ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

FERNANDO BERTOLINI

Le funzioni misurabili di punto (d'ultrafiltro) e la derivazione delle funzioni d'insieme (di soma) nella teoria algebrica della misura

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 12, nº 3 (1958), p. 163-201

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1958_3_12_3_163_0>

LE FUNZIONI MISURABILI DI PUNTO (D'ULTRAFILTRO) E LA DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI D'INSIEME (DI SOMA) NELLA TEORIA ALGEBRICA DELLA MISURA

Nota di FERNANDO BERTOLINI (Roma)

In una nota di recente pubblicazione (cfr. [1]), ho istituito un confronto tra la teoria algebrica della misura dovuta a C. CARATHÉODORY (cfr. [2]) e la teoria classica, mostrando che la prima è *duale* (e quindi equivalente) ad una opportuna generalizzazione della seconda. Proseguendo tale indagine, voglio esporre in questa nota per sommi capi la trattazione algebrica della derivazione delle funzioni d'insieme (di soma), argomento appena sfiorato dal CARATHÉODORY; vedremo che la teoria algebrica consente di introdurre e studiare la derivazione nel modo più naturale, dando ragione delle difficoltà che questa operazione presenta nella teoria classica, e conducendo in modo spontaneo alla nozione di *funzione di luogo* (introdotta dal CARATHÉODORY in [2]), o, se si vuole, a quella di *funzione misurabile d'ultrafiltro*, (introdotta in [1]), che è equivalente.

L'argomento della presente nota è svolto essenzialmente nei nn. 9-13, mentre i nn. 14 e 15 son dedicati al confronto con le definizioni ed i risultati classici e con la definizione proposta da G. FICHERA in [3]; le premesse necessarie a questa indagine riguardano le proprietà delle funzioni misurabili d'ultrafiltro, e sono raccolte nei nn. 1-8, assieme a nozioni generali ed a risultati del CARATHÉODORY che, senza essere strettamente indispensabili, consentono una esposizione più concisa e più significativa.

1. δ-omomorfismi tra reticoli di Carathéodory. La differenza essenziale tra la teoria classica della misura e quella algebrica è che in quest'ultima le misure sono funzioni definite su *reticoli* di natura qualsiasi, purchè *distributivi, relativamente complementati, numerabilmente* $\sqcap$*-completi, dotati* *di soma nullo* (1); diremo per brevità *reticoli di* CARATHÉODORY (2). L'esempio classico di un siffatto reticolo è fornito dal sistema degli insiemi misurabili e di misura finita di un assegnato spazio mensurale, assuntavi l'inclusione come relazione d'ordine (3). Prima di esporre l'oggetto della presente nota, è utile richiamare qualche nozione generale la quale poi consenta una trattazione più chiara.

Siano $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ due reticoli di CARATHÉODORY, e τ una *trasformazione univoca di $\mathcal{R}$ su $\mathcal{S}$*, verificante le seguenti condizioni (non indipendenti):

i) $$\textit{se} \quad R_1 \sqsubseteq R_2\,, \quad \textit{allora} \quad \tau R_1 \sqsubseteq \tau R_2\,,$$

ii) $$\tau(R_1 \sqcup R_2) = \tau R_1 \sqcup \tau R_2\,,$$

iii) $$\tau \bigsqcap_{k=1}^{\infty} R_k = \bigsqcap_{k=1}^{\infty} \tau R_k, \qquad (R_k \in \mathcal{R};\ k = 1\,, 2\,, 3\,, \ldots)$$

iv) $$\tau(R_1 - R_2) = \tau R_1 - \tau R_2\,,$$

v) $$\tau O = O\,;$$

diremo in queste ipotesi, che τ è un *δ-omomorfismo di $\mathcal{R}$ su $\mathcal{S}$*, o che $\mathcal{S}$ *è imagine δ-omomorfa di $\mathcal{R}$ mediante τ*, e scriveremo $\mathcal{S} = \tau\mathcal{R}$; si noti che, per le ipotesi ammesse sui due reticoli, dalle (iii) e (iv) discende la

ii′) $$\textit{se è} \quad R_0 = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} R_k, \quad \textit{allora è} \quad \tau R_0 = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \tau R_k \qquad (R_k \in \mathcal{R};\ k = 0\,, 1\,, 2\,, \ldots)\ (4).$$

---

(1) Secondo la nomenclatura usata in [1], in un reticolo qualsiasi indicheremo con $\sqsubseteq$ (« precede ») la relazione *d'ordine*, con $\sqcap$ ovvero con $\bigsqcap$ l'operazione di *interferenza* (« l'ultimo comune precedente »), con $\sqcup$ ovvero con $\bigsqcup$ l'operazione di *congiunzione* (« primo comune seguente »), con $-$ l'operazione di *complemento relativo* (« il primo soma la cui congiunzione col sottraendo segua il minuendo »). con O il *soma nullo* (« il primo soma del reticolo »); il termine « soma » indica l'elemento generico del reticolo.

(2) Veramente il CARATHÉODORY ammette che $\mathcal{R}$ sia numerabilmente completo (ossia, che qualunque successione di somi ammetta interferenza e congiunzione), ma si tratta d'una ipotesi inutilmente restrittiva, essendo sufficiente (come egli stesso osserva in [2], pp. 148-149) l'ipotesi qui adottata della $\sqcap$-completezza numerabile (ossia, che qualunque successione di somi ammetta interferenza), con qualche ovvio ritocco degli enunciati. Si noti però che, nella ipotesi del testo, è certo dotata di congiunzione qualunque successione di somi che ammettano un soma comune seguente.

(3) In questo caso, il soma nullo O altro non è che l'insieme vuoto $\emptyset$, la interferenza $\bigsqcap$ e la congiunzione $\bigsqcup$ (finite o numerabili) si riducono rispettivamente alla intersezione $\cap$ ed alla unione $\cup$, mentre il complemento relativo s'identifica con la differenza tra insiemi.

(4) Difatti abbiamo $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} R_k = R_0 - \bigsqcap_{k=1}^{\infty} (R_0 - R_k)$ (cfr. [1], p. 227).

La trasformazione τ è in particolare un isomorfismo, quando essa è univocamente invertibile ed anche la sua inversa τ^{-1} è un δ-omomorfismo; com'è noto, perchè ciò avvenga, occorre e basta che sia

i') $$R_1 \sqsubseteq R_2 \text{ se e soltanto se } \tau R_1 \sqsubseteq \tau R_2 \qquad (R_1 \in \mathcal{R},\ R_2 \in \mathcal{R}).$$

Reticoli tra loro isomorfi sono intrinsecamente indistinguibili, e si considerano come diversi *modelli* di uno stesso *reticolo astratto.*

Servendoci della nozione di σ-ideale, possiamo ottenere un utile modello del reticolo astratto, imagine δ-omomorfa del reticolo $\mathcal{R}$ mediante τ.

In un reticolo $\mathcal{R}$ si dice *σ-ideale* un insieme non vuoto $\mathcal{N}$ di somi, il quale (su $\mathcal{R}$) sia chiuso alla operazione di congiunzione numerabile ed alla relazione d'ordine inversa (5); com'è noto, un tale σ-ideale definisce in $\mathcal{R}$ una congruenza rispetto alla relazione d'ordine ed alle operazioni numerabili del reticolo (6): ciò permette di considerare il reticolo quoziente $\mathcal{R}/\mathcal{N}$, i cui somi sono le classi d'equivalenza (mod $\mathcal{N}$) in cui vengono ripartiti i somi del reticolo $\mathcal{R}$, ed il cui ordinamento viene subordinato da quello definito in $\mathcal{R}$; dato in $\mathcal{R}$ un soma R, diremo $\varrho_{\mathcal{N}} R$ la classe d'equivalenza (mod $\mathcal{N}$) cui R appartiene.

Sussistono i seguenti classici teoremi:

I. *Dato un reticolo $\mathcal{R}$ di* CARATHÉODORY *ed un suo σ-ideale $\mathcal{N}$, il reticolo quoziente $\mathcal{R}/\mathcal{N}$ è anch'esso un reticolo di* CARATHÉODORY, *che risulta immagine δ-omomorfa del reticolo $\mathcal{R}$ mediante $\varrho_{\mathcal{N}}$; inoltre si ha*

$$\mathcal{N} = \{R : \varrho_{\mathcal{N}} R = O\,,\ R \in \mathcal{R}\}\ (7).$$

II. *Viceversa, dati due reticoli di* CARATHÉODORY *$\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$, se τ è un δ-omomorfismo del primo sul secondo, allora l'insieme di somi*

$$\mathcal{N} = \{R : \tau R = O\,,\ R \in \mathcal{R}\}$$

risulta un σ-ideale del reticolo $\mathcal{R}$, ed il reticolo quoziente $\mathcal{R}/\mathcal{N}$ è isomorfo al reticolo $\mathcal{S}$; l'isomorfismo in parola associa a ciascun soma τR di $\mathcal{S}$ il soma $\varrho_{\mathcal{N}} R$ di $\mathcal{R}/\mathcal{N}$.

---

(5) Ciò significa che, se è $R_0 = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} R_k$ ed $R_k \in \mathcal{N}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, allora è $R_0 \in \mathcal{N}$, e se è $R'' \sqsubseteq R' \in \mathcal{N}$, allora è $R'' \in \mathcal{N}$.

(6) Due somi R' ed R'' risultano congruenti (mod $\mathcal{N}$) se esiste un soma $N \in \mathcal{N}$ con $R' \sqcup N = R'' \sqcup N$.

(7) Con la scrittura ${}_a\{\varphi(a) : \psi(a)\}$ indicheremo, al solito, l'insieme descritto dall'elemento $\varphi(a)$, al variar di a sotto la condizione $\psi(a)$; nel caso che a coincida con $\varphi(a)$, se ne ometterà l'indicazione a lato della graffa.

Con questi teoremi vediamo che le immagini δ-omomorfe del reticolo $\mathcal{R}$ si identificano in astratto con i reticoli quoziente, del tipo $\mathcal{R}/\mathcal{N}$; per ottenere un altro utile modello di tali immagini, occorre introdurre la nozione di ultrafiltro.

2. **Ultrafiltri in un reticolo di Carathéodory.** Com'è noto, in un reticolo $\mathcal{R}$ si dice *filtro* un insieme non vuoto $\mathcal{F}$ di somi, il quale (su $\mathcal{R}$) sia chiuso alla operazione d'interferenza finita ed alla relazione d'ordine (8); si dice *ultrafiltro* un filtro proprio (9), massimale rispetto all'inclusione (10). È ben noto che in un reticolo $\mathcal{R}$ di CARATHÉODORY, affinchè un insieme $\mathbf{u}$ di somi sia un ultrafiltro, occorre e basta che sia

i) $\mathbf{u}$ *non vuoto,*

ii) $O \notin \mathbf{u}$,

iii) $R_1 \sqcap R_2 \in \mathbf{u}$ *se e solo se è, ad un tempo,* $R_1 \in \mathbf{u}$ *e* $R_2 \in \mathbf{u}$,

iv) $R_1 \sqcup R_2 \in \mathbf{u}$ *se e solo se è* $R_1 \in \mathbf{u}$ *ovvero* $R_2 \in \mathbf{u}$ (11).

