ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

H. MILICER GRUŻEWSKA

Propriété limite du potentiel généralisé de simple couche relativement à l'équation parabolique normale

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 12, nº 4 (1958), p. 359-396

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1958_3_12_4_359_0>

PROPRIÉTÉ LIMITE DU POTENTIEL GÉNÉRALISÉ DE SIMPLE COUCHE RELATIVEMENT À L'ÉQUATION PARABOLIQUE NORMALE

par H. Milicer Grużewska (Warszawa)

Introduction. Le potentiel généralisé de simple couche [1] relativement à l'équation parabolique normale :

$$(1)\quad \widehat{\psi_t}(u) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A\,,\,t)\,u''_{x_\alpha x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} b_{\alpha}(A\,,t)\,u'_{x_\alpha} + c(A\,,t)\,u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad A \in \Omega$$

c'est l'intégrale de surface de la forme suivante:

$$(2)\qquad U(A\,,\,t) = \int_0^t \iint_S \Gamma(A\,,\,t\,;\,Q\,,\tau)\,\varphi(Q\,,\tau)\,dQ\,d\tau \ (^1), \qquad A \in \Omega, \qquad Q \in S,$$

où $\Gamma(A\,,\,t\,;\,B\,,\tau)$ désigne la solution fondamentale de l'équation (1), $\varphi(Q\,,\tau)$ la densité, Ω est un domaine mesurable dans l'espace euclidien à n dimension ($n \geq 3$) limité par la surface fermée S.

M. W. Pogorzelski m'a proposé d'examiner la limite de l'intégrale (2), pour $t \to \infty$. Ce problème fût déja traité par Eidelman [2] et M. Krzyżański [3], mais dans l'hypothèse que les coefficients de l'équation parabolique sont dérivables, ou dans un cas spécial. Ici on admettra seulement que les coefficients de l'équation (1) sont höldériens, ainsi que leurs limites, qui existent uniformément, de même que la limite de la densité $\varphi(Q\,,t)$, pour $t \to \infty$.

Je prouve dès lors que la limite du potentiel en question est le potentiel généralisé de simple couche de la densité limite $\overline{\varphi}(Q) = \lim_{t\to\infty} \varphi(Q\,,t)$ relati-

---

(1) dQ désigne l'élément d'aire de l'hypersurface S au point Q, pareillement dB désinera l'élément de volume du domaine Ω au point B.

vement à l'équation elliptique normale. Les coefficients de cette équation sont les limites des coefficients correspondants de l'équation parabolique. Cette équation elliptique sera nommée équation limite de l'équation (1).

Mais pour que ce passage à la limite soit légitime il faut admettre que le diamètre du domaine Ω n'est pas trop grand. C'est d'ailleurs en accord avec la question que soulève l'existence et la forme de la solution fondamentale de l'équatione elliptique, [4] et [5].

§ 1. On admet, conformément à l'Introduction, les hypothèses suivantes :

I. Les fonctions $a_{\alpha\beta}(A, t)$ sont définies et bornées dans la région fermée Ω' contenant $\Omega + S$, et pour toute valeur non négative du paramétre t, donc pour :

$$(1,1) \qquad A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega', \qquad t \geq 0, \qquad \Omega' > \Omega + S$$

et on a uniformément dans Ω':

$$(1',1) \qquad \lim_{t\to\infty} a_{\alpha\beta}(A, t) = \overline{a}_{\alpha\beta}(A),$$

en outre nous admettons les inégalités d'Hölder

$$(1'',1) \qquad |a_{\alpha,\beta}(A, t) - a_{\alpha,\beta}(A_1, t_1)| \leq \text{const}\,[r^h_{AA_1} + |t - t_1|^{h'}]; \qquad A, A_1 \in \Omega'$$

$$(1''',1) \qquad |\overline{a}_{\alpha,\beta}(A) - \overline{a}_{\alpha,\beta}(A_1)| \leq \text{const}\, r^h_{AA_1}; \qquad A, A_1 \in \Omega',$$

où r_{AA_1} désigne la distance des points A et A_1, h et h' sont des constantes, $0 < h \leq 1$, $0 < h' \leq 1$.

II. Les fonctions $b_\alpha(A, t)$ et $c(A, t)$ sont continues par rapport à la variable $t \geq 0$, vérifient par rapport aux variables spatialles la condition d'Hölder et on a uniformément dans Ω'

$$(2,1) \qquad \lim_{t\to\infty} b_\alpha(A, t) = \overline{b}_\alpha(A), \quad \lim_{t\to\infty} c(A, t) = \overline{c}(A), \qquad A \in \Omega'$$

en outre on a

$$(2',1) \qquad |b_\alpha(A, t) - b_\alpha(A_1, t)| \leq C\, r^h_{AA_1}, \qquad |c(A, t) - c(A_1, t)| \leq C_1\, r^{h'}_{AA_1}$$

$$|\overline{b}(A) - \overline{b}(A_1)| \leq C_2\, r^h_{AA_1}, \qquad |\overline{c}(A) - \overline{c}(A_1)| \leq C_3\, r^{h'}_{AA_1}$$

où C, C_1, C_2, C_3 sont constants et $0 < h \leq 1$, $0 < h' \leq 1$.

III. La forme quadratique :

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A\,,t)\,X_\alpha\,X_\beta \tag{3,1}$$

est définie positive dans la région : $(\Omega'\,,t \geq 0)$.

IV. La fonction $\varphi(Q\,,t)$ est définie, continue, bornée et intégrable sur le surface S, pour chaque valeur positive du paramètre t, et on à uniformément sur S

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(Q\,,t) = \overline{\varphi}(Q)\,, \qquad Q \in S\,. \tag{4,1}$$

Il résulte que les fonctions $\overline{\varphi}(Q)$, $\overline{a}_{\alpha\beta}(A)$, $\overline{b}_\alpha(A)$ $\alpha\,,\beta = 1\,,\ldots,n$ et $\overline{c}(A)$ sont continues et bornées sur la surface S resp dans le domaine Ω'.

V. La forme quadratique

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \overline{a}_{\alpha\beta}(A)\,X_\alpha\,X_\beta \tag{3',1}$$

est définie positive dans la région Ω'.

Si nous désignons par $a^{\alpha\beta}(A\,,t)$ et $\overline{a}^{\alpha\beta}(A)$ les éléments des matrices inverses de matrices $\|\,a_{\alpha\beta}(A\,,t)\,\|$ resp. $\|\,\overline{a}_{\alpha\beta}(A)\,\|$ nous pouvons écrire

$$\lim_{t\to\infty} a^{\alpha\beta}(A\,,t) = \overline{a}^{\alpha\beta}(A)\,, \qquad \alpha\,,\beta = 1\,,2\ldots n\,,\ A \in \Omega' \tag{5,1}$$

uniformément dans Ω'.

Soit maintenant pour $A = A(x_1\ldots x_n)$, $B = B(\zeta_1\ldots\zeta_n)$:

$$\vartheta^{M,t}(A\,,B) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha,\beta}(M\,,t)\,(x_\alpha - \zeta_\alpha)\,(x_\beta - \zeta_\beta)\,, \tag{6,1}$$

$$\overline{\vartheta}^{M}(A\,,B) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \overline{a}^{\alpha,\beta}(M)\,(x_\alpha - \zeta_\alpha)\,(x_\beta - \zeta_\beta)\,, \tag{6',1}$$

alors on a, en vertu de (5,1), uniformément dans Ω :

$$\lim_{t\to\infty} \vartheta^{M,t}(A\,,B) = \vartheta^{M}(A\,,B)\,, \qquad M\,,A\,,B \in \Omega'\,. \tag{7,1}$$

Il résulte aussi de l'hypothèses III et V qu'il existe deux nombres positives g et G pour lesquelles on a

$$4\,g r^2_{AB} \leq \vartheta^{M,\tau}(A\,,B) \leq 4\,G r^2_{AB}\,, \qquad 0 \leq \tau\,,(M\,,A\,,B) \in \Omega' \tag{7',1}$$

d'où et de (7,1) on trouve aussi que:

$$(7'',1) \qquad 4\, g r_{AB}^2 \leq \overline{\vartheta}^M(A\,,B) \leq 4\, G r_{AB}^2\,; \qquad M\,,A\,,B \in \Omega'$$

Rappellons (v. art. [1]) que la solution fondamentale Γ de l'équation (1) est donnée par les formules suivantes

$$(8,1) \qquad \Gamma(A\,,t;B\,,\tau) = w^{B,\tau}(A\,,t;B\,,\tau) +$$

$$+\int_\tau^t \iiint_{\Omega'} w^{M,\theta}(A\,,t;M\,,\theta)\,\Phi(M\,,\theta\,;B\,,\tau)\,dM\,d\theta\,, \qquad A\,,B\,,\in \Omega\,,$$

où la fonction:

$$(8',1) \quad w^{M,\zeta}(A\,,t;B\,,\tau) = (t-\tau)^{-n/2}\exp\left[-\vartheta^{M,\zeta}(A\,,B)/4\,(t-\tau)\right], \quad t > \tau > 0$$

est la bien connue *quasi-solution*, et la fonction Φ est la solution d'une équation intégrale de Volterra de noyau N qui est donné par la formule

$$(8'',1) \qquad N(A\,,t;M\,,\theta) =$$

$$= \lambda_n(A\,,t)\left\{\sum_{\alpha,\beta=1}^n [a_{\alpha\beta}(A\,,t) - a_{\alpha\beta}(M\,,\theta)]\,w^{M,\theta}_{x_\alpha x_\beta}(A\,,t;M,\theta) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\alpha=1}^n b_n(A\,,t)\,w^{M,\theta}_{x_\alpha}(A\,,t;M\,,\theta) + c\,(A\,,t)\,w^{M,\theta}(A\,,t;M\,,\theta)\right\}$$

où

$$\lambda_n(A\,,t) = \sqrt{\det|a^{\alpha,\beta}(A\,,t)|}\,.$$

On trouve facilement, en posant $h_1 = \min(h\,,2h')$ et $1 - \frac{h_1}{2} < \mu < 1$, que:

$$(9,1) \qquad \int_\tau^t \iiint_{\Omega'} |N(A\,,t;M\,,\theta)|\,dM\,d\theta \leq$$

$$\leq C\left[\frac{1}{1-\mu}\iiint_{\Omega'} r_{AM}^{-n-2+h_1+2\mu}\,dM + \frac{2}{n-1}\iiint_{\Omega'} dM\right] \leq b\,, \quad A \in \Omega$$

où la constante C ne dépend que des coefficients de l'équations (1). La constante b dépend donc seulement des ces coefficients et du domaine Ω.

Nous introduisons la fonction $\dot{N}(A\,,t;B\,,\theta)$ qui est la dominante de la fonction $N(A\,,t;B\,,\theta)$, de la manière suivante: dans la quasi-solution

$w^{M,\theta}(A, t; B, \tau)$ et dans ses deux dérivées on y remplace les coefficients par les bornes supérieures des leurs modules et la fonction $\exp.[-\vartheta^{M,\theta}(A, B)/4(t-\tau)]$ par la fonction dominante $\exp.[-gr^2_{AB}/(t-\tau)]$; $g > 0$; outre celà les différences $a_{\alpha\beta}(A, t) - a_{\alpha\beta}(M, \theta)$ sont remplacées par les bornes suppérieures de leurs modules, qui sont données par l'inégalité (1″,1) d'Hölder; les autres coefficients de la fonction $N(A, t; M, \theta)$ (8″,1) sont aussi remplacés par les bornes supérieures des leurs modules.

Notre dernière supposition, dont on parlait dans l'Introduction, est la suivante :

$$\text{VI.} \qquad \int_\tau^t \iiint_{\Omega'} \dot{N}(A, t;\ B, \theta)\, dB\, d\theta \leq b \leq (2\sqrt{\pi})^n\, \omega\,, \qquad 0 < \omega < 1\,,$$

L'équation limite de l'Introduction c'est l'équation élliptique normale suivante:

$$(10,1) \quad \overline{\psi}(u) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \overline{a}_{\alpha\beta}(A)\, u''_{x_\alpha x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} \overline{b}_\alpha(A)\, u'_{x_\alpha} + \overline{c}(A)\, u = 0\,, \quad A \in \Omega$$

On posera

$$(10',1) \qquad \overline{\lambda}_n(A) = \lim_{t\to\infty} \lambda_n(A, t) = \sqrt{\det |\, \overline{a}^{\alpha\beta}(A)\, |}$$

et on désignera par $\overline{w}^B(A, B)$ la quasi-solution de l'équation en écrivant

$$(10'',1) \quad \overline{w}^M(A, B) = 2^{n-2}\, \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) [\overline{\vartheta}^M(A, B)]^{-\frac{n}{2}+1}, \quad A, B, M \in \Omega'.$$

Pareillement $\overline{\Gamma}(A, Q)$ désignera la solution générale de l'équation (10,1) et on aura :

$$\overline{\Gamma}(A, Q) = \overline{w}^Q(A, Q) + \iiint_{\Omega'} \overline{w}^B(A, B)\, \overline{\Phi}(B, Q)\, dB, \quad A \in \Omega\,,$$

où pour

$$(10''',1) \qquad \overline{f}(A, B) = \lambda\, \overline{\lambda}_n(A)\, \overline{\psi}_A[\overline{w}^B(A, B)], \ A, B \in \Omega'$$

on a

$$\overline{\Phi}(B, Q) = \overline{f}(B, Q) + \lambda \iiint_{\Omega'} \overline{\mathfrak{N}}(B, M)\, \overline{f}(M, Q)\, dM\,, \qquad \lambda = (2\sqrt{\pi})^{-n}\,,$$

et $\overline{\mathfrak{N}}(B, M)$ est le noyau résolvant concernant l'équation (10,1) [4].

