ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GUIDO STAMPACCHIA

Contributi alla regolarizzazione delle soluzioni dei problemi al contorno per equazioni del secondo ordine ellittiche

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 12, nº 3 (1958), p. 223-245

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1958_3_12_3_223_0>

CONTRIBUTI ALLA REGOLARIZZAZIONE DELLE SOLUZIONI DEI PROBLEMI AL CONTORNO PER EQUAZIONI DEL SECONDO ORDINE ELLITTICHE

di GUIDO STAMPACCHIA (a Genova)

La regolarizzazione delle soluzioni deboli dei problemi al contorno per operatori ellittici lineari di ordine pari in m variabili è stata oggetto di numerosi lavori di vari Autori: FRIEDRICHS, NIRENBERG, BROWDER, ARONSZAJN e SMITH, ecc.

I procedimenti adoperati tendono a dimostrare che la soluzione u appartiene agli spazi H^k (regolarizzazione hilbertiana) in modo che la limitatezza e la continuità di u risulti come conseguenza quando $k > m$. Per un'esposizione di questi procedimenti e per la bibliografia relativa cfr. [13].

Un altro procedimento più generale, annunciato da BROWDER [1], tende invece ad assicurare che la soluzione appartiene agli spazi $H^{k,\alpha}$ (cfr. per la definizione loc. cit. in [13], n. 2) in modo che la limitatezza e la continuità di u ne risulti come conseguenza quando $k > \frac{m}{\alpha}$.

Ora vi sono alcuni problemi le cui soluzioni non godono della proprietà detta di appartenere a $H^{k,\alpha}$ per i valori richiesti di k anche se i dati sono infinitamente derivabili; fra questi, notoriamente, vi sono i problemi del tipo misto di DIRICHLET-NEUMANN.

I procedimenti sopra ricordati, richiedendo ipotesi di derivabilità dei coefficienti, non si prestano nemmeno alla regolarizzazione delle soluzioni di problemi lineari i cui coefficienti presentano discontinuità (cfr. ad es. [16]) e di quelli non lineari quali i problemi variazionali.

Si presenta allora il problema di dedurre direttamente le proprietà di sommabilità, di limitatezza o di continuità delle soluzioni in ipotesi molto generali per i coefficienti (solo misurabilità e limitatezza) e per il campo evitando la considerazione degli spazi H^k, $[H^{k,\alpha}]$, con valori troppo grandi di k.

Procedimenti in un ordine d'idee analogo sono quelli adoperati da NIRENBERG [14] nel caso di problemi del secondo ordine e bidimensionali.

In questo lavoro mi sono proposto appunto di risolvere alcune questioni relative alla regolarizzazione delle soluzioni di alcuni dei problemi al contorno per equazioni lineari del secondo ordine in m variabili che sfuggono ai procedimenti di regolarizzazione prima ricordati.

Ho utilizzato a questo scopo un'idea adoperata da DE GIORGI [3] per ottenere la regolarizzazione «all'interno» delle estremali di integrali multipli regolari. (*)

Dimostro qui in particolare che se i secondi membri dell'equazione sono in L^p, le soluzioni sono in L^q per opportuni valori di q (ad es. $\left(\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{1}{m}\right)$ suscettibili di divenire infinito (e quindi le soluzioni limitate) quando p è sufficientemente grande (cfr. nn. 5-6). A proposito di questi risultati si cfr. anche [13] n. 12.

Risultati di questo genere si possono ottenere nel caso del problema di Dirichlet, utilizzando un noto risultato di CALDERON e ZYGMUND [2] purchè si supponga che i coefficienti ed il campo siano più regolari. Questa idea è stata utilizzata da NIRENBERG e BROWDER [1] nel procedimento di regolarizzazione prima citato. Essa è stata sfruttata anche da D. GRECO [10] per risolvere un problema di DIRICHLET per equazioni del secondo ordine ma con condizioni non omogenee. Risultati analoghi sono stati dati anche per equazioni d'ordine superiore da KOSHELEV [11], [12].

L'interesse però dei risultati qui ottenuti, per un'ampia categoria di problemi al contorno, sta nel fatto che i coefficienti dell'equazione sono supposti soltanto misurabili e limitati ed il campo è sottoposto solo ad un'ipotesi di «cono».

Non ho esaminato qui il carattere di continuità della soluzione nè mi sono occupato delle possibili estensioni dei procedimenti a problemi di ordine superiore. Su tutto ciò mi propongo di ritornare prossimamente.

In appendice al lavoro ho dato la dimostrazione di alcuni lemmi utili per il procedimento anche se questi possono dedursi da un noto teorema di SOBOLEV. Nel far ciò vengono ad essere ravvicinati alcuni risultati della teoria della capacità con una dimostrazione data di recente da ZYGMUND delle diseguaglianze di SOBOLEV. Questo lascia intravedere uno stretto legame fra le suddette diseguaglianze ed alcune diseguaglianze isoperimetriche generalizzate del tipo del lemma (7.2).

(*) Recentemente anche J. NASH (Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., to 43 (1957) pp. 754-758) ha annunciato un risultato analogo a quello di DE GIORGI supponendo però, rispetto a questi, la soluzione di già limitata.

1. Sia R^m uno spazio euclideo ad m dimensioni ($m > 2$) di punto generico $x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y \equiv (y_1, y_2, \dots, y_m), \dots$. Indichiamo con $I(y, \varrho)$ la sfera di R^m col centro in y e raggio ϱ e con $\Gamma(y, \varrho)$ l'ipersuperficie sferica contorno di $I(y, \varrho)$.

Inoltre indichiamo con $\Sigma(x)$ un insieme misurabile di $\Gamma(x, 1)$ e con $|\Sigma(x)|$ la sua misura $m-1$ dimensionale (in particolare $|\Gamma(x, 1)| = = \omega_{m-1} = \dfrac{2\sqrt{\pi^m}}{\Gamma(m/2)}\Big)$. In corrispondenza a $\Sigma(x)$ indichiamo con $S(x, \varrho)$ l'insieme dei punti di $I(x, \varrho)$ che si projettano da x in $\Sigma(x)$.

Ciò posto, dato un insieme Ω aperto e limitato di R^m, diremo che Ω *è di tipo* (S) se esistono due numeri positivi: ω ($\omega \leq \omega_{m-1}$) e ϱ in modo che per ogni $x \in \bar{\Omega}$ si possa determinare un insieme $\Sigma(x)$ con $|\Sigma(x)| \geq \omega$ per cui

$$S(x, \varrho) \subset \bar{\Omega} \ (^1).$$

2. Sia $C^1(\Omega)$ lo spazio delle funzioni reali $u(x)$ continue con le derivate parziali prime in Ω tali che $u \in L^\alpha(\Omega)$, $D_i u \in L^\alpha(\Omega)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$ ed introduciamo ivi la norma:

$$|||\, u \,|||_{1,\alpha} = \|\, u \,\|_{L^\alpha(\Omega)} + \sum_i^{1..m} \|\, D_i u \,\|_{L^\alpha(\Omega)} .$$

Indichiamo con $H^{1,\alpha}(\Omega)$ il completamento di $C^{1,\alpha}(\Omega)$ rispetto alla norma $|||\, u \,|||_{1,\alpha}$; $H^{1,2}(\Omega) \equiv H^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert; esso, come è noto, può essere caratterizzato in diversi modi.