Indicheremo nel seguito con $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}$ la totalità degli ultrafiltri del reticolo $\mathcal{R}$; con $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{N}}$ indicheremo invece la totalità degli ultrafiltri del reticolo $\mathcal{R}$, privi d'elementi comuni con un assegnato σ-ideale $\mathcal{N}$.

Com'è noto,

I. *Ogni soma non nullo d'un reticolo di* CARATHÉODORY *appartiene ad almeno un ultrafiltro di somi* (12).

Si ha poi il notevole teorema:

II. *Dati due reticoli di* CARATHÉODORY $\mathcal{R}$ *ed* $\mathcal{S}$, *ed un δ-omomorfismo τ del primo sul secondo, posto*

$$\mathcal{N} = \{R : \tau R = O \, , \, R \in \mathcal{R}\},$$

la trasformazione τ subordina una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi d'ultrafiltri $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{N}}$ e $\mathbf{U}_{\mathcal{S}}$.

1) Sia $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{N}}$, e dimostriamo che è $\tau\mathbf{u} \in \mathbf{U}_{\mathcal{S}}$. Innanzi tutto, $\tau\mathbf{u}$ è non vuoto, tale essendo $\mathbf{u}$. In secondo luogo si ha $O \notin \tau\mathbf{u}$, in quanto $\mathcal{N}$ è di-

(8) Ciò significa che, se è $R' \in \mathcal{F}$ ed $R'' \in \mathcal{F}$, allora è $R' \sqcap R'' \in \mathcal{F}$, e se è $R'' \sqsupseteq R' \in \mathcal{F}$, allora è $R'' \in \mathcal{F}$.

(9) Ossia non contenente il soma nullo come elemento.

(10) Ossia non incluso in alcun altro filtro proprio.

(11) La necessità della condizione è dimostrata in [4], p. 23, teor. 4.2; per la sufficienza, basterà osservare che le condizioni (i) - (iv) assicurano banalmente che $\mathbf{u}$ è un filtro proprio, e che, se fosse contenuto in un altro filtro proprio $\mathbf{v}$, per ogni soma $S \in \mathbf{v} - \mathbf{u}$ e per ogni soma $R \in \mathbf{u}$ avremmo $R - S \in \mathbf{u} \subset \mathbf{v}$, e quindi $O = S \sqcap (R - S) \in \mathbf{v}$, il che è assurdo.

(12) Cfr. [4], pag. 23, corollario del teorema 4.3.

sgiunto da $\mathbf{u}$. In terzo luogo, $\tau R_1 \sqcap \tau R_2 \in \tau\mathbf{u}$ implica $\tau(R_1 \sqcap R_2) \in \tau\mathbf{u}$ e quindi l'esistenza d'un soma $N \in \mathcal{N}$ tale che $(R_1 \sqcap R_2) \sqcup N \in \mathbf{u}$: ma essendo $N \notin \mathbf{u}$, ne segue $R_1 \sqcap R_2 \in \mathbf{u}$, quindi $R_1 \in \mathbf{u}$ ed $R_2 \in \mathbf{u}$, ed infine $\tau R_1 \in \tau\mathbf{u}$ e $\tau R_2 \in \tau\mathbf{u}$ ad un tempo; viceversa, supponendo $\tau R_1 \in \tau\mathbf{u}$ e $\tau R_2 \in \tau\mathbf{u}$, deve esistere un soma $N \in \mathcal{N}$ con $R_1 \sqcup N \in \mathbf{u}$ e $R_2 \sqcup N \in \mathbf{u}$, da cui (essendo $N \notin \mathbf{u}$) segue successivamente $R_1 \in \mathbf{u}$ e $R_2 \in \mathbf{u}$, quindi $R_1 \sqcap R_2 \in \mathbf{u}$, ed infine $\tau R_1 \sqcap \tau R_2 = \tau(R_1 \sqcap R_2) \in \tau\mathbf{u}$. In modo analogo si dimostra poi, in quarto luogo, che è $\tau R_1 \sqcup \tau R_2 \in \tau\mathbf{u}$ quando e solo quando è $\tau R_1 \in \tau\mathbf{u}$ ovvero $\tau R_2 \in \tau\mathbf{u}$. Ciò dimostra l'assunto, che $\tau\mathbf{u}$ è un ultrafiltro di somi del reticolo $\mathcal{S}$.

2) Sia ora $\mathbf{v} \in \mathbf{U}_{\mathcal{S}}$, e dimostriamo che $\tau^{-1}\mathbf{v} = \{R : \tau R \in \mathbf{v},\ R \in \mathcal{R}\}$ è un ultrafiltro disgiunto da $\mathcal{N}$, di somi del reticolo $\mathcal{R}$. Innanzi tutto $\tau^{-1}\mathbf{v}$ non è vuoto, in quanto τ è una trasformazione *su* $\mathcal{S}$; in secondo luogo, essendo $O \notin \mathbf{v}$, necessariamente $\tau^{-1}\mathbf{v}$ è disgiunto da $\mathcal{N}$; se è $R_1 \in \tau^{-1}\mathbf{v}$ e $R_2 \in \tau^{-1}\mathbf{v}$ ad un tempo, se ne deduce successivamente $\tau R_1 \in \mathbf{v}$ e $\tau R_2 \in \mathbf{v}$, quindi $\tau(R_1 \sqcap R_2) = \tau R_1 \sqcap \tau R_2 \in \mathbf{v}$, infine $R_1 \sqcap R_2 \in \tau^{-1}\mathbf{v}$, e viceversa; analogamente si vede che è $R_1 \sqcup R_2 \in \tau^{-1}\mathbf{v}$ quando e solo quando è $R_1 \in \tau^{-1}\mathbf{v}$ ovvero $R_2 \in \tau^{-1}\mathbf{v}$. Ciò dimostra l'assunto, che è $\tau^{-1}\mathbf{v} \in \mathbf{U}^{\mathcal{N}}_{\mathcal{R}}$.

3) Per completare la dimostrazione, facciamo vedere che si ha $\mathbf{u} = \tau^{-1}\tau\mathbf{u}$, $\mathbf{u}$ essendo un arbitrario elemento dell'insieme $\mathbf{U}^{\mathcal{N}}_{\mathcal{R}}$. Ma dalla relazione $R \in \tau^{-1}\tau\mathbf{u}$ segue $\tau R \in \tau\mathbf{u}$, da cui si deduce l'esistenza d'un soma $N \in \mathcal{N}$ con $R \sqcup N \in \mathbf{u}$, ed infine (essendo $N \notin \mathbf{u}$) che è $R \in \mathbf{u}$; il discorso è reversibile, dunque abbiamo $\mathbf{u} = \tau^{-1}\tau\mathbf{u}$, c. d. d..

Dal teorema ora dimostrato si deduce il seguente perfezionamento del teorema I:

III. *Dato un reticolo $\mathcal{R}$ di* Carathéodory *ed un suo σ-ideale $\mathcal{N}$, ogni soma non appartenente ad $\mathcal{N}$ fa parte di un ultrafiltro disgiunto da $\mathcal{N}$.*

Se è $R \in \mathcal{R} - \mathcal{N}$, nel reticolo $\mathcal{R}/\mathcal{N}$ si ha $\varrho_{\mathcal{N}} R \neq O$, quindi $\varrho_{\mathcal{N}} R$ appartiene ad un ultrafiltro $\mathbf{v}$ del reticolo $\mathcal{R}/\mathcal{N}$; di conseguenza è $R \in \varrho_{\mathcal{N}}^{-1}\mathbf{v}$, e per il teorema II $\varrho_{\mathcal{N}}^{-1}\mathbf{v}$ è un ultrafiltro del reticolo $\mathcal{R}$, disgiunto da $\mathcal{N}$ (13).

Il teorema III autorizza le seguenti considerazioni. A ciascun soma R del reticolo $\mathcal{R}$ associamo l'insieme d'ultrafiltri

$$\omega_{\mathcal{N}} R = \{\mathbf{u} : R \in \mathbf{u} \in \mathbf{U}^{\mathcal{N}}_{\mathcal{R}}\};$$

in tal modo, al variar di R in $\mathcal{R}$, l'insieme $\omega_{\mathcal{N}} R$ descrive un sistema $\omega_{\mathcal{N}} \mathcal{R}$ d'insiemi (entro l'ambiente $\mathbf{U}^{\mathcal{N}}_{\mathcal{R}}$), nel quale introduciamo come relazione d'or-

---

(13) Questo teorema potrebbe anche dimostrarsi direttamente, modificando in modo opportuno la dimostrazione del teorema I.

dine l'inclusione. Dal teorema III segue subito che è $\omega_{\mathcal{N}} R = \varnothing$ quando e solo quando è $R \in \mathcal{N}$. Ebbene:

IV. *Dato un reticolo* $\mathcal{R}$ *di* CARATHÉODORY *ed un suo σ-ideale* $\mathcal{N}$, $\omega_{\mathcal{N}} \mathcal{R}$ *risulta un reticolo isomorfo al reticolo quoziente* $\mathcal{R}/\mathcal{N}$; *l'isomorfismo in parola associa a ciascun soma* $\omega_{\mathcal{N}} R$ *di* $\omega_{\mathcal{N}} \mathcal{R}$ *il soma* $\varrho_{\mathcal{N}} R$ *di* $\mathcal{R}/\mathcal{N}$.

La tesi del teorema afferma che, dati due somi R_1 ed R_2 di $\mathcal{R}$, si ha $\varrho_{\mathcal{N}} R_1 \sqsubseteq \varrho_{\mathcal{N}} R_2$ *se e soltanto se* $\omega_{\mathcal{N}} R_1 \sqsubseteq \omega_{\mathcal{N}} R_2$.

1) Supponiamo $\varrho_{\mathcal{N}} R_1 \sqsubseteq \varrho_{\mathcal{N}} R_2$; ciò significa che esiste un soma $N \in \mathcal{N}$ tale che $R_1 \sqsubseteq R_2 \sqcup N$. Ora, se è $\mathbf{u} \in \omega_{\mathcal{N}} R_1$, allora abbiamo, successivamente $R_1 \in \mathbf{u}$, $R_2 \sqcup N \in \mathbf{u}$, quindi (essendo $N \notin \mathbf{u}$) $R_2 \in \mathbf{u}$, ed infine $\mathbf{u} \in \omega_{\mathcal{N}} R_2$. Dunque, $\varrho_{\mathcal{N}} R_1 \sqsubseteq \varrho_{\mathcal{N}} R_2$ *implica* $\omega_{\mathcal{N}} R_1 \sqsubseteq \omega_{\mathcal{N}} R_2$.

2) Supponiamo $\varrho_{\mathcal{N}} R_1 \not\sqsubseteq \varrho_{\mathcal{N}} R_2$; ciò significa che è $R_1 - R_2 \notin \mathcal{N}$, e quindi (teor. III) che $R_1 - R_2$ fa parte di un ultrafiltro $\mathbf{u}$ disgiunto da $\mathcal{N}$: per la (iv) avremo $R_1 \in \mathbf{u}$, per le (ii), (iii) avremo $R_2 \notin \mathbf{u}$; in altre parole, avremo $\mathbf{u} \in \omega_{\mathcal{N}} R_1$, $\mathbf{u} \notin \omega_{\mathcal{N}} R_2$. Dunque, $\varrho_{\mathcal{N}} R_1 \not\sqsubseteq \varrho_{\mathcal{N}} R_2$ *implica* $\omega_{\mathcal{N}} R_1 \not\sqsubseteq \omega_{\mathcal{N}} R_2$.