On prouvera sous les hypothèses I-V, que

$$(10^{\mathrm{IV}},1) \qquad \lim_{t\to\infty} \mathfrak{N}(B\,,t\,;\;M\,,t-\theta) = \overline{\mathfrak{N}}(B\,,M\,,\theta),\;\; 0<\theta\leq \text{const}$$

où

$$\mathfrak{N}(B\,,t\,;\;M\,,\tau)$$

est le noyau résolvant de l'équation de Volterra, déja mentionée.

Dans l'article [1] il est démontré que la série du noyau résolvant est uniformément convergente pour toute valeur du paramètre t borné, car les noyaux itérés accomplissent les inégalités suivantes :

$$(11,1) \qquad |\,N(A,\,t\,;\;M,\,\theta)\,| < c\,(t-\theta)^{-\mu}\, r_{AM}^{-(n+2-2\mu-h_1)},$$

$$(11',1) \qquad 1-\frac{h_1}{2}<\mu<1 \qquad h_1=\min\,(h\,,\,2h')$$

$$(11'',1) \qquad N_{\nu_0+n}(A,t;\,M,\,Q) \leq g\,\frac{[g_2\,\Gamma(1-\mu)\,(t-\theta)^{1-\mu}]^m}{[(1-\mu)\,m]\;\Gamma[m\,(1-\mu)]}$$

où les constantes $C\,,\,g_1\,,\,g_2\,,\,\nu_0$ et μ ne dépendent pas de l'accroissement $0<t-\theta$, ni de t. Dans l'inégalité (11,1) on peut remplacer le noyau $N(A\,,\,t\,;\;M\,,\theta)$ par la fonction $\Phi\,(A\,,\,t\,;\;M\,,\,\theta)$, ou le noyau résolvant $\mathfrak{N}(A,\,t\,;\;M,\,\theta)$, si seulement

$$0<t-\theta\leq T=\text{const.},\qquad A\in\Omega\,,\qquad M\in\Omega'\,.$$

À cause de la formule (8,1) nous pouvons représentér le potentiel $U(A,t$ comme une somme de deux intégrales :

$$(12,1) \qquad U\,(A,\,t) = \int_0^t \iint_S w^{Q,\tau}\,(A,\,t\,;\;Q,\,\tau)\,\varphi\,(Q,\,\tau)\,dQ\,d\tau\,+$$

$$+\int_0^t \iint_S \varphi\,(Q\,,\,\tau) \int_\tau^t \iiint_{\Omega'} w^{M,\theta}\,(A,\,t\,;\;M,\,\theta)\;\Phi\,(M,\,\theta\,;\;Q,\,\tau)\,dM\,d\theta\,dQ\,d\tau$$

ou en désignant par $U_1\,(A,t)$ et $U_2\,(A,\,t)$ les intégrales première et seconde on peut écrire que

$$(12',1) \qquad U\,(A\,,\,t) = U_1\,(A\,,\,t) + U_2\,(A\,,\,t)\,.$$

§ 2. LEMME (1,2). *Si les conditions* I, III, V *et* IV *sont vérifiés, et si* $\varphi(Q,T) \equiv 1$, $Q \in S$ *alors on a conformément à* (7,1) *et* (12',1):

$$\lim_{t\to\infty} U_1(A, t) = \int_0^\infty \iint_S \tau^{-\frac{n}{2}} \exp[-\overline{\vartheta}^Q(A, Q)/4\tau]\, dQ\, d\tau, \tag{1,2}$$

Preuve du Lemme (1,2). Nous avons ici:

$$U_1(A, t) = \int_0^t \iint_S w^{Q,\tau}(A, t;\ Q, \tau)\, dQ\, d\tau. \tag{2,2}$$

Il est facile de démontrer, qu'on a pour chaque $T > 0$:

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^T \iint_S (t-\tau)^{-\frac{n}{2}} \exp[-\vartheta^{Q,\tau}(A, Q)/4(t-\tau)]\, dQ\, d\tau = 0 \tag{2',2}$$

uniformément dans Ω, parce qu'on a supposé $n \geq 3$.

Il suffit donc à examiner l'intégrale:

$$\overline{U}_1(A, t) = \int_T^t \iint_S (t-\tau)^{-\frac{n}{2}} \exp[-\vartheta^{Q,\tau}(A, Q)/4(t-\tau)]\, dQ\, d\tau,\ t > T. \tag{2'',2}$$

En introduisant dans cette dernière intégrale les coordonées sphériques, et en posant:

$$r_{A,Q} = r,\ r_0 < r < r_1,\quad r_{A,Q} = 2\sqrt{t-\tau}\, u,$$

et en désignat par J le discriminant de cette transformation on reçoit:

$$\overline{U}_1(A, t) = 2^{n-1} \int_{\omega_{n-2}} \int_{r_0}^{r_1} r \int_{r/2\sqrt{t-T}}^{\infty} u^{n-3} \exp[-u^2 \vartheta_1^{Q,t-(r/2u)^2}(A, Q)]\, J\, du\, dr\, d\omega_{n-2}, \tag{2''',2}$$

où

$$u^2 \vartheta_1^{Q,t-(r/2u)^2}(A, Q) = \vartheta^{Q,\tau}(A, Q)/4(t-\tau). \tag{2^{IV},2}$$

Prenons maintenant le nombre T assez grand pour avoir, pour chaque $t \geq T$ et le nombre $\varepsilon > 0$, l'inégalité:

$$|\vartheta_1^{Q,t-(r/2u)^2}(A, Q) - \overline{\vartheta}_1^Q(A, Q)| \leq \varepsilon < g;\ A \in \Omega,\ Q \in S, \tag{2^{V},2}$$

où

$$\overline{\vartheta}_1^Q (A , Q) = \lim_{t\to\infty} \vartheta_1^{Q,t-(r/2u)^2} (A , Q) ,$$

ce qui est possible parce que dans l'integrale (2‴,2) on a:

$$T \leq t - (r/2u)^2 .$$

Nous avons donc l'égalité suivante:

$$(3,2) \qquad - u^2 \vartheta_1^{Q,t-(r/2u)^2} (A , Q) = - u^2 \overline{\vartheta}_1^Q (A , Q) - \theta' u^2 \varepsilon , \quad (\mid \theta' \mid < 1)$$

et, comme la fonction $\overline{\vartheta}^Q (A , Q)$ accomplie l'égalité (7″,1), alors:

$$(3',2) \qquad 4g \leq \overline{\vartheta}_1^Q (A , Q) \leq 4G.$$

Soit maintenant $\varepsilon' > 0$ et U un nombre assez grand pour que:

$$2^{n-1} \int_{\omega_{n-2}} \int_{r_0}^{r_1} r \int_U^{\infty} u^{n-3} \exp [- u^2 \, \vartheta_1^{Q,t-(r/2u)^2} (A , Q)] \, J \, du \, dr \, d\omega_{n-2} < \varepsilon' .$$

On a donc pour $U = \text{const.}$, $o < \theta'' < 1$, $\mid \theta''' \mid < C_U$ l'égalité suivante:

$$\overline{U}_1(A, t) = \theta''\varepsilon' + (1 + \theta'''\varepsilon) \, 2^{n-1} \int_{\omega_{n-2}} \int_{r_0}^{r_1} r \int_{r/2\sqrt{t-T}}^{U} u^{n-3} \exp[- u^2 \, \overline{\vartheta}_1 \, (A , Q)] \cdot J \, du \, dr \, d\omega_{n-2}$$

d'où on trouve, en substituant:

$$u = r/2 \sqrt{\tau}:$$

$$\overline{U}_1 (A , t) = \theta''\varepsilon' + (1 + \theta'''\varepsilon) \int_{\omega_{n-2}} \int_{r_0}^{r_1} r \int_{(r/2U)^2}^{t-T} \tau^{-n/2} \exp [- \overline{\vartheta}_1^Q (A, Q)/4\tau] \, J \, d\tau \, dr \, d\omega_{n-2} .$$

On a donc:

$$\lim_{t\to\infty} U_1(A, t) = \int_{\omega_{n-2}} \int_{r_0}^{r_1} r \int_{(r/2U)^2}^{\infty} \tau^{-n/2} \exp [- \overline{\vartheta}^Q (A, Q)/4\tau] \, J \, d\tau \, dr \, d\omega_{n-2} + \varepsilon'$$

parce que le nombre $\varepsilon > 0$ est déja arbitraire, tandis que le nombre U ne dépend pas ni de t ni de T, mais seulement de g et n. On passe maintenant à la limite pour $U \to \infty$, et parce que $\varepsilon' > 0$ est arbitraire, on a, après avoir changé convenablement les variables d'intégration :

$$(4,2) \qquad \lim_{t\to\infty} \overline{U}_1(A,t) = \iint_S \int_0^\infty \tau^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\overline{\vartheta}^Q(A,Q)/4\tau\right] d\tau\, dQ, \quad A \in \Omega, \quad n \geq 3$$

Il est peut être convenable d'apprécier que l'existence de cette dernière intégrale est une conséquence de l'égalité bien connue à $s.$:

$$\tau^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\overline{\vartheta}^Q(A,Q)/4\tau\right] = 0\left[\tau^{-\mu} \cdot r_{AQ}^{-n+2\mu} \cdot \exp\left(-g r_{AQ}^2/\tau\right) \cdot \left(g r_{AQ}^2/\tau\right)^{\frac{n}{2}-\mu}\right],$$

$$A \neq Q, \quad \frac{1}{2} < \mu < 1, \qquad \text{c.q.f.d.d.}$$

LEMME (2,2). *Si les conditions* I, III, V *et* IV *sont accomplies, alors :*

$$(5,2) \qquad \lim_{t\to\infty} U_1(A,t) = \overline{U}_1(A) = 2^{\frac{n}{2}-2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right) \iint_S \overline{\varphi}(Q)\left[\overline{\vartheta}^Q(A,Q)\right]^{-\frac{n}{2}+1} dQ, \; A \in \Omega, \quad n \geq 3.$$

Preuve du Lemme (2,2).

D'après la supposition on a $|\varphi(Q,\tau)| \leq \text{const}$, alors pour $T = \text{const}$ on a

$$\int_0^T \iint_S w^{Q,\tau}(A,t;\,Q,\tau)\,\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau \to 0, \quad t \to \infty$$

uniformément dans Ω. Mais on a aussi, dès que le nombre T est suffisamment grand, l'inégalité qui suit :

$$|\varphi(Q,\tau) - \overline{\varphi}(Q)| \leq \varepsilon/2\,(c_n+1), \quad \tau \geq T,$$

où

$$c_n = \max_{A\in\Omega} \int_0^t \iint_S w^{Q,\tau}(A,t;\,Q,\tau)\,dQ\,d\tau, \qquad 0 \leq t \leq \infty.$$

On peut écrire donc,

$$\left| \int_0^t \iint_S w^{Q,\tau}(A,t;Q,\tau)\,[\varphi(Q,\tau)-\overline{\varphi}(Q)]\,dQ\,d\tau \right| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2(c_n+1)}\cdot\int_0^t \iint_S w^{Q,\tau}(A,t;\;Q,\tau)\,dQ\,d\tau \leq \varepsilon$$

si le paramètre t est suffisamment grand.

