

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

ALDO M. PRATELLI

**Deduzione da un'unica azione delle equazioni indefinite e di
contorno dei campi gravitazionale ed elettromagnetico**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 12,
n° 3 (1958), p. 203-221*

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1958_3_12_3_203_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

DEDUZIONE DA UN'UNICA AZIONE DELLE EQUAZIONI INDEFINITE E DI CONTORNO DEI CAMPI GRAVITAZIONALE ED ELETTROMAGNETICO

di ALDO M. PRATELLI (Milano)

I fenomeni gravitazionali trovano in relatività generale chiara ed efficace rappresentazione geometrica: le dieci componenti del tensore (doppio simmetrico) fondamentale della varietà riemanniana costituente lo spazio-tempo vengono interpretate come potenziali gravitazionali. In tale teoria il campo elettromagnetico, rappresentato mediante le sei componenti di un tensore doppio emisimmetrico della suddetta varietà, non riceve una interpretazione geometrica, cosicchè sembra sovrapporsi al campo gravitazionale. Tuttavia la geometria della varietà riemanniana è influenzata dal campo elettromagnetico, attraverso il tensore energetico elettromagnetico, il quale interviene nelle equazioni gravitazionali.

Le teorie unitarie fanno invece capo ad un unico campo, che sintetizza tanto i fenomeni gravitazionali quanto quelli elettromagnetici, e cioè i fenomeni elementari del macrocosmo: il campo viene identificato con quello che dà la geometria dello spazio-tempo, geometria che è però più ampia di quella riemanniana quadridimensionale.

Pur rinunciando a fondere i due campi in uno solo, e rimanendo quindi nell'ambito della geometria riemanniana dello spazio-tempo quadridimensionale, è possibile dedurre le leggi di entrambi i campi da un unico principio variazionale. Non si istituisce così una teoria geometrica unitaria, ma solamente una « trattazione dualistica » ⁽¹⁾, perchè i due campi sono separati, ma *unica risulta la fonte da cui scaturiscono le leggi che li governano*: cosicchè le equazioni dei due campi risultano compatibili.

⁽¹⁾ Cfr. A. EINSTEIN, *The Meaning of Relativity*, 4th ed., Princeton (1953) p. 133.

Supponiamo quindi riemanniano e quadridimensionale lo spazio-tempo. Esternamente alle masse e in assenza di campo elettromagnetico EINSTEIN⁽²⁾ constatò che le equazioni gravitazionali si potevano trarre da un principio variazionale afferente che, a parità di valori al contorno, è stazionaria l'azione gravitazionale, vale a dire che lo spazio-tempo è, in media, il meno curvo possibile.

Prescindendo invece dal campo gravitazionale, e supponendo irrotazionale il tensore elettromagnetico, BORN⁽³⁾ trasse dalla stazionarietà dell'azione elettromagnetica la seconda equazione maxwelliana, quella riguardante la divergenza. Dalla stazionarietà della medesima azione, ma senza imporre condizioni alcuna, FINZI⁽⁴⁾ ha dedotto di recente entrambe le equazioni elettromagnetiche.

HILBERT⁽⁵⁾, esprimendo la stazionarietà di un'azione somma di quella di EINSTEIN e di quella di BORN (alla cui densità spazio-tempo-reale H Egli aveva dato il nome di « Welt-function ») trasse sia le equazioni gravitazionali nello spazio-tempo incurvato dal campo elettromagnetico, sia la seconda equazione elettromagnetica. All'azione considerata da HILBERT, FOKKER e WEYL⁽⁶⁾ (ed altri Autori⁽⁷⁾) aggiunsero l'azione cinetica dovuta al movimento delle masse⁽⁸⁾.

In questa Nota deduco da tale azione totale *tutte le equazioni indefinite* a cui obbediscono i campi gravitazionale ed elettromagnetico, e non soltanto

(2) Cfr. A. EINSTEIN, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Annalen der Physik, (4) **49**, (1916), p. 769.

(3) Cfr. M. BORN, *Die träge Masse und das Relativitätsprinzip*, Annalen d. Physik, **28** (1909) p. 571-584.

(4) Cfr. B. FINZI, *Sul principio della minima azione e sulle equazioni elettromagnetiche che se ne deducono*, Rend. Acc. Lincei, (8), **12** (1952) pp. 373-382, 477-480. Cfr. anche A. M. PRATELLI, *Principi variazionali del campo elettromagnetico*, Annali sc. Norm. Sup. Pisa (3) **7** (1953) pp. 161-203.

(5) Cfr. D. HILBERT, *Die Grundlagen der Physik*, Gött. Nachr. (Math. Phys. Klasse) 1915, pp. 395-507; 1917, pp. 53-76; Math. Annalen, **92** (1924) pp. 1-32.

(6) Cfr. A. D. FOKKER, *De virtueele verplaatsingen van het electromagnetische en vat het zwaartekrachtveld bij de toepassing van het variatiebeginzel van Hamilton*, Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam, **25** (1916) pp. 1067-1084; H. WEYL, *Gravitation und Elektrizität*, Sitz. Preuss. Akad. d. Wiss., pp. 465-480; H. WEYL, *Raum, Zeit, Materie*, 5 Aufl., Berlin (1923).

(7) Ad es. H. A. LORENTZ, *Oer Einstein's theorie der Zwaartekracht*, Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam, **24** (1916) pp. 1389-1402, 1759-1774; **25** (1916) pp. 468-489, 1380-1396; J. TRESLING, *Die vergelijkingen der electronentheorie in een gravitatieveld van Einstein afgeleid uit en variatieprincip. De principale functie der electronenbeweging*, ivi, **25** (1916-17) p. 844.

(8) Cfr. anche W. PAULI, *Teoria della relatività*, trad. it. P. GULMANELLI, Torino (1958).

Le indicazioni bibliografiche qui riportate non hanno la pretesa di fornire un quadro completo, ma solo vogliono dare qualche punto fermo, base di partenza della presente Nota.

alcune, come han fatto gli Autori citati; e deduco altresì le *condizioni asintotiche e quelle sui fronti d'onda*.

A tale fine riguarderò come sede dei campi considerati una regione finita spazio-temporale Ω , ove i campi sono regolari e genericamente non nulli. Il contorno Σ di Ω sarà perciò costituito da due parti: l'ipersuperficie tridimensionale di discontinuità T che separa la regione Ω dove i campi non sono genericamente nulli dalla regione contigua dove invece lo sono, e l'ipersuperficie I che esclude gli eventi infinitamente lontani nello spazio e nel tempo.

I sistemi di equazioni e di condizioni che formano oggetto della presente Nota si ottengono annullando una variazione del tutto arbitraria di un'azione totale, integrale (esteso alla regione spazio-temporale Ω in cui si svolgono i fenomeni considerati) di una somma di quattro invarianti: il primo rappresenta la densità d'azione gravitazionale, il secondo la densità d'azione del campo elettromagnetico, il terzo la densità d'azione sostanziale elettrica e il quarto la densità d'azione cinetica. Tale variazione è ottenuta incrementando arbitrariamente, in Ω e sul suo contorno Σ , i due vettori spazio-temporali che costituiscono i potenziali del campo elettromagnetico, il tensore doppio simmetrico che costituisce il potenziale gravitazionale (cioè il tensore fondamentale dello spazio-tempo riemanniano), nonché il vettore spazio-temporale che dà la velocità relativistica delle masse.