Il teorema è completamente provato.

Il teorema IV ci dice che i due reticoli $\mathcal{R}/\mathcal{N}$ ed $\omega_{\mathcal{N}} \mathcal{R}$ sono due modelli di uno stesso reticolo astratto, imagine δ-omomorfa di $\mathcal{R}$; il secondo modello, tuttavia, presenta la particolarità notevole di essere un anello d'insiemi ([14]) entro l'ambiente $\mathbf{U}^{\mathcal{N}}_{\mathcal{R}}$, come prova il corollario:

V. *Dato un reticolo di* CARATHÉODORY $\mathcal{R}$ *ed un suo σ-ideale* $\mathcal{N}$, *le operazioni di congiunzione finita, di interferenza finita e di complemento relativo del reticolo* $\omega_{\mathcal{N}} \mathcal{R}$ *si interpretano come operazioni di unione, di intersezione, di differenza tra insiemi entro l'ambiente* $\mathbf{U}^{\mathcal{N}}_{\mathcal{R}}$, *rispettivamente.*

Dimostriamo solo la parte relativa alla congiunzione, la dimostrazione delle altre due essendo perfettamente analoga. Dati due somi $\omega_{\mathcal{N}} R_1$ ed $\omega_{\mathcal{N}} R_2$ del reticolo $\omega_{\mathcal{N}} \mathcal{R}$, ed un ultrafiltro $\mathbf{u}$ della classe $\mathbf{U}^{\mathcal{N}}_{\mathcal{R}}$, la relazione $\mathbf{u} \in \omega_{\mathcal{N}} R_1 \sqcup \omega_{\mathcal{N}} R_2$ implica successivamente $\mathbf{u} \in \omega_{\mathcal{N}} (R_1 \sqcup R_2)$, $R_1 \sqcup R_2 \in \mathbf{u}$, $R_1 \in \mathbf{u}$ ovvero $R_2 \in \mathbf{u}$, quindi $\mathbf{u} \in \omega_{\mathcal{N}} R_1$ ovvero $\mathbf{u} \in \omega_{\mathcal{N}} R_2$, ed infine $\mathbf{u} \in \omega_{\mathcal{N}} R_1 \cup \omega_{\mathcal{N}} R_2$; questa deduzione essendo reversibile, si conclude che è $\omega_{\mathcal{N}} R_1 \sqcup \omega_{\mathcal{N}} R_2 = \omega_{\mathcal{N}} R_1 \cup \omega_{\mathcal{N}} R_2$, c. d. d.

OSSERVAZIONE. Il σ-ideale $\mathcal{N}$ può in particolare ridursi al solo soma nullo del reticolo $\mathcal{R}$; in tal caso il reticolo $\mathcal{R}/\mathcal{N}$ risulta banalmente isomorfo al reticolo $\mathcal{R}$, e perciò le trasformazioni $\varrho_{\mathcal{N}}$ ed $\omega_{\mathcal{N}}$ risultano isomor-

---

([14]) Ossia un sistema d'insiemi chiuso alle operazioni d'unione finita, d'intersezione finita e di differenza.

fismi, ed inoltre l'insieme $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{N}}$ si riduce all'insieme $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}$. Allo stesso modo, nel caso che $\mathcal{N}$ si riduca al solo soma nullo, scriveremo ϱ in luogo di $\varrho_{\mathcal{N}}$, ed ω in luogo di $\omega_{\mathcal{N}}$.

3. **Reticoli di Carathéodory ed anelli d'insiemi.** Una immediata conseguenza dei teoremi (2.IV) e (2.V) è il fatto notissimo, che qualunque reticolo $\mathcal{R}$ di CARATHÉODORY ammette come modello un anello d'insiemi: tale difatti è $\omega\mathcal{R}$ entro l'ambiente $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}$, totalità degli ultrafiltri del reticolo $\mathcal{R}$ (15).

Questo fatto ci ha permesso in [1] di studiare la teoria algebrica della misura nella ipotesi concreta, ma non restrittiva, che il reticolo di definizione delle misure considerate fosse un anello d'insiemi. Nella presente nota non faremo alcuna ipotesi di questo tipo; tuttavia è utile notare la relazione intercedente tra i due reticoli $\mathcal{R}$ ed $\omega\mathcal{R}$, o meglio tra gli insiemi X e $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}$, nelle ipotesi che $\mathcal{R}$ sia un anello d'insiemi entro un ambiente X.

In questa ipotesi, ciascun punto x di X individua un ultrafiltro $\mathbf{u}(x)$, e precisamente la totalità dei somi cui x appartiene: dimodochè si può dire «$x \in R$ *se e solo se* $R \in \mathbf{u}(x)$», o, se si vuole, «*se e solo se* $\mathbf{u}(x) \in \omega R$». Viceversa, dato un ultrafiltro $\mathbf{u}$, consideriamo l'intersezione in X dei somi appartenenti ad $\mathbf{u}$; se tale intersezione è vuota, l'ultrafiltro $\mathbf{u}$ non corrisponde ad alcun punto di X, diversamente l'ultrafiltro $\mathbf{u}$ corrisponde a ciascuno dei punti della detta intersezione, che possono essere più d'uno (16): in quest'ultimo caso, tuttavia, tali punti sono tra loro equivalenti, nel senso che se un soma di $\mathcal{R}$ ne contiene uno, deve contenerli tutti, e quindi essi intervengono nella teoria sempre di conserva e mai individualmente.

Queste considerazioni dimostrano che, se il reticolo di CARATHÉODORY $\mathcal{R}$ è un anello d'insiemi in un ambiente X, considerare in sua vece l'anello $\omega\mathcal{R}$ nell'ambiente $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}$ significa:

— identificare tra loro i punti equivalenti nel senso su precisato;

---

(15) Cfr. [5], p. 106, teor. 20.1. A meno d'isomorfismi, i reticoli di CARATHÉODORY possono identificarsi con gli anelli d'insiemi verificanti la proprietà di completezza seguente: data ad arbitrio una successione $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ di insiemi appartenenti all'anello, appartiene all'anello anche l'unione degli insiemi che sono inclusi in $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ ed appartengono all'anello. Cfr. [1], n. 2.

(16) Questo è inevitabile; ad esempio, se X è il piano $z=0$ di un dato spazio cartesiano (x, y, z) ed $\mathcal{R}$ è la totalità dei sottoinsiemi di X, chiamando X' la totalità delle rette ortogonali al piano $z=0$ ed $\mathcal{R}'$ la totalità dei sottoinsiemi di X', $\mathcal{R}'$ risulta isomorfo (rispetto all'inclusione) ad $\mathcal{R}$, e se dei somi di $\mathcal{R}'$ hanno un punto in comune, hanno in comune tutta una retta.

— introdurre come « punti impropri » quegli ultrafiltri che non corrispondono ad alcun punto di X;

entrambe queste operazioni sono legittime, nel senso che non restringono le ipotesi fatte, né limitano la portata dei risultati da ottenere.

Infine, tra tutti i reticoli di CARATHÉODORY che sono anelli d'insiemi entro un certo ambiente, occupano naturalmente un posto speciale quelli per i quali v'è corrispondenza biunivoca tra i *punti* dell'ambiente e gli *ultrafiltri* del reticolo: i teoremi (2.IV) e (2.V) ci assicurano che il reticolo $\mathcal{R}/\mathcal{N}$ ammette $\omega_{\mathcal{N}}\mathcal{R}$ come un modello siffatto, ed in particolare (per $\mathcal{N}=\{O\}$) qualunque reticolo $\mathcal{R}$ ammette un tale modello $\omega\mathcal{R}$.

4. **Misure e δ-omomorfismi.** In un reticolo $\mathcal{R}$ di CARATHÉODORY diremo *misura* (*assoluta*) una funzione $F(R)$ di soma, nulla per $R = O$, non negativa, finita e σ-additiva su $\mathcal{R}$ (17). Dato nel reticolo $\mathcal{R}$ un σ-ideale $\mathcal{N}$, alla misura F si associano le due funzioni di soma così definite:

$$(4.1) \qquad \begin{cases} \alpha_{\mathcal{N}} F(R) = \inf_{R'} \{F(R') : \varrho_{\mathcal{N}} R' = \varrho_{\mathcal{N}} R \,,\ R' \in \mathcal{R}\} \\ \beta_{\mathcal{N}} F(R) = F(R) - \alpha_{\mathcal{N}} F(R)\,, \qquad \text{per} \quad R \in \mathcal{R}\,; \end{cases}$$

chiameremo $\alpha_{\mathcal{N}} F$ la parte *$\mathcal{N}$-assolutamente continua*, e $\beta_{\mathcal{N}} F$ la parte *$\mathcal{N}$-singolare* della misura F (decomposizione di LEBESGUE).

È classico che:

i) *le funzioni $\alpha_{\mathcal{N}} F$ e $\beta_{\mathcal{N}} F$ sono misure sul reticolo $\mathcal{R}$;*

ii) *la funzione $\alpha_{\mathcal{N}} F$ è caratterizzata dalla proprietà di essere la massima misura minorante F e nulla su ciascun soma di $\mathcal{N}$* (18).

Al solito, F si dice *$\mathcal{N}$-assolutamente continua* [*$\mathcal{N}$-singolare*], se coincide con $\alpha_{\mathcal{N}} F$ [con $\beta_{\mathcal{N}} F$]: evidentemente, $\alpha_{\mathcal{N}} F$ [$\beta_{\mathcal{N}} F$] è una misura $\mathcal{N}$-assolutamente continua [$\mathcal{N}$-singolare].

Diciamo *$\mathcal{N}$-equivalenti* due misure F e G, se hanno la stessa parte $\mathcal{N}$-assolutamente continua; il seguente teorema assicura che questa $\mathcal{N}$ equivalenza è una *congruenza* rispetto alla relazione $\leq$, ed alla operazione di combinazione lineare a coefficienti (costanti) non negativi:

---

(17) Ci discostiamo dal CARATHÉODORY solo in ciò, che noi ci limitiamo a considerare le misure limitatamente al loro *campo di misurabilità e finitezza*: in base alla teoria svolta in [2], tale campo è sempre un reticolo di CARATHÉODORY. La σ-additività è da prendersi in questo senso: se è $R_0 = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} R_k$, con $R_h \sqcap R_k = O$ per $h \neq k$, allora è $F(R_0) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k$.

(18) Cfr. [2], n. 144.