Nous avons donc

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \iint_S w^{Q\tau}(A,t;Q,\tau)\,\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau = \lim_{t\to\infty}\int_0^\infty \iint_S \omega^{Q,\tau}(A,\;t;\;Q,\tau)\,\overline{\varphi}(Q)\,dQ\,d\tau,$$

uniformément dans Ω, dès que la dernière limite existe. Mais la fonction $\overline{\varphi}(Q)$ ne dépend pas de τ, elle est intégrable et bornée, c'est pourquoi on peut la placer sous le signe de l'intégrale double dans l'énoncé du Lemme (1,2) sans y rien changer dans l'épreuve de ce Lemme. On a donc démontré l'égalité suivante :

$$\overline{U}_1(A)=\iint_S \overline{\varphi}(Q)\int_0^\infty \tau^{-n/2}\exp\left[-\overline{\vartheta}^Q(A,Q)/4\tau\right]d\tau\,dQ\,,\; A\in\Omega\,,\; n\geq 3\,.$$

On change maintenant les variables de l'intergration par les notations :

$$\overline{\vartheta}^Q(A\;Q)/4\tau = u$$

d'où

$$\tau=\overline{\vartheta}^Q(A\,,\,Q)/4u\,,\;\; d\tau=-\,\overline{\vartheta}^Q(A\,,\,Q)/4u^2\,du$$

et

$$\overline{U}_1(A)=4^{\frac{n}{2}-1}\int_0^\infty u^{\frac{n}{2}-2}\exp(-u)\,du\iint_S \overline{\varphi}(Q)\,[\overline{\vartheta}^Q(A\,,\,Q)]^{-\frac{n}{2}+1}\,dQ=$$

$$=2^{n-2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\iint_S \overline{\varphi}(Q)\,[\overline{\vartheta}^Q(A\,,\,Q)]^{-\frac{n}{2}+1}\,dQ\,,\qquad \text{c.q.f.d.d.}\,.$$

§ 3. L'évaluation de la fonction $U_2(A, t)$.

On posera conformément aux désignations (8,1) (12',1) et à la formule (64) de l'article cit. sub. [1]:

$$\Phi(A,t;B,\tau)=f(A,t;B,\tau)+\lambda\int\limits_{\tau}^{t}\iiint\limits_{\Omega}\mathcal{N}(A,t;M,Q)f(M,\theta;B,\tau).dM\,d\tau, \tag{1,3}$$

et

$$U_2(A, t)=\int\limits_0^t\iint\limits_S\varphi(Q,\tau)\,\overline{w}(A,t;Q,\tau)\,dQ\,d\tau= \tag{2,3}$$

$$=\int\limits_0^t\iint\limits_S\varphi(Q,\tau)\int\limits_{\tau}^{t}\iiint\limits_{\Omega'}w^{B,\theta}(A,t;B,\theta)f(B,\theta;Q,\tau)\,dB\,d\theta\,dQ\,d\tau+r(A,t).$$

On représentera la différence U_2-r comme une somme des trois intégrales:

$$U_2(A,t)-r(A,t)=$$

$$=\int\limits_{t-T}^{t}\iint\limits_S[\varphi(Q,\tau)-\overline{\varphi}(Q)]\int\limits_{\tau}^{t}\iiint\limits_{\Omega'}w^{B,\theta}(A,t;B,\theta)f(B,\theta;Q,\tau)\,dB\,d\theta\,dQ\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^{t-T}\iint\limits_S\varphi(Q,\tau)\int\limits_{\tau}^{t}\iiint\limits_{\Omega'}w^{B,\theta}(A,t;B,\theta)f(B,\theta;Q,\tau)\,dB\,d\theta\,dQ\,d\tau+$$

$$+\iint\limits_S\overline{\varphi}(Q)\int\limits_{t-T}^{t}\int\limits_{\tau}^{t}\iiint\limits_{\Omega'}w^{B,\theta}(A,t;B,\theta)f(B,\theta;Q,\tau)\,dB\,d\theta\,dQ\,d\tau.$$

On changera la variable d'intégration dans la dernière intégrale en posant $\tau=t-T+\tau_1$, et on aura

$$U_2(A,t)-r(A,t)-\iint\limits_S\overline{\varphi}(Q)\int\limits_0^T\int\limits_{t-T+\tau_1}^{t}\iiint\limits_{\Omega'}w^{B,\theta}(A,t;B,\theta)f(B,\theta;Q,t-T+\tau_1)dBd\theta d\tau_1dQ=$$

$$=\int\limits_{t-T}^{t}\iint\limits_S[\varphi(Q,\tau)-\overline{\varphi}(Q)]\int\limits_{\tau}^{t}\iiint\limits_{\Omega'}w^{B,\theta}(A,t;B,\theta)f(B,\theta;Q,\tau)\,dB\,d\theta\,dQ\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^{t-T}\iint\limits_S\varphi(Q,\tau)\int\limits_{\tau}^{t}\iiint\limits_{\Omega'}w^{B,\theta}(A,t;B,\theta)f(B,\theta;Q,\tau)\,dB\,d\theta\,dQ\,d\tau.$$

On réprésentera maintenant le deux dernières intégrales intérieures comme sommes des deux intégrales avec les limites d'intégrations $[\tau, (t+\tau):2]$ et $[(t+\tau):2, t]$, en les nommant respectivement par $s_1(A, t, \tau)$ et $s_2(A, t, \tau)$. Quand à la première des intégrales on lui appliquera le changement des variables, en posant $\theta = t - T + \tau_1 + \theta_1$, et en remplaçant τ_1, par τ et θ_1, par θ, de sorte qu'on a:

$$U_2(A, t) - r(A, t) - \iint_S \overline{\varphi}(Q) \int_0^T \int_0^{T-\tau} \iiint_{\Omega'} w^{B, t-T-\tau+\theta}(A, t; B, t-T+\tau+\theta) \cdot$$

$$\cdot f(B, t-T+\tau+\theta; Q, t-T+\tau) \cdot dB\, d\theta\, d\tau\, dQ =$$

$$= \int_{t-T}^{t} \iint_S [\varphi Q, \tau) - \overline{\varphi}(Q)] [s_1(A, t, \tau) + s_2(A, t, \tau)]\, dQ\, d\tau +$$

$$+ \int_0^{t-T} \iint_S \varphi(Q, \tau) [s_1(A, t, \tau) + s_2(A, t, \tau)]\, dQ\, d\tau.$$

Mais on y trouve aisément pour $t - \tau > T$

$$(3,3) \quad |s_1(A, t, \tau)| \leq \left(\frac{2}{T}\right)^{n/2} \int_\tau^{(t+\tau):2} \iiint_{\Omega'} |f(B, \theta; Q, \tau)|\, dB\, d\tau \leq \text{const} \left(\frac{2}{T}\right)^{n/2},$$

de même:

$$(3',3) \quad |s_2(A, t, \tau)| \leq \text{const} \left(\frac{2}{T}\right)^{n/2} \int_{(t+\tau):2}^{t} \iiint_{\Omega'} \omega^{B,\theta}(A, t; B, \theta)\, dB\, d\theta \leq \text{const} \left(\frac{2}{T}\right)^{n/2},$$

d'où on a pour la valeur de t assez grande et pour chaque $\varepsilon > 0$

$$|U_2(A, t) - r(A, t) - \iint_S \overline{\varphi}(Q) \int_0^T \int_0^{T-\tau} \iiint_{\Omega'} w^{B, t-T-\tau+\theta}(A, t; B, t-T+\tau+\theta) \cdot$$

$$\cdot f(B, t-T+\tau+\theta; Q, t-T+\tau)\, dB\, d\theta\, d\tau\, dQ| \leq \varepsilon \cdot \text{const} + \text{const} \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{n-2}{2}},$$

les constantes qui y figurent ne dépandent pas ici de t, car les coefficients de l'équation $\widehat{\psi}(u)$ sont bornés, de même que la fonction $\varphi(Q, \tau)$. On a donc

(3″,3)
$$\lim_{T\to\infty}\lim_{t\to\infty}\Big[U_2(A, t) - r(A, t) -$$

$$-\iint\limits_S \overline{\varphi}(Q)\int\limits_0^T\int\limits_0^{T-\tau}\iiint\limits_{\Omega'} w^{B,t-T-\tau+\theta}(A, t;\ B, t-T+\tau+\theta)\cdot$$

$$\cdot f(B, t-T+\tau+\theta;\ Q, t-T+\tau)\, dB\, d\theta\, d\tau\, dQ\Big] = 0\,.$$

On évaluera l'intégrale de l'égalité (3″,3) dans le § 5. Maintenant nous analyserons l'expression $r(A, t)$.

La définition de la fonction $\Phi(B, \theta;\ Q, \tau)$ et l'expression (2,3) donne:

(4,3)
$$r(A, t) =$$

$$= \lambda\int\limits_0^t\iint\limits_S \varphi(Q, \tau)\int\limits_\tau^t\iiint\limits_{\Omega'} \omega^{B,\theta}(A, t;\ B, \theta)\int\limits_\tau^\theta\iiint\limits_{\Omega'} \mathfrak{N}(B, \theta;\ M, \theta')\cdot$$

$$\cdot f(M, \theta';\ Q, \tau)\, dM\, d\theta'\, dB\, d\theta\, dQ\, d\tau =$$

$$= \lambda\int\limits_0^{t-4T}\iint\limits_S \varphi(Q, \tau)\int\limits_\tau^t\iiint\limits_{\Omega'} \omega^{B,\theta}(A, t;\ B, \theta)\int\limits_\tau^\theta\iiint\limits_{\Omega'} \mathfrak{N}(B, \theta;\ M, \theta')\cdot$$

$$\cdot f(M, \theta';\ Q, \tau)\, dM\, d\theta'\, dB\, d\theta\, dQ\, d\tau +$$

$$+ \lambda\int\limits_{t-4T}^t\iint\limits_S \varphi(Q, \tau)\int\limits_\tau^t\iiint\limits_{\Omega'} w^{B,\theta}(A, t;\ B, \theta)\int\limits_\tau^\theta\iiint\limits_{\Omega'} \mathfrak{N}(B, \theta;\ M, \theta')\cdot$$

$$\cdot f(M, \theta';\ Q, \tau)\, dM\, d\theta'\, dB\, d\theta\, dQ\, d\tau\,.$$

La première de ces intégrale sera nommée $r_1(A, t)$ et sera évaluée dans ce paragraphe. La dernière de ces intègrale sera nommée par $\mathcal{Y}_1$, et sera évaluée au § 5.

Au § 4 il sera démontré que l'intégrale singulière

(5,3)
$$\int\limits_0^\theta\iiint\limits_{\Omega'} |\,\mathfrak{N}(A, \theta;\ B, \theta')\,|\, dB\, d\theta'$$

existe uniformément par rapport à θ et $A \in \Omega'$, et que

$$(5',3) \qquad \int_0^{\theta-T} \iiint_{\Omega'} |\mathfrak{N}(A, \theta; B, \theta')| \, dB \, d\theta' \to 0, \quad T \to \infty, \quad T < \theta.$$

Nous prouverons en nous appuyant sur les expression (5,3) et (5′,3) que l'intégrale $r_1(A, t)$ converge vers zéro, avec l'inverse du paramètre T.