La separazione sistematica tra le componenti trasversali e quelle longitudinali, tra gli addendi irrotazionali e quelli solenoidali dei vettori e dei tensori arbitrari, mi permette di dedurre, oltre a tutte le equazioni, le identità che intercorrono tra di esse.

Se infine le variazioni dei potenziali e della velocità relativistica delle masse, invece di essere libere, dipendono esclusivamente da trasformazioni infinitesime di coordinate, si trova il legame tra tutte le identità e si riconosce che le equazioni di moto dei corpuscoli dotati di massa e di carica elettrica, sono conseguenza delle equazioni elettromagnetiche e di quelle gravitazionali.

1. L'azione totale.

La metrica dello spazio-tempo riemanniano della relatività generale è data dalla forma quadratica differenziale indefinita

$$(1.1) \quad ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$$

dove x^0 rappresenta la coordinata temporale e x^1, x^2, x^3 le coordinate

spaziali⁽⁹⁾. Il determinante $g = \|g_{\alpha\beta}\|$ (formato con le componenti covarianti del tensore fondamentale) è negativo; assumiamo come tensore quadruplo emisimmetrico di RICCI $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ quello (reale) per cui $\varepsilon_{0123} = \sqrt{-g}$ ⁽¹⁰⁾.

L'azione da cui mi propongo di ricavare tutte le leggi elettromagnetiche e gravitazionali è data dall'integrale quadruplo, esteso alla regione Ω dello spazio-tempo sede dei fenomeni, della densità spazio-temporale H (densità spaziale della funzione lagrangiana)

$$(1.2) \quad \mathcal{A} = \int_{\Omega} H d\Omega = \int_{\Omega} H \sqrt{-g} dx = \int_{\Omega} \mathfrak{H} dx$$

dove dx esprime il prodotto dei quattro differenziali delle coordinate, e quindi $d\Omega = \sqrt{-g} dx$ è l'elemento invariante di ipervolume.

Assumo per H (con FOKKER e WEYL⁽¹¹⁾) la somma di quattro addendi invarianti

$$(1.3) \quad H = R + 2\chi \left(\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \varrho \Phi_{,\alpha} \lambda^{\alpha} + \frac{1}{2} \mu g_{\alpha\beta} \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} \right).$$

L'azione totale \mathcal{A} è allora la somma di quattro integrali:

1) il primo è l'azione gravitazionale, già considerata da EINSTEIN prescindendo dal campo elettromagnetico e dall'energia cinetica delle masse; tale integrale dipende funzionalmente soltanto dai potenziali gravitazionali $g^{\alpha\beta}$ e

⁽⁹⁾ Vale la convenzione secondo cui gli indici in basso sono di covarianza e quelli in alto di controvarianza; è sottinteso il simbolo di sommatoria nella saturazione degli indici. La virgola davanti a un indice esprime derivata parziale ordinaria; la lineetta inclinata esprime derivata tensoriale nella varietà di metrica (1.1).

Gli indici rappresentati da lettere greche assumono i valori da 0 a 3, quelli rappresentati da lettere latine assumono i valori, puramente spaziali, 1, 2, e 3.

⁽¹⁰⁾ In conseguenza del modo in cui è stato introdotto il tensore $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$, il coniugato di un tensore emisimmetrico, definito da

$${}^*F^{\gamma\delta} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta}$$

ha le componenti ${}^*F^{\gamma\delta}$ reali se sono reali le componenti $F_{\alpha\beta}$; inoltre

$${}^{**}F_{\alpha\beta} = -F_{\alpha\beta}; \quad F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = -{}^*F^{\gamma\delta} {}^*F_{\gamma\delta}$$

Nella mia Nota, l. c. (4), il tensore $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ aveva invece le componenti immaginarie, essendo stato introdotto come in G. RICCI-CURBASTRO, Opere, 2, p. 164.

⁽¹¹⁾ Cfr. FOKKER, l. c. (6), p. 1068.

dalle loro derivate ordinarie prime e seconde, attraverso l'invariante lineare

$$(1.4) \quad R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$$

del tensore doppio simmetrico di RICCI (o tensore di curvatura contratto)

$R_{\alpha\beta}$, così definito mediante i simboli di CHRISTOFFEL $\left\{ \begin{smallmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\}$:

$$(1.5) \quad R_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left\{ \begin{smallmatrix} \varrho \\ \alpha\varrho \end{smallmatrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^\varrho} \left\{ \begin{smallmatrix} \varrho \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} \varrho \\ \gamma\varrho \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} \varrho \\ \gamma\beta \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \gamma \\ \alpha\varrho \end{smallmatrix} \right\}.$$

2) il secondo è *l'azione di puro campo elettromagnetico*; nella formulazione degli Autori che postulano l'irrotazionalità del tensore elettromagnetico, esso dipende funzionalmente dal potenziale elettromagnetico spazio-temporale e dai $g^{\alpha\beta}$. Qui, indicato come al solito con $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$ il tensore doppio emisimmetrico che rappresenta il campo elettromagnetico (sintetizzante il campo spaziale elettrico e il campo spaziale magnetico), l'integrale dipende funzionalmente (in virtù del teorema di decomposizione⁽¹²⁾) dai *due* potenziali del tensore emisimmetrico $F_{\alpha\beta}$ (potenziali indicati con Φ_α e Ψ_α , entrambi covarianti) e dai potenziali gravitazionali $g^{\alpha\beta}$ (controvarianti) perchè

$$(1.6) \quad \frac{1}{4} F_{\alpha\gamma} F^{\alpha\gamma} = \frac{1}{4} F_{\alpha\gamma} F_{\beta\delta} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta}.$$

3) il terzo esprime *l'azione sostanziale elettrica*⁽¹³⁾: tale addendo dipende funzionalmente dal primo potenziale Φ_α e dalla velocità relati-

⁽¹²⁾ Cfr. B. FINZI, l. c. (4); nelle varietà riemanniane possiamo porre, come nello spazio-tempo pseudoeuclideo,

$$F_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} + K_{\alpha\beta}$$

con

$$H_{\alpha\beta} = \Phi_{\beta|\alpha} - \Phi_{\alpha|\beta} = \Phi_{\beta,\alpha} - \Phi_{\alpha,\beta}; \quad \Phi_\alpha^{|\alpha} = 0$$

$$* K_{\alpha\beta} = \Psi_{\beta|\alpha} - \Psi_{\alpha|\beta} = \Psi_{\beta,\alpha} - \Psi_{\alpha,\beta}; \quad \Psi_\alpha^{|\alpha} = 0.$$

Assegnato $F_{\alpha\beta}$, il primo potenziale Φ_α e il secondo potenziale Ψ_α sono definiti dalle equazioni

$$\Phi_{\alpha|\gamma}{}^\gamma + R^\gamma{}_\alpha \Phi_\gamma = -F_{\alpha\beta}{}^{|\beta}$$

$$\Psi_{\alpha|\gamma}{}^\gamma + R^\gamma{}_\alpha \Psi_\gamma = -*F_{\alpha\beta}{}^{|\beta}.$$

⁽¹³⁾ Lascio a tale addendo la denominazione di WEYL, l. c. (6), p. 195, benchè Φ_α rappresenti qui il *primo* potenziale del tensore emisimmetrico $F_{\alpha\beta}$, e non il potenziale del tensore $F_{\alpha\beta}$, supposto irrotazionale.

stica controvariante $\lambda^\alpha = dx^\alpha/ds$; la densità scalare $\varrho\sqrt{-g}$ esprime la densità di carica elettrica, che non dipende dalle λ^α ⁽¹⁴⁾; la densità vettoriale $\mathfrak{F}^\alpha = \varrho\lambda^\alpha\sqrt{-g}$ rappresenta la corrente elettrica di convezione.