Indichiamo poi con $H_0^{1,\alpha}(\Omega)$ il sottospazio di $H^{1,\alpha}(\Omega)$ costituito dalla chiusura, in $H^{1,\alpha}(\Omega)$, delle funzioni di $C^1(\Omega)$ che hanno supporto contenuto in Ω; in $H^{1,2}(\Omega) \equiv H_0^1(\Omega)$ le due norme $|||\, u \,|||_1$ e

$$\|\, u \,\|_1 = \sum_i^{1..m} \|\, D_i u \,\|_{L^\alpha(\Omega)}$$

sono equivalenti (²).

(¹) Più semplicemente, possiamo dire che l'insieme Ω è di tipo (S) se esso soddisfa alla proprietà di cono introdotta da SOBOLEV.

(²) Ai fini di possibili applicazioni e data la generalità concessa ad Ω, è bene osservare che i risultati di questo lavoro sussistono anche se in luogo di $H^1(\Omega)$ si considera lo spazio $B\,L(\Omega)$ di B. LEVI come introdotto in [6], cioè come spazio di distribuzioni T tali che $T \in L^2(\Omega)$, $D_i T \in L^2(\Omega)$ passando così dal corpo reale a quello complesso.

Sia V una varietà chiusa di $H^1(\Omega)$ tale che:

$$H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega) .$$

Siano poi $a_{ij}(x)$, $(i, j = 1, 2, \dots, m)$ funzioni reali misurabili e limitate in Ω soddisfacenti la seguente condizione:

$$\mu \sum_i^{1..m} \lambda_i^2 \leq \sum_{ij}^{1..m} a_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j \leq M \sum_i^{1..m} \lambda_i^2 \tag{2.1}$$

$\{ \lambda_i \in R^1, (i = 1, 2, \dots, m) ; x \in \bar{\Omega}, \mu > 0\}$, $f_0(x), \dots, f_m(x)$ $m+1$ funzioni $\in L^p(\Omega)$ con $p \geq 2$, mentre $c(x)$, $b_1(x), \dots, b_n(x)$ sono misurabili e limitate in Ω con $c(x) \geq 0$, $|b_1(x)| \leq M$.

Poniamo ora, per $u, v \in H^1(\Omega)$:

$$a(u, v) = \int_\Omega \left\{ \sum_{ij}^{1..m} a_{ij}(x) D_i u D_j v + \sum_i^{1..m} b_i D_i u v + c(x) u v \right\} dx$$

e

$$\langle f, v \rangle = \int_\Omega \left\{ \sum_i^{1..m} f_i D_i v + f_0 v \right\} dx.$$

Una funzione $u(x) \in V$ la quale, per ogni $v \in V$, soddisfa la relazione:

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \tag{2.2}$$

sarà indicata brevemente con $u(x) \equiv \mathcal{E}(\Omega, V)$.

Indichiamo ora con $t_k^+(\tau)$, $[t_k^-(\tau)]$, la funzione definita per $-\infty < \tau < +\infty$ dalle posizioni:

$$t_k^+(\tau) = 0 \text{ se } \tau \leq k \text{ e } t_k^+(\tau) = \tau - k \text{ se } \tau \geq k$$

$$[t_k^-(\tau) = \tau - k \text{ se } \tau \leq k \text{ e } t_k^-(\tau) = 0 \text{ se } \tau \geq k] .$$

È evidente che: se $u \in H^1(\Omega)$ segue: $t_k^+(u(x)) \in H^1(\Omega)$ $[t_k^-(u(x)) \in H^1(\Omega)]$ per $k \in R^1$.

Indichiamo ora con $\mathcal{K}^+$, $[\mathcal{K}^-]$ i valori di $k \in R^1$ per cui $t_k^+(u(x)) \in V$, $[t_k^-(u(x)) \in V]$ per ogni $u \in V$. Ad es.: se $V \equiv H_0^1(\Omega)$, $\mathcal{K}^+ \equiv (0, +\infty)$ e $\mathcal{K}^- \equiv (-\infty, 0)$; se invece $V \equiv H^1(\Omega)$, $\mathcal{K}^+ \equiv \mathcal{K}^- \equiv (-\infty, +\infty)$.

Se $u(x) \in V$ indichiamo con $A^+(k), [A^-(k)]$ l'insieme dei punti $x \in \overline{\Omega}$ ove $u(x) \geq k$, $[u(x) \leq k]$.

Negli enunciati che seguono conveniamo di indicare con $A(k)$ indifferentemente gli insiemi $A^+(k)$ e $A^-(k)$ e con $\mathcal{K}$ sia l'insieme $\mathcal{K}^+ \cap (0, +\infty)$ che l'insieme $\mathcal{K}^- \cap (-\infty, 0)$.

Dimostriamo ora il seguente lemma (cfr. [3], teor. II, p. 38):

LEMMA (2.1) *Se* $u(x) \equiv \mathcal{E}(\Omega, V)$, *è possibile determinare due costanti* $\gamma, A: \gamma = \gamma(\mu, M)$, $A \equiv A(\mu, M, \Omega)$ *tali che, per ogni* $k \in \mathcal{K}$, (3), *si abbia*:

$$\int_{A(k)} \sum_i^{1..m} (D_i u)^2 \, dx \leq \gamma \int_{A(k)} (u-k)^2 \, dx + A \int_{A(k)} \sum_i^{0..m} f_i^2 \, dx . \tag{2.3}$$

Dimostriamo il lemma supponendo che $A(k) \equiv A^+(k)$ e $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}^+ \cap (0, +\infty)$; in modo analogo si procede se $A(k) \equiv A^-(k)$ e $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}^- \cap (-\infty, 0)$.

Osserviamo anzitutto che:

$$D_i t^+(u(x)) = 0 \text{ q. ov. in } A^-(k) \text{ e } = D_i u \text{ q. ov. in } A^+(k).$$

Dalla (2.2), ponendo $v = t_k^+(u(x))$ ($\in V$ se $k \in \mathcal{K}^+$), si ottiene:

$$\int_{A(k)} \sum_{i,j}^{1..m} a_{ij}(x) \, D_i u \, D_j u \, dx + \int_{A(k)} \sum_i^{1..m} b_i(x) \, D_i u \, [u(x) - k] \, dx + \int_{A(k)} c(x) u [u(x) - k] \, dx = \tag{2.4}$$

$$= \int_{A(k)} \sum_i^{1..m} f_i \, D_i u \, dx + \int_{A(k)} f_0 u \, dx .$$

Per la (2.1) segue:

$$\mu \int_{A(k)} \sum_i^{1..m} | D_i u |^2 \, dx \leq \int_{A(k)} \sum_{i,j}^{1..m} a_{ij} \, D_i u \, D_j u \, dx \tag{2.5}$$

mentre, per note diseguaglianze, si può scrivere:

$$\int_{A(k)} \sum_i^{1..m} b_i(x) \, D_i u [u(x) - k] \, dx \leq M \left\{ \int_{A(k)} \sum_i^{1..m} | D_i u |^2 \, dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{A(k)} | u(x) - k |^2 \, dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \tag{2.6}$$

$$\leq \frac{\mu}{4} \int_{A(k)} \sum_{i=1}^{m} | D_i u |^2 \, dx + \frac{M}{\mu} \int_{A(k)} | u(x) - k |^2 \, dx .$$

---

(3) Si può osservare che quando $c(x) = 0$ è possibile supporre $\mathcal{K}$ coincidente con $\mathcal{K}^+$ o con $\mathcal{K}^-$.