En effet posons:

$$(5'',3) \quad R_1(B, \theta, \overline{\theta}) = \int_0^{\overline{\theta}} \int_{\tau}^{\theta} \iiint_{\Omega'} \mathfrak{N}(B, \theta; M, \theta') \iint_S \varphi(Q, \tau) f(M, \theta'; Q, \tau) \, dQ \, dM \, d\theta' \, d\tau$$

et écrivons

$$(6,3) \qquad r_1(A, t) = r^{(1)}(A, t) + r^{(2)}(A, t),$$

où

$$r^{(1)}(A, t) = \lambda \int_0^{t-4T} d\theta \iiint_{\Omega'} w^{B,\theta}(A, t; B, \theta) R_1(B, \theta, \theta) \, dB,$$

et

$$(7,3) \qquad r^{(2)}(A, t) = \lambda \int_{t-4T}^{t} d\theta \iiint_{\Omega'} w^{B,\theta}(A, t; B, \theta) R_1(B, \theta, t - 4T) \, dB.$$

Il résulte de l'expression (5,3) que l'intégrale spaciale de $R_1(B, \theta, \overline{\theta})$ est bornée par rapport à θ. La partie, où $\theta - \tau \geq \frac{3}{2}$, est bornée parce que les singularité du noyau $\mathfrak{N}$ et de la fonction f sont séparée. On peut outre celà décomposé l'intégrale intérieure de l'intégrale d'ont il sagît, en somme des intégrales avec les limites d'intégration pour θ' de τ à $\tau + 1$, et de $(\tau + 1)$ à θ respectivement, où l'une ou l'autre des fonctions $\mathfrak{N}$ et f reste bornée, uniformément pour $\theta \geq \tau + \frac{3}{2}$. Mais l'intégrale pour $\theta - \tau \geq \frac{3}{2}$ de la première de ces intégrale peut être traitée comme une limite des intégrales, réparties sur les domaines Ω'', qui raprochent le domaine Ω' mais qui n'ont pas des points communs avec la surface S. Si $0 < \theta - \tau \leq \frac{3}{2}$ la question de l'intégrale $R_1(B, \theta, \overline{\theta})$ est résolué par l'article [1]. L'intégrale de $R_1(B, \theta, \overline{\theta})$ est donc bornée. Il résulte donc de la définition de la quasi-solution que

$$\lim_{T\to\infty} r^{(1)}(A, t) = 0 \qquad t > 4T \tag{6',3}$$

parce que

$$t - \theta \geq 4T \to \infty, \qquad T \to \infty.$$

Évaluons maintenant l'intégrale $r^{(2)}(A, t)$ en posant

$$\theta = \theta_0 + t - 4T, \tag{7',3}$$

ce qui permet d'ecrire (7,3) comme :

$$r^{(2)}(A, t) = \lambda \int_0^{4T} d\theta_0 \iiint_{\Omega'} \omega^{B,\theta}(A, t; B, \theta) R_1(B, \theta, t - 4T)\, dB. \tag{8,3}$$

Mais on peut répresenté l'intégrale de θ' (V. (5'',3)) comme une somme des deux intégrales répandues sur les intervalles d'intégrations de τ à $t - 4T$, et de $t - 4T$ à θ, parce que $\theta \geq t - 4T$. L'intégrale $r^{(2)}(A, t)$ est ainsi une somme des deux composants $r^{(3)}(A, t)$ et $r^{(4)}(A, t)$. Nous pouvons donc écrire :

$$r^{(2)}(A, t) = r^{(3)}(A, t) + r^{(4)}(A, t), \tag{8',3}$$

où on a, en désignant

$$R_2(\theta, B) = \int_0^{t-4T} d\theta' \iiint_{\Omega'} \mathfrak{N}(B, \theta; M\theta') \int_0^{\theta'} \iint_S \varphi(Q, \tau) f(M, \theta'; Q, \tau)\, dQ\, d\tau\, dM$$

après l'inversion d'intégration dans l'intégrale $r^{(3)}(A, t)$:

$$r^{(3)}(A, t) = \lambda \int_0^{4T} d\theta_0 \iiint_{\Omega'} w^{B,\theta}(A, t; B, \theta) R_2(\theta, B)\, dB. \tag{8'',3}$$

De même on trouve, après le changement de la variable d'intégration, en posant

$$\theta' = t - 4T + \theta_1', \tag{9,3}$$

et en désignant

$$R_3(\theta_0, B) = \int_0^{\theta_0} d\,\theta_1' \iiint_{\Omega'} \mathfrak{N}(B, \theta; M, \theta') \int_0^{t-4T} \iint_S \varphi(Q, \tau) f(M, \theta'; Q, \tau)\, d\,Q\, d\tau\, dM,$$

que

$$(9',3) \qquad r^{(4)}(A, t) = \lambda \int_0^{4T} d\,\theta_0 \iiint_{\Omega'} w^{B,\theta}(A, t; B, \theta)\, R_3(\theta_0, B)\, d\,B\,.$$

· On prouvera d'abord que cette dernière intégrale converge vers zéro, avec l'inverse du paramètre T. Dans ce bût on ecrira l'intégrale $r^{(4)}(A, t)$ comme une somme des deux intégrales, $r^{(5)}(A, t)$ et $r^{(6)}(A, t)$, avec les intervalles d'intégrations par rapport à θ_0 respectivement $\langle 0, 2T \rangle$ et, $\langle 2T, 4T \rangle$, de sorte que:

$$r^{(4)}(A, t) = r^{(5)}(A, t) + r^{(6)}(A, t)\,.$$

Nous savons déja que les intégrales spaciales des fonctions $R_2(\theta, B)$ et $R_3(\theta, B)$ sont bornées. Oùtre celà conformément à l'égalité (7',3) on a pour l'intégrale $r^{(5)}(A, t)$

$$t - \theta = 4T - \theta_0 > 2T\,,$$

donc

$$(9'',3) \qquad \lim_{T\to\infty} r^{(5)}(A, t) = 0\,, \qquad t > 4T\,.$$

L'intégrale $r^{(6)}(A, t)$ est transformé comme il suit, après avoir posé:

$$(9''',3) \qquad \theta_0 = 2T + \theta_2$$

$$r^{(6)}(A, t) = \lambda \int_0^{2T} d\,\theta_2 \iiint_{\Omega'} w^{B,\theta}(A, t; B, \theta)\, R_3(2T + \theta_2, B)\, d\,B\,.$$

Mais ici:

$$R_3(2T + \theta, B) = \int_0^{T} d\theta_1' \iiint_{\Omega'} \mathfrak{N}(B, \theta; M, \theta') \int_0^{t-4T} \iint_S \varphi(Q, \tau) f(M, \theta'; \theta, \tau)\, dQ\, d\tau\, dM +$$

$$+ \int_T^{2T+\theta_2} d\,\theta_1' \iiint_{\Omega'} \mathfrak{N}(B, \theta; M, \theta') \int_0^{t-4T} \iint_S \varphi(Q, \tau) f(M, \theta'; Q, \tau)\, d\,Q\, d\tau\, d\,M\,.$$

Dans le premier composant l'accroissement des paramètres du noyau $\mathfrak{N}$ est égale à

$$\theta - \theta' = 2T + \theta_2 - \theta_1' > T,$$

et dans le second composant l'accroissement des paramètres de la fonction f est égale à

$$\theta' - \tau = t - 4T + \theta_1' - \tau > T,$$

d'où, de la forme de la fonction f et de la supposition (5',3) résulte que l'expression $r^{(6)}(A, t) \to 0$, $T \to \infty$. En effet: l'intégrale de la quasi-solution existe uniformément par rappor à t, T et A.

On a donc prouvé l'égalité suivante:

$$\lim_{T\to\infty} r^{(4)}(A, t) = 0, \qquad t \geq 4T, \tag{9$^{\text{IV}}$,3}$$

à cause des formules (9'',3) et (9'3).

Revenons maintenant à l'expression $r^{(3)}(A, t)$. On décompose ici l'intégrale en somme des deux composants $r^{(7)}(A, t)$ et $r^{(8)}(A, t)$ répandus sur les intervalles suivants:

$$0 \leq \theta_0 \leq 2T \qquad \text{et} \qquad 2T < \theta_0 \leq 4T.$$

Dans la première l'accroissement des paramètres de la quasi solution est égale à

$$t - \theta = 4T - \theta_0 \geq 2T,$$

c'est pour quoi on peut écrire:

$$\lim_{T\to\infty} r^{(7)}(A, t) = 0, \qquad T \geq 4T. \tag{10,3}$$

comme nous savons, que l'intégrale spaciale de la fonction $R_2(\theta, B)$ est bornée par rapport à θ.

Le second composant de l'expression $r^{(3)}(A, t)$, $r^{(8)}(A, t)$ sera transformé comme il suit:

$$r^{(8)}(A, t) = \lambda \int_0^{2T} d\,\theta_2 \iiint_{\Omega'} w^{B,\theta}(A, t;\ B, \theta)\, R_2(\theta, B)\, dB.$$

Mais ici on a :

$$R_2(\theta, B) = \int_0^{t-4T} d\theta' \iiint_{\Omega'} \mathfrak{N}(B, \theta; M, \theta') \int_0^{\theta'} \iint_S \varphi(Q, \tau) f(M, \theta'; Q, \tau)\, dQ\, d\tau\, dM$$

et l'accroissement des paramètres du noyau $\mathfrak{N}$ est ici

$$\theta - \theta' = t - 2T + \theta_2 - \theta' > 2T + \theta_2 > 2T \to \infty, \qquad T \to \infty,$$

donc

(10′,3) $$\lim_{T\to\infty} r^{(8)}(A, t) = 0, \qquad t \geq 4T.$$

Il résulte des expressions (8″,3), (10,3) et (10′,3) que

(11,3) $$\lim_{T\to\infty} r^{(3)}(A, t) = 0 \qquad t \geq 4T,$$

ce qui donne avec les expressions (9^{IV},3), (8′,3), (6,3) et (6′,3)

(12,3) $$\lim_{T\to\infty} r_1(A, t) = 0, \qquad t \geq 4T, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

§ 4. On construit, conformément à la supposition VI, le noyau dominant du noyau résolvent $\mathfrak{N}(A, t; B, \tau)$, en commençant par la domination de la quasisolution, ce qui conduit, à cause des inégalités (7,1) et (7′,1), à la fonction :

(1,4) $$\dot{w}(A, B, \theta) = \theta^{-n/2} \exp(-g r_{AB}^2/\theta), \qquad \text{avec} \quad \theta = t - \tau.$$

Pour les fonctions dominantes des dérivées, première et seconde, de la quasi solution on a les fonctions suivantes :

(1′,4) $$\dot{w}_\alpha(A, B, \theta) = \frac{1}{2}\theta^{-\frac{n}{2}-1} \exp(-g r_{AB}^2 / \theta) \cdot \sum_{\gamma=1}^{n} \dot{a}^{\alpha\gamma}(B) \, |x_\gamma - \xi_\gamma|, \ \theta = t - \tau,$$

où

$$\dot{a}^{\alpha\beta}(A) = \underset{0 \leq \tau}{\mathrm{Max}} \, |a^{\alpha,\beta}(A, \tau)|, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n,$$

et

(1″,4) $$\dot{w}_{\alpha,\beta}(A, B, \theta) = \frac{1}{4}\theta^{-\frac{n}{2}-2} \cdot \exp[-g r_{AB}^2/\theta] \cdot$$

$$\cdot [2\theta\, \dot{a}^{\alpha\beta}(B) + \sum_{\gamma=1}^{n} \dot{a}^{\alpha\gamma}(B)\, |x_\gamma - \xi_\gamma| \cdot \sum_{\gamma=1}^{n} \dot{a}^{\gamma\beta} |x_\gamma - \xi_\gamma|].$$

On écrit dans l'inégalité $(1'',1)$ const $= C$, et on introduit les bornes supérieures des modules des coefficients $b_\alpha(A, \tau)$, et $c(A, \tau)$, en posant:

$$\dot{b}_\alpha(A) = \operatorname*{Max}_{0\leq\tau} |b_\alpha(A, \tau)|; \qquad \dot{c}(A) = \operatorname*{Max}_{0\leq\tau} |c(A, \tau)| \tag{2,4}$$

et

$$\dot{\lambda}_n(A) = \operatorname*{Max}_{0\leq\tau} \sqrt{|a^{\alpha\beta}(A, \tau)|}, \tag{2',4}$$

de sorte que la fonction:

$$\dot{f}(A, B, \theta) = \lambda\,\dot{\lambda}_n(A)\left[\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} C\,(r^h_{AB} + \theta^{h'})\,\dot{w}_{\alpha\beta}(A, B, \theta) + \right. \tag{2'',4}$$

$$\left. + \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{b}_\alpha(A)\,\dot{w}(A, B, \theta) + \dot{c}(A)\,\dot{w}(A, B, \theta)\right], \qquad \theta = t - \tau.$$

est la dominante de la fonction $f(A, t, B, \tau)$.

Nous posons donc:

$$\dot{N}(A, B, \theta) = \dot{f}(A, B, \theta)\cdot(\lambda)^{-1}, \tag{2''',4}$$

et

$$\dot{N}_{k+1}(A, B, \theta) = \int_0^\theta \iiint_{\Omega'} \dot{N}(A, M, \theta - \theta')\,\dot{N}_k(M, B, \theta')\,d, \theta', \tag{3,4}$$

$$\theta = t - \tau, \qquad k = 1, 2 \ldots$$

comme noyaux majorants des noyaux $N_{k+1}(A, B; t, \tau)$, $k = 1, 2 \ldots$ et

$$\dot{\mathfrak{N}}(A, B, \theta) = \dot{N}(A, B, \theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \dot{N}_k(A, B, \theta), \qquad \theta = t - \tau \tag{3',4}$$

comme la dominante cherchée du noyau résolvant $\mathfrak{N}(A, t; B, \tau)$.

On démontrera, en s'appuiant sur la définition des noyaux $\dot{N}_k(A, B, \theta)$ et des évaluations des noyaux majorés $N_k(A, t; B, \tau)$, qui se trouvent dans l'article [1] (à s. dans les formules (63), (67) et (68)), que les fonctions $\dot{N}_k(A, B, \theta)$ sont bornées, a partire d'un indice $k = \nu_0$ assez élévé, mais constant par rapport à θ, A et B; pour l'indice $n < \nu_0$ ces fonctions auront seulement les discontinuités faibles de façons, qu'elles accomplisseront l'inégalité (63) de l'article [1], à s:

$$\dot{N}_k(A, B, \theta) < C_1\,\theta^{-\mu}\,r_{AB}^{-(n+2-2\mu-h_1)} \qquad \text{où } C_1 = \text{const}, \tag{3'',4}$$

$$h_1 = \min(h, 2h'), \qquad \mu > 1 - \frac{h'}{2}, \qquad k = 1, 2 \ldots \nu_0 - 1.$$

L'inégalité analogue vérifiera la fonction $\dot{f}(A, B, \theta)$.