(4 il quarto esprime l'azione cinetica ⁽¹⁵⁾); la funzione integranda è la densità d'azione cinetica $\mu\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta$; il primo fattore, cioè la densità scalare $\mu\sqrt{-g}$ ⁽¹⁶⁾, non dipende dai $g^{\alpha\beta}$ nè dalle λ^α , mentre dipende da essi il secondo fattore $g_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta$.

Infine il coefficiente χ è la costante relativistica d'attrazione universale. Potremo quindi scrivere

$$(1.7) \quad \delta \mathcal{A} = \delta_{(\Phi)} \mathcal{A} + \delta_{(\Psi)} \mathcal{A} + \delta_{(g)} \mathcal{A} + \delta_{(\lambda)} \mathcal{A}$$

ove $\delta_{(\Phi)} \mathcal{A}$ e $\delta_{(\Psi)} \mathcal{A}$ esprimono la variazione che subisce l'azione \mathcal{A} in conseguenza delle variazioni arbitrarie $\delta \Phi_\alpha$ e $\delta \Psi_\alpha$; $\delta_{(g)} \mathcal{A}$ esprime la variazione che subisce \mathcal{A} in conseguenza delle variazioni arbitrarie $\delta g^{\alpha\beta}$; infine $\delta_{(\lambda)} \mathcal{A}$ esprime la variazione che subisce l'azione in conseguenza delle variazioni arbitrarie $\delta \lambda^\alpha$.

Se l'azione totale \mathcal{A} è stazionaria, vuol dire che sono soddisfatte le condizioni:

$$(1.8a) \quad \delta_{(\Phi)} \mathcal{A} = 0; \quad (1.8b) \quad \delta_{(\Psi)} \mathcal{A} = 0;$$

$$(1.8c) \quad \delta_{(g)} \mathcal{A} = 0; \quad (1.8d) \quad \delta_{(\lambda)} \mathcal{A} = 0.$$

2. Variazione dei potenziali elettromagnetici.

La variazione rispetto ai due potenziali del tensore emisimmetrico $F_{\alpha\beta}$ coinvolge solo il secondo e il terzo addendo della (1.3). Detta $H_{\alpha\beta}$ la parte irrotazionale di $F_{\alpha\beta}$ e $K_{\alpha\beta}$ la parte solenoidale, la variazione del campo $F_{\alpha\beta}$ è data da

$$(2.1a) \quad \delta F_{\alpha\beta} = \delta H_{\alpha\beta} + \delta K_{\alpha\beta}$$

⁽¹⁴⁾ Si tenga presente che $\varrho = de/\sqrt{-g} dx$ (rapporto tra la carica elementare de e l'elemento invariante di ipervolume $\sqrt{-g} dx$).

⁽¹⁵⁾ Corrisponde all'azione sostanziale delle masse in WEYL, l. c. ⁽⁶⁾, p. 194.

⁽¹⁶⁾ Si tenga presente che $\mu = c^2 dm/\sqrt{-g} dx$ (rapporto, moltiplicato per c^2 , tra la massa elementare dm e l'elemento invariante di ipervolume); c indica la velocità della luce nel vuoto rispetto a un osservatore inerziale, ed è introdotto per rispettare le dimensioni.

con

$$(2.1b) \quad \delta H_{\alpha\beta} = \delta \Phi_{\beta|\alpha} - \delta \Phi_{\alpha|\beta} = \delta \Phi_{\beta,\alpha} - \delta \Phi_{\alpha,\beta}$$

$$(2.1c) \quad \delta {}^*K_{\alpha\beta} = \delta \Psi_{\beta|\alpha} - \delta \Psi_{\alpha|\beta} = \delta \Psi_{\beta,\alpha} - \delta \Psi_{\alpha,\beta}.$$

In conseguenza di ciò, risulta

$$(2.2a) \quad \delta_{(\Phi)} \mathcal{A} = \int_{\Omega} \{ F^{\beta\alpha} \delta \Phi_{\beta|\alpha} - \varrho \lambda^{\alpha} \delta \Phi_{\alpha} \} d \Omega$$

$$(2.2b) \quad \delta_{(\Psi)} \mathcal{A} = \int_{\Omega} {}^*F^{\delta\gamma} \delta \Psi_{\delta|\gamma} d \Omega.$$

Sia $\sigma(x^{\alpha}) = \text{cost.}$ l'equazione in forma implicita di Σ , contorno di Ω , e siano $x^{\alpha} = x^{\alpha}(\xi, \eta, \zeta)$ le sue equazioni in forma parametrica. Se V^{α} è un vettore generico (funzione del posto) il lemma di GAUSS⁽¹⁷⁾ assicura che

$$(2.3a) \quad \int_{\Omega} V^{\alpha}{}_{|\alpha} d \Omega = \int_{\Sigma} V^{\alpha} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \eta} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial \zeta} d \xi d \eta d \zeta.$$

Il vettore $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \eta} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial \zeta}$ è normale all'ipersuperficie Σ , come il vettore $\sigma_{|\alpha}$; potremo quindi porre

$$(2.3b) \quad \sigma_{|\alpha} d S \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \eta} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial \zeta} d \xi d \eta d \zeta.$$

In conseguenza, la (2.3a) verrà scritta nel seguente modo

$$(2.3c) \quad \int_{\Omega} V^{\alpha}{}_{|\alpha} d \Omega = \int_{\Sigma} V^{\alpha} \sigma_{|\alpha} d S.$$

In virtù della (2.3c), la (2.2a) e (2.2b) diventano

$$(2.4a) \quad \delta_{(\Phi)} \mathcal{A} = \int_{\Omega} \{ F^{\alpha\beta}{}_{|\beta} - \varrho \lambda^{\alpha} \} \delta \Phi_{\alpha} d \Omega - \int_{\Sigma} F^{\alpha\beta} \sigma_{|\beta} \delta \Phi_{\alpha} d S$$

$$(2.4b) \quad \delta_{(\Psi)} \mathcal{A} = \int_{\Omega} {}^*F^{\delta\epsilon}{}_{|\epsilon} \delta \Psi_{\delta} d \Omega - \int_{\Sigma} {}^*F^{\delta\epsilon} \sigma_{|\epsilon} \delta \Psi_{\delta} d S.$$

⁽¹⁷⁾ Cfr. ad es. B. FINZI, *Formulazione integrale delle leggi elettromagnetiche nello spazio-tempo*, Rend. Acc. Lincei, (8), 5 (1948) p. 203-211.