Osserviamo ancora che, essendo $k \in \mathcal{K}$, si ha in $A(k)$

$$c(x)\, u\, [u - k] \geq 0 . \tag{2.7}$$

D'altra parte, con semplici considerazioni, si deduce ancora:

$$\left| \int_{A(k)} f_i\, D_i u\, dx \right| \leq \frac{\mu}{4} \int_{A(k)} |\, D_i u\,|^2\, dx + \frac{1}{\mu} \int_{A(k)} f_i^2\, dx \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.8}$$

e

$$\int_{A(k)} f_0\, [u - k]\, dx \leq \frac{1}{2} \int_{A(k)} (u - k)^2\, dx + \frac{1}{2} \int_{A(k)} f_0^2\, dx .$$

Quindi dalla (2.4), tenendo conto della (2.5), (2.6), (2.7), (2.8), (2.9) si ottiene:

$$\frac{\mu}{2} \int_{A(k)} \sum_i^{1..m} |\, D_i u\,|^2\, dx \leq \left(\frac{M}{\mu} + \frac{1}{2} \right) \int_{A(k)} (u - k)^2\, dx + \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{2} \right) \int_{A(k)} \sum_{i=0}^{m} f_i^2\, dx$$

e di qui la (2.3).

3. Enunceremo qui alcuni lemmi (cfr. [3], lemma III, p. 31) per la dimostrazione dei quali rimandiamo all'appendice di questo lavoro. Essi potrebbero dedursi anche facilmente dalle note diseguaglianze di Sobolev.

LEMMA (3.1). *Supposto che Ω sia di tipo (S), fissato q con $1 \leq q \leq 2$, è possibile determinare due costanti positive, dipendenti da Ω e q: η e β tali che per ogni funzione $u(x) \in H^1(\Omega)$, e per ogni $k \in R^1$ per cui:* (4)

$$\text{mis}\, A(k) < \eta \tag{3.1}$$

si abbia:

$$\int_{A(k)} |\, u(x) - k\,|^q\, dx \leq \beta \int_{A(k)} \sum_i^{1..m} |\, D_i u\,|^q\, dx\, \{\text{mis}\, A(k)\}^{q/m} . \tag{3.2}$$

LEMMA (3.2): *Nelle stesse ipotesi del lemma* (3.1), *se* $h > k > 0$ *e se sussiste la* (3.1) *segue:*

$$[\text{mis}\, A(h)]^{(m-q)/m} \leq \frac{\beta}{(h - k)^q} \int_{A(k)} \sum_i^{1..m} |\, D_i u\,|^q\, dx .$$

---

(4) Con mis indichiamo la misura secondo Lebesgue m-dimensionale.

4. Riprendiamo ora a considerare funzioni $u(x) \equiv \mathcal{E}(\Omega, V)$ in un insieme Ω del tipo (S) e dimostriamo il seguente lemma fondamentale (cfr. [3], lemma IV, p. 33).

LEMMA (4.1). *Sia* $u(x) \equiv \mathcal{E}(\Omega, V)$ *con* Ω *del tipo* (S) *e sia, per* $0 \leq k_1$:

$$(k_1, +\infty) \subset \mathcal{K}^+ \tag{4.1}$$

$$f_i \in L^p(\Omega) \tag{4.2}$$

con $p > m$. *È possibile determinare un numero positivo* $\vartheta = \vartheta(\mu, M, \Omega)$ *in modo che per ogni* $k \in \mathcal{K}^+$ *tale che:*

$$\text{mis}\, A^+(k) < \vartheta \tag{4.3}$$

si abbia:

$$\text{mis}\, A^+(k+d) = 0 \tag{4.4}$$

ove:

$$d^2 = \left\{ \int_{A(k)} \sum_{i=0}^{m} |f_i|^p \, dx \right\}^{2/p}. \tag{4.5}$$

Determiniamo θ in modo che risultino verificate le limitazioni seguenti, β, γ, A, η essendo le costanti fissate nei numeri precedenti, per $q = 2$:

$$\theta < \eta, \quad \theta^{2/m} < \frac{1}{2\beta\gamma}; \quad \theta^{2/m - 2/p} \leq \frac{1}{\beta A \left(\frac{\gamma\beta}{2}\, \theta^{2/m} + 1\right) 2^{\nu(m-2)/2+2}} \tag{4.6}$$

ove abbiamo posto:

$$\nu = \frac{mp}{p-m}. \tag{4.7}$$

Ciò posto, fissiamo $k \in \mathcal{K}^+$ in modo che valga la (4.3) e quindi, per la prima delle (4.6), la (3.1) e inoltre, per la seconda delle (4.6), si abbia:

$$\beta\gamma\, [\text{mis}\, A(k)]^{2/m} < \frac{1}{2}. \tag{4.8}$$

Dal lemma (2.1) e dal lemma (3.1), segue:

$$\int_{A(k)} |u(x) - k|^2 \, dx \leq \beta \left\{ \gamma \int_{A(k)} |u(x) - k|^2 \, dx + A \int_{A(k)} \sum_{i=0}^{m} f_i^2 \, dx \right\} [\text{mis}\, A(k)]^{2/m} \tag{4.9}$$

donde, per la (4.8), si deduce:

$$\int_{A(k)} | u(x) - k |^2 \, dx \leq \frac{\beta A}{2} \int_{A(k)} \sum_{i=0}^{m} f_i^2 \, dx \, [\text{mis } A(k)]^{2/m} . \tag{4.10}$$

Nelle stesse condizioni, dal lemma (3.2) oltre che dal lemma (2.1) segue, se $h > k$:

$$[\text{mis } A(h)]^{1-2/m} \leq \frac{\beta}{(h-k)^2} \left\{ \gamma \int_{A(k)} | u(x) - k |^2 \, dx + A \int_{A(k)} \sum_{i=0}^{m} f_i^2 \, dx \right\} \tag{4.11}$$

e di qui, per la (4.11) e per la diseguaglianza di Schwarz, si trova:

$$[\text{mis } A(h)]^{1-2/m} \leq \beta A \left(\frac{\gamma\beta}{2} \theta^{2/m} + 1 \right) \left\{ \int_{A(k)} \sum_{i=0}^{m} | f_i |^p \, dx \right\}^{2/p} [\text{mis } A(k)]^{1-2/p} . \tag{4.12}$$

Poniamo ora:

$$a_n = \text{mis } A(k_n)$$

ove:

$$k_n = k + d - \frac{d}{2^n}$$

essendo d definito dalla (4.5). Otteniamo allora dalla (4.12):

$$a_{n+1}^{1-2/m} \leq 2^{2(n+1)} \beta A \left(\frac{\gamma\beta}{2} \theta^{2/m} + 1 \right) a_n^{1-2/p} . \tag{4.13}$$

Dimostriamo ora, per induzione, che per ogni n, si ha:

$$a_n \leq \frac{\theta}{2^{\nu n}} . \tag{4.14}$$

La (4.14) è verificata per $n = 0$ a causa della (4.3); supponiamo che essa sia verificata per valori non maggiori di n; si ha allora, per la (4.13)

$$a_{n+1}^{1-2/m} \leq 2^{2(n+1)} \beta A \left(\frac{\gamma\beta}{2} \theta^{2/m} + 1 \right) \frac{\theta^{1-2/p}}{2^{\nu(1-2/p)n}} \tag{4.15}$$

e, a causa delle (4.6), (4.7) segue:

$$a_{n+1} \leq \frac{\theta}{2^{\nu(n+1)}} .$$

La (4.14) è quindi verificata per ogni n; passando al limite per $n \to +\infty$ si trova la (4.4).