Lemme (1,4). *Le noyau résolvant $\mathfrak{N}(A, t; B, \tau)$ est la somme d'une série des fonctions absolument et uniformément convergentes, par rapport à l'accroissement $t - \tau = \theta$, sous les suppositions I - VI.*

En effet, il suffit de démontré que la série (3',4) est uniformément convergente par rapport à θ. Mais la supposition VI c'est n'est rien d'autre, que l'inégalité suivante:

$$(4,4) \qquad \int_0^{\theta}\iiint_{\Omega'} \dot{N}(A, B, \theta')\, dB\, d\theta' \leq b < (2\sqrt{\pi})^n \omega, \quad \omega < 1, \quad \theta = t - \tau .$$

Il est facile de demontrer l'inégalité que voici:

$$(4',4) \qquad \dot{N}(A, B, \theta) \leq \text{cons}\, \theta^{-n/2} \exp\left[-g r^2(A, B)/\theta\right], \qquad \theta \geq 1$$

et l'égalité (3'',4) pour $k = 1$.

En écrivant l'égalité (3,4) pour $n = 1$, sous la forme

$$(5,4) \qquad \dot{N}_2(A, B, \theta) =$$

$$= \int_0^{\theta/2}\iiint_{\Omega'} [\dot{N}(A, M, \theta - \theta')\dot{N}(M, B, \theta') + \dot{N}(A, M, \theta')\dot{N}(M, B, \theta - \theta')]\, dM \cdot d\theta'$$

on y trouve sans peine:

$$(5,4) \qquad \dot{N}_2(A, B, \theta) \leq a \cdot b \cdot \theta^{-n/2}, \qquad \text{où} \quad a = \text{const}, \qquad \theta \geq 1, \quad \text{et}$$

$$(5',4) \qquad \dot{N}_2(A, B, \theta) \leq \text{const}\, \theta^{1-2\mu}\, r_{AB}^{-n-4+2(2\mu+h_1)}, \qquad \mu > 1 - \frac{h_1}{2}.$$

Il est facile de déduire maintenant les formules suivantes:

$$(5'',4) \qquad \dot{N}_k(A, B, \theta) \leq a_k\, \theta^{-n/2}, \qquad \text{où} \quad a_k = \text{const}, \qquad \theta \geq 1, \qquad k = 1, 2 \ldots$$

$$(5''',4) \qquad \dot{N}_k(A, B, \theta) \leq a'_k \cdot \theta^{k-1-k\mu}\, r_{AB}^{-n-2k+k(2\mu+h_1)}, \qquad a'_k = \text{const},$$

$$\theta < 1, \qquad k = 1, 2 \ldots$$

qui prouve l'inégalité (3'',4).

Soit à présent le premier des indices k pour lesquels on a:

$$-n - 2k + k(2\mu + h_1) \geq 0, \qquad \text{c. à d.}$$

$$\nu_0 = [n \cdot (2\mu + h_1 - 2)^{-1}] + 1;$$

et alors

$$(5^{\text{IV}},4) \qquad \dot{N}_{\nu_0}(A\,,B\,,\theta) \leq a''_{\nu_0}\,\theta^{(n+2)\,(1-\mu)h-h_1}\,, \qquad \theta < 1$$

où

$$a''_{\nu_0} = a'_{\nu_0} \cdot r_{AB}^{\nu_0(2\mu+h-2)-n}\,,$$

et

$$(n+2)\,(1-\mu) - h_1 > 0\,, \qquad \nu_0\,(2\mu + h_1 - 2) - n \geq 0\,.$$

Mais le domaine Ω' étant borné, il existe une telle constante A_0, que

$$(6,4) \qquad \dot{N}_{\nu_0}(A\,,B\,,\theta) \leq A_0$$

pour chaque valeur de $\theta > 0$, et $A\,,B\,,\in\Omega'$.

La définition (3,4), les inégalités (6,4) et (4,4) permettent d'affirmer que:

$$(6',4) \qquad \dot{N}_{\nu_0+k}(A\,,B\,,\theta) \leq A_0\,[(2\sqrt{\pi})^n\,\omega]^k\,, \qquad k = 1\,,2\,,\ldots.$$

C'est pourquoi on peut écrire que:

$$(6'',4) \qquad 0 \leq \dot{\mathcal{T}}(A\,,B\,,\theta) - \left[\dot{N}(A\,,B\,,\theta) + \sum_{k=1}^{\nu_0-1} \lambda^k\,\dot{N}_k(A\,,B\,,\theta)\right] \leq A_0\,/\,(1-\omega),$$

$$0 < \theta = t - \tau\,, \qquad A\,,B \in \Omega'\,, \qquad A_0 = \text{const}\,,$$

ce qui prouve le Lemme (1,4).

Lemme (2,4). *Les supposition I - VI, étant admises, l'intégrale:*

$$(7,4) \quad \bar{\mathcal{J}}(A\,,t\,,\tau) = \int_\tau^t \iiint_{\Omega'} |\,\mathcal{T}(A\,,t\,;B\,,\theta')\,|\,dB\,d\theta'\,, \qquad A\in\Omega\,, \qquad t-\tau=\theta>0$$

éxiste uniformément par rapport à l'accroissement du paramètre $\theta > 0$.

Il suffit de démontrer que l'intégrale

$$(7',4) \qquad \dot{\mathcal{J}}\,(A\,,\theta) = \int_0^\theta \iiint_{\Omega'} \dot{\mathcal{T}}(A\,,B\,,\theta')\,dB\,d\theta'$$

existe uniformément pour $\theta > 1$. Soit K un indice positive.

Le Lemme (1,4) nous permet d'écrire, que:

$$(7'',4) \qquad \dot{\mathcal{T}}(A\,,B\,,\theta) = \dot{N}(A\,,B\,,\theta) + \sum_{k=1}^{K+\nu_0} \lambda^k\,\dot{N}_k(A\,,B\,,\theta) + \frac{\omega^K}{1-\omega}\cdot\eta\,A_0\,;$$

$$0 < \eta < 1\,,$$

ou

$$(7''',4) \qquad \dot{\mathfrak{N}}(A\,,B\,,\theta) = \mathfrak{U}_K(A\,,B\,,\theta) + \frac{\omega^K}{1-\omega}\eta\cdot A_0 .$$

Introduisons l'expression (7''',4), où on a remplacer θ par θ', dans l'intégrale (7',4). On y trouve:

$$(8,4) \quad \dot{\mathfrak{I}}(A\,,\theta) = \int\limits_0^\theta \iiint\limits_{\Omega'} \mathfrak{U}_k(A\,,B\,,\theta')\,dB\,d\theta' + \eta' A_0 \frac{\omega^K}{1-\omega}\cdot\theta\,, \qquad 0<\eta'<\text{const.}$$

Mais si nous adjusterons l'indice K de façon que

$$K \geq -\frac{\ln\theta^{1+\alpha}}{\ln\omega}, \qquad \alpha>0,$$

alors

$$(8',4) \qquad \omega^K\cdot\theta \leq \theta^{-\alpha}\to 0\,, \qquad \theta\to\infty\,.$$

Posons donc:

$$\bar{K} = \nu_0 + 1 + \left[-\frac{\ln\theta^{1+\alpha}}{\ln\omega}\right]$$

et écrivons:

$$\mathfrak{I}_{\bar{K}} = i_0 + \sum_{k=1}^{\bar{K}} i_k ,$$

où

$$(8'',4) \qquad i_k = \lambda^k \int\limits_0^\theta \iiint\limits_{\Omega'} \dot{N}_k(A\,,B\,,\theta')\,dB\,d\theta'\,,$$

et

$$i_0 = i_1\cdot\lambda^{-1}\,.$$

Il résulte de la supposition VI, qu'on a:

$$i_0 < \omega\,\lambda^{-1}\,; \qquad i_1 < \omega\,.$$

Nous prouverons que

$$(9,4) \qquad i_k < \omega^k\,, \qquad k = 1\,,2\,,\ldots$$

En effet

$$i_2\,\lambda^{-2} = \int\limits_0^{\theta}\iiint\limits_{\Omega'}\int\limits_0^{\theta'}\iiint\limits_{\Omega'}\dot N(A\,,M\,,\theta'')\,\dot N(M,B\,,\theta'-\theta'')\,d\theta''\,dM\,dB\,d\theta' =$$

$$= \int\limits_0^{\theta} d\theta'' \iiint\limits_{\Omega'}\int\limits_{\theta''}^{\theta} d\theta' \iiint\limits_{\Omega'}\dot N(A\,,M\,,\theta'')\,\dot N(M,B\,,\theta'-\theta'')\,dM\,dB\,.$$

Posons $\theta'-\theta''=v$, $d\theta'=dv$, et nous trouverons:

$$(9',4)\qquad i_2\,\lambda^{-2} = \int\limits_0^{\theta}\iiint\limits_{\Omega'}\dot N(A,M,\theta'')\int\limits_0^{\theta-\theta''}\iiint\limits_{\Omega'}\dot N(M\,,B\,,v)\,dB\,dv\,dM\,d\theta''\leq b^2\cdot\lambda\,.$$

Par induction on peut prouver que

$$(9'',4)\qquad i_k\,\lambda^{-k}\leq b^k\,,\qquad k=1\,,2\ldots\infty\,,$$

d'où résulte l'inégalité (9,4). De cette inégalité et des expressions (7″,4)... à ... (8″,4) résulte le Lemme (2,4), car ces expressions prouvent que l'intégrale $\dot{\mathfrak{I}}(A\,,\theta)$, qui est une fonction non décroissante du paramètre θ, est bornée. En effet:

$$(9',4)\qquad \dot I(A\,,\theta)<\omega\lambda^{-1}+\frac{\omega}{1-\omega}\qquad \text{c. q. f. d. d.}.$$

COROLLAIRE (1,4). *Sous les suppositions du Lemme* (2,4) *l'intégrale:*

$$(10,4)\qquad \dot I(A\,,t-T\,,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t-T}\iiint\limits_{\Omega'}\partial\gamma(A\,,t\,;B\,,\theta')\,dB\,d\theta'\to 0\,,\qquad T\to\infty\,,$$

où:

$$0<\tau<t-T\,,\qquad A\in\Omega'.$$

En effet il suffit de prouver que:

$$(10',4)\qquad \dot I_1(A\,,t-T\,,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t-T}\iiint\limits_{\Omega'}\dot{\partial\gamma}(A\,,B\,,t-\theta')\,dB\,d\theta'\to 0\,,\qquad T\to\infty\,.$$

Mais si on change les variables d'intégration en posant $t-\theta'=\theta''$, et si on introduit comme auparavant $t-\tau=\theta$, on y trouve

$$(10'',4) \qquad \dot{I}_1(A, t-T, \tau)=\int_T^\theta \iiint_{\Omega'} \mathfrak{N}(A, B, \theta'')\, dB\, d\theta'', \qquad \theta > T$$

et la convergence de l'expression (10″,4) vers zéro, avec l'inverse du T, est une simple consequence du fait que l'intégrale (7′,4) $\dot{I}(A, \theta)$ existe uniformément par rapport à θ.

§ 5. *L'évaluations des intégrales des égalités* (3″,3) *et* (4,3), *à s.: des intégrales :*

$$(1,5) \quad u_1(A,t,T)=\iint_S \bar{\varphi}(Q)\int_0^T\int_0^{T-\tau}\iiint_{\Omega'} w^{B,\theta^1}(A,t;B,\theta^1) f(B,\theta^1;Q,\theta^1-\theta)\, dB\, d\theta\, d\tau\, dQ\,,$$

avec :

$$\theta^1=t-T+\tau+\theta$$

et :

$$(1',5) \qquad \mathcal{Y}_1=$$

$$\lambda\int_{t-4T}^{t}\iint_S \varphi(Q,\tau)\int_\tau^t\iiint_{\Omega'} w^{B,\theta}(A,t;B,\theta)\int_\tau^\theta\iiint_{\Omega'}\mathfrak{N}(B,\theta;M,\theta') f(M,\theta';Q,\tau)\, dM\, d\theta'\, dB\, dQ\, d\tau.$$

§ 5 A. *L'évaluation de l'intégrale* $u_1(A, t, T)$. L'accroissement des paramètres des fonctions qui figurent dans l'intégrale $u_1(A, t, \tau)$ ne dépand pas du paramétre t.