Se diamo a Φ_α una variazione arbitraria in Ω e su Σ , dalla condizione (1.8a) si deduce

$$(2.5a) \quad F^{\alpha\beta}_{|\beta} = \varrho \lambda^\alpha \text{ [in } \Omega \text{]}; \quad (2.5b) \quad F^{\alpha\beta} \sigma_{|\beta} = 0 \text{ [su } \Sigma \text{]}.$$

Come corollario della (2.5a), calcolando la divergenza di entrambi i membri e ricordando che la divergenza seconda d'un tensore emisimmetrico è nulla, troviamo la conservazione della carica, espressa da

$$(2.5') \quad (\varrho \lambda^\alpha)_{;\alpha} = 0.$$

Se diamo a Ψ_α una variazione arbitraria in Ω e su Σ , dalla condizione (1.8b) si deduce

$$(2.5c) \quad *F^{\delta\varrho}_{|\varrho} = 0 \text{ [in } \Omega \text{]}; \quad (2.5d) \quad *F^{\delta\varrho} \sigma_{|\varrho} = 0 \text{ [su } \Sigma \text{]}.$$

cioè $F_{\alpha\beta}$ è irrotazionale e coincide quindi con $H_{\alpha\beta}$ ⁽¹⁸⁾.

La (2.5b) a sua volta, distinguendo l'ipersuperficie Σ nell'ipersuperficie di discontinuità T d'equazione $\tau(x^\alpha) = \text{cost.}$, attraverso la quale il campo $F_{\alpha\beta}$ subisce il salto $\bar{F}_{\alpha\beta}$, e nell'ipersuperficie Γ d'equazione $\gamma(x^\alpha) = \text{cost.}$, sulla quale il campo $F_{\alpha\beta}$ assume il valore asintotico $\overset{\infty}{F}_{\alpha\beta}$, dà luogo alle condizioni

$$(2.6a) \quad \bar{F}^{\alpha\beta} \tau_{|\alpha} = 0 \text{ [su } T \text{]}; \quad (2.6b) \quad \overset{\infty}{F}^{\alpha\beta} \gamma_{|\beta} = 0 \text{ [su } \Gamma \text{]}.$$

Poichè l'equazione $\gamma(x^\alpha) = \text{cost.}$ deve rimanere generica, il valore asintotico $\overset{\infty}{F}_{\alpha\beta}$ deve annullarsi.

(18) Se $F_{\alpha\beta}$ è un tensore emisimmetrico qualsiasi e Σ rappresenta una ipersuperficie di discontinuità, su di essa (come si vede con facili calcoli)

$$\begin{aligned} \bar{F}^{\alpha\beta} \sigma_{|\beta} &= \bar{H}^{\alpha\beta} \sigma_{|\beta}, & \bar{K}^{\alpha\beta} \sigma_{|\beta} &= 0, \\ * \bar{F}^{\gamma\delta} \sigma_{|\delta} &= * \bar{K}^{\gamma\delta} \sigma_{|\delta}, & * \bar{H}^{\gamma\delta} \sigma_{|\delta} &= 0, \end{aligned}$$

cioè: la componente normale della discontinuità del tensore $F_{\alpha\beta}$ coincide con la componente normale della discontinuità della sua parte irrotazionale (mentre la componente normale, cioè la densità di flusso, della discontinuità della parte solenoidale, è sempre nulla); la componente tangenziale della discontinuità di $F_{\alpha\beta}$ coincide con la componente tangenziale della sua parte solenoidale (mentre la componente tangenziale della discontinuità della parte irrotazionale è sempre nulla). Se poi $F_{\alpha\beta}$ rappresenta il tensore elettromagnetico, allora valgono anche le (2.6 a, b, c, d).

Analogamente la (2.5d) si spezza nelle due condizioni

$$(2.6c) \quad {}^* \bar{F}^{\alpha\beta} \tau_{|\alpha} = 0 \text{ [su } T], \quad (2.6d) \quad {}^* \bar{F}^{\alpha\beta} \gamma_{|\beta} = 0 \text{ [su } \Gamma].$$

Ma se, come discende dalla (2.6b), $\bar{F}_{\alpha\beta} = 0$, la (2.6d) risulta identicamente soddisfatta, perchè anche ${}^* \bar{F}^{\alpha\beta}$ risulta nullo.

OSSEVAZIONE. L'integrale quadruplo che rappresenta l'azione di puro campo elettromagnetico è invariante (oltre che di fronte a trasformazioni di coordinate) di fronte a variazioni dei potenziali che siano gradienti di scalari. Se nel primo addendo della (2.4a) e della (2.4b) poniamo

$$\delta\Phi_\alpha = -\delta\varphi_{|\alpha} \quad \delta\Psi_\alpha = -\delta\psi_{|\alpha}$$

con ovvie trasformazioni di integrali troviamo le identità

$$(2.7a) \quad F^{\alpha\beta}_{|\beta\alpha} \equiv 0 \quad (2.7b) \quad {}^* F^{\epsilon\delta}_{|\delta\epsilon} \equiv 0$$

Dalla (2.7a) segue la (2.5').

Analogamente negli integrali superficiali che appaiono in (2.4a) e (2.4b) non sono significative le componenti delle variazioni dirette normalmente all'ipersuperficie. Se in esse poniamo

$$\delta\Phi_\alpha = \varepsilon\tau_{|\alpha} \quad \delta\Psi_\alpha = \nu\tau_{|\alpha}$$

(ove ε e ν sono infinitesimi arbitrari) troviamo le identità

$$(2.7c) \quad \bar{F}^{\alpha\beta} \tau_{|\alpha} \tau_{|\beta} \equiv 0 \quad (2.7d) \quad {}^* \bar{F}^{\alpha\beta} \tau_{|\alpha} \tau_{|\beta} \equiv 0$$

CONDIZIONI SU T . — È interessante esaminare il significato delle condizioni al contorno su T . Le (2.6a) possono intepretarsi come quattro equazioni lineari omogenee nelle quattro incognite $\tau_{|\alpha}$; affinchè tale sistema sia soddisfatto da valori non tutti nulli di $\tau_{|\alpha}$ il determinante di tale sistema deve essere nullo: esso è dato da ⁽¹⁹⁾

$$(2.8) \quad \|\bar{F}_{\alpha\beta}\| = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{2} \bar{F}_{\alpha\beta} {}^* \bar{F}^{\alpha\beta} \right\}^2$$

⁽¹⁹⁾ Cfr. A. M. PRATELLI, *I tensori coniugati del campo elettromagnetico*, Rend. Ist. Lomb. (Sc. Mat. e Nat.) 83 (1950) p. 197-213, form. (2), (3).

cosicchè si conclude che il tensore $\bar{F}_{\alpha\beta}$ (avendo nullo l'invariante quadratico ottenuto mediante saturazione con $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\delta}$) è semplice su T ; ed è quindi semplice anche il suo coniugato, perchè

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\delta} \bar{F}_{\alpha\beta} \bar{F}_{\mu\delta} = -\varepsilon_{\alpha\beta\mu\delta} {}^* \bar{F}^{\mu\delta} {}^* \bar{F}^{\alpha\beta} = 0.$$

Sottraendo termine a termine la (2.6a) dalla (2.6c) si trova

$$(2.9) \quad ({}^* \bar{F}^{\alpha\beta} - \bar{F}^{\alpha\beta}) \tau_{|\alpha} = 0$$

Le (2.9) costituiscono un sistema di quattro equazioni lineari omogenee nelle quattro incognite $\tau_{|\alpha}$; il determinante di tale sistema deve essere nullo, cioè (20)

$$(2.10) \quad ({}^* \bar{F}_{\alpha\beta} - \bar{F}_{\alpha\beta}) (-\bar{F}^{\alpha\beta} - {}^* F^{\alpha\beta}) = 2 \bar{F}_{\alpha\beta} \bar{F}^{\alpha\beta} = 0$$

cosicchè è nullo su T anche l'invariante quadratico ottenuto mediante saturazione con le $g^{\alpha\beta}$.