I. *Date due misure F e G su un reticolo $\mathcal{R}$ di* CARATHÉODORY, *dato in $\mathcal{R}$ un σ-ideale $\mathcal{N}$, dato un numero non negativo c,*

a) *se è $F \leqq G$ su $\mathcal{R}$, allora è $\alpha_{\mathcal{N}} F \leqq \alpha_{\mathcal{N}} G$ su $\mathcal{R}$;*

b) *se è $F = c \cdot G$ su $\mathcal{R}$, allora è $\alpha_{\mathcal{N}} F = c \cdot \alpha_{\mathcal{N}} G$ su $\mathcal{R}$;*

c) *si ha $\alpha_{\mathcal{N}} [F + G] = \alpha_{\mathcal{N}} F + \alpha_{\mathcal{N}} G$.*

La (a) e la (b) sono banali. La (c) si dimostra subito, in quanto abbiamo da un lato

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathcal{N}} F(R) + \alpha_{\mathcal{N}} G(R) &= \inf_{\bar{R}} \{ F(\bar{R}) : \varrho_{\mathcal{N}} \bar{R} = \varrho_{\mathcal{N}} R,\ \bar{R} \in \mathcal{R}\} + \\ &\quad + \inf_{\bar{R}} \{ G(\bar{R}) : \varrho_{\mathcal{N}} \bar{R} = \varrho_{\mathcal{N}} R,\ \bar{R} \in \mathcal{R}\} = \\ &= \inf_{R',R''} \{F(R') + G(R'') : \varrho_{\mathcal{N}} R = \varrho_{\mathcal{N}} R' = \varrho_{\mathcal{N}} R'',\ R' \in \mathcal{R},\ R'' \in \mathcal{R}\},\end{aligned}$$

d'altro lato

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathcal{N}} [F(R) + G(R)] &= \inf_{\bar{R}} \{ F(\bar{R}) + G(\bar{R}) : \varrho_{\mathcal{N}} R = \varrho_{\mathcal{N}} \bar{R},\ \bar{R} \in \mathcal{R}\} \geqq \\ &\geqq \inf_{R',R''} \{ F(R') + G(R'') : \varrho_{\mathcal{N}} R = \varrho_{\mathcal{N}} R' = \varrho_{\mathcal{N}} R'',\ R' \in \mathcal{R},\ R'' \in \mathcal{R}\} \geqq \\ &\geqq \inf_{R',R''} \{ F(R' \sqcap R'') + G(R' \sqcap R'') : \varrho_{\mathcal{N}} R = \varrho_{\mathcal{N}} R' = \varrho_{\mathcal{N}} R'',\ R' \in \mathcal{R},\ R'' \in \mathcal{R}\} \geqq \\ &\geqq \inf_{\bar{R}} \{ F(\bar{R}) + G(\bar{R}) : \varrho_{\mathcal{N}} R = \varrho_{\mathcal{N}} \bar{R},\ \bar{R} \in \mathcal{R}\} = \\ &= \alpha_{\mathcal{N}} [F(R) + G(R)],\end{aligned}$$

e quindi

$$\inf_{R',R''} \{F(R') + G(R'') : \varrho_{\mathcal{N}} R = \varrho_{\mathcal{N}} R' = \varrho_{\mathcal{N}} R'',\ R' \in \mathcal{R},\ R'' \in \mathcal{R}\} = \alpha_{\mathcal{N}} [F(R) + G(R)],$$

c. d. d.

Ricolleghiamo ora questi concetti con quello di δ-omomorfismo tra reticoli. Siano $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ due reticoli di CARATHÉODORY, e τ un δ-omomorfismo del primo sul secondo; com'è noto, subordinatamente alla trasformazione τ, ogni misura F su $\mathcal{R}$ può esser (per così dire) « trapiantata » su $\mathcal{S}$, ossia trasformata in una misura definita su $\mathcal{S}$, che chiameremo τF; la legge di tale « trapianto » è

$$\tau F(S) = \inf_R \{ F(R) : \tau R = S,\ R \in \mathcal{R}\}, \quad \text{per } S \in \mathcal{S}. \tag{4.2}$$

La definizione (4.2), ricordando il teorema (1.II) e ponendo

$$\mathcal{N} = \{ R : \tau R = O,\ R \in \mathcal{R}\},$$

risulta equivalente alla seguente

$$\tau F(\tau R) = \alpha_{\mathcal{N}} F(R) \qquad \text{per} \quad R \in \mathcal{R}, \tag{4.3}$$

che appunto prova che τF è una misura sul reticolo $\mathcal{S}$.

È immediato d'altronde, che nel modo indicato dalla (4.3) si può ottenere qualunque misura sul reticolo $\mathcal{S}$: difatti, se G è una misura su $\mathcal{S}$, ponendo $F(R) = G(\tau R)$ per $R \in \mathcal{R}$, si ottiene appunto una misura ($\mathcal{N}$-assolutamente continua) su $\mathcal{R}$, tale che $\tau F = G$. Pertanto

II. *Dati due reticoli di* CARATHÉODORY $\mathcal{R}$ *ed* $\mathcal{S}$, *ogni eventuale δ-omomorfismo* τ *del primo sul secondo induce mediante le* (4.2) *un omorfismo lineare* (*positivo*) *dell'insieme delle misure su* $\mathcal{R}$, *sull'insieme delle misure su* $\mathcal{S}$. *Due misure* F *e* G *sul reticolo* $\mathcal{R}$ *risultano* $\mathcal{N}$-*equivalenti se e soltanto se è* $\tau F = \tau G$.

In conclusione, possiamo dire che le misure $\mathcal{N}$-assolutamente continue su $\mathcal{R}$ possono identificarsi con le misure sul reticolo quoziente $\mathcal{R}/\mathcal{N}$, o, se si vuole, con le misure sull'anello d'insiemi $\omega_{\mathcal{N}}\mathcal{R}$.

Più esattamente, tra le misure $\mathcal{N}$-assolutamente continue su $\mathcal{R}$ e le misure su $\mathcal{R}/\mathcal{N}$ [su $\omega_{\mathcal{N}}\mathcal{R}$] la trasformazione $\varrho_{\mathcal{N}}$ [$\omega_{\mathcal{N}}$] subordina un isomorfismo lineare (positivo).

5. **Funzioni d'ultrafiltro, funzioni di luogo, funzioni di punto.** Sia dato, al solito, un reticolo di CARATHÉODORY $\mathcal{R}$. Nella nota [1] s'è introdotto il concetto di funzione $\mathcal{R}$-misurabile di punto, supponendo che $\mathcal{R}$ sia un anello d'insiemi; volendo estendere questo concetto al caso (apparentemente) più generale, basta considerare in luogo di $\mathcal{R}$ il reticolo isomorfo $\omega\mathcal{R}$ (che è un anello d'insiemi entro l'ambiente $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}$), e definire $\mathcal{R}$ misurabile una funzione d'ultrafiltro che sia $\omega\mathcal{R}$-misurabile. Con la ovvia convenzione di dire definita *sul soma* R una funzione d'ultrafiltro che sia definita sull'insieme ωR, si ha la seguente definizione:

una funzione f *d'ultrafiltro si dice* $\mathcal{R}$-*misurabile sul soma* (*non nullo*) R_0, *quando è definita su di esso ed inoltre ad ogni numero reale* y *si può associare un soma* $R(y)$ *tale che*

a) *è* $R(y) \sqsubseteq R_0$,

b) *per ogni ultrafiltro* $\mathbf{u}$ *cui* R_0 *appartenga,*

$$f(\mathbf{u}) < y \quad \textit{implica} \quad R(y) \in \mathbf{u}, \quad f(\mathbf{u}) > y \quad \textit{implica} \quad R(y) \notin \mathbf{u};$$

è chiaro che una siffatta «scala di somi» $\{R(y)\}$ individua la funzione f.

In [1] s'è visto che il concetto di funzione $\mathcal{R}$ misurabile è equivalente a quello di *funzione di luogo* introdotto in [2]; in sostanza il CARATHÉO-

DORY, in luogo di considerare direttamente la funzione d'ultrafiltro f, considera le scale di somi che la individuano.

Le funzioni $\mathcal{R}$-misurabili possiedono una notevole continuità:

I. *Data una funzione d'ultrafiltro f, $\mathcal{R}$-misurabile su un soma R_0 di un reticolo $\mathcal{R}$ di* CARATHÉODORY, *si ha*

$$f(\mathbf{u}_0) = \lim_{R \to \mathbf{u}_0} \inf_{\mathbf{u}} \{f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \omega R\} = \lim_{R \to \mathbf{u}_0} \sup_{\mathbf{u}} \{f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \omega R\}$$

per ogni ultrafiltro $\mathbf{u}_0$ al quale R_0 appartenga.

Con il simbolo $R \to \mathbf{u}_0$ s'intende che il passaggio al limite va fatto sul filtro $\mathbf{u}_0$ (19). Per dimostrare il teorema, basta considerare una scala di somi $\{R(y)\}$ conformemente alle (a) e (b), ed osservare che

$$f(\mathbf{u}_0) < y \text{ implica } R(y) \in \mathbf{u}_0 \quad , \text{ e quindi } f(\mathbf{u}_0) \leqq \sup_{\mathbf{u}}\{f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \omega R(y)\} \leqq y,$$

$$f(\mathbf{u}_0) > y \text{ implica } R_0 - R(y) \in \mathbf{u}_0, \text{ e quindi } f(\mathbf{u}_0) \geqq \inf_{\mathbf{u}}\{f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \omega R_0 - \omega R(y)\} \geqq y.$$

Naturalmente, nel caso particolare che $\mathcal{R}$ sia un anello d'insiemi entro un ambiente X, si presenta il problema di confrontare la definizione qui adottata con quella data in [1]. A questo proposito si può dire che:

i) *ogni funzione $\mathcal{R}$-misurabile di punto* (nel senso dichiarato in [1]) *è la «traccia» di una funzione $\mathcal{R}$-misurabile d'ultrafiltro* (nel senso qui dichiarato) *e di una sola;*

ii) *viceversa, ogni funzione $\mathcal{R}$-misurabile d'ultrafiltro è il «prolungamento continuo» di una funzione $\mathcal{R}$-misurabile di punto.*

I due concetti possono perciò essere identificati.

1) Per dimostrare la (ii), osserviamo che (come s'è visto al n. 3) ogni punto x dell'ambiente X individua un ultrafiltro $\mathbf{u}(x)$, e che una condizione del tipo $x \in R(y)$ equivale alla $R(y) \in \mathbf{u}(x)$; quindi ponendo $g(x) = f[\mathbf{u}(x)]$, se f è una funzione d'ultrafiltro $\mathcal{R}$-misurabile sul soma R_0, g risulta una funzione di punto $\mathcal{R}$-misurabile sul soma R_0.

2) Viceversa, assegnata una funzione di punto g $\mathcal{R}$-misurabile sul soma R_0, in virtù del teorema I ogni eventuale funzione $\mathcal{R}$-misurabile d'ul-

---

(19) Usando la nomenclatura di MOORE-SMITH-PICONE, ciò significa che il passaggio al limite va fatto sul filtro $\mathbf{u}_0$, pensato come *insieme diretto* al modo seguente: $R' \to R''$ significa $R' \sqsupseteq R''$.

trafiltro avente g come «traccia» dovrà verificare la relazione

$$(5.1) \qquad f(\mathbf{u}_0) = \lim_{x \to \mathbf{u}_0} g(x) \quad \text{per} \quad \mathbf{u}_0 \in \omega R_0 \text{ (20)},$$

e questo assicura l'unicità di tale funzione f. Per dimostrarne l'esistenza, consideriamo una scala di somi $\{R(y)\}$ relativa alla funzione di punto g: per ogni numero reale y avremo necessariamente una di queste due relazioni

$$R(y) \in \mathbf{u}_0, \quad \text{e quindi} \quad g(x) \leqq y \quad \text{per ogni} \quad x \in R(y), \quad \text{oppure}$$

$$R_0 - R(y) \in \mathbf{u}_0, \quad \text{e quindi} \quad g(x) \geqq y \quad \text{per ogni} \quad x \in R_0 - R(y),$$

il che appunto equivale all'esistenza del limite a secondo membro della (5.1).