In modo perfettamente analogo si dimostra il lemma seguente:

LEMMA (4.2). *Sia* $u(x) \equiv \mathcal{E}[\Omega, V]$ *in* Ω, *con* Ω *del tipo* (S) *e sia per* $k_2 \leq 0$:

$$(4.16) \qquad (-\infty, k_2) \subset \mathcal{K}^-$$

$$(4.17) \qquad f_i \in L^p(\Omega) \quad con \quad p > m .$$

È possibile determinare un numero $\vartheta \equiv \vartheta(\mu, M, \Omega)$ *in modo che per ogni* $k \in \mathcal{K}^-$ *tale che*

$$(4.18) \qquad \text{mis } A^-(k) < \vartheta$$

si abbia:

$$(4.19) \qquad \text{mis } A^-(k - d) = 0$$

ove d *soddisfa la* (4.5).

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente:

TEOREMA I: *Sia* $u(x) \equiv \mathcal{E}(\Omega, V)$ *in* Ω, *con* Ω *del tipo* (S) *e sia per*: $k_2 \leq 0 \leq k_1$:

$$(4.20) \qquad (k_1, +\infty) \in \mathcal{K}^+, \qquad (-\infty, k_2) \in \mathcal{K}^-$$

e:

$$f_i \in L^p(\Omega) \quad con \quad p > m$$

Si deduce che $u(x)$ *è una funzione* (*coincide quasi ovunque con una funzione*) *limitata in* Ω.

Essendo $u \in L^2(\Omega)$, è possibile determinare $\bar{k}$ in modo che per $k > \bar{k}$ valga la (4.3) e per $k < -\bar{k}$ valga la (4.18). Per i lemmi (4.1) e (4.2) si deduce allora

$$-\bar{k} - d \leq u(x) \leq \bar{k} + d \quad \text{per} \quad x \in \bar{\Omega} \quad \text{q. ov.}$$

5. Dal teorema precedente possiamo, particolarizzando la classe V, ottenere alcune limitazioni relative alle soluzioni deboli dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine.

PROPOSIZIONE (5.1). *Problema di Dirichlet* (con condizioni al contorno omogenee).

Sia Ω *un insieme aperto del tipo* (S) (*cfr. n.* 1); *siano* $a_{ij}(x)$, $[a_{ij} = a_{ji}]$, $b_i(x)$, $c(x)$ *funzioni misurabili e limitate in* Ω *e sia soddisfatta la* (2.1) *e* *inoltre sia :*

$$4\,\mu\, c(x) \quad \Sigma\, b_i^2(x) \geq \nu > 0 \,; \qquad f_i \in L^p(\Omega)\,,\ (i = 1\,,\dots,\, m)\ \text{con}\ p > m\,.$$

Se la funzione $u(x) \in H_0^1(\Omega)$ *soddisfa la relazione*

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{ij}^{1..m} a_{ij}(x)\, D_i u\, D_j v + \sum_i^{1..m} b_i\, D_i\, u\, v + c(x)\, u\, v \right\} d\,x = \sum_i^{1..m} \int_\Omega f_i\, D_i\, v\, d\,x \tag{5.1}$$

qualunque sia $v \in H_0^1(\Omega)$, *allora sussiste la seguente maggiorazione :*

$$\sup_{x \in \bar\Omega} |u(x)| \leq C \sum_i^{1..m} \|f_i\|_{L^p(\Omega)} \tag{5.2}$$

con C *dipendente unicamente da* Ω *e dalle costanti* μ *ed* M *che intervengono nella* (2.1).

Infatti la (5.1) istituisce, nelle ipotesi dette, un isomorfismo algebrico e topologico

$$u = \mathcal{G} f \qquad \left(f = \sum_{i=1}^{m} D_i f_i \right) \tag{5.3}$$

fra lo spazio $H^{-1}(\Omega)$, (5), e $H_0^1(\Omega)$.

Per dimostrare che la (5.3) istituisce anche un'applicazione lineare e continua fra lo spazio $H^{-1,p}(\Omega)$, (6), con $p > m$ e lo spazio (ovviamente topologico):

$$H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

($L^\infty(\Omega)$ spazio delle funzioni essenzialmente limitate) basta, per il teorema del grafico chiuso, dimostrare che se

$$f_n \to 0 \ \text{ in } H^{-1,p}(\Omega) \ \text{ e } \ \mathcal{G} f_n \to \bar u \ \text{ in } H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

segue: $\bar u \equiv 0$ quasi ovunque e ciò è evidente.

OSSERVAZIONE : La relazione (5.1) esprime che la funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ è soluzione del problema di Dirichlet (nel senso della teoria delle distribu-

---

(5) $H^{-1}(\Omega)$ è il duale di $H_0^1(\Omega)$. Per il risultato richiamato nel testo cfr. ad es. MAGENES-STAMPACCHIA [13].

(6) $H^{-1,p}(\Omega)$ indica il duale di $H_0^{1,\bar p}(\Omega)$ $\left(\frac{1}{\bar p} + \frac{1}{p} = 1\right)$; per le definizioni di questi spazi cfr. ad es. [13], n. 2.

zioni) per l'equazione:

$$A(u) = -\sum_{j=1}^{m} D_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} D_i u + \sum_{i=1}^{m} b_i(x) D_i u + c(x) u = f$$

La maggiorazione (5.2) sussiste se: $f = \Sigma D_i f_i$ con $f_i \in L^p(\Omega)$ cioè se: $f \in H^{-1,p}(\Omega)$.

In particolare si ha:

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)| \leq c \| f \|_{L^{p'}(\Omega)} \quad \text{con } p' > \frac{m}{2}. \tag{5.2'}$$

Infatti se $f \in L^{p'}(\Omega)$, detto $P(x)$ il potenziale newtoniano di densità f:

$$P(x) = \frac{1}{\omega_m (m-2)} \int \frac{f(t)}{|x-t|^{m-2}} dt$$

si ha, con l'applicazione di noti risultati di Calderon e Zygmund e delle diseguaglianze di Sobolev:

$$D_i P \in L^p(\Omega)$$

ove $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p'} - \dfrac{1}{m}$. Inoltre, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (funzioni indefinitamente derivabili con supporto contenuto in Ω si ha:

$$\int_{\Omega} f \varphi \, dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{m} D_i P \, D_i \varphi \, dx$$

e, poichè $p' > \dfrac{m}{2}$ segue $p > m$, la (5.2′) è una conseguenza della (5.2).

PROPOSIZIONE (5.2). *Problema di Dirichlet* (con condizioni al contorno non omogenee).

Nelle stesse ipotesi della proposizione (5.1) *e se* ψ *è la traccia di una funzione* $\bar{u}$ *avente in* Ω *derivate prime* (*nel senso delle distribuzioni*) *in* $L^p(\Omega)$ *con* $p > m$ *si deduce, per ogni funzione* $u(x) \in H^1(\Omega)$ *avente traccia* ψ *su* $\partial\Omega$ *e soddisfacente la relazione* (5.1), *la seguente maggiorazione*:

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)| \leq C \sum_{i}^{1..m} \| f_i \|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i}^{1..m} \| D_i \bar{u} \|_{L^p(\Omega)} + \max_{\bar{\Omega}} |\bar{u}|. \tag{5.4}$$

Inoltre se Ω è più regolare (7), nella (5.4) il secondo e terzo termine a secondo membro possono essere sostituiti dalla norma: (8)

$$|||\psi||| = \max_{\partial\Omega} |\psi| + \left\{ \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{|\psi(P) - \psi(Q)|^p}{\overline{PQ}^{m-2+p}} d_P \sigma \, d_Q \sigma \right\}^{1/p}.$$

Posto invero $W = u - \overline{u}$, si ha $W \in H_0^1(\Omega)$ e:

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{ij}^{1..m} a_{ij}(x) D_i W D_j v + \sum_i^{1..m} b_i D_i W v + c(x) W v \right\} dx =$$

$$= \sum_i^{1..m} \int_\Omega \left[f_i - \sum_j^{1..m} a_{ij}(x) D_j \overline{u} \right] D_i v \, dx - \int_\Omega \left\{ \sum_i^{1..m} b_i \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} + c(x) \overline{u} \right\} v \, dx$$

donde:

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} |W| \leq C \left\{ \sum_i^{1..m} \|f_i\|_{L^p(\Omega)} + \sum_j^{1..m} M \| D_j \overline{u} \|_{L^p(\Omega)} + N \| \overline{u} \|_{L^p(\Omega)} \right\}$$

ma essendo, nelle ipotesi poste:

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} |\overline{u}| < +\infty$$

segue la (5.4).