Se indichiamo con φ_α e ψ_α due vettori arbitrari, la soluzione del solo sistema (2.6c) è data da (21)

$$(2.11a) \quad \bar{F}_{\alpha\beta} = \tau_{|\beta} \varphi_\alpha - \tau_{|\alpha} \varphi_\beta$$

mentre la soluzione del solo sistema (2.6a) è data da

$$(2.11b) \quad {}^* \bar{F}_{\alpha\beta} = \tau_{|\beta} \psi_\alpha - \tau_{|\alpha} \psi_\beta.$$

Senonchè i due tensori semplici $\bar{F}_{\alpha\beta}$ e ${}^* \bar{F}^{\alpha\beta}$, essendo coniugati l'uno dell'altro, sono *totalmente* ortogonali; cioè è nullo il prodotto interno di ogni vettore dell'uno per ogni vettore dell'altro. Possiamo concludere quindi che le soluzioni (2.11a) sono compatibili con le soluzioni (2.11b) se

$$(2.12a) \quad \tau_{|\alpha} \varphi^\alpha = 0 \qquad (2.12b) \quad \tau_{|\alpha} \psi^\alpha = 0$$

$$(2.12c) \quad \varphi_\alpha \psi^\alpha = 0 \qquad (2.12d) \quad \tau_{|\alpha} \tau^{|\alpha} = 0$$

(20) Il tensore $\bar{F}_{\alpha\beta} - {}^* \bar{F}_{\alpha\beta}$, per quanto detto in (10), è reale; se fosse $\bar{F}_{\alpha\beta} - {}^* \bar{F}_{\alpha\beta} = 0$, il tensore sarebbe autoconiugato, e in conseguenza avremmo senz'altro $F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 0$; cfr. A. M. PRATELLI, *Sui tensori emisimmetrici coniugati*, Rend. Ist. Lomb. (Sc. Mat. e Nat.) 82 (1949) p. 473-487, (in particolare, vedi p. 486).

(21) Cfr. B. FINZI, *Discontinuità dei campi elettromagnetici nello spazio-tempo*, Bollettino U. M. I. (3) 7, (1952) pp. 252-259, form. (8).

Le (2.12a) e (2.12b) ci assicurano che i vettori φ_α e ψ_α debbono risultare tangenti all'ipersuperficie d'equazione $\tau(x^\alpha) = \text{cost.}$; la (2.12c) significa che i due vettori φ_α e ψ_α debbono essere tra di loro ortogonali. Infine la (2.12d) ci assicura che l'equazione dell'ipersuperficie T è quella tipica delle varietà caratteristiche che danno i fronti d'onda⁽²²⁾. In un riferimento rispetto al quale la velocità della luce è isotropa, posto (come è sempre possibile) $g_{0i} = 0$, la (2.12d) assume la forma

$$\left(\frac{\partial \tau}{\sqrt{g_{00}} c \partial t} \right)^2 - g^{ik} \frac{\partial \tau}{\partial x^i} \frac{\partial \tau}{\partial x^k} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

e T è il luogo delle superficie spaziali le quali avanzano con la velocità

$$V = c \sqrt{g_{00}} = \frac{\partial \tau}{\partial t} / \sqrt{g^{ik} \frac{\partial \tau}{\partial x^i} \frac{\partial \tau}{\partial x^k}}$$

Le (2.6a) (2.6c) (2.7c) (2.7d), in uno spazio-tempo pseudoeuclideo e in un riferimento inerziale sono le note condizioni di LOVE⁽²³⁾⁽²⁴⁾.

3. Variazione dei potenziali gravitazionali.

Calcoliamo ora la variazione $\delta_{(g)} \mathcal{A}$ dell'azione \mathcal{A} , in dipendenza delle variazioni $\delta g^{\alpha\beta}$ dei potenziali gravitazionali in Ω e sul contorno Σ ; rimangono immutati i potenziali Φ_α e Ψ_α , nonché le componenti della velocità relativistica λ^α .

Le variazioni dei $g^{\alpha\beta}$ sul contorno recano come conseguenza una modificazione del contorno stesso, e conseguentemente una variazione di Ω che indicherò $\delta_{(\Sigma)} \Omega$. Possiamo perciò scrivere

$$\delta_{(g)} \mathcal{A} = \int_{\Omega + \delta_{(\Sigma)} \Omega} \{ H \sqrt{-g} + \delta_{(v)} (H \sqrt{-g}) \} dx - \int_{\Omega} H \sqrt{-g} dx$$

⁽²²⁾ Cfr. B. FINZI, l. c. ⁽²¹⁾, form. (12).

⁽²³⁾ Per le (2.6a) (2.6c) in relatività ristretta, cfr. J. L. SYNGE, *Relativity: the special theory*, Amsterdam (1956), p. 385. Tali condizioni sono ottenute racchiudendo una porzione arbitraria dell'ipersuperficie di discontinuità T in un ipercilindro che ha per basi dueipersuperfici S' e S'' , parallele, giacenti da parti opposte di T ; il flusso di $F_{\alpha\beta}$ e quello di $*F_{\alpha\beta}$ attraverso l'ipersuperficie di contorno dell'ipercilindro sono nulli; facendo poi tendere a zero la distanza tra S' e S'' si ottengono le (2.6a) (2.6c).

Tale dimostrazione non è però più valida in una generica varietà riemanniana. Cfr. M. PASTORI, *Un'insidia nell'uso di coordinate generali*, Bollettino U. M. I., (3) 11, (1956) pp. 72-79.

⁽²⁴⁾ Cfr. A. E. H. LOVE, *Wave-motions with discontinuities in wave front*, Proc. London Math. Soc., (2), 1, (1903) pp. 37-62.

e, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore,

$$(3.1) \quad \delta_{(g)} \mathcal{A} = \int_{\Omega} \delta'_{(g)} (H \sqrt{-g}) dx + \int_{\delta(\Sigma)\Omega} H dx$$

dove $\delta'_{(g)}$ indica la variazione del $g^{\alpha\beta}$ che lascia invariato il contorno Σ della regione Ω . Quando però non vi sia equivoco, indicherò tale variazione semplicemente con $\delta_{(g)}$.

Il primo addendo del secondo membro vale

$$(3.2) \quad \int_{\Omega} \delta_{(g)} (H \sqrt{-g}) dx = \delta_{(g)} \int_{\Omega} R \sqrt{-g} dx + 2 \chi \delta_{(g)} \int_{\Omega} \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \sqrt{-g} dx - \\ - 2 \chi \delta_{(g)} \int_{\Omega} \varrho \Phi_{\alpha} \lambda^{\alpha} \sqrt{-g} dx + 2 \chi \delta_{(g)} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mu g^{\alpha\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} \sqrt{-g} dx.$$

In esso la variazione dell'azione gravitazionale, come è noto, vale

$$(3.3a) \quad \delta_{(g)} \int_{\Omega} R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} dx = \int_{\Omega} \{ R_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \delta \sqrt{-g} + g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} \delta R_{\alpha\beta} \} dx = \\ = \int_{\Omega} A_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} dx + \int_{\Omega} g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} \sqrt{-g} dx.$$

ove si è posto, per brevità, $A_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R$ (tensore di EINSTEIN).