Nous trouvons donc on posant:

$$\bar{\omega}^B(A, B, \theta)=\theta^{-n/2}\exp\left[-\bar{\vartheta}^B(A, B)/4\theta\right],$$

$$\bar{\vartheta}^B(A, B)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\bar{a}^{\alpha,\beta}(B)\,(x_\alpha-\zeta_\alpha)\,(x_\beta-\zeta_\beta)$$

$$\bar{f}(B, Q, \theta)=\lambda\sqrt{\det|\bar{a}^{\alpha,\beta}(B)|}\Big\{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}[\bar{a}_{\alpha\beta}(B)-\bar{a}_{\alpha\beta}(Q)]\,\bar{\omega}^B_{\zeta_\alpha\zeta_\beta}(B, Q, \theta)+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{n}\bar{b}_\alpha(B)\,\bar{\omega}^B_{\zeta_\alpha}(B, Q, \theta)+\bar{c}(B)\,\bar{\omega}^B(B, Q, \theta)\Big\},$$

qu'on a:

$$\lim_{t\to\infty} u_1(A\,,t\,,T) = \iint_S \overline{\varphi}(Q) \iiint_{\Omega'} \int_0^T \int_0^{T-\tau} \overline{\omega}^B(A, B, T-\tau-\theta)\,\overline{f}(B\,,Q\,,\theta)\,d\theta\,d\tau\,dB\,dQ\,,$$

On nomme la plus intérieure intégrale double par $\mathcal{Y}$, d'où on reçoit par le changement des variables à s. $T-\tau=u\,,\ d\tau=-du$

$$\mathcal{Y} = \int_0^T \int_0^u \overline{\omega}^B(A\,,B,\,u-\theta)\,\overline{f}(B\,,Q\,,\theta)\,d\theta\,du =$$

$$= \int_0^T d\theta \int_\theta^T \overline{\omega}^B(A\,,B\,,u-\theta)\,\overline{f}(B\,,Q\,,\theta)\,du\,d\theta\,,$$

et:

$$\mathcal{Y} = \int_0^T \int_0^{T-\theta} \overline{\omega}^B(A\,,B\,,v)\,\overline{f}(B\,,Q\,,\theta)\,dv\,d\theta = \int_0^T \overline{f}(B\,,Q\,,\theta) \int_0^{T-\theta} \overline{\omega}^B(A\,,B\,,v)\,dv\,d\theta$$

d'où on y trouve facilement

$$\mathcal{Y} = \int_0^T \overline{f}(B\,,Q\,,T-\theta) \int_0^\theta \overline{\omega}^B(A\,,B\,,\tau)\,d\tau\,d\theta \qquad (A \neq B \neq Q),$$

c. à d. que:

$$u_1(A\,,t\,,T) \to \tag{2,5}$$

$$\to \iint_S \overline{\varphi}(Q) \int_0^T \iiint_{\Omega'} \overline{f}(B,\,Q,\,T-\theta) \int_0^\theta \overline{\omega}^B(A\,,B\,,\tau)\,d\tau\,d\theta\,dB\,dQ\,, \quad t\to\infty\,.$$

Les singularités des fonctions $\overline{f}(...)$ et $\overline{\omega}^B(...)$ sont ici separées et ces fonctions accomplissent les inégalités (21) et (63) de l'article [1], et les inégalités analogues aux inégalités (3',3) et (3,3), ce qui prouve que l'intégrale (2,5) existe uniformément par rapport à T.

Nous avons déja démontrés, pour $A \neq B$, l'égalité suivante

$$\int_0^\theta \overline{\omega}^B(A\,,B\,,\tau)\,d\tau = 4^{\frac{n}{2}-1} \left[\vartheta^B(A\,,B)\right]^{-\frac{n}{2}+1} \int_{\vartheta^B(A,B)/4\theta}^{\infty} u^{\frac{n}{2}-2} \exp(-u)\,du\,,$$

où on a posé :

$$\tau = \overline{\vartheta}^B(A\,,B)/4u\,, \qquad d\tau = -\,\overline{\vartheta}^B(A\,,B)\,du/4u^2.$$

On exclue la sphère $K(A\,,\varrho)$ du domaine Ω'. Dans le domaine restant $\Omega' - K(A\,,\varrho)$ la substitution, d'ont il fût question, est légitime, et l'intégrale converge vers

$$4^{\frac{n}{2}-1}\,[\overline{\vartheta}^B(A\,,B)]^{-\frac{n}{2}+1}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right), \qquad \text{avec} \quad \theta\to\infty\,,$$

et elle converge vers zéro, si $\theta\to 0$. Cette intégrale reste donc borné dans le domaine $\Omega' - K(A\,,\varrho)$. Mais pour $0<\theta<\dfrac{T}{2}$ le premier facteur de l'expression (2,5), qui est de l'ordre de $(T-\theta)^{-\frac{n}{2}+1} < (T/2)^{-\frac{n}{2}+1}$, converge vers zéro, $T\to\infty$. Donc pour $\theta > T/2$ et le nombre T assez grand nous pouvons écrire, que :

$$(2'5) \qquad \iint\limits_S \overline{\varphi}(Q) \iiint\limits_{\Omega - K(A,\varrho)} \int\limits_0^T \overline{f}(B\,,Q\,,T-\theta)\,dQ \int\limits_0^\theta \overline{\omega}^B(A\,,B\,,\tau)\,dB\,d\tau\,d\theta =$$

$$O\left\{4^{\frac{n}{2}-1}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\iint\limits_S \overline{\varphi}(Q)\iiint\limits_{\Omega'-K(A,\varrho)} [\overline{\vartheta}^B(A\,,B)]^{-\frac{n}{2}+1}\cdot\int\limits_{T/2}^T \overline{f}(B,Q,T-\theta)\,d\theta\,dQ\,dB\right\}$$

Excluons maintenant du domaine $\Omega' - K(A\,,\varrho)$ le domaine Ω_1' où r_{BQ} est petit (donc le domaine entourant la surface S).

Désignons le domaine restant par $\overline{\Omega}$, alors :

$$\overline{\Omega} = \Omega' - K(A\,,\varrho) - \Omega_1'\,.$$

Dans le domaine $\overline{\Omega}$ nous pouvons appliquer aux composants de la fonction $\overline{f}(B\,,Q\,,T-\theta)$ les mêmes transformations que plus haut, ce qui est possible car les coefficients ne dépendent pas du paramètre. On reçoit ainsi la somme des intégrales de la forme :

$$u^{\frac{n}{2}+i-1}\,[\overline{\vartheta}(B\,,Q)]^{-\frac{n}{2}-i+1}\int\limits_{\overline{\vartheta}^B(A,B)/4\theta}^{\infty} u^{\frac{n}{2}+i-2}\exp(-u)\,du, \qquad i=0,1,2.$$

Ici on a $\theta > \frac{T}{2}$, et chaqune de ces intégrales converge vers $\Gamma\left(\frac{n}{2}+i-1\right)$, avec $T \to \infty$.

À cause du fait que l'intégrale (5,2) existe uniformément, on peut assujetir le domaine $K(A, \varrho) + \Omega_1'$ aussi petit pour qu'on ait

$$(2'',5) \qquad \left| \iint\limits_S \bar{\varphi}(Q) \iiint\limits_{K(A,r)+\Omega_1'} \int\limits_0^T \bar{f}(B, Q, \tau - \theta)\, dQ \int\limits_0^\theta \bar{\omega}^B(A, B, \tau)\, dB\, d\tau\, d\theta \right| \leq \varepsilon/2 \qquad \varepsilon > 0 .$$

Les coefficients à l'indice $i \doteq 2$ font le plus d'embarras car $-\frac{n}{2}-2+1 < -\frac{n}{2}$, mais ces coefficient sont multipliés par le facteur:

$$r_{BQ}^2 | \bar{a}_{\alpha\beta}(B) - \bar{a}_{\alpha\beta}(Q) | \leq r_{BQ}^{2+h} \cdot \text{const}, \qquad 0 < h$$

on y reçoit donc:

$$r_{BQ}^2 | \bar{a}_{\alpha\beta}(B) - \bar{a}_{\alpha\beta}(Q) | \cdot | \bar{\vartheta}^B(B, Q) |^{-\frac{n}{2}-1} \leq \text{const} \cdot r_{BQ}^{-n+h},$$

donc l'intégrale à n dimentions de cet expression existe. Mais ici il sera question de l'existence de l'intégrale suivante:

$$\mathfrak{J}_{S,\bar{\Omega}} = \iint\limits_S \iiint\limits_{\bar{\Omega}} r_{AB}^{-n+2}\, r_{BQ}^{-n+h}\, dB\, dQ .$$

Soit S_1 le partie de la surface S, où $r_{BQ} > r_{AB}$, et soit S_2 le partie de la surface S, où $r_{BQ} \leq r_{AB}$, alors:

$$\mathfrak{J}_{S,\bar{\Omega}} = \mathfrak{J}_{S_1} + \mathfrak{J}_{S_2}$$

$$\mathfrak{J}_{S_1} = \iiint\limits_{\bar{\Omega}} r_{AB}^{-n+2}\, dB \iint\limits_{S_1} r_{BQ}^{-n+h}\, dQ = O\left\{ \iiint\limits_{\bar{\Omega}} r_{AB}^{-n+2}\, dB \iint\limits_{S_1} r_{BQ}^{-2+h}\, dr_{BQ} \right\} =$$

$$O\left\{ \iiint\limits_{\bar{\Omega}} r_{AB}^{-n+2} [r_{BQ_1}^{-1+h} - r_{BQ_0}^{-1+h}]\, dB \right\}; \qquad Q_1, Q_0 \in S$$

$$\mathfrak{J}_{S_1} = O\left\{ \iiint\limits_{\bar{\Omega}} r_{AB}^{-n+1+h}\, dB \right\} = O\left\{ \iiint\limits_{\Omega'} r_{AB}^{-n+1+h}\, dB \right\}$$

qui existe.

$$\mathcal{J}_{S_2} \leq \iint\limits_{S_2} \iiint\limits_{\overline{\Omega}} r_{BQ}^{-2n+2+h}\, dB\, dQ = 0 \left\{ \iint\limits_{S_2} \iiint\limits_{\overline{\Omega}} r_{BQ}^{-n+1+h}\, dr_{BQ}\, dQ \right\} =$$

$$O \left\{ \iint\limits_{S_2} [r_{B_1Q}^{-n+2+h} - r_{B_0Q}^{-n+2+h}]\, dQ \right\} = O \left\{ \iint\limits_{S_2} r_{BQ}^{-n+2+h}\, dQ \right\}$$

existe pour chaque $B \in \Omega'$. c. à d. que l'intégrale $\mathcal{J}_{S,\overline{\Omega}}$ existe pour chaque domaine :

$$\overline{\Omega} = \Omega' - K(A\,,\varrho) - \dot{\Omega}_1'\,.$$

Si $i = 1$, le coefficient est le suivant :

$$|\, \overline{a}_{\alpha\beta}(B) - \overline{a}_{\alpha\beta}(Q)\, | \backsim r_{BQ}^{h}\,,$$

et la singularité sera

$$[\overline{\vartheta}^B (B\,,\, Q)]^{-n/2}\, r_{BQ}^{h} \backsim r_{BQ}^{-n+h}$$

qui était déjà discuté.

La première dérivée du quasi-potentiel limite est de la forme :

$$\overline{w}_{x\alpha}^{Q}(B\,,\, Q\,,\, \theta) = -\frac{1}{2}\, \theta^{-\frac{n}{2}-1} \exp\left[-\frac{\overline{\vartheta}^{Q}(B\, Q)}{4\theta}\right] \cdot \sum_{\gamma=1}^{n} \overline{a}^{\alpha\gamma}(Q)\,(\xi_\gamma - \zeta_\gamma)$$

Ici la singularité est la suivante :

$$r_{BQ}\, \overline{\vartheta}^{Q}(A\,,\, Q)^{-\frac{n}{2}} \backsim r_{BQ}^{-n+1}$$

qui rentre dans le cas qu'on a discuté plus haut.

