\alpha\beta}\, F_{\alpha\beta}$.

Le résultat négatif qui a été signalé au sujet des équations de mouvement dans la théorie du champ unifié, est pour une part en laison avec la solution particulière que l'on considère pour le tenseus $\varphi_{\alpha\beta}$ ou pour $q^{\alpha\beta}$. Cette solution entraîne la disparition de $A_{\mu\nu}$ (ou $\tau_{\mu\nu}$) et de $M_{\mu\nu}$. Il faudrait donc modifier les approximations quasi-statiques usuelles de façon à avoir $q_{\underline{\mu\nu}\varrho}$ (ou $\varphi_{\mu\nu\varrho}$) $\neq 0$ et par conséquent $F_{\mu\nu} \neq 0$. Une influence possible du champ antisymétrique dans les équations de mouvement pourrait ainsi être mise en évidence. Dans cette voie, la remarque que nous avons rappelée au sujet de $\tau_{\mu\nu}$, nous incline à penser que ce serait plutôt par l'emploi de $\gamma_{\alpha\beta}$, $\varphi_{\alpha\beta}$ et non de $a^{\alpha\beta}$, $q^{\alpha\beta}$ que la loi classique de LORENTZ pourrait être obtenue pour les particules chargées. Une éventuelle déductions des équations de mouvement d'une particule chargée basée sur l'intervention simultanée des tenseurs $\tau_{\mu\nu}$ et $M_{\mu\nu}$ ne semble pas, d'après Mme M. A. TONNELAT, totalement hors d'atteinte de la théorie du champ unifié d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER.

56. — Conclusions générales.

La théorie d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER part d'un formalisme très général, elle a l'avantage de ne pas restreindre au départ les possibilités que présente une théorie affine quelconque. Mais la richesse de structure laisse subsister des ambiguités à la base de la théorie, et le caractère unitaire de la théorie rend lui-même très difficile l'interprétation des grandeurs géométriques qu'on peut introduire. Le problème de CAUCHY, il est vrai, a apporté la réponse à une question importante : le choix du tenseur métrique. Mais la réponse n'est pas entièrement satisfaisante. Le variétés caractéristiques des équations du chanp sont tangentes en chaque point de V_4 à deux cônes d'équations :

$$h_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = 0 \ (C_1) \ \text{ et } \ \overline{\gamma}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = 0 \ (C_2),$$

Le cône (C_1) est intérieur au cône (C_2), ce qui conduit à penser que c'est le cône (C_2) qui définira les surfaces d'ondes gravitationnelles [23]. Mais la métrique $\sqrt{g/h}\, h_{\alpha\beta}$ qui correspond au premier cône a des propriétés intéressantes et elle simplifie beaucoup de calculs.

Une autre difficulté se présente dans le problème du tenseur d'énergie, en particulier à propos du cas matière pure. La décomposition du tenseur de RICCI n'est pas univoquement déterminée. Habituellement on prend une métrique telle que les écarts avec $g_{\alpha\beta}$ ou avec $g^{\alpha\beta}$ soint petits. On fait ainsi apparaître le courant de charge (par exemple le courant $q_{\alpha\beta\underline{\gamma}}$ si la métrique est $a_{\alpha\beta} = \sqrt{g/h}\, h_{\alpha\beta}$). Le vecteur courant et aussi le tenseur d'énergie, disparait en même temps que le champ antisymétrique $\underset{\smile}{g_{\alpha\beta}}$. Si l'on veut retrouver et la manifestation du courant de charge et l'apport de la matière pure, il convient donc d'envisager d'une autre façon la séparation du tenseur de RICCI. On pourrait dans cet ordre d'idées décomposer le tenseur symétrique $a_{\alpha\beta}$ lui-même en deux parties : l'une représenterait le tenseur gravitationnel ; l'autre comprendrait un vecteur, qui pourrait être le vecteur vitesse unitaire, et un potentiel vecteur susceptible d'introduire les phénomènes d'induction.

---

(23) F. MAURER. [40].

BIBLIOGRAPHIE

1. Généralités.

[1] P. G. BERGMAN - *Introduction to the theory of relativity.* Prentice Hal, New York (1942).

[2] E. CARTAN - *Les especes à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée.* Ann. Ec. Norm. Sup., t. 40 (1923).