PROPOSIZIONE (5.3). *Problema di Neumann*: (con condizioni al contorno omogenee).

Nelle stesse ipotesi su Ω, $a_{ij}(x)$, $[a_{ij} = a_{ji}]$, $c(x)$ *formulate nella proposizione* (5.1) *sia invece* $g \in L^p$ *con* $p > m$ e $c(x) > \nu > 0$. *Se* $u(x) \in H^1(\Omega)$ *soddisfa la relazione*:

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{ij}^{1..m} a_{ij}(x) D_i u D_j v + c(x) u v \right\} dx = \int_\Omega g v \, dx \tag{5.5}$$

qualunque sia $v \in H^1(\Omega)$, *sussiste la maggiorazione*:

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| \leq A \| g \|_{L^p(\Omega)} \tag{5.6}$$

(7) Cfr. [8].

(8) Equivalente a quella considerata da GAGLIARDO, a causa dell'ipotesi: $p > m$.

Infatti, come nella proposizione (5.1), la (5.5) istituisce un'applicazione continua fra $L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$

$$u = \mathcal{G}\, g\,. \tag{5.7}$$

Per dimostrare che la (5.7) è un'applicazione lineare e continua fra $L^p(\Omega)$, $(p > m)$ e $L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ basta fare uso del teorema del grafico chiuso; quindi la (5.6).

Osservazione: Poichè le considerazioni svolte precedentemente non presuppongono l'ipotesi $a_{ij} = a_{ji}$, le conclusioni relative al problema di Neumann valgono anche per il problema di derivata obliqua regolare. (9).

Proposizione (5.4). *Problema misto di Dirichlet-Neumann.*

Sia $\partial\,\Omega = \partial_1\,\Omega \cup \partial_2\,\Omega$, *e* $u \in H_1(\Omega)$ *soddisfi la relazione*:

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{ij}^{1..m} a_{ij}\, D_i u\, D_j v + c(x)\, u\, v \right\} d\,x = \int_\Omega g\, v\, d\,x$$

per ogni $v \in V$: *V essendo il sottospazio delle* v *di* $H^1(\Omega)$ *la cui traccia su* $\partial_1\,\Omega$: $\gamma\, v$ *è nulla.*

Poichè $\mathcal{K}^+ \equiv (0\,, +\infty)$, $\mathcal{K}^- \equiv (-\infty\,, 0)$ *si deduce come in* (5.1) *la limitazione*:

$$\sup_{\bar\Omega} |\, u(x)\,| \leq C\, \|g\|_{L^p(\Omega)}$$

Conclusioni analoghe si possono trarre per il problema di trasmissione considerato in [16].

6. Dai risultati precedenti si può dedurre anche un'osservazione relativa alla continuità delle soluzioni di una classe di problemi al contorno.

Consideriamo un problema al contorno con condizioni al contorno omogenee il quale soddisfi alle condizioni dette nelle proposizioni del numero precedente e inoltre soddisfi alla seguente condizione R:

Indicato con $u = \mathcal{G} f$ l'operatore di Green del problema supponiamo che:

$$f \in C^\infty(\Omega) \text{ implica } u \in C^0(\bar\Omega).$$

Si deduce allora che *la soluzione del problema considerato è continua in* $\bar\Omega$.

---

(9) Cfr. [13] cap. II, n. 5.

Sia ad es.: $f \in L^p(\Omega)$; poichè $C^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$ con la topologia di $L^p(\Omega)$, è possibile determinare una successione di Cauchy $\{f_n\}$ in $C^\infty(\Omega)$ con $f_n \to f$ in $L^p(\Omega)$ alla quale corrisponde per la condizione R una successione $\{u_n\}$ di $C^0(\bar{\Omega})$.

Ora tale successione è per quanto supposto e per quanto dimostrato ai nn. precedenti una successione di Cauchy per la topologia della norma:

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| + \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Si deduce allora che $\{u_n\}$ definisce una funzione continua in $\bar{\Omega}$ che coincide con la soluzione del problema considerato.

Osserviamo che sarebbe notevolmente interessante ridurre la ipotesi molto restrittiva R.

Lasciamo da parte questa questione; mostriamo invece come si possano estendere i risultati del n. 5 utilizzando un noto risultato di M. Riesz (cfr. ad es. [18]) per ottenere dei risultati relativi all'esponente di sommabilità della soluzione.

Consideriamo dapprima il problema di Dirichlet con condizioni al contorno omogenee lasciando inalterate tutte le ipotesi formulate nella proposizione (5.1) ad eccezione di quelle formulate su $f = \Sigma D_i f_i$.

Consideriamo allora l'applicazione lineare e continua (5.3) costituita dall'operatore di Green del problema. La (5.3) fa corrispondere alle funzioni $f \in L^\nu(\Omega)$ con $\frac{1}{\nu} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$ funzioni $u \in L^\alpha(\Omega)$ con $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{1}{m}$ $\left(\text{cioè} \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\nu} - \frac{2}{m}\right)$. Infatti ripetendo le condizioni dell'osservazione seguente la prop. (5.1) si può scrivere $f = \Sigma D_i f_i$ con $f_i \in L^2(\Omega)$ donde la (5.3) fa corrispondere ad f una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ e quindi per la diseguaglianza di Sobolev $u \in L^\alpha$. La (5.3) è, dunque, come si suol dire, del tipo (ν, α).

Ma l'osservazione che segue la prop. (5.1) ci assicura che la (5.3) è anche del tipo (p, ∞) se $p > \frac{m}{2}$ nel senso che per $f \in L^p(\Omega)$ segue $u \in L^\infty(\Omega)$.

Applicando allora il risultato citato di M. Riesz, segue che la (5.3) ad $f \in L^{p'}(\Omega)$ $(p' > \nu)$ fa corrispondere una funzione $u \in L^q(\Omega)$ ove $\frac{1}{q} > \frac{1}{p'} - \frac{2}{m}$.

Possiamo allora dedurre il teorema:

TEOREMA 6.1: *Nelle stesse ipotesi della prop.* (5.1) *circa i coefficienti ed* Ω, *la soluzione* $u \in H_0^1(\Omega)$ *del problema di Dirichlet*: $Au = f$ *è tale che*:

$$u \in L^q(\Omega)$$

con $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{2}{m}$ *se*: $f \in L^p(\Omega)$ *con* $p \geq \frac{2m}{m+2}$.