Pour revenir maintenant vers l'intégrale (2',5) on écrit :

$$\int\limits_{T/2}^{T} \overline{f}(B\,,\, Q\,,\, T - \theta)\, d\theta = \int\limits_{0}^{T/2} \overline{f}(B\,,\, Q\,,\, u)\, du = \int\limits_{\overline{\vartheta}^{Q}(B,Q)/2T}^{\infty} \overline{f}\left(B\,,\, Q\,,\, \frac{\overline{\vartheta}^{Q}(B, Q)}{4v}\right) \cdot$$

$$\cdot\, \overline{\vartheta}^{Q}(B\,,\, Q)\, dv/4v^2 \underset{\substack{T\to\infty \\ B\neq Q}}{\longrightarrow} \int\limits_{0}^{\infty} \overline{f}\left(B\,,\, Q\,,\, \frac{\overline{\vartheta}^{Q}(B, Q)}{4v}\right) \cdot \overline{\vartheta}^{Q}(B,\, Q)\, dv/4v^2 =$$

$$= \int_0^\infty \overline{f}(B, Q, u)\, du =$$

$$= \lambda \sqrt{\det | \overline{a}^{\alpha\beta}(B) |} \left\{ \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} [\overline{a}_{\alpha\beta}(B) - \overline{a}_{\alpha\beta}(Q)] \cdot \int_0^\infty \overline{w}^{Q}_{\xi_\alpha \xi_\beta}(B, Q, u)\, du + \right.$$

$$\left. + \sum_{\alpha=1}^{n} \overline{b}(B) \int_0^\infty \overline{w}^{Q}_{\xi_\alpha}(B, Q, u)\, du + \overline{c}(B) \int_0^\infty \overline{w}^{Q}(B, Q, u)\, du \right\},$$

mais on sait, que

$$\int_0^\infty \overline{w}^{B}(B, Q, u)\, du = 4^{\frac{n}{2}-1}\, \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) [\overline{\vartheta}^{Q}(B, Q)]^{-\frac{n}{2}+1},$$

alors

$$\int_0^\infty \overline{f}(B, Q, u)\, du = 4^{\frac{n}{2}-1}\, \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) \lambda \sqrt{\det | \overline{a}^{\alpha\beta}(B) |}\, \cdot$$

$$\left\{ \sum_{\alpha\beta=1}^{n} [\overline{a}_{\alpha\beta}(B) - \overline{a}_{\alpha\beta}(Q)]\, \{[\overline{\vartheta}^{Q}(B, Q)]^{-\frac{n}{2}+1}\}''_{\xi_\alpha \xi_\beta} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\alpha=1}^{n} \overline{b}_\alpha(B)\, \{[\overline{\vartheta}^{Q}(B, Q)]^{-\frac{n}{2}+1}\}'_{\xi_\alpha} + \overline{c}(B)\, [\overline{\vartheta}^{Q}(B, Q)]^{-\frac{n}{2}+1} \right\}.$$

Mais on sait qu'on a pour $Q \neq B$ l'égalité suivante:

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \overline{a}_{\alpha\beta}(Q)\, \{[\overline{\vartheta}^{Q}(B, Q)]^{-\frac{n}{2}+1}\}_{\xi_\alpha \xi_\beta} = 0,$$

on peut donc écrire en entroduisant l'expression $\widehat{\psi}(u)$, que

$$\int_0^\infty \overline{f}(B, Q, \theta)\, d\theta = 4^{\frac{n}{2}-1}\, \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) \lambda \sqrt{\det | \overline{a}^{\alpha\beta}(B) |}\, \widehat{\psi}_B(u), \tag{3,5}$$

$$u = [\overline{\vartheta}^{Q}(B, Q)]^{-\frac{n}{2}+1}, \quad B \neq Q.$$

Mais à cause du fait que l'intégrale (2,5) existe uniformément par rapport à T, le domaine $K(A, \varrho) + \Omega_1'$ peut être choisi assez petit pour qu'on puisse écrire l'inégalité (2″,5).

Après avoir fixé le domaine $K(A, \varrho) + \Omega_1'$ on passe à la limite par rapport à T, ce qui permet d'écrire:

$$(3',5) \quad \lim_{T\to\infty} \Bigg| \iint_S \overline{\varphi}(Q) \int_0^T \iiint_{\Omega'} \overline{f}(B, Q, T-\theta) \int_0^\theta \overline{\omega}^B(A, B, \tau)\, d\tau\, dB\, d\theta\, dQ -$$

$$- 4^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right) \iint_S \overline{\varphi}(Q) \iiint_{\Omega} [\overline{\vartheta}^B(A,B)]^{-\frac{n}{2}+1} \int_0^\infty \overline{f}(B, Q, u)\, du\, dB\, dQ \Bigg| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On peut reçevoir pareillement à l'inégalité (2″,5) l'inégalité suivante:

$$(3'',5) \quad \Bigg| \iint_S \overline{\varphi}(Q) \iiint_{K(A,r)+\Omega_1'} [\overline{\vartheta}^B(A, B)]^{-\frac{n}{2}+1} \int_0^\infty \overline{f}(B, Q, u)\, du\, dB\, dQ \Bigg| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left[4^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\right]^{-1}.$$

Comme le nombre $\varepsilon > 0$ est à volonté petit, les deux inégalité (3′5) et (3″,5) et les définitions (10′,1) et (10″,1) prouve que:

$$(3''',5) \quad \lim_{T\to\infty} \iint_S \overline{\varphi}(Q) \int_0^T \iiint_{\Omega'} \overline{f}(B, Q, T-\theta) \int_0^\theta \overline{w}^B(A, B, \tau)\, d\tau\, dB\, d\theta\, dQ =$$

$$= \lambda \iint_S \overline{\varphi}(Q) \iiint_{\Omega'} \overline{w}^B(A, B)\, \overline{\lambda}_n(B)\, \widehat{\psi_B}\, [\overline{w}^Q(B, Q)]\, dB\, dQ.$$

Revenons aux définitions du § 3. Les égalités (3‴,5) et (3″,3) donnent:

$$(4,5) \quad \lim_{t\to\infty} [U_2(A, t) - r(A, t)] =$$

$$= \lambda \iiint_{\Omega'} \overline{\lambda}_n(B)\, \overline{w}^B(A, B) \iint_S \overline{\varphi}(Q)\, \widehat{\psi_B}\, [\overline{w}(B, Q)]\, dQ\, dB.$$

§ 5 B. *L'évaluation de l'intégrale* $\mathcal{Y}_1$.

$$(5,5)\qquad \mathcal{Y}_1 = \lambda \int_{t-4T}^{t} \iint_{S} \varphi(Q, \tau) \int_{\tau}^{t} \iiint_{\Omega'} w^{B,\theta}(A, t; B, \theta) \cdot$$

$$\cdot \int_{\tau}^{\theta} \iiint_{\Omega'} \mathcal{N}(B, \theta; M, \theta') f(M, \theta'; Q, \tau)\, dM\, d\theta'\, dB\, d\theta\, dQ\, d\tau .$$

On change la variable d'intégration en posant

$$\tau = t - 4T + \tau_1 ; \qquad d\tau = d\tau_1 ,$$

et on écrit :

$$(5',5)\qquad \mathcal{Y}_1 = \lambda \int_{0}^{4T} \iint_{S} \varphi(Q, \tau) \int_{\tau}^{t} \iiint_{\Omega'} w^{B,\theta}(A, t; B, \theta) \cdot$$

$$\cdot \int_{\tau}^{\theta} \iiint_{\Omega'} \mathcal{N}(B, \theta; M, \theta') f(M, \theta'; Q, \tau)\, dM\, d\theta'\, dB\, d\theta\, dQ\, d\tau_1 .$$

En changeant la variable d'intégration par la substitution :

$$\theta = \tau + \theta_1 = t - 4T + \tau_1 + \theta_1 ; \qquad d\theta = d\theta_1$$

on reçoit :

$$(5'',5)\qquad \mathcal{Y}_1 = \lambda \int_{0}^{4T} \iint_{S} \varphi(Q, \tau) \int_{0}^{4T-\tau_1} \iiint_{\Omega'} w^{B,\theta}(A, t; B, \theta) \cdot$$

$$\cdot \int_{\tau}^{\theta} \iiint_{\Omega'} \mathcal{N}(B, \theta; M, \theta') f(M, \theta'; Q, \tau)\, dM\, d\theta'\, dB\, d\theta_1\, dQ\, d\tau_1 .$$

De même on écrira :

$$\theta' = \tau + \theta'_1 = t - 4T + \tau_1 + \theta'_1 ; \qquad d\theta' = d\theta'_1 ,$$

et

$$(5''',5) \qquad \mathcal{Y}_1 = \lambda \int_0^{4T} \iint_S \varphi(Q, \tau) \int_0^{4T-\tau_1} \iiint_{\Omega'} w^{B,\theta}(A, t; B, \theta) \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\theta_1} \iiint_{\Omega'} \mathfrak{N}(B, \theta; M, \theta') f(M, \theta'; Q, \tau)\, dM\, d\theta_1'\, dB\, d\theta_1\, dQ\, d\tau_1 =$$

$$= \lambda \int_0^{4T} \iiint_S [\varphi(Q, \tau) - \overline{\varphi}(Q)] \int_0^{4T-\tau_1} \iiint_{\Omega'} w^{B,\theta}(A, t; B, \theta) \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\theta_1} \iiint_{\Omega'} \mathfrak{N}(B, \theta; M, \theta') f(M, \theta'; Q, \tau)\; dM\, d\theta_1'\, dB\, d\theta_1\, dQ\, d\tau_1 +$$

$$+ \lambda \iint_S \overline{\varphi}(Q) \int_0^{4T} \int_0^{4T-\tau_1} \iiint_{\Omega'} \omega^{B,\theta}(A, t; B, \theta) \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\theta_1} \iiint_{\Omega'} \mathfrak{N}(B, \theta; M, \theta') f(M, \theta'; Q, \tau)\, dM\, d\theta_1'\, dB\, d\theta_1\, d\tau_1\, dQ\,.$$

Mais il résulte de nos substitutions que les différences des paramètres des fonctions, outre que $\varphi(Q, \tau)$, ne dépendent pas de t ; $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(Q, \tau) = \overline{\varphi}(Q)$; les coefficients de l'équation $\widehat{\psi}(u) = 0$ convergent aussi vers leurs limites, uniformément par rapport à $Q \in S$, et $B, M \in \Omega'$. Il résulte de tout cela que le premier composant de l'expression $(5''',5)$ converge vers zéro avec l'inverse du parametre t, donc

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{Y}_1 = \lambda \iint_S \overline{\varphi}(Q) \int_0^{4T} \int_0^{4T-\tau} \iiint_{\Omega'} \overline{\omega}^B(A, B, 4T - \tau - \theta) \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\theta} \iiint_{\Omega'} \overline{\mathfrak{N}}(B, M, \theta - \theta') \overline{f}(M, Q, \theta')\, dM\, d\theta'\, dB\, d\theta\, d\tau\, dQ\,,$$

où

$$\overline{\mathfrak{N}}(B, M, \theta) = \lim_{t\to\infty} \mathfrak{N}(B, t; M, t-\theta), \quad 0 < \theta < 4T, \quad B \neq M$$

est le noyau résolvant construit sur la quasi-solution

$$\overline{\omega}^M (B, M, \theta) .$$

On posera dans la dernière intégrale $4T - \tau = u$; d'où $d\tau = - du$, et on aura :

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{Y}_1 = \lambda \iint_S \overline{\varphi}(Q) \int_0^{4T} du \int_0^u \iiint_{\Omega'} \overline{\omega}^B (A, B, u - \theta)\, d\theta \cdot$$

$$\cdot \int_0^\theta \iiint_{\Omega'} \overline{\mathfrak{N}}(B, M, \theta - \theta') \overline{f}(M, Q, \theta')\, dM\, d\theta'\, dB\, dQ =$$

$$= \lambda \iint_S \overline{\varphi}(Q) \int_0^{4T} d\theta \int_\theta^{4T} \iiint_{\Omega'} \overline{\omega}^B (A, B, u - \theta)\, du \;\cdot$$

$$\cdot \int_0^\theta \iiint_{\Omega'} \overline{\mathfrak{N}}(B, M, \theta - \theta') \overline{f}(M, Q, \theta')\, dM\, dB\, dQ\, d\theta' .$$

En introduisant dans l'intégrale de la quasi-solution le même changement des variables que dans la parti A de ce paragraphe on reçoit sans peine l'égalité suivante :

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{Y}_1 = 4^{\frac{n}{2}-1} \lambda \iint_S \overline{\varphi}(Q) \int_0^{4T} d\theta \iiint_{\Omega'} \int_{\vartheta}^{\infty} [\overline{\vartheta}^B (A, B)]^{-\frac{n}{2}+1} v^{\frac{n}{2}-2} \exp(-v)\, dv \cdot$$

$$\cdot \int_0^\theta \iiint_{\Omega'} \overline{\mathfrak{N}}(B, M, \theta - \theta') \overline{f}(M, Q, \theta')\, dM\, dB\, dQ\, d\theta',$$

où

$$\vartheta = \overline{\vartheta}^B (A, B) \cdot [4(4T - \theta)]^{-1} .$$

On intervertie maintenant l'ordre d'intégration de θ et de θ' de sorte que θ' change dans l'intervalle $\langle 0, 4T \rangle$ et θ dans l'intervalle $\langle \theta', 4T \rangle$. On change oùtre cela la variable d'intégration en posant $\theta - \theta' = u$, $d\theta = du$, et on trouve

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{Y}_1 = 4^{\frac{n}{2}-1} \lambda \iint_S \overline{\varphi}(Q) \int_0^{4T} \iiint_{\Omega} \overline{f}(M, Q, \theta') \int_0^{4T-\theta'} \iiint_{\Omega'} \overline{\mathfrak{N}}(B, M, u) \cdot$$

$$\cdot \int_{\vartheta_1}^{\infty} [\overline{\vartheta}^B(A, B)]^{-\frac{n}{2}+1} v^{\frac{n}{2}-2} \exp(-v)\, dv\, dB\, du\, dM\, d\theta'\, dQ\ ,$$

où

$$\vartheta_1 = \overline{\vartheta}^B(A, B) \cdot [4(4T - \theta' - u)]^{-1}.$$

Grâce aux résultats des §§ antérieurs nous savons que les intégrales de ci dessus existe uniformément par rapport à T. Donc à la limite, pour $T \to \infty$, on peut omettre les intégrales étendues aux intervalles de T à $4T$, pour la variable d'intégration θ', et après de $2T$ à $4T - \theta'$, pour la variable u.