[3] J. CHAZY - *La théorie de la relativité et la mécanique céleste.* Gauthier-Villars, Paris (1930)

[4] G. DARMOIS - *Les équatvons de la gravitation einsteinienne.* Mémorial des Sc. math. fasc. 25 (1927).

[5] A. EDDINGTON - *The mathematical theory of relativity.* Cambridge University Press (1923).

[6] A. EINSTEIN - *Quatre conférences sur la théorie de la relativité faites à l'Université de Princeton.* Trad. M. Solovine, Gauthier-Villars, Paris (1925).

[7] A. EINSTEIN - *The meaning of relativity.* 3rd ed. Princeton University Press (1950).

[8] A. LICHNEROWICZ - *Eléments de calcul tensoriel.* Armand Colin, Paris, (1951).

[9] A. LICHNEROWICZ - *Les théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme.* Masson, Paris (1954)

[10] E. SCHRODINGER - *Space time structure.* Cambridge (I950).

[11] M. A. TONNELAT - *La théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements.* Gauthier-Villars, Paris (1954).

2. Equations du champ et équations du mouvement.

[12] A. EINSTEIN - *The Bianchi identities in the generalized theory of gravitation.* Canad. J. Math., 2 (1950) p. 120-128.

[13] M. A. TONNELAT - *Les équations approchées de la théorie du champ unifié d'Einstein-Schrödinger.* Il Nuovo Cimento, X-3 (1956) p. 902-920.

[14] M. WYMAN - *Unified fiela theory.* Canad. J. Math., 2 (1950) p. 427-439.

Equations du mouvement en relativité générale.

A) MÉTHODE DU TENSEUR D'ÉNERGIE.

[15] V. A. FOCK - *Sur le mouvement des masse finies d'après la théorie de la gravitation einsteinienne.* J. Phys. Ac. Sc. U.R.S.S., 1 (1939) p. 81-116.

[16] F. HENNEQUIN - *Sur l'approximation des équations de la relativité générale pour un champ quasi-galiléen.* Comptes rendus Ac. Sc. Paris, 239 (1954) p. 1464-1466.

[17] F. HENNEQUIN - *Etude mathématique des approximations en relativité générale et en théorie unitaire de Jordan-Thiry.* Thèse de doctorat, Paris (1956).

[18] L. INFELD - *On the mation of bodies in general relativity theory.* Acta Phys. Polonica, 10 (1954) p. 187-204.

[19] V. V. NARLIKAR - *The gravitational equations of motion in relativity.* Proc. Indian Acad. Sc., Sec. A., 14 (1941) p. 187-195.

[20] PAPAPETROU - *Equations of motion iu general relativity.* I et II. Proc. Phys. Soc., A., 64 (1951) p. 57-75 et 302-310.

[21] PETROVA - *Sur les équativns de mouvement et le tenseur matériel pour des systèmes de masses finies eu relativité générale.* Journ. Phys. exp. et theor. Akad. Nauk. S.S.S.R., 19 (1949) p. 989.

B) MÉTHODE D'EINSTEIN, INFELD, HOFFMANN.

[22] B. BERTOTTI - *On the motion of eharged particles in gaueral relativity.* Il Nuovo Cimento, X-2 (1955) p. 231-240.

[23] D. M. CHASE - *Equations of motion of charged test particles in general relativity.* Phys. Rev., 95 (1954) p. 243-246.

[24] A. EINSTEIN, J. GROMMER - *Allgemeine Relativitätstheorie und Bewegungsgesetz.* Sitzungs. Ak. Berlin, (1927) p. 2-13.

[25] A. EINSTEIN, L. INFELD, B. HOFFMANN - *The gravitational equations and the problem of motion. I.* Ann. Math., 39 (1938) p. 65-100.

[26] A. EINSTEIN, L. INFELD - *The gravitational equations and the problem of motion. II.* Ann. Math., 41 (1940) p. 455-464.

[27] A. EINSTEIN, L. INFELD - *On the motion ot particles in general relativity.* Canad. J. Math., 1 (1949) p. 209-241.

[28] L. INFELD, A. SCHILD - *On the motion of test particles in general relativity theory.* Review of mod. Phys., 21 (1949) p. 408-413.