L'ultimo integrale, come fu mostrato da PALATINI⁽²⁵⁾, si trasforma in integrale ipersuperficiale; le variazioni dei simboli di CHRISTOFFEL hanno carattere tensoriale; ponendo

$$\delta g_{\alpha\beta,\gamma} = (\delta g_{\alpha\beta})_{,\gamma}; \quad \delta g_{\alpha\beta|\gamma} = (\delta g_{\alpha\beta})_{|\gamma}$$

e indicato con

$$(3.4) \quad \eta_{\alpha\beta\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} (\delta g_{\alpha\gamma|\beta} + \delta g_{\beta\gamma|\alpha} - \delta g_{\alpha\beta|\gamma})$$

si trova

$$g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} = \{ (g^{\alpha\beta} g^{\gamma\epsilon} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\epsilon}) \eta_{\alpha\beta\epsilon} \}_{|\gamma}$$

⁽²⁵⁾ Cfr. A. PALATINI, *Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **43** (1919) pp. 203-212.

Sostituendo alle $\eta_{\alpha\beta\gamma}$ l'espressione data dalla (3.4), tenendo presente che $(g^{\alpha\beta} g^{\gamma\epsilon} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\epsilon})$ è emisimmetrico in α e ρ , rimane

$$(3.5) \quad g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (g^{\alpha\beta} g^{\gamma\epsilon} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\epsilon}) (\delta g_{\beta\epsilon|\alpha} - g \delta_{\alpha\beta|\epsilon})_{|\gamma} = \\ = (g^{\alpha\beta} g^{\gamma\epsilon} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\epsilon}) \delta g_{\alpha\epsilon|\alpha\gamma}$$

Le derivate tensoriali del tensore fondamentale sono nulle, la funzione integranda si presenta come divergenza d'un vettore, cosicchè in definitiva

$$(3.5') \quad \int_{\Omega} g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} d\Omega = \int_{\Sigma} (g^{\alpha\beta} g^{\gamma\epsilon} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\epsilon}) \delta g_{\beta\epsilon|\alpha} \sigma_{|\gamma} dS$$

La variazione che subisce l'azione di puro campo elettromagnetico (secondo addendo nella (3.2)) è data da (ricordando le (2.5c))

$$(3.6a) \quad \delta_{(g)} 2\chi \int_{\Omega} \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\epsilon} (\Phi_{\gamma|\alpha} - \Phi_{\alpha|\gamma}) (\Phi_{\epsilon|\beta} - \Phi_{\beta|\epsilon}) \sqrt{-g} dx = \\ = \chi \int_{\Omega} E_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} dx$$

ove si è indicato con $E_{\alpha\beta}$ il tensore di energia elettromagnetica:

$$E_{\alpha\beta} = F_{\alpha\epsilon} F^{\epsilon}_{\beta} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

Ricordando il significato di ρ e di μ (precisati nel § 1) si riconosce che

$$(3.6b) \quad \delta_{(g)} 2\chi \int \Phi_{\alpha\epsilon} \lambda^{\alpha} \sqrt{-g} dx = 0$$

$$(3.6c) \quad \delta_{(g)} \chi \int_{\Omega} \mu g_{\alpha\beta} \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} \sqrt{-g} dx = \chi \int_{\Omega} \theta_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} dx$$

ove si è indicato con $\theta_{\alpha\beta}$ il tensore di energia cinetica:

$$\theta_{\alpha\beta} = \mu \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta}.$$

Per calcolare l'integrale quadruplo esteso alla regione $\delta_{(\Sigma)}\Omega$, basta pensare che questa è assimilabile ad un ipercilindro avente per base l'ipersuperficie Σ e per altezza un vettore infinitesimo, perpendicolare a Σ , e quindi rappresentabile con $\varepsilon \sigma_{|\alpha}$, ove ε è un infinitesimo. L'elemento di ipervolume invariante, $d\Omega = \sqrt{-g} dx$, si può valutare facendo il prodotto misto di quattro vettori infinitesimi: tre tangenti a Σ (vale a dire $\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi} d\xi$, $\frac{\partial x^\gamma}{\partial \eta} d\eta$, $\frac{\partial x^\delta}{\partial \zeta} d\zeta$), e il quarto perpendicolare a Σ (vale a dire $\varepsilon \sigma_{|\alpha}$). Risulta perciò, nel suddetto ipercilindro,

$$d\Omega = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \eta} \frac{\partial x^\delta}{\partial \zeta} d\xi d\eta d\zeta \varepsilon \sigma^{|\alpha}$$

e, per la (2.3a),

$$d\Omega = \varepsilon \sigma_{|\alpha} \sigma^{|\alpha} dS.$$

In conclusione

$$\int_{\delta(\Sigma)\Omega} H d\Omega = \int_{\Sigma} H \varepsilon \sigma_{|\alpha} \sigma^{|\alpha} dS$$

In definitiva, tenuto conto della (3.6a) (3.6b) (3.6c) e (3.3a) e (3.5') si trova

$$(3.7) \quad \delta_{(g)} \int_{\Omega} H d\Omega = \int_{\Omega} \{A_{\alpha\beta} + \chi (E_{\alpha\beta} + \theta_{\alpha\beta})\} \delta' g^{\alpha\beta} d\Omega + \\ + \int_{\Sigma} (g^{\alpha\beta} g^{\gamma\varepsilon} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\varepsilon}) \delta' g_{\beta\varepsilon|\alpha} \sigma_{|\gamma} dS + \int_{\Sigma} H \varepsilon \sigma_{|\alpha} \sigma^{|\alpha} dS.$$

Nella (3.7) le variazioni dei $g_{\alpha\beta}$ (per le quali è stata ripristinata la notazione $\delta' g_{\alpha\beta}$) debbono, come si è detto, lasciare invariato il contorno Σ . Da ciò segue che il primo integrale esteso a Σ del secondo membro di questa formula è nullo: infatti le variazioni $\delta' g_{\alpha\beta}$ possono sempre farsi corrispondere a semplici cambiamenti infinitesimi di coordinate, per cui cioè $\delta' g_{\alpha\beta} = \zeta_{\alpha|\beta} + \zeta_{\beta|\alpha}$, ove ζ_α è un vettore infinitesimo arbitrario tangente a Σ (tale cioè che $\zeta^\alpha \sigma_{|\alpha} = 0$). Ma, in corrispondenza ad ogni cambiamento di coordinate, $\delta R_{\alpha\beta} = 0$, cosicchè la (3.5') ci assicura che è nullo l'integrale esteso a Σ che vi compare, cioè è nullo proprio l'integrale che ci interessa.

Imponendo allora la condizione (1.8c), qualunque sia $\delta'g^{\alpha\beta}$ in Ω e qualunque sia ε , otteniamo le seguenti equazioni:

$$(3.8a) \quad A_{\alpha\beta} + \chi (\mathcal{E}_{\alpha\beta} + \theta_{\alpha\beta}) = 0 \quad [\text{in } \Omega]$$

$$(3.8b) \quad H \sigma_{|\alpha} \sigma^{|\alpha} = 0 \quad [\text{su } \Sigma].$$

Le equazioni indefinite (3.8a) costituiscono le equazioni gravitazionali; $A_{\alpha\beta}$ è il tensore gravitazionale, $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ sintetizza tutte le manifestazioni energetiche del campo elettromagnetico, mentre $\theta_{\alpha\beta}$ rappresenta l'energia cinetica delle masse in movimento.