Infine, si deduce da quanto precede che ogni scala di somi relativa alla g è anche una scala di somi relativa alla f, e quindi quest'ultima è una funzione d'ultrafiltro $\mathcal{R}$-misurabile sul soma R_0: con ciò anche la (i) è dimostrata. Si noti che dal punto di vista di CARATHÉODORY le due funzioni f e g non sono neanche distinguibili.

6. Funzioni d'ultrafiltro $\mathcal{N}$-equivalenti, od eguali $\mathcal{N}$-quasi-ovunque. Se nel reticolo $\mathcal{R}$ di CARATHÉODORY è assegnato un σ-ideale $\mathcal{N}$, possiamo introdurre una nozione di $\mathcal{N}$-equivalenza tra funzioni $\mathcal{R}$-misurabili d'ultrafiltro, così come al n. 4 s'è fatto per le misure. Precisamente, diremo *tra loro $\mathcal{N}$-equivalenti*, od anche *eguali $\mathcal{N}$-quasi-ovunque* due funzioni d'ultrafiltro f e g $\mathcal{R}$-misurabili rispettivamente sui somi A e B, che soddisfino questa condizione:

i) $A - B \in \mathcal{N}$, $B - A \in \mathcal{N}$

ii) *se è* $R \sqsubseteq A \sqcap B$, $f(\mathbf{u}) \neq g(\mathbf{u})$ *per* $R \in \mathbf{u}$, *allora è* $R \in \mathcal{N}$.

Vedremo al n. 7 che questa nozione è l'estensione naturale della nozione di eguaglianza quasi-ovunque della teoria classica; esaminiamo ora i teoremi seguenti, i quali assicurano che questa $\mathcal{N}$-equivalenza è una *congruenza* rispetto alla relazione $\leqq$ ed alle operazioni aritmetiche.

I. *Siano dati un reticolo $\mathcal{R}$ di* CARATHÉODORY, *un suo σ-ideale $\mathcal{N}$, e due funzioni $\mathcal{R}$-misurabili d'ultrafiltro f e g. Affinchè queste due funzioni siano $\mathcal{N}$-equivalenti, è necessario e sufficiente che siano identiche sull'insieme $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{N}}$ degli ultrafiltri di $\mathcal{R}$ disgiunti da $\mathcal{N}$.*

1) Dimostriamo che la condizione è necessaria, ammettendo in un primo tempo (per assurdo) che su un certo ultrafiltro $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{N}}$ le due funzioni

---

(20) Usando la nomenclatura di G. FICHERA (Cfr. [3], p. 7 e segg.), la scrittura indica il passaggio al limite sul *gruppo d'insiemi* $\mathbf{u}_0$.

siano una definita e l'altra no: avremo allora $A - B \in \mathbf{u}$ ovvero $B - A \in \mathbf{u}$ e quindi $A - B \notin \mathcal{N}$ ovvero $B - A \notin \mathcal{N}$, il che contraddice alla (i), avendo chiamato A e B i somi di definizione delle due funzioni f e g.

In secondo luogo, ammettiamo (per assurdo) che su un certo ultrafiltro $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{U}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{N}}$ le due funzioni siano entrambe definite, ma diseguali, ad esempio ammettiamo che sia

$$f(\mathbf{u}_0) < r < s < g(\mathbf{u}_0).$$

Allora, dette $\{R_f(y)\}$ e $\{R_g(y)\}$ due scale di somi, rispettivamente per la funzione f e per la g, dev'essere

$$R_f(r) \in \mathbf{u}_0\,,\ R_g(s) \notin \mathbf{u}_0 \qquad \text{e quindi} \qquad R_f(r) - R_g(s) \in \mathbf{u}_0\,,$$

e inoltre

$$f(\mathbf{u}) \leqq r < s \leqq g(\mathbf{u}) \qquad \text{per ogni} \qquad \mathbf{u} \in \omega\,[R_f(r) - R_g(s)]\,;$$

in conseguenza di ciò avremo $R_f(r) - R_g(s) \notin \mathcal{N}$ (poichè $\mathbf{u}_0$ è disgiunto da $\mathcal{N}$) e $f(\mathbf{u}) \neq g(\mathbf{u})$ per ogni $\mathbf{u} \in \omega\,[R_f(r) - R_g(s)]$, il che contraddice la (ii).

2) Dimostriamo ora che la condizione è sufficiente, ammettendo (per assurdo) che le due funzioni non siano $\mathcal{N}$-equivalenti. In primo luogo, se fosse $A - B \notin \mathcal{N}$, per il teorema (2.III) $A - B$ apparterrebbe ad un ultrafiltro $\mathbf{u}$ disgiunto da $\mathcal{N}$, e su tale ultrafiltro la f sarebbe definita e la g no; per analoga ragione è assurdo che sia $B - A \notin \mathcal{N}$. In secondo luogo, se esiste un soma R su cui le due funzioni siano entrambe definite, riuscendo però $f(\mathbf{u}) \neq g(\mathbf{u})$ per ogni $\mathbf{u} \in \bar{\omega} R$, ancora per il teorema (2.III) R apparterrebbe ad un ultrafiltro disgiunto da $\mathcal{N}$, su cui le due funzioni sarebbero diseguali.

Con questo teorema abbiamo visto, in sostanza, che due funzioni $\mathcal{R}$-misurabili sono tra loro $\mathcal{N}$-equivalenti quando e soltanto quando sull'insieme $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{N}}$ hanno la medesima «traccia»; alla domanda, quali funzioni definite su un sottoinsieme di $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{N}}$ siano la traccia d'una funzione $\mathcal{R}$-misurabile, risponde il seguente teorema:

II. *Siano $\mathcal{R}$ un reticolo di* CARATHÉODORY, *$\mathcal{N}$ un suo σ-ideale, g una funzione definita in un sottoinsieme di $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{N}}$. Affinchè g sia la traccia su $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{N}}$ di una funzione $\mathcal{R}$-misurabile d'ultrafiltro, è necessario e sufficiente che*

a) *l'insieme di definizione sia l'immagine di un soma $R_0 \in \mathcal{R}$ nel δ-omomorfismo $\omega_{\mathcal{N}}$;*

b) *in R_0 vi sia una scala di somi $\{R(y)\}$, tale da aversi $R(y) \in \mathbf{u}$ per $g(\mathbf{u}) < y$, e $R(y) \notin \mathbf{u}$ per $g(\mathbf{u}) > y$.*

Che la condizione sia necessaria è evidente. Per dimostrare che è sufficiente, basta osservare che la funzione d'ultrafiltro

$$f(\mathbf{u}) = \inf\{y \,:\, R(y) \in \mathbf{u}\}, \qquad \text{per} \quad \mathbf{u} \in \omega R_0 ,$$

è definita sul soma R_0, è $\mathcal{R}$-misurabile ed ha traccia eguale a g su $\mathbf{U}_{\mathfrak{R}}^{\mathcal{N}}$.

Per esporre un'altra proprietà notevole, relativa alle funzioni $\mathcal{R}$-misurabili ed alle loro traccie sull'insieme $\mathbf{U}_{\mathfrak{R}}^{\mathcal{N}}$, introduciamo il concetto di *$\mathcal{N}$-estremo.* Sia f una funzione $\mathcal{R}$-misurabile d'ultrafiltro sul soma R, e consideriamo la totalità dei numeri reali y, a ciascuno dei quali si possa associare un soma R_y verificante le condizioni

$$\inf_{\mathbf{u}} \{f(\mathbf{u}) \,:\, \mathbf{u} \in \omega R_y\} \geqq y \;, \; R_y \sqsubseteq R \;, \; R_y \notin \mathcal{N} ;$$

l'estremo superiore di tali numeri chiameremo *$\mathcal{N}$-estremo superiore* della f nel soma R, e scriveremo $\mathcal{N}\text{-sup}\,[f(\mathbf{u}) \,:\, R]$. In modo simmetrico si definisce l'*$\mathcal{N}$-estremo inferiore* $\mathcal{N}\text{-inf}\,[f(\mathbf{u}) \,:\, R]$.

Sussiste il notevole teorema:

III. *Se f è una funzione d'ultrafiltro, misurabile sul soma R_0 del reticolo di* CARATHÉODORY *$\mathcal{R}$, ed $\mathcal{N}$ è un σ-ideale di $\mathcal{R}$, allora si ha*

$$\mathcal{N}\text{-sup}\,[f(\mathbf{u}) \,:\, R] = \sup_{\mathbf{u}} \{f(\mathbf{u}) \,:\, \mathbf{u} \in \omega_{\mathcal{N}}\, R\},$$

$$\mathcal{N}\text{-inf}\,[f(\mathbf{u}) \,:\, R] = \inf_{\mathbf{u}} \{f(\mathbf{u}) \,:\, \mathbf{u} \in \omega_{\mathcal{N}}\, R\},$$

per ogni $R \sqsubseteq R_0$.

Limitiamoci a dimostrare metà della tesi, l'altra metà essendo analoga; chiamiamo $\{R(y)\}$ una scala di somi relativa alla funzione f.

1) Sia y un numero arbitrariamente minore di $\sup_{\mathbf{u}} \{f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \omega_{\mathcal{N}}\, R\}$, e sia $\mathbf{u}_0$ un ultrafiltro verificante le condizioni $y < f(\mathbf{u}_0)$, $\mathbf{u}_0 \in \omega_{\mathcal{N}}\, R$; da tali condizioni segue $R(y) \notin \mathbf{u}_0$, quindi

$$R - R(y) \in \mathbf{u}_0 ,\; R - R(y) \notin \mathcal{N},\; y \leqq f(\mathbf{u}) \quad \text{per} \quad R - R(y) \in \mathbf{u},$$

da cui $y \leqq \mathcal{N}\text{-sup}\,[f : R]$ e, per l'arbitrarietà di y,

$$\sup_{\mathbf{u}} \{f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \omega_{\mathcal{N}}\, R\} \leqq \mathcal{N}\text{-sup}\,[f : R].$$

2) Prendiamo ora y arbitrariamente minore di $\mathcal{N}\text{-sup}\,[f : R]$, ed avremo un soma R con $R_0 \sqsupseteq R \notin \mathcal{N}$ ed $y \leqq f(\mathbf{u})$ per $\mathbf{u} \in \omega\, R$; ma per il teorema (2.III) R fa parte d'un ultrafiltro $\mathbf{u}_0$ disgiunto da $\mathcal{N}$, dunque si ha $y \leqq f(\mathbf{u}_0)$ con $\mathbf{u}_0 \in \omega_{\mathcal{N}}\, R$, $y \leqq \sup_{\mathbf{u}} \{f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \omega_{\mathcal{N}}\, R\}$, e di qui, per

l'arbitrarietà di y,

$$\mathcal{N}\text{-sup}\,[f(\mathbf{u}) : R] \leqq \sup_{\mathbf{u}} \{f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \omega_{\mathcal{N}} R\}.$$

Con ciò è dimostrato il teorema.