[29] L. INFELD, P. R. WALLACE - *The equations of motion in electrodynamics.* Phys. Rev., 57 (1940) p. 797-806.

[30] L. INFELD, A. E. SCHEIDEGGER - *Radiation and gravitational equations of motion.* Canad. J. Math., 3 (1951) p. 284-293.

[31] L. INFELD - *The coordinate aonditions and the equations of motion.* Canad. J. Math., 5 (1953) p. 17-25.

[32] H. P. ROBERTSON - *The two body problem in general relativity.* Ann. Math., 39 (1938) p. 101-104.

EQUATIONS DU MOUVEMENT EN THÉORIE UNITAIRE.

[33] W. B. BONNOR - *The equations of motion in the non-symmetric unified field theory.* Proc. Roy. Soc., 226 A (1954) p. 366-377.

[34] J. CALLAWAY - *The equations of motion in Einstein's new unified field theory.* Phys. Rev., 95 (1954) p. 1567-1570.

[35] L. INFELD - *The new Einstein theory and the equations of motion.* Acta Phys. Polonica, 10 (1950) p. 284-293.

3. Divers.

[36] Y. FOURES-BRUHAT - *Théorème d'existence pour certains systèmes déquations aux dérivées partielles non linéaires.* Acta Math., 88 (1952) p. 141-225.

[37] J. HELY - *Sur la représentation du champ unitaire.* Comptes rendus Ac. Sc. Paris, 239 (1954) p. 385-387.

[38] A. LICHNERGWICZ - *Problèmes globaux en mécanique relativiste.* Hermann, Paris (1939).

[39] A· LICHNERGWICZ - *Compatibililé des équations de la théoric unitaire du champ d'Einstein.* Comptes rendus Ac. Sc. Paris, 237 (1953) p. 1383-1386. Journ. rat. Mech., 3 (1954) p. 487-522.

[40] F. MAURER - *Sur les variétés caractéristiques de la théorie unitaire du ehamp d'Einstein.* Comptes rendus Ac. Sc. Paris, 242 (1956) p. 1127-1129.

[41] F. MAURER - *Sur les coordonnées isothermes en théorie unitaire.* Comptes rendus Ac. Sc. Paris. **243** (1956) p. 1196-1198.

[42] S. MAVRIDÈS - *La solution générale des équations d'Einstein* $g^{\mu\nu}{}_{;\varrho} = 0$. Comptes rendus Ac. Sc. Paris, 241 (1956) p. 173-174 ; Il Nuovo Cimento, X-2 (1955) p. 1141-1164.

[43] PHAM MAU QUAN - *Sur une théorie relativiste des fluides thermodynamiqyes.* Ann. di Math. pura ed appl., IV-38 (1955).

[44] PHAM MAU QUAN - *Etude électromagnétique et thermodynamique d'un fluide relativiste chargé.* Journ. rat. Mech., 5 (1956) p. 473-538.

[45] E. SCHRÖDINGER - *The final affine laws.* Proc. Roy. Ir. Acad., 52 A (1948) p. 169.

[46] E. SCHRÖDINGER - *On the differential identities of an affinity.* Proc. Roy. Ir. Acad., 54 A (1951) p. 79-85.

[47] M. A. TONNELAT - *Résolution des équations fondamentales d'une théorie unitaire affine.* Comptes rendus Ac. Sc. Paris, 230 (1950) p. 182; 231 (1950) p. 470, 487 et 512; 232 (1951) p. 2407.

[48] M.-A. TONNELAT - *Théorie unitaire affine du cbamp physique.* Journ. Phys. Rad., 12 (1951) p. 81-88.

[49] M.-A. TONNELAT - *Compléments à la théorie unitaire des champs.* Journ. Phys. Rad., 13 (1952) p. 177-185.

[50] M.-A. TONNELAT - *La solution générale des équations d'Einstein* $g_{\mu\nu,\varrho} = 0$ Journ. Phys. Rad., 16 (1955) p. 21-38.

TABLE DES MATIÈRES.

Annali, Vol. XII fasc. IV.

III. — Les équations du champ en seconde approximation.

CHAPITRE V. — LES ÉQUATIONS APPROCHÉES DE LA THÉORIE D'EINSTEIN-SCHRÖDINGER ET LE TENSEUR D'IMPULSION-ÉNERGIE.