Dalle condizioni al contorno (3.8b) si trae:

$$(3.9a) \quad \bar{H} \tau_{|\alpha} \tau^{|\alpha} = 0 \quad [\text{su } T]; \quad (3.9b) \quad \bar{H} \gamma_{|\alpha} \gamma^{|\alpha} = 0 \quad [\text{su } \Gamma],$$

ove si è indicato con \bar{H} il valore asintotico di H , e con \bar{H} la discontinuità che subisce H in corrispondenza ai salti dei campi attraverso T . Poichè l'ipersuperficie Γ deve essere generica, $\gamma_{|\alpha} \gamma^{|\alpha} \neq 0$, e quindi \bar{H} deve annullarsi.

Sull'ipersuperficie T , invece, \bar{H} deve poter essere non nullo, perchè tali possono essere le discontinuità che entrano a formare \bar{H} . In conseguenza $\tau_{|\alpha} \tau^{|\alpha} = 0$, cioè l'ipersuperficie di discontinuità per il campo gravitazionale coincide con quella del campo elettromagnetico⁽²⁶⁾.

4. Variazione delle linee di corrente.

Il vettore $\lambda^\alpha = dx^\alpha/ds$ subisce l'incremento arbitrario, infinitesimo, $\delta\lambda^\alpha$: poichè tale variazione lascia immutato il ds (e lascia immutato il modulo del vettore, perchè $(\lambda_\alpha + \delta\lambda_\alpha)(\lambda^\alpha + \delta\lambda^\alpha) = 1$), alla variazione $\delta\lambda^\alpha$ corrisponderà una variazione, individuata da δx^α , delle coordinate dei punti delle linee spazio-temporali di corrente, in modo che

$$(4.1a) \quad \delta\lambda^\alpha = \frac{d\delta x^\alpha}{ds} = \delta x_{|\beta}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} = \lambda^\beta \delta x_{|\beta}^\alpha.$$

In conseguenza della (4.1a), la densità di corrente elettrica \mathfrak{F}^α subisce la variazione

$$(4.1b) \quad \delta\mathfrak{F}^\alpha = \delta(\varrho \sqrt{-g} \lambda^\alpha) = \varrho \sqrt{-g} \delta x_{|\beta}^\alpha \lambda^\beta,$$

⁽²⁶⁾ Cfr. M. PASTORI, *Propagazione delle azioni gravitazionali ed elettromagnetiche*, Ist. Lomb. (Sc. Mat. e Nat.) **72** (1938-39) pp. 409-417; B. FINZI, *Discontinuità sul fronte d'onda delle azioni gravitazionali*, Rend. Acc. Lincei, (8) **6** (1949) pp. 18-25.

mentre il potenziale Φ_α (in corrispondenza alla variazione del punto in cui è calcolato) subisce l'incremento

$$(4.1c) \quad \delta \Phi_\beta = \Phi_{\beta|\alpha} \delta x^\alpha.$$

L'azione sostanziale elettrica subisce, in conseguenza, la variazione

$$(4.2a) \quad -\delta_{(\lambda)} \int_{\Omega} \Phi_\beta \varrho \lambda^\beta d\Omega = - \int_{\Omega} \Phi_{\beta|\alpha} \delta x^\alpha \varrho \lambda^\beta d\Omega - \int_{\Omega} \Phi_\alpha \varrho \lambda^\beta \delta x^\alpha_{|\beta} d\Omega =$$

$$= - \int_{\Omega} \Phi_{\beta|\alpha} \delta x^\alpha \varrho \lambda^\beta d\Omega - \int_{\Omega} (\Phi_\alpha \varrho \lambda^\beta \delta x^\alpha)_{|\beta} d\Omega +$$

$$+ \int_{\Omega} \Phi_{\alpha|\beta} \varrho \lambda^\beta \delta x^\alpha d\Omega + \int_{\Omega} \Phi_\alpha \delta x^\alpha (\varrho \lambda^\beta)_{|\beta} d\Omega.$$

L'ultimo addendo della (4.2a) è nullo per la (2.5').

In conseguenza della (4.1a) la densità di quantità di moto relativistica subisce la variazione

$$(4.1d) \quad \delta (\mu \sqrt{-g} \lambda^\alpha) = \mu \sqrt{-g} \delta x^\alpha_{|\beta} \lambda^\beta$$

cosicchè l'azione cinetica subisce la variazione

$$(4.2b) \quad \delta_{(\lambda)} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mu \lambda^\alpha \lambda_\alpha d\Omega = \int_{\Omega} \mu \delta x^\alpha_{|\beta} \lambda^\beta \lambda_\alpha d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega} (\mu \lambda^\beta \lambda_\alpha \delta x^\alpha)_{|\beta} d\Omega - \int_{\Omega} (\mu \lambda^\beta)_{|\beta} \lambda_\alpha \delta x^\alpha d\Omega - \int_{\Omega} \mu \lambda^\beta \lambda_{\alpha|\beta} \delta x^\alpha d\Omega.$$

Gli integrali quadrupli che rappresentano l'azione gravitazionale e l'azione di puro campo elettromagnetico non contengono esplicitamente λ^α ; d'altra parte sono invarianti di fronte a trasformazioni di coordinate (e in particolare di fronte agli incrementi δx^α precedentemente considerati) cosicchè la variazione dei suddetti due addendi reca un contributo nullo⁽²⁷⁾.

⁽²⁷⁾ Cfr. W. PAULI, l. c. ⁽⁸⁾ p. 136; H. WEYL, l. c. ⁽⁶⁾, p. 196; A. D. FOKKER l. c. ⁽⁶⁾, p. 1074. In tali Autori la variazione delle linee spazio-temporali è effettuata in un diverso modo, ed è diversa la regione alla quale sono estesi gli integrali.

Dalle (4.2a) e (4.2b) segue

$$\begin{aligned}
 (4.3) \quad \delta_{(\lambda)} \mathcal{A} &= \delta_{(\lambda)} \int H d\Omega = \\
 &= - \int_{\Omega} \{ (\Phi_{\beta|\alpha} - \Phi_{\alpha|\beta}) \varrho \lambda^{\beta} + \mu \lambda^{\beta} \lambda_{\alpha|\beta} + \lambda_{\alpha} (\mu \lambda^{\beta})_{|\beta} \} \delta x^{\alpha} d\Omega + \\
 &\quad + \int_{\Sigma} \{ \mu \lambda^{\beta} \lambda_{\alpha} - \Phi_{\alpha} \varrho \lambda^{\beta} \} \delta x^{\alpha} \sigma_{|\beta} dS.
 \end{aligned}$$

Se imponiamo la condizione (1.8d) (cioè che \mathcal{A} sia stazionaria di fronte a variazioni arbitrarie di λ^{α} , espresse mediante la (4.1a)) troviamo che

$$(4.4a) \quad H_{\alpha\beta} \varrho \lambda^{\beta} + \mu \lambda^{\beta} \lambda_{\alpha|\beta} + (\mu \lambda^{\beta})_{|\beta} \lambda_{\alpha} = 0 \quad [\text{entro } \Omega]$$

$$(4.4b) \quad (\mu \lambda_{\alpha} - \varrho \Phi_{\alpha}) \lambda^{\beta} \sigma_{|\beta} = 0 \quad [\text{su } \Sigma].$$

In virtù della (2.5c) possiamo sostituire $H_{\alpha\beta}$ con $F_{\alpha\beta}$; moltiplicando la (4.4a) per λ^{α} , si ha

$$(4.5) \quad \varrho \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} F_{\alpha\beta} + \mu \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} \lambda_{\alpha|\beta} + (\mu \lambda^{\beta})_{|\beta} = 0.$$

Il primo addendo della (4.5) è nullo perchè il tensore emisimmetrico $F_{\alpha\beta}$ viene saturato col tensore simmetrico $\lambda^{\alpha} \lambda^{\beta}$; il secondo addendo è nullo perchè $\lambda^{\alpha} \lambda_{\alpha|\beta} = 0$; cosicchè l'ultimo addendo è nullo, e in questo modo vien dimostrata la conservazione della massa⁽²⁸⁾.