7. **Digressione sulle funzioni misurabili di punto.** Vogliamo ora dimostrare che la definizione di $\mathcal{N}$-equivalenza tra funzioni $\mathcal{R}$-misurabili d'ultrafiltro è un'estensione della definizione d'equivalenza tra funzioni misurabili che si dà nella teoria classica. Precisamente:

Nel caso particolare che il reticolo $\mathcal{R}$ di CARATHÉODORY sia l'anello degli insiemi misurabili e di misura finita di uno spazio mensurale X, e che $\mathcal{N}$ sia la totalità degli insiemi di misura nulla di X, due funzioni misurabili di punto sono tra loro equivalenti (quasi ovunque eguali) secondo la definizione classica, quando e soltanto quando le corrispondenti funzioni d'ultrafiltro sono tra loro $\mathcal{N}$-equivalenti secondo la definizione del n. 6.

1) Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni misurabili di punto, e chiamiamo ancora $f'(\mathbf{u})$ e $g'(\mathbf{u})$ le corrispondenti funzioni $\mathcal{R}$-misurabili d'ultrafiltro (cfr. la fine del n. 5); siano A e B gl'insiemi di definizione rispettivamente di $f(x)$ e di $g(x)$, insiemi che potremo supporre entrambi di misura finita, senza restrizione ([21]), e pertanto somi del reticolo $\mathcal{R}$. Poniamo, per ogni coppia di numeri razionali r e s, il primo *minore* del secondo,

$$R_{rs} = \{x : x \in A \sqcap B, f(x) < r < s < g(x)\},\quad R^{rs} = \{x : x \in A \sqcap B, g(x) < r < s < f(x)\};$$

tutti questi insiemi, per la misurabilità delle due funzioni di punto $f(x)$ e $g(x)$, sono somi del reticolo $\mathcal{R}$; l'insieme dei punti di $A \sqcap B$ in cui le due funzioni di punto $f(x)$ e $g(x)$ sono diseguali è

$$R^* = \bigsqcup_{r,s} R_{rs} \sqcup \bigsqcup_{r,s} R^{rs},$$

ed è anch'esso un soma del reticolo $\mathcal{R}$.

2) Vediamo ora le due funzioni d'ultrafiltro $f'(\mathbf{u})$ e $g'(\mathbf{u})$. Evidentemente

— per $R_{rs} \in \mathbf{u}$ si ha $f'(\mathbf{u}) \leqq r < s \leqq g'(\mathbf{u})$,

— per $R^{rs} \in \mathbf{u}$ si ha $g'(\mathbf{u}) \leqq r < s \leqq f'(\mathbf{u})$,

— per $A - B \in \mathbf{u}$, $f'(\mathbf{u})$ è definita e $g'(\mathbf{u})$ no,

— per $B - A \in \mathbf{u}$, $g'(\mathbf{u})$ è definita e $f'(\mathbf{u})$ no.

([21]) Se ciò non fosse, scomporremmo gl'insiemi A e B nella unione numerabile di insiemi di misura finita: con ciò escludiamo le cosiddette misure non-σ-finite dalla nostra considerazione.

Di qui segue immediatamente che, se le due funzioni $f'(\mathbf{u})$ e $g'(\mathbf{u})$ sono $\mathcal{N}$-equivalenti, dev'essere di conseguenza $A - B \in \mathcal{N}$, $B - A \in \mathcal{N}$, $R_{rs} \in \mathcal{N}$, $R^{rs} \in \mathcal{N}$ (per ogni coppia di numeri razionali $r < s$), e quindi $R^* \in \mathcal{N}$, il che prova che sono tra loro equivalenti in senso classico le due funzioni di punto $f(x)$ e $g(x)$.

3) Viceversa, supponiamo che su un ultrafiltro $\bar{\mathbf{u}}$ le due funzioni $f'(\mathbf{u})$ e $g'(\mathbf{u})$ siano definite, ma diseguali, ad esempio supponiamo che sia

$$f'(\bar{\mathbf{u}}) < r < s < g'(\bar{\mathbf{u}}) \qquad (r \text{ ed } s \text{ razionali});$$

Allora, dette $\{R_f(y)\}$ e $\{R_g(y)\}$ due scale di somi, rispettivamente per la funzione f' e per la g', dev'essere

$$R_f(r) \in \bar{\mathbf{u}}, \; R_g(s) \notin \bar{\mathbf{u}} \qquad \text{e quindi} \qquad R_f(r) - R_g(s) \in \bar{\mathbf{u}},$$

ed inoltre $f'(\mathbf{u}) \leqq r < s \leqq g'(\mathbf{u})$ per ogni $\mathbf{u} \in \omega\,[R_f(r) - R_g(s)]$, donde $f(x) \leqq r < s \leqq g(x)$ per ogni $x \in R_f(r) - R_g(s)$; ne segue $R_f(r) - R_g(s) \sqsubseteq R_{rs} \in \bar{\mathbf{u}}$, ed infine $R^* \in \bar{\mathbf{u}}$. Si deduce che, se le due funzioni di punto $f(x)$ e $g(x)$ sono equivalenti nel senso classico, e quindi è $R^* \in \mathcal{N}$, dev'essere di conseguenza $R \sqsubseteq R^*$ e quindi $R \in \mathcal{N}$ per ogni soma R verificante l'ipotesi dell'enunciato (ii) del n. 6, e dev'essere anche $A - B \in \mathcal{N}$, $B - A \in \mathcal{N}$; ciò prova che le due funzioni d'ultrafiltro $f'(\mathbf{u})$ e $g'(\mathbf{u})$ sono $\mathcal{N}$-equivalenti.

Analogamente, si potrebbe dimostrare che la nozione di $\mathcal{N}$-estremo superiore o inferiore è una estensione del concetto di estremo superiore od inferiore *essenziale* (*pseudo*-estremo, *vero*-estremo superiore od inferiore, secondo altri autori) della teoria classica.

8. **Funzioni $\mathcal{R}$-misurabili e δ-omorfismi.** Vediamo ora come i concetti esposti al n. 6 si ricolleghino alla nozione di δ-omorfismo tra reticoli. Siano $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ due reticoli di CARATHÉODORY, e τ un δ-omorfismo del primo sul secondo; poniamo, al solito,

$$\mathcal{N} = \{R : \tau R = O \,, \; R \in \mathcal{R}\}.$$

Subordinatamente alla trasformazione τ, qualunque funzione d'ultrafiltro f, $\mathcal{R}$-misurabile su un soma R del reticolo $\mathcal{R}$, non appartenente ad $\mathcal{N}$, può esser «trapiantata» sul reticolo $\mathcal{S}$, ossia trasformata in una funzione τf d'ultrafiltro, $\mathcal{S}$-misurabile sul soma (non nullo) τR del reticolo $\mathcal{S}$: basta porre

$$\tau f(\tau \mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) \quad \text{per} \quad \mathbf{u} \in \omega_{\mathcal{R}} R \tag{8.1}$$

tenendo conto (teorema 2.II) che τ subordina una corrispondenza biunivoca tra gli ultrafiltri dei reticolo $\mathcal{S}$ e quelli disgiunti da $\mathcal{N}$ del reticolo $\mathcal{R}$.

Si osservi che, se $\{R(y)\}$ è una scala di somi relativa alla funzione f, allora $\{\tau R(y)\}$ è una scala di somi relativa alla funzione τf: questo dimostra che la trasformazione τ qui definita tra funzioni d'ultrafiltro coincide con quella tra *funzioni di luogo* definita dal CARATHÉODORY in [2] ([22]).

In sostanza, come si vede, *a ciascuna funzione $\mathcal{R}$-misurabile su un soma appartenente ad $\mathcal{R}-\mathcal{N}$, la trasformazione τ associa la sua traccia sull'insieme* $\mathbf{U}_{\mathfrak{R}}^{\mathcal{N}}$ mentre *tutte le tracce così ottenute si possono identificare con le funzioni $\mathcal{R}/\mathcal{N}$-misurabili;* più esattamente, in virtù dell'isomorfismo tra i reticoli $\mathcal{R}/\mathcal{N}$, $\mathcal{S}$, $\omega_{\mathcal{N}}\mathcal{R}$ e per il teorema (2.11), sussiste un isomorfismo aritmetico tra l'insieme delle funzioni $\mathcal{R}/\mathcal{N}$-misurabili, quello delle funzioni $\mathcal{S}$-misurabili, quello delle funzioni $\omega_{\mathcal{N}}\mathcal{R}$-misurabili, e quello delle tracce su $\mathbf{U}_{\mathfrak{R}}^{\mathcal{N}}$ di funzioni $\mathcal{R}$-misurabili.

I teoremi del n. 6, mercè la posizione (8.1), possono essere riassunti nell'enunciato seguente:

I. *Dati due reticoli di* CARATHÉODORY $\mathcal{R}$ *ed* $\mathcal{S}$, *ed un δ-omomorfismo τ del primo sul secondo, posto*

$$\mathcal{N} = \{R : \tau R = O \ , \quad R \in \mathcal{R}\},$$

il δ-omomorfismo τ tra reticoli induce mercè le (8.1) *una trasformazione tra le funzioni d'ultrafiltro dei due reticoli, la quale gode delle proprietà seguenti:*

a) *è un omomorfismo aritmetico dell'insieme delle funzioni $\mathcal{R}$-misurabili (su somi appartenenti ad $\mathcal{R}-\mathcal{N}$) sull'insieme delle funzioni $\mathcal{S}$-misurabili (su somi non nulli)*;

b) *due funzioni $\mathcal{R}$-misurabili f e g sono tra loro $\mathcal{N}$-equivalenti quando è soltanto quando è $\tau f = \tau g$;*

c) *se f è una funzione $\mathcal{R}$-misurabile sul soma $R_0 \in \mathcal{R} - \mathcal{N}$, per ogni $R \sqsubseteq R_0$ si ha*

$$\mathcal{N}\text{-sup } [f : R] = \sup_{\mathbf{v}} \{\tau f(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \omega(\tau R)\},$$

$$\mathcal{N}\text{-inf } [f : R] = \inf_{\mathbf{v}} \{\tau f(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \omega(\tau R)\}.$$

Naturalmente, per introdurre i concetti di $\mathcal{N}$-equivalenza, $\mathcal{N}$-estremo, eccetera, si può procedere in modo inverso, ossia: partire dal δ-omomorfismo τ, ed utilizzare come definizione le proprietà (b) e (c) del teorema ora

([22]) Cfr. [2] p. 132.

dimostrato; il procedimento sarebbe stato molto più semplice, ma abbiamo preferito una esposizione *diretta*, per mostrare il significato di questi concetti nell'ambito della teoria *duale* di quella algebrica.

In questa trattazione si mette in evidenza *in che modo* una classe d'equivalenza (mod $\mathcal{N}$) di funzioni $\mathcal{R}$-misurabili possa esser concepita come una *effettiva funzione*, dotata d'insieme di definizione e di valori univocamente determinati per ciascun elemento di detto insieme, al pari d'ogni funzione degna di questo nome.

Ciò va confrontato col risultato del n. 2, secondo cui il reticolo $\mathcal{R}/\mathcal{N}$ (i cui somi sono pure classi d'equivalenza) è isomorfo al reticolo $\omega_{\mathcal{N}} \mathcal{R}$, che è un anello d'insiemi.