La diseguaglianza:

$$\| u \|_{L^q(\Omega)} \leq C \| f \|_{L^p(\Omega)} \tag{6.1}$$

$\left(\text{che probabilmente vale anche se } \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{m}\right)$ si può scrivere ovviamente:

$$\| u \|_{L^q(\Omega)} \leq C \| Au \|_{L^p(\Omega)} \; .$$

ove l'operatore Au è calcolato nel senso delle distribuzioni; essa sarebbe una conseguenza delle diseguaglianze di Sobolev se le ipotesi sui coefficienti e su Ω permettessero di maggiorare in $L^p(\Omega)$ le singole derivate seconde di u (cfr. [1], [10], [11], [12]), ma ciò non è possibile nel nostro caso! Nell'eventualità ora accennata si può dedurre la (6.1) anche quando $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{m}$ e si può dimostrare che quando $q < 0$ la funzione u è holderiana; inoltre si deduce che $D_i u \in L^{q'}(\Omega)$ ove $\dfrac{1}{q'} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{m}$.

Sarebbe interessante vedere quali di queste proprietà valgono anche nelle ipotesi più generali in cui ci siamo posti in questo lavoro.

Un'analoga generalizzazione si può ottenere per le altre proposizioni del n. 5. Ne segnaleremo una relativa al problema di Neumann (prop. 5.3).

Nelle stesse ipotesi di tale proposizione, ad eccezione di quella su g, possiamo affermare che l'applicazione lineare (5.7) fa corrispondere a $g \in L^2(\Omega)$ una funzione $u \in H^1(\Omega)$ e quindi $u \in L^\alpha(\Omega)$ con $\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{m}$; essa è quindi del tipo $(2, \alpha)$. D'altra parte per la proposizione (5.3) la (5.7) è anche del tipo (p, ∞) se $p > m$.

Si deduce, sempre per il teorema di M. Riesz che se $f \in L^{p'}(\Omega)$ con $2 \leq p' < m$, segue:

$$u \in L^q(\Omega)$$

ove: $\dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{p'} - \dfrac{1}{m}$.

Possiamo allora enunciare:

Teorema 6.2: *Sostituendo nella* (5.1) *l'ipotesi* $p > m$ *con l'altra*: $p > 2$, *segue la maggiorazione*:

$$\| u \|_{L^q(\Omega)} \leq c \| g \|_{L^p(\Omega)}$$

ove $\dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{p'} - \dfrac{1}{m}$ *e la* (5.6) *si ottiene quando* $q < 0$.

APPENDICE

7. In questo numero e nel seguente dimostreremo alcune proposizioni che, oltre ad avere un interesse se stanti, ci condurranno alla dimostrazione dei lemmi del n. 3.

Le considerazioni di questo numero sono relative ai potenziali di dominio con densità in L^q ove: $1 \leq q \leq 2$.

Indichiamo, a questo proposito, con $U_\alpha^\mu(x)$ il potenziale d'ordine α, $(0 < \alpha < m)$ ove $m > 2$, determinato dalla misura positiva μ:

$$U_\alpha^\mu(x) = \int \frac{d\mu(t)}{|x - t|^{m-\alpha}}$$

essendo $|x - t|$ la distanza dei punti x e t, indichiamo invece con $U_\alpha^g(x)$ il potenziale quando $d\mu = g(t)\,dt$.

Se e è un insieme chiuso e limitato, indicheremo con $\mathrm{cap}_\alpha(e)$ la capacità esterna d'ordine α dell'insieme e; si tratta della capacità nel senso di Wiener: $\mathrm{cap}_\alpha(e) = \sup \int d\mu$ fra tutte le misure positive μ, con supporto in e, per cui $U_\alpha^\mu(x) \leq 1$ dappertutto.

Ciò posto enunciamo il seguente lemma di J. Deny: (10)

LEMMA (7.1). *Se $g(x)$ è una funzione non negativa $\in L^q(R^m)$ con $1 \leq q \leq 2$, si ha:*

$$\mathrm{cap}_q \{ E_x [U_1^g(x) > \sigma > 0] \} < C(q)^{q-1} \int |g(x)|^q \, dx \cdot \sigma^{-q} \tag{7.1}$$

ove:

$$C(q) = \pi^{-m/2} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} - \frac{q}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{4}\right)} \right)^2 \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2} - \frac{q}{2}\right)}. \tag{7.2}$$

Per la dimostrazione cfr. [5], lemma 2, p. 368 (11).

---

(10) La considerazione di diseguaglianze del tipo di quella considerata in questo lemma fra una funzione d'insieme valutata sull'insieme ove una funzione supera 1 e la somma di questa funzione è alla base di una teoria del completamento funzionale (cfr. ad es. [17]).

(11) Riportiamo, per comodità del lettore, la dimostrazione del lemma enunciato.

Sia e un insieme chiuso e limitato contenuto in $E_x[U_1^g(x) > \sigma > 0]$; detta μ la di-

Dimostriamo ora il seguente lemma che fornisce una diseguaglianza isoperimetrica generalizzata (12).

LEMMA (7.2). *Se e è un insieme limitato e chiuso di R^m si ha:*

$$(\text{mis } e)^{m-q} \leq \left(\frac{m}{q}\right)^m \omega_m^{m-q} [\text{cap}_q(e)]^m \tag{7.3}$$

ove $\omega_m = \text{mis } I(0,1)$.

Indichiamo con λ la funzione additiva e positiva, con supporto in e, che ha per densità la funzione caratteristica di e e con μ la distribuzione capacitaria d'ordine q (cfr. [5]) per modo che $U_q^\mu(x) = 1$ su e e $\int d\mu = \text{cap}_q(e)$.

Detto ora R un numero tale che: $\text{mis} e = \text{mis} I(0,R) = \text{mis} I(0,1) \cdot R^m = \omega_m R^m$, dimostriamo che:

$$U_q^\lambda(x) = \int_e |x-t|^{q-m} dt \leq \int_{I(x,R)} |x-t|^{q-m} dt = \frac{m}{q} \omega_m^{(m-q)/m} (\text{mis } e)^{q/m}. \tag{7.4}$$

---

stribuzione d'equilibrio su e della massa unitaria [7], si ha:

$$\sigma < \int U_1^g(x)\, d(x) = \int U_1^\mu(x)\, g(x)\, dx \leq \| U_1^\mu \|_{L^{q'}} \cdot \| g \|_{L^q} \qquad \left(\frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1\right)$$

Si ha ora:

$$| U_1^\mu(x) |^{q'} \leq | U_{q/2}^\mu(x) |^2 . | U_q^\mu |^{q'-2}$$

donde:

$$\| U_1^\mu(x) \|_{q'} \leq \{\sup U_q\}^{(q'-2)/q'} \left\{ \int | U_{q/2}(x) |^2 dx \right\}^{1/q'}$$

ma essendo:

$$\int \{ U_{q/2}^\mu(x) \}^2 dx = C(q) \iint \frac{d\mu(x)\, d\mu(t)}{|x-t|^{m-q}} \leq C(q) \{\sup U_q^\mu(x)\}$$

segue:

$$\| U_1^\mu(x) \|_{q'} \leq \{\sup U_q^\mu\}^{1/q} C(q)^{1/q'} .$$

Di qui:

$$\sigma \leq \| g \|_q [C(q)]^{1/q'} \{\sup U_q^\mu\}^{1/q}$$

e quindi, poichè:

$$\sup U_q^\mu = [\text{cap}(e)]^{-1}$$

si ha:

$$\text{cap}_q(e) \leq C(q)^{q-1} \int | g(x) |^q dx\, \sigma^{-q}$$

e di qui il lemma (7.1).

(12) Cfr. per questo lemma quando $q = 2$: J. DENY [4], nota (2) a piè di pagina 170 e G. POLYA e G. SZEGÖ [15].