Il restera à évaluer la limite pour $T \to \infty$, de l'intégrale suivante:

$$4^{\frac{n}{2}-1} \lambda \iint_S \overline{\varphi}(Q) \int_0^{T} \iiint_{\Omega'} \overline{f}(M, Q, \theta') \int_0^{2T} \iiint_{\Omega'} \overline{\mathfrak{N}}(B, M, u) \cdot$$

$$\cdot \int_{\vartheta_1}^{\infty} [\overline{\vartheta}^B(A, B)]^{-\frac{n}{2}+1} v^{\frac{n}{2}-2} \exp(-v)\, dv\, dB\, du\, dM\, d\theta'\, dQ\ ,$$

qui est convergente (§ 4).

Nous avons donc

$$\lim_{T\to\infty} \lim_{t\to\infty} \mathcal{Y}_1 = \lambda \iint_S \overline{\varphi}(Q) \int_0^{\infty} \iiint_{\Omega'} \overline{f}(M, Q, \theta') \int_0^{\infty} \iiint_{\Omega'} \overline{\mathfrak{N}}(B, M, u) \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\infty} [\overline{\vartheta}^B(A, B)]^{-\frac{n}{2}+1} 4^{\frac{n}{2}-1} v^{\frac{n}{2}-2} \exp(-v)\, dv\, dB\, du\, dM\, d\theta'\, dQ\ .$$

En nous appuyant sur la définition (3‴,5) on peut écrire, que

$$\lim_{T,t\to\infty} \mathcal{Y}_1 =$$

$$= \lambda \iint_S \overline{\varphi}(Q) \int_0^\infty \iiint_{\Omega'} \overline{f}(M, Q, \theta') \int_0^\infty \iiint_{\Omega'} \overline{\omega}^B (A, B) \overline{\mathfrak{N}}(B, M, u)\, dB\, dw\, dM\, d\theta'\, dQ .$$

Mais pour $M \neq Q$, on a d'après les formules (3,5) et (10″,1)

$$\iint_S \overline{\varphi}(Q) \int_0^\infty \overline{f}(M, Q, \theta')\, d\theta'\, dQ = \lambda \iint_S \overline{\varphi}(Q)\, \overline{\lambda}_n (M)\, \widehat{\psi}_M [\overline{w}^Q (M, Q)]\, dQ .$$

De même qu'au A. § 5 on peut prouver que:

$$\lim_{T,t\to\infty} \mathcal{Y}_1 =$$

$$= \lambda^2 \iint_S \overline{\varphi}(Q) \iiint_{\Omega'} \overline{\lambda}_n (M)\, \widehat{\psi}_M [\overline{w}^Q (M, Q)]\, dQ \iiint_{\Omega'} \overline{w}^B (A, B) \int_0^\infty \overline{\mathfrak{N}}(B, M, \theta)\, d\theta\, dB\, dM$$

mais

$$\int_0^\infty \overline{\mathfrak{N}}(B, M, \theta)\, d\theta = \int_0^\infty \overline{N}(B, M, \theta)\, d\theta + \sum_{k=1}^\infty \lambda^k \int_0^\infty \overline{N}_k (B, M, \theta)\, d\theta =$$

$$= \overline{\lambda}_n (B)\, \widehat{\psi}_B (u) + \sum_{k=1}^\infty \lambda^k \int_0^\infty \overline{N}_k (B, M, \theta)\, d\theta ; \qquad u = \overline{w}^M (B, M), \qquad B \neq M .$$

On calculera maintenant les noyaux itérés $\overline{N}_k (B, M, \theta)$, $B \neq M$

$$\int_0^\infty \overline{N}_2 (B, M, \theta)\, d\theta = \int_0^\infty d\theta \int_0^\theta \iiint_{\Omega'} \overline{N}(B, M', \theta - \theta')\, \overline{N}(M', M, \theta')\, d\theta'\, dM' =$$

$$= \int_0^\infty d\theta' \int_\theta^\infty \iiint_{\Omega'} \overline{N}(B, M', \theta - \theta')\, \overline{N}(M', M, \theta')\, d\theta\, dM' =$$

$$= \int_0^\infty d\theta' \int_0^\infty \iiint_{\Omega'} \overline{N}(B, M', v)\, \overline{N}(M', N, \theta')\, dv\, dM' =$$

$$= \overline{\lambda}_n (B) \iiint_{\Omega'} \overline{\lambda}_n (M')\, \widehat{\psi}_B [\overline{w}^{M'} (B\, M')]\, \widehat{\psi}_{M'} [\overline{w}^M (M', M)]\, dM' = M_2 (B, M) .$$

Il sera de même :

$$\int_0^\infty \overline{N}_3(B, M, \theta)\, d\theta = \int_0^\infty d\theta' \int_0^\infty \iiint_{\Omega'} \overline{N}_2(B, M', v)\, \overline{N}(M', M, \theta')\, dv\, dM' =$$

$$= \iiint_{\Omega'} M_2(B, M')\, M_1(M', M)\, dM' = M_3(B, M)$$

où

$$M(A, B) = M_1(A, B) = \widehat{\psi_A}\,[w^B(A, B)] \cdot \overline{\lambda}_n(A)\,.$$

On aura généralement :

$$\int_0^\infty \overline{N}_{k+1}(B, M, \theta)\, d\theta = M_{k+1}(B, M) = \iiint_{\Omega'} M_k(B, M') \cdot M(M', M)\, dM', \quad k = 2, 3, \ldots,$$

de façon que :

$$\int_0^\infty \overline{\mathfrak{N}}(B, M, \theta)\, d\theta = M(B, M) + \sum_{k=1}^\infty \lambda^k M_k(B, M) = \overline{\mathfrak{N}}(B, M)$$

ce qui donne :

$$\lim_{T,t\to\infty} \mathcal{Y}_1 = \lambda^2 \iint_S \overline{\varphi}(Q) \iiint_{\Omega'} \overline{\lambda}_n(M)\, \widehat{\psi_M}\,[\overline{w}^Q(M, Q)]\, dQ \cdot$$

$$\cdot \iiint_{\Omega'} \overline{w}^B(A, B) \left\{ M(B, M) + \sum_{k=1}^\infty \lambda^k M_k(B, M) \right\} dB\,,$$

D'ici on trouvera en posant :

$$\lambda \cdot \overline{\lambda}_n(A)\, \widehat{\psi_A}\,[\overline{w}^B(A, B)] = \overline{f}(A, B) = \lambda \cdot M(A, B)$$

et

$$\overline{f}(B, Q) + \lambda \iiint_{\Omega'} \overline{\mathfrak{N}}(B, M)\, \overline{f}(M, Q)\, dM = \overline{\Phi}(B, Q)$$

que

$$(10,''5) \qquad \lim_{T,t\to\infty} \mathcal{Y}_1 = \iint_S \overline{\varphi}(Q) \iiint_{\Omega'} \overline{w}^B(A, B)\, [\overline{\Phi}(B, Q) - \overline{f}(B, Q)]\, dB\,.$$

Ces expressions, le LEMME (2,1) et ces définitions permêttent d'écrire, que:

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t\iint_S \varphi(Q,\tau)\,\Gamma(A,t;\,Q,\tau)\,dS\,d\tau =$$

$$\iint_S \overline{\varphi}(Q)\left\{\overline{w}^Q(A,Q)+\iiint_{\Omega'}\overline{w}^B(A,B)\left[\overline{f}(B,Q)+\lambda\iiint_{\Omega'}\overline{\mathfrak{N}}(B,M)\overline{f}(M,Q)\,dM\right]dB\right\}dQ,$$

donc

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t\iint_S\varphi(Q,\tau)\Gamma(A,t;\,Q,\tau)\,dQ\,d\tau=\iint_S\overline{\varphi}(Q)\left\{\overline{w}^Q(A,Q)+\iiint_{\Omega'}\overline{w}^B(A,B)\,\overline{\Phi}(B,Q)\,dB\right\}.\ d\theta$$

Posons maintenant:

$$.\,\overline{w}^Q(A\,,\,Q)+\iiint_{\Omega'}\overline{w}^B(A\,,\,B)\,\overline{\Phi}(B\,,\,Q)\,dB=\overline{\Gamma}(A\,,\,Q)\,.$$

On obtiendra donc:

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t\iint_S\varphi(Q,\tau)\,\Gamma(A,t;\;Q,\tau)\,dQ\,d\tau=\iint_S\overline{\varphi}(Q)\,\overline{\Gamma}(A\,,\,Q)\,dQ=\overline{U}(A)\,.$$

Mais il est facile de vérifier que la fonction $\overline{\Gamma}(A\,,\,Q)$ est la résolution de l'équation élliptique:

$$\text{(11,5)}\qquad \widehat{\psi_A}(u)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\overline{a}_{\alpha,\beta}(A)\,u''_{x_\alpha x_\beta}+\sum_{\alpha=1}^{n}\overline{b}_\alpha(A)\,u'_{x_\alpha}+\overline{c}(A)\,u=0\,.$$

qui fût nommé équation élliptique limite de l'équation (1). $\overline{U}(A)$ est donc le potentiel de simple couche de cet équation limite (11,5) et de densite limite $\overline{\varphi}(Q)$ sur la surface S. Nous pouvons donc écrire que

$$\text{(12,5)}\qquad \lim_{t\to\infty}U(A\,,\,t)=\overline{U}(A),\qquad A\in\Omega\,.$$

On a donc démontré le théorème suivant :

TÉORÈME (1,5). *Si les coefficients de l'équation parabolique normale* (1) *vierifient les suppositions* I, II, III *et* V, *si la densité* $\varphi(Q, t)$ *du potentiel de simple couche* $U(A, t)$ *de l'équation* (1), *sur le bord* S *du domaine* Ω, *dans* R_n, $n \geq 3$, *vérifié la supposition* IV, *alors ce potentiel* $U(A, t)$ *converge, avec le paramètre* t *tendant vers l'infinie, vers le potentiel de simple couche* $\overline{U}(A)$ *de l'équation élliptique limite* (11,5) *et de la densité limite* $\overline{\varphi}(Q)$, *sur le bord* S *du même domaine* Ω, *si seulement ce domaine* Ω *est conforme avec la supposition* VI.

OUVRAGES CITÉES

[1] W. POGORZELSKI, « *Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique* », Richerche di Mathematica, vol. 5, (1956).

[2] S. D. EIDELMANN, « *Théorèmes du type de Liouville pour les systèmes paraboliques et elliptiques* », Doklady Akademii Nauk, SSSR. 99 (1954) N. 5. p. 681-684.

[3] M. KRZYŻANSKI, « *Sur l'allure asymptotique des potentiels de chaleur et de l'intégrale de Fourier-Poisson* », Annales Polonici Mathematici, III, 2 (1957).

[4] W. POGORZELSKI, « *Étude de la solution fondamentale de l'équation élliptique et des problèmes aux limites* », Annales Polonici Mathematici, III, 2 (1957).

[5] C. MIRANDA, « *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico* », Berlin, 1955, C. III.

[6] M. KRZYŻANSKI, « *Évaluations des solutions de l'équation aux dérivèes partielles du type parabolique, déterminèes dans un domaine non borné* », Annales Polonici Mathematici, IV, 1 (1957).