Possiamo concludere questa parte della presente nota, riportando il seguente teorema di CARATHÉODORY (23):

II. *Dati due reticoli di* CARATHÉODORY $\mathcal{R}$ *ed* $\mathcal{S}$, *ed un* δ*-omomorfismo* τ *del primo sul secondo, detta* M *una misura definita su* $\mathcal{R}$, *ed* f *una funzione d'ultrafiltro* $\mathcal{R}$*-misurabile ed* M*-sommabile sul soma* R_0 *di* $\mathcal{R}$, *si ha*

$$\tau \left[\int_R f(\mathfrak{u})\, dM \right] = \int_{\tau R} \tau f\, d\, (\tau\, M)\,,$$

per ogni soma $R \sqsubseteq R_0$.

9. **Nozione di derivata, in un caso particolare notevole.** In questo numero e nei successivi, supporremo assegnato una volta per tutte un reticolo di CARATHÉODORY $\mathcal{R}$, e due misure (assolute) $F(R)$ ed $M(R)$ (24); ci proponiamo di definire la derivata della misura F rispetto alla misura M, e di studiarne le proprietà fondamentali.

Cominciamo dal caso particolarmente significativo, che la misura M sia (secondo la nomenclatura di CARATHÉODORY) una misura *ridotta*, ossia eguale a zero *soltanto* sul soma O; vedremo poi che il caso generale può esser sempre ricondotto a questo.

Volendo introdurre la nozione di derivata sulla falsariga della definizione elementare, dovremmo:

---

(23) Cfr. [2], p. 197.

(24) Rifacendoci a quanto detto nella nota (17), dal punto di vista della teoria di CARATHÉODORY le due misure F e M hanno uno stesso campo di misurabilità e finitezza; ciò equivale a supporre che esse siano «della stessa specie = gleichartig» secondo la nomenclatura di CARATHÉODORY: ma è precisamente per tali funzioni che in [2] viene dimostrato il teorema di HAHN ed introdotto il concetto di «differenziale astratto».

— prendere un soma (non nullo) R del reticolo $\mathcal{R}$;

— considerare il « rapporto incrementale » $F(R)/M(R)$;

— effettuare un passaggio al limite «contraendo R in sè quanto è più possibile».

Il significato dei primi due punti è chiaro; al terzo punto l'espressione intuitiva « contrarre R in sè » si precisa in quest'altra, rigorosa: « far variare R in un filtro proprio di somi » mentre la clausola « quanto più è possibile » si traduce nella condizione che il detto filtro proprio sia *massimale*, ossia un *ultrafiltro*; queste considerazioni suggeriscono la definizione seguente:

Dato un ultrafiltro $\mathbf{u}$ *di somi del reticolo* $\mathcal{R}$, *il limite*

$$\lim_{R \to \mathbf{u}} \frac{F\,(R)}{M\,(R)} \quad (^{19}) \tag{9.1}$$

si dice, se esiste, derivata della misura F *rispetto alla misura* M, *sull'ultrafiltro* $\mathbf{u}$.

Si tratta ora di far vedere che tale definizione è accettabile, ed a tal fine dimostreremo che:

a) il limite (9.1) esiste per ogni ultrafiltro $\mathbf{u}$ del reticolo $\mathcal{R}$;

b) la funzione d'ultrafiltro (9.1) gode delle proprietà che si sogliono considerare fondamentali per una derivata;

c) infine, che la conoscenza della funzione d'ultrafiltro (9.1) equivale a quella del *differenziale astratto* di CARATHÉODORY ([25]), ed equivale anche (nel caso considerato dalla teoria classica) alla conoscenza della derivata nel senso di LEBESGUE-VITALI, o nel senso di G. FICHERA ([26]).

Il punto (c) verrà trattato al n. 14, assieme al caso generale; il punto (b) verrà trattato al n. 10, il punto (a) immediatamente.

I. *Se* M *è una misura ridotta, allora il limite* (9.1) *esiste comunque si prenda l'ultrafiltro* $\mathbf{u}$; in altre parole, *la misura* F *è derivabile rispetto alla misura* M *su tutto l'insieme* $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}$.

1) Fissiamo un ultrafiltro $\mathbf{u}$ ed un soma $R_0 \in \mathbf{u}$. Per il teorema di HAHN ([27]), ad ogni numero positivo y si può associare un soma $R\,(y) \sqsubseteq R_0$ tale da aversi

$$\begin{cases} F\,(R) - yM\,(R) \leqq 0 & \text{per} \quad R \sqsubseteq R\,(y)\,, \\ F\,(R) - yM\,(R) \geqq 0 & \text{per} \quad R \sqsubseteq R_0 - R\,(y)\,, \end{cases} \qquad R \in \mathcal{R}, \tag{9.2}$$

([25]) Cfr. [2], p. 191 e sgg.

([26]) Cfr. [3], p. 395 e sgg.

([27]) Cfr. [2], p. 274, teor. 2.

ovverosia

$$\left\{\begin{array}{lll} F(R)/M(R) \leqq y & \text{per} & O \neq R \sqsubseteq R(y)\,, \\ F(R)/M(R) \geqq y & \text{per} & O \neq R \sqsubseteq R_0 - R(y)\,, \end{array}\right. \qquad R \in \mathcal{R}. \tag{9.3}$$

2) Osserviamo che, presi a piacere due numeri positivi y' e y'', il primo *minore* del secondo, dev'essere $R(y') \sqsubseteq R(y'')$; difatti, ponendo $R^* = R(y') - R(y'')$ avremo ad un tempo $R^* \sqsubseteq R(y')$ e $R^* \sqsubseteq R_0 - R(y'')$, e quindi, per le (9.2), $F(R^*) - y'M(R^*) \leqq 0$, $F(R^*) - y''M(R^*) \geqq 0$, da cui, sottraendo membro a membro, $(y'' - y')\,M(R^*) \leqq 0$, e quindi, successivamente, $M(R^*) = 0$, $R^* = O$, $R(y') \sqsubseteq R(y'')$, c. d. d.

3) Poniamo ora

$$f(\mathbf{u}) = \inf\{y : R(y) \in \mathbf{u}\}\,, \tag{9.4}$$

e per la monotonia di $R(y)$ dimostrata in (2) avremo

$$\left\{\begin{array}{ll} R(y) \in \mathbf{u} & \text{per} \quad f(\mathbf{u}) < y\,, \\ R(y) \notin \mathbf{u}\,, \quad \text{e quindi} \quad R_0 - R(y) \in \mathbf{u}\,, & \text{per} \quad f(\mathbf{u}) > y\,; \end{array}\right. \tag{9.5}$$

le (9.5) e le (9.3) prese assieme significano precisamente

$$\lim_{R \to \mathbf{u}} \frac{F(R)}{M(R)} = f(\mathbf{u}). \tag{9.6}$$

Ciò dimostra il teorema. Inoltre:

II. *Se M è una misura ridotta, la derivata della misura F rispetto alla misura M è una funzione d'ultrafiltro $\mathcal{R}$-misurabile su un soma qualsiasi (non nullo) del reticolo $\mathcal{R}$.*

Sia R_0 un soma arbitrario, non nullo, di $\mathcal{R}$; riprendendo le notazioni usate nella dimostrazione del teorema precedente, e ponendo $R(y) = O$ per $y \leqq 0$, $\{R(y)\}$ risulta una scala di somi per la funzione d'ultrafiltro $f(\mathbf{u})$, definita dalla (9.4) su tutto il soma R_0; in virtù della (9.6) — pure valida per ogni ultrafiltro $\mathbf{u}$ cui R_0 appartenga — possiamo concludere che la derivata di F rispetto ad M è $\mathcal{R}$-misurabile sul soma R_0, c. d. d.

III. *Se M è una misura ridotta, qualunque soma non nullo del reticolo $\mathcal{R}$ è la congiunzione d'una successione di somi, su ciascuno dei quali è limitata la derivata della misura F rispetto alla misura M.*

Sia R_0 un soma non nullo del reticolo $\mathcal{R}$, e $R(y)$ e $f(\mathbf{u})$ abbiano lo stesso significato loro attribuito nella dimostrazione del teor. I; poniamo

$\overline{R} = R_0 - \bigsqcup_{k=1}^{\infty} R(k)$. Ma abbiamo $\overline{R} \sqsubseteq R_0 - R(k)$ e quindi: $F(\overline{R}) \geqq kM(\overline{R})$ per $k = 1, 2, 3, \ldots$, da cui successivamente si deduce $M(\overline{R}) = 0$, $\overline{R} = O$, $R_0 = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} R(k)$; confrontando poi la (9.4) con la (9.6) risulta

$$\lim_{R \to \mathbf{u}} \frac{F(R)}{M(R)} \leqq k \quad \text{per} \quad \mathbf{u} \in \omega R(k), \quad \text{c.d.d.}$$

Conformemente all'uso, porremo infine $\left(\dfrac{dF}{dM}\right)_{\mathbf{u}} = \lim\limits_{R \to \mathbf{u}} \dfrac{F(R)}{M(R)}$, per $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_{\mathfrak{R}}$.

10. **Proprietà della derivazione rispetto ad una misura ridotta.** Veniamo ora ad osservare in breve le proprietà fondamentali della operazione di derivazione introdotta al n. 9; è evidente in primo luogo che

I. *L'operazione di derivazione di una misura F rispetto ad una misura ridotta M, è distributiva nei confronti della misura F.*

Questo teorema illustra la dipendenza della derivata dalla misura *che si deriva*; la dipendenza dalla misura *rispetto a cui si deriva* è illustrata dal seguente, pure ovvio:

II. *Se M ed M' sono due misure ridotte sul reticolo $\mathcal{R}$, si ha*

$$\left(\frac{dF}{dM}\right)_{\mathbf{u}} = \left(\frac{dF}{dM'}\right)_{\mathbf{u}} \cdot \left(\frac{dM'}{dM}\right)_{\mathbf{u}}$$

per ogni ultrafiltro $\mathbf{u}$ *su cui il prodotto a secondo membro abbia senso.*

Inoltre, qualunque soma non nullo è la congiunzione di una successione di somi, su ciascuno dei quali il prodotto a secondo membro ha senso.

Sussiste poi il teorema della media:

III. *Supposta M una misura ridotta, per ogni soma (non nullo) R_0 di $\mathcal{R}$ sussiste la limitazione*

$$(10.1) \qquad M(R_0) \cdot \inf_{\mathbf{u}} \left\{ \left(\frac{dF}{dM}\right)_{\mathbf{u}} : \mathbf{u} \in \omega R_0 \right\} \leqq F(R_0) \leqq M(R_0) \cdot \sup_{\mathbf{u}} \left\{ \left(\frac{dF}{dM}\right)_{\mathbf{u}} : \mathbf{u} \in \omega R_0 \right\}.$$

Anche questo è conseguenza delle (9.2) e (9.5). Riprendendo le notazioni usate nella dimostrazione del teorema (9.I), fissato il soma R_0, se per ogni $\mathbf{u} \in \omega R_0$ si ha $f(\mathbf{u}) < y$, dalla (9.5) segue $\omega R_0 \sqsubseteq \omega R(y)$ ossia $R_0 \sqsubseteq R(y)$ [28], e dalle (9.2) si deduce $F(R_0) \leqq yM(R_0)$; per l'arbitrarietà di y e per la

---

[28] Teorema 2.IV, ed osservazione in fine del n. 2.