Per provare la (7.4) osserviamo che:

$$\int_e |x-t|^{q-m}\,dt = \int_{e\cap I(x,R)} |x-t|^{q-m}\,dt + \int_{e-I(x,R)} |x-t|^{q-m}\,dt$$

e

$$\int_{I(x,R)} |x-t|^{q-m}\,dt = \int_{e\cap I(x,R)} |x-t|^{q-m}\,dt + \int_{I(x,R)-e} |x-t|^{q-m}\,dt$$

donde

$$\int_e |x-t|^{q-m}\,dt \leq R^{q-m}\,\mathrm{mis}\,[e-I(x,R)] = \tag{7.5}$$

$$= R^{q-m}\,\mathrm{mis}\,[I(x,R)-e] \leq \int_{I(x,R)-e} |x-t|^{q-m}\,dt\,.$$

Premesso ciò, dalle relazioni:

$$\mathrm{mis}\,e \leq \int U_q^{\mu}\,d\lambda = \int U_q^{\lambda}\,d\mu \leq \frac{m}{q}\,\omega_m^{m-q/m}\,(\mathrm{mis}\,e)^{q/m}\,\mathrm{cap}_q(e)$$

segue immediatamente la (7.3).

Dal lemma (7.1) e (7.2) segue la seguente proposizione, [13]:

LEMMA (7.3). *Se* $1\leq q\leq 2$ *e* $m>2$, *esiste una costante non negativa* $\beta=\beta(m,q)$ *tale che per* $g\in L^q(R^m)$ *si ha:*

$$\mathrm{mis}\,\{E_x[U_1^g(x)\geq\sigma>0]\}\leq\beta\left\{\int|g(x)|^q\,dx\cdot\sigma^{-q}\right\}^{m/(m-q)} \tag{7.6}$$

Infatti, detto e un qualsiasi insieme limitato e chiuso contenuto in $E_x[U_1^g(x)\geq\sigma>0]$ si ha:

$$\mathrm{cap}_q(e)\leq C(q)^{q-1}\int|g(x)|^q\,dx\cdot\sigma^{-q}$$

la quale, insieme alla (7.3), fornisce:

$$\mathrm{mis}\,e\leq\beta\left\{\int|g(x)|^q\,dx\cdot\sigma^{-q}\right\}^{m/(m-q)}$$

([13]) Una dimostrazione, indipendente dal lemma (7.1) e dalla limitazione $q<2$ è stata data da A. ZYGMUND [18] p. 247, che ha mostrato anche come da questo lemma si possono dedurre le note diseguaglianze di SOBOLEV, relative ai potenziali di dominio.

Da queste, come è noto, si possono poi dedurre le diseguaglianze di SOBOLEV relative alle funzioni con derivate generalizzate. Per una dimostrazione diretta che non utilizza la teoria del potenziale cfr. E. GAGLIARDO [9].

ove

$$\beta = \left(\frac{m}{q}\right)^{m/(m-q)} [C(q)]^{m(q-1)/(m-q)}\, \omega_m$$

e di qui il lemma (7.3).

8. Supponiamo ora che Ω sia del tipo (S) (n. 1) per dedurre una limitazione del tipo (7.6), ma relativa a funzioni di $H^1(\Omega)$.

A questo scopo dimostriamo i seguenti lemmi:

LEMMA (8.1): *Se $u(x) \in H^1(\Omega)$ con Ω del tipo (S), si possono determinare due costanti $\delta_1 = \delta_1(\Omega)$, $\delta_2 = \delta_2(\Omega)$ in modo che si abbia:*

$$(8.1) \qquad |u(x)| \leq \delta_1 \int_\Omega \frac{|u(t)|}{|x-t|^{m-1}}\, dt + \delta_2 \int_\Omega \sum_i^{1\ldots m} |D_i u| \frac{1}{|x-t|^{m-1}}\, dt$$

per quasi tutti gli $x \in \Omega$.

Per $x \in \bar{\Omega}$ siano $\Sigma(x)$ l'insieme di $\Gamma(x, 1)$ e $S(x, \varrho)$ l'insieme di $I(x, \varrho)$ corrispondenti (cfr. n. 1). Sia poi $\alpha(r)$ una funzione continua con le derivate prime in $(0, +\infty)$ con $\alpha(r) \equiv 1$ in $\left(0, \frac{\varrho}{3}\right)$ e $\alpha(r) \equiv 0$ in $\left(\frac{2\varrho}{3}, +\infty\right)$. Per ogni $t \in S(x, \varrho)$ poniamo $r = |x - t|$ e detto ξ il punto di $\Gamma(x, 1)$ che si proietta da x in t, poniamo ancora:

$$u(t) = f(r, \xi).$$

Se ora è $0 < \sigma < \frac{\varrho}{3}$, possiamo scrivere, per quasi tutti i punti ξ di $\Sigma(x)$:

$$u(\sigma, \xi) = -\int_\sigma^\varrho \frac{d}{dr}[\alpha(r) f(r, \xi)]\, dr.$$

Integrando ora primo e secondo membro rispetto a ξ, su $\Sigma(x)$, si ha:

$$(8.2) \qquad \frac{1}{|\Sigma(x)|} \int_{\Sigma(x)} u(\sigma, \xi)\, d\omega \leq \frac{1}{\omega} \int_{S(x,\varrho)} \left| \frac{d}{dr}[\alpha(r) f(r, \xi)] \right| r^{1-m}\, dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{\omega} \mathcal{H}_2 \int_{S(x,\varrho)} \sum_i^{1\ldots m} |D_i u| \frac{1}{|x-t|^{m-1}}\, dt + \frac{1}{\omega} \mathcal{H}_1 \int_{S(x,\varrho)} \frac{|u(t)|\, dt}{|x-t|^{m-1}}$$

ove $\mathcal{H}_1 = \max |\alpha'(r)|$ e $\mathcal{H}_2 = \max |\alpha(r)|$.

Dalla (8.2) si deduce che anche

$$\frac{1}{\operatorname{mis} S(x\,,\sigma)} \int_{S(x,\sigma)} u(t)\, dt$$

risulta maggiorato dall'ultimo membro della (8.2). Ricordando allora un ben noto teorema di Lebesgue, si deduce che, per quasi tutti i punti $x \in \overline{\Omega}$ $u(x)$ risulta maggiorato dalla stessa quantità. Si ottiene così la (8.1).

Dal lemma (7.3) e dal lemma (8.1) discende manifestamente il seguente:

LEMMA (8.2). *Se $u(x) \in H^1(\Omega)$ con Ω del tipo (S), per ogni q con $1 \leq q \leq 2$ esiste una costante $\beta_1 = \beta_1(q\,, \Omega)$ tale che si abbia:*

$$\text{(8.3)} \qquad (\operatorname{mis} \{ E_{x \in \Omega} [\,|u| \geq \sigma > 0] \})^{(m-q)/m} \leq$$

$$\leq \frac{\beta_1}{\sigma^q} \left\{ \int_\Omega |u(x)|^q\, dx + \int_\Omega \sum_i^{1..m} |D_i u|^q\, dx \right\}.$$

Dal lemma (8.2) si deduce:

LEMMA (8.3). *Nelle stesse ipotesi del lemma (8.2), conservando anche le stesse notazioni, sussiste la seguente diseguaglianza:*

$$\text{(8.4)} \qquad \int_\Omega |u|^q\, dx \leq \beta_1 \left\{ \int_\Omega |u|^q\, dx + \int_\Omega \sum_i^{1..m} |D_i u|^q\, dx \right\} [\operatorname{mis} \Omega_0]^{q/m}$$

ove Ω_0 indica l'insieme dei punti di Ω in cui $u \not\equiv 0$ $(\Omega_0 = \Omega \cap E\,[\,|u| > 0])$ (14).