Allora, ricordando che il prodotto $F_{\alpha\beta} J^{\beta}$ dà la forza ponderomotrice di LORENTZ, espressa mediante il vettore f_{α} , la (4.4a) diventa

$$(4.6) \quad f_{\alpha} + \mu \lambda^{\beta} \lambda_{\alpha|\beta} = 0$$

che è la legge di moto di un corpuscolo dotato di massa e di carica.

La (4.4b) è identicamente soddisfatta perchè, mentre λ^{α} è un vettore temporale ($\lambda_{\alpha} \lambda^{\alpha} = 1$, e quindi mai nullo) gli scalari ϱ e μ sono nulli su Σ : e cioè nulli all'infinito e nulli sulla ipersuperficie caratteristica T .

OSSERVAZIONE I. Se il campo elettromagnetico è nullo, la (4.6) si riduce alla legge della geodetica spazio-temporale⁽²⁹⁾

$$(4.7) \quad \lambda^{\beta} \lambda_{\alpha|\beta} = 0.$$

⁽²⁸⁾ Negli Autori sopra citati il principio di conservazione della massa si suppone invece soddisfatto, prima di effettuare la variazione.

⁽²⁹⁾ Per la (4.6) e la (4.7) cfr. ed es. B. FINZI, *Relatività generale e teorie unitarie*, in « Cinquant'anni di relatività » Firenze (1955) p. 254.

OSSERVAZIONE II. Le identità contenute nella (4.5) si ritrovano scegliendo δx^α , invece che arbitrario, parallelo al vettore λ^α ; cioè, indicato con ε un infinitesimo arbitrario, scegliendo $\delta x^\alpha = \varepsilon \lambda^\alpha$, ed eseguendo ovvii calcoli.

5. Le identità che nascono da una variazione delle coordinate.

Il secondo assioma di HILBERT⁽³⁰⁾ (« assioma dell'invarianza generale ») asserisce che l'integrale (1.2) è invariante di fronte a trasformazioni arbitrarie delle coordinate: pertanto la variazione dell'integrale suddetto, in conseguenza di un incremento arbitrario infinitesimo dato alle coordinate, dà luogo a quattro identità.

Il risultato di HILBERT veniva successivamente ripreso da NÖTHER⁽³¹⁾ il quale dimostrava il seguente teorema, del tutto generale: sia F una funzione delle n grandezze f e delle loro derivate; le f siano, alla loro volta, funzioni del posto $f = f(x^\alpha)$. Inoltre l'integrale

$$(5.1) \quad \int F dx$$

sia invariante di fronte a trasformazioni arbitrarie delle coordinate. Allora, nel sistema delle n equazioni differenziali dedotte dalla stazionarietà dell'integrale (5.1) in conseguenza dell'aver dato alle f variazioni arbitrarie, cioè dall'aver posto

$$\delta \int F dx = 0,$$

solo $n - 4$ equazioni sono indipendenti, mentre le rimanenti quattro sono conseguenza delle prime $n - 4$. In altre parole sono identicamente soddisfatte quattro relazioni lineari indipendenti tra le n derivate lagrangiane di F rispetto alle f , e le derivate di queste ultime rispetto alle coordinate x^α . Tralascio i calcoli, in quanto si tratta di seguire il procedimento di KLEIN⁽³²⁾ con l'unica diversità che tra le funzioni f si devono annoverare non solo i quattro potenziali Φ_α , ma anche i quattro potenziali Ψ_α , covarianti.

⁽³⁰⁾ Cfr. D. HILBERT, l. c. (5).

⁽³¹⁾ Cfr. E. NÖTHER, *Invariante Variationsprobleme*, Gött. Nachr. (1918) pp. 235-257.

⁽³²⁾ Cfr. F. KLEIN, *Über die Differentialgesetze für die Erhaltung von Impuls und Energie in die Einsteinschen Gravitationstheorie*, Gött. Nachr. (1918) p. 171; cfr. A. D. FOKKER, l. c. (6).

Scriviamo le equazioni del campo elettromagnetico (2.5a) e (2.5c) in breve così:

$$C^\beta = 0; \quad D^\beta = 0 \quad (\beta = 0, 1, 2, 3)$$

indichiamo le quattro equazioni di movimento (4.6) nel seguente modo

$$- F_\alpha = 0 \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3).$$

Allora dalla strazionarietà dell'integrale (1.2) rispetto ad un generico cambiamento infinitesimo delle coordinate si deducono le quattro identità

$$(5.2) \quad B_{|\beta}^\beta \Psi_\alpha + D_{|\beta}^\beta \Phi_\alpha + (A_\alpha^\beta + \chi E_\alpha^\beta + \chi \theta_\alpha^\beta)_{|\beta} - \chi F_\alpha \equiv 0$$

la cui interpretazione assicura che le quattro equazioni di movimento di un corpuscolo carico sono conseguenza delle otto (invece che solamente di quattro) equazioni elettromagnetiche e delle dieci equazioni gravitazionali⁽³³⁾.

Se il cambiamento infinitesimo di coordinate non si annulla sul contorno, troviamo che su T valgono le identità⁽³⁴⁾

$$(5.3) \quad \bar{F}^{\gamma\beta} \tau_{|\gamma} \tau_{|\beta} \psi_\alpha + {}^* \bar{F}^{\gamma\beta} \tau_{|\gamma} \tau_{|\beta} \Phi_\alpha + \{ \bar{A}_\alpha^\beta + \chi \bar{E}_\alpha^\beta \} \tau_{|\beta} \equiv 0.$$

e risultano identicamente soddisfatte, grazie alle condizioni asintotiche, le condizioni su Γ .

⁽³³⁾ Per l'espressione di $\delta \Phi_\alpha$, $\delta g^{\alpha\beta}$ ecc. dovuti a un cambiamento infinitesimo di coordinate cfr. ad es. H. WEYL, l. c. (6), p. 234; cfr. anche E. T. WHITTAKER, *On Hilbert's World-Function*, Proc. R. Soc. London, A, 113, (1927) pp. 496-511.

⁽³⁴⁾ Sull'ipersuperficie di discontinuità T , $\theta_{\alpha\beta}$ è nullo perchè tale è μ ; sostituendo al posto delle componenti di $F_{\alpha\beta}$ i valori dati dalle (2.11a) e tenendo presenti le (2.10) (2.12a) e (2.12d), si trova per il tensore energetico elettromagnetico il valore

$$\bar{E}_{\alpha\beta} = \varphi_\gamma \varphi^\gamma \tau_{|\alpha} \tau_{|\beta}$$