(9.6) si ricava la metà destra della (10.1). In modo analogo si dimostra la metà sinistra.

Dal teorema della media segue subito (29)

IV. *Supposta M una misura ridotta, si ha*

$$F(R) = \int_R \frac{dF}{dM}\, dM$$

per ogni soma R di $\mathcal{R}$; quindi $\frac{dF}{dM}$ è una funzione M-sommabile su ciascun soma di $\mathcal{R}$.

Infine abbiamo il teorema seguente, che assieme al IV permette di considerare la derivazione come « inversa dell'integrazione » :

V. *Se M è una misura ridotta e g è una funzione d'ultrafiltro $\mathcal{R}$-misurabile, non negativa ed M-sommabile su ogni soma di $\mathcal{R}$, posto*

$$G(R) = \int_R g(\mathbf{u})\, dM \qquad per \qquad R \in \mathcal{R},$$

$G(R)$ riesce una misura assoluta su $\mathcal{R}$, e si avrà $\frac{dG}{dM} = g$.

La prima parte della tesi è banale; la seconda parte si deduce dalla proprietà di media dell'integrale (29)

$$M(R) \cdot \inf_{\mathbf{u}} \{g(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \omega R\} \leqq G(R) \leqq M(R) \cdot \sup_{\mathbf{u}} \{g(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \omega R\}$$

e congiuntamente dalla proprietà di continuità (30) delle funzioni $\mathcal{R}$-misurabili.

Combinando i due teoremi II e IV si ha

VI. *Se M ed M' sono due misure ridotte nel reticolo $\mathcal{R}$, si ha*

$$F(R) = \int_R \frac{dF}{dM'} \frac{dM'}{dM} \cdot dM, \qquad \text{per ogni} \qquad R \in \mathcal{R}.$$

Il teorema è banale per $R = O$, diversamente R va decomposto nella congiunzione di più somi, su ciascuno dei quali sia $\frac{dF}{dM} = \frac{dF}{dM'} \cdot \frac{dM'}{dM}$ (teor. II), ed a ciascuno di questi va applicato il teor. IV.

---

(29) Cfr. [2], pag. 177, teorema 2.

(30) Cfr. teorema 5.I.

In conclusione, il caso di cui M è una misura ridotta è del tutto banale, potendosi trattare quasi con le stesse parole con cui si tratta la derivazione delle funzioni di dominio in un corso elementare di Analisi.

11. **Una definizione indiretta di derivata, nel senso generale.** È spontanea, dopo quanto s'è detto, l'idea di trattare il caso generale riducendolo a quello studiato nei due nn. 9 e 10, nel modo seguente. Chiamiamo $\mathcal{N}$ l'insieme dei somi di $\mathcal{R}$ sui quali la misura M è nulla, ossia poniamo

$$\mathcal{N} = \{R : M(R) = 0\,,\ R \in \mathcal{R}\},$$

supponendo naturalmente che la misura M *non* sia nulla identicamente, che sia cioè $\mathcal{N} \neq \mathcal{R}$; com'è ovvio, $\mathcal{N}$ è un σ-ideale del reticolo $\mathcal{R}$.

Consideriamo, accanto al reticolo $\mathcal{R}$ ed alle misure F ed M, il reticolo quoziente $\mathcal{R}/\mathcal{N} = \varrho_{\mathcal{N}}\mathcal{R}$ assieme alle corrispondenti misure $\varrho_{\mathcal{N}}F$ e $\varrho_{\mathcal{N}}M$; sul reticolo $\mathcal{R}/\mathcal{N}$ la misura $\varrho_{\mathcal{N}}M$ è una misura ridotta ([31]), e quindi risulta ben definita la derivata $d\,(\varrho_{\mathcal{N}}F)/d\,(\varrho_{\mathcal{N}}M)$, funzione d'ultrafiltro $\mathcal{R}/\mathcal{N}$-misurabile su qualunque soma $\varrho_{\mathcal{N}}R \in \mathcal{R}/\mathcal{N}$.

È naturale ora chiamare *derivata* (impropria) *della misura F rispetto alla misura M* qualunque funzione d'ultrafiltro $f(\mathrm{u})$, $\mathcal{R}$-misurabile su un soma $R_0 \in \mathcal{R}$, tale che sia

$$\varrho_{\mathcal{N}}f = \frac{d\,(\varrho_{\mathcal{N}}F)}{d\,(\varrho_{\mathcal{N}}M)} \qquad \text{sul soma} \quad \varrho_{\mathcal{N}}R_0\,. \tag{11.1}$$

In luogo della (11.1) scriveremo anche, *con lo stesso significato,*

$$f = \frac{dF}{dM}\ \text{(}^{32}\text{)} \qquad \text{sul soma} \qquad R_0\,. \tag{11.2}$$

Dai risultati dei nn. precedenti si deducono i seguenti teoremi.

I. *Se f è una derivata della misura F rispetto alla misura M, lo è anche qualunque funzione d'ultrafiltro $\mathcal{N}$-equivalente ad f.*

Segue dalla (11.1), dal teorema (8. I, b) e dal teorema (1. I).

II. *Se f è una derivata della misura F rispetto alla misura M, allora f è anche una derivata (rispetto alla misura M) di qualunque misura $\mathcal{N}$-equivalente alla misura F.*

([31]) Cfr. [2], pag. 162, n. 147.

([32]) Quindi la scrittura dF/dM indicherà: (a) una funzione d'ultrafiltro univocamente individuata (la derivata propria), sull'insieme $\mathbf{U}^{\mathcal{N}}_{\mathcal{R}}$; (b) una classe di funzioni equivalenti (le derivate improprie) su ciascun soma R_0.

Segue dalla (11.1), dal teorema (4. II) e dal teorema (1 .I).

III. *Date due misure assolute F_1 ed F_2, dati due coefficienti non negativi c_1 e c_2,*

$$\textit{se è} \quad f_1 = \frac{dF_1}{dM},\; f_2 = \frac{dF_2}{dM} \qquad \textit{su un soma} \quad R_0 \in \mathcal{R},$$

$$\textit{allora è anche} \quad c_1 f_1 + c_2 f_2 = \frac{d}{dM}(c_1 F_1 + c_2 F_2) \quad \textit{sul soma} \quad R_0.$$

Segue dalla (11.1) e dai teoremi (10. I), (8. I, a) e (1. I).

IV. *Sussiste la proprietà di media seguente, per ogni soma $R \in \mathcal{R} - \mathcal{N}$,*

$$M(R) \cdot \mathcal{N}\text{-inf}\left[\frac{dF}{dM} : R\right] \leqq \alpha_{\mathcal{H}} F(R) \leqq M(R) \cdot \mathcal{N}\text{-sup}\left[\frac{dF}{dM} : R\right].$$

Segue dalla (11.1), dalla (4.3) e dai teoremi (10. III), (8. I, c) e (1. I).

V. *Se è $f = \dfrac{dF}{dM}$ su un soma (non nullo) R_0,*

$$\textit{allora è} \quad F(R) = \beta_{\mathcal{H}} F(R) + \int_R f dM, \quad \textit{per ogni} \quad R \sqsubseteq R_0.$$

Pertanto, affinchè la misura F sia $\mathcal{N}$-singolare, occorre e basta che sia $\dfrac{dF}{dM} \equiv 0$, affinchè la misura F sia $\mathcal{N}$-assolutamente continua, occorre e basta che sia

$$F(R) = \int_R \frac{dF}{dM} dM, \quad \textit{per ogni soma} \quad R \in \mathcal{R}.$$

Segue dalla (11.1), dalla (4.3) e dai teoremi (10. IV), (9. II) e (1. I).

VI. *Se g è una funzione d'ultrafiltro $\mathcal{R}$-misurabile, non negativa, ed M-sommabile sul soma R_0, posto*

$$G(R) = \int_R g dM \qquad \text{per} \qquad R \sqsubseteq R_0,$$

si ha

$$g = \frac{dG}{dM} \qquad \text{su} \qquad R_0.$$

Segue dalla (11.1), dalla $\mathcal{N}$-assoluta continuità di $G(R)$, dalla (4.3) e dai teoremi (10.V), (9. II) e (1. I).

Vedremo più avanti (n. 13) in che modo si generalizza il teorema (10. II), basandoci sulla definizione diretta di derivata.

OSSERVAZIONE. Naturalmente, invece di considerare il reticolo $\mathcal{R}/\mathcal{N}$ e le misure $\varrho_{\mathcal{N}} F$ e $\varrho_{\mathcal{N}} M$, ponendo la (11.2) come equivalente della (11.1), si sarebbe potuto considerare il reticolo $\omega_{\mathcal{N}} \mathcal{R}$ e le misure $\omega_{\mathcal{N}} F$ e $\omega_{\mathcal{N}} M$, ponendo $f = \dfrac{dF}{dM}$ come equivalente di $\omega_{\mathcal{N}} f = \dfrac{d(\omega_{\mathcal{N}} F)}{d(\omega_{\mathcal{N}} M)}$. Questa seconda via, che in astratto coincide con la prima, presenta il vantaggio d'essere esprimibile in modo suggestivo, anche se impreciso: *f è la derivata (impropria) di F rispetto ad M, quando la traccia di f su $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{N}}$ è la derivata (propria) rispetto ad M della parte $\mathcal{N}$-assolutamente continua di F.*

12. **La definizione diretta di derivata, nel caso generale.** Il procedimento indicato al n. precedente è senza dubbio artificioso, ed escogitato a bella posta in vista dei risultati che ne conseguono; è perciò conveniente dare una definizione diretta di derivata, che sia la naturale estensione di quella data al n. 9 in un caso particolare. Riprendendo il discorso con cui s'è iniziato il n. 9, per introdurre direttamente la nozione di derivata della misura F rispetto alla misura M (in generale non ridotta), dovremmo:

— prendere un soma R, su cui sia $M(R) \neq 0$;

— considerare il «rapporto incrementale» $F(R)/M(R)$;

— effettuare un passaggio al limite, «contraendo R in sé quanto più è possibile».

Questo discorso (analogamente a quanto s'è visto al n. 9) significa, che il passaggio al limite va fatto al variare del soma R su un ultrafiltro disgiunto dal σ-ideale $\mathcal{N}$, e quindi suggerisce la definizione seguente:

Dato un ultrafiltro $\mathbf{u}$ *della totalità* $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{N}}$, *il limite*

$$\lim_{R \to \mathbf{u}} \frac{F(R)}{M(R)} \tag{12.1}$$

si dice, se esiste, derivata (propria) della misura F rispetto alla misura M, sull'ultrafiltro $\mathbf{u}$.

Data un soma R_0 (non nullo), verrà poi detta derivata (impropria) della misura F rispetto alla misura M, sul soma R_0, qualunque funzione d'ultrafiltro che sia $\mathcal{R}$-misurabile su R_0, e coincida con la (12.1) *su ogni ultrafiltro della totalità $\omega_{\mathcal{N}} R_0$.*

Si tratta ora di far vedere che questa definizione è accettabile, e a tal fine dimostreremo che

a) il limite (12.1) esiste per ogni ultrafiltro $\mathbf{u}$ della totalità $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{N}}$;

b) la funzione d'ultrafiltro definita dalla (12.1) verifica la