Indichiamo infatti con E_n, $[\mathcal{E}_n]$, l'insieme dei punti di Ω ove $|u| \geq n$, $\left[\,|u| \geq \frac{1}{n}\right]$ $(E_n \supset E_{n+1}\,, \ \ \mathcal{E}_n \subset \mathcal{E}_{n+1})$. Si ha allora:

$$\text{(8.5)} \qquad \int_\Omega |u|^q\, dx = \int_{\Omega_0} |u|^q\, dx = \sum_n^{1..\infty} \int_{\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n} |u|^q\, dx + \sum_n^{1..\infty} \int_{E_n - E_{n+1}} |u|^q\, dx \leq$$

$$\leq \sum_n^{1..\infty} \frac{1}{n^q} (\operatorname{mis} \mathcal{E}_{n+1} - \operatorname{mis} \mathcal{E}_n) + \sum_n^{1..\infty} (n+1)^q (\operatorname{mis} E_n - \operatorname{mis} E_{n+1}) \leq$$

$$\leq 2^q \sum_n^{1..\infty} \frac{1}{(n+1)^q} (\operatorname{mis} \mathcal{E}_{n+1} - \operatorname{mis} \mathcal{E}_n) + 2^q \sum_n^{1..\infty} n^q (\operatorname{mis} E_n - \operatorname{mis} E_{n+1}).$$

---

(14) Si osservi che questo lemma si può dedurre facilmente dalle note diseguaglianze di SOBOLEV (cfr. ad es. [9]).

Ma dal lemma (8.2) segue:

$$(\text{mis } E_n)^{(m-q)/m} \leq \frac{B}{n^q}, \quad (\text{mis } \mathcal{E}_{n+1})^{(m-q)/m} \leq B\,(n+1)^q$$

ove:

$$B = \beta_1 \left\{ \int_\Omega |u(x)|^q \, dx + \int_\Omega \sum_i^{1..m} |D_i u|^q \, dx \right\}$$

donde:

$$n^q \leq \frac{B}{(\text{mis } E_n)^{(m-q)/m}} \qquad \text{e:} \qquad \frac{1}{(n+1)^q} \leq \frac{B}{(\text{mis } \mathcal{E}_{n+1})^{(m-q)/m}}.$$

Si ha allora:

$$\sum_n^{1..\infty} n^q (\text{mis } E_n - \text{mis } E_{n+1}) \leq B \sum_n^{1..\infty} \frac{1}{(\text{mis } E_n)^{(m-q)/m}} (\text{mis } E_n - \text{mis } E_{n+1}) \leq$$

$$\leq B \int_0^{\text{mis} E_1} \frac{dt}{t^{(m-q)/m}}$$

$$\sum_n^{1..\infty} \frac{1}{(n+1)^q} (\text{mis } \mathcal{E}_{n+1} - \text{mis } \mathcal{E}_n) \leq$$

$$\leq B \sum_n^{1..\infty} \frac{1}{(\text{mis } \mathcal{E}_{n+1})^{(m-q)/m}} (\text{mis } \mathcal{E}_{n+1} - \text{mis } \mathcal{E}_n) \leq B \int_{\text{mis } \mathcal{E}_1}^{\text{mis} \Omega_0} \frac{dt}{t^{(m-q)/m}}.$$

Di qui, dalla (8.5), essendo $E_1 = \mathcal{E}_1$ segue:

$$\int_\Omega |u|^q \, dx \leq 2^q \frac{m}{q} B \, [\text{mis } \Omega_0]^{q/m}$$

cioè la (8.4).

9. A questo punto possiamo dedurre immediatamente i lemmi del n. 3.

Per dimostrare il lemma (3.1) poniamo nella (8.4) al posto di u, ad es.: $t_k^+ (u(x))$ (n. 2). Dalla relazione che così si ottiene:

$$\int_{A(k)} |u-k|^q \, dx \leq \beta_1 [\text{mis } A(k)]^{q/m} \int_{A(k)} |u-k|^q \, dx + \beta_1 [\text{mis } A(k)]^{q/m} \cdot \int_{A(k)} \sum_i^{1..m} |D_i u|^q \, dx$$

segue la (3.2) se si assume:

$$\beta_1 \ \eta^{q/m} < 1.$$

Per dimostrare il lemma (3.2) poniamo nella (8.3) al posto di u, ad es.: $t_k^+ (u (x))$. Si ottiene così per $h > k$

$$\operatorname{mis} \{ E_{x \varepsilon \Omega} [t_k^+ (u(x)) \geq h - k] \}^{(m-q)/m} \leq \frac{\beta_1}{(h-k)^q} \left\{ \int_{A(k)} | u - k |^q dx + \int_{A(k)} \sum_i^{1..m} | D_i u |^q dx \right\}$$

e di qui, osservando che:

$$E_{x \varepsilon \Omega} [t_k^+ (u (x)) \geq h - k] = A^+ (h)$$

e per il lemma (3.1), segue il lemma (3.2).

BIBLIOGRAFIA

[1] F. E. Browder, *Regularity properties at the boundary of solutions of elliptic boundary value problem.* Abstract, Bull Amer. Math. Soc. Vol. 62 (1956) p. 381.

[2] A. P. Calderon e A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals.* Acta Math. Vol. 88 (1952) pp. 85-139.

[3] E. De Giorgi, *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari.* Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino, s. 3ª to. 3⁰ Parte I (1957) pp. 25-43.

[4] J. Deny, *Les potentiels d'énergie finie.* Acta Mathematica. to 82 (1950) pp. 107-183.

[5] J. Deny, *Sur la convergence de certaines intégrales de la theorie du potentiel.* Archiv der Mathematik, Vol. 5 (1954) pp. 367-370.

[6] J. Deny e J. L. Lions, *Les espaces du type de Beppo Levi.* Annales de l'Institut Fourier, tome V (1955) pp. 305-370.

[7] O. Frostmann, *Potentiels d'équilibre et capacité des ensembles.* Lund 1935.

[8] E. Gagliardo, *Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili.* Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. (1957) Vol. XXVII pp. 284-305.

[9] E. Gagliardo, *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili.* Ricerche di Matematica, Vol. 7 (1958) pp. 102-137.

[10] D. Greco, *Un teorema di esistenza per il problema di Dirichlet....* Ricerche di Matem. Vol. V, (1956) pp. 150-158.

[11] A. I. Koshelev, *Sull'appartenenza ad L^p delle derivate delle soluzioni di equazioni differenziali ellittiche (in russo).* Mat. Sbornik t. 38 (1956) pp. 359-372.

[12] A. I. Koshelev, *Sull'appartenenza ad L^q delle derivate delle soluzioni di equazioni e sistemi ellittici (in russo).* Doklady Acad. to 110, (1956) pp. 323-325.

[13] E. Magenes e G. Stampacchia. *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico.* In corso di stampa in questa rivista.

[14] L. Nirenberg, *On non linear elliptic partial differential equations and Hölder Continuity.* Comm. on Pure and applied Math. 6 (1953) pp. 108-155.

[15] G. Polya e G. Szegö, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics,* Annals of Mathematics Studies, n. 27 (1951).

[16] G. Stampacchia, *Su un problema relativo alle equazioni di tipo ellittico del secondo ordine.* Ricerche di Matematica, Vol. 5 (1956), pp. 3-24.

[17] G. Stampacchia, *Completamenti funzionali ed applicazioni alla teoria dei potenziali di dominio.* Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni, Vol. 16 (1957) pp. 415-429.

[18] A. Zygmund, *On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations*; Journal de Mathematiques, to. 35 (1956) pp. 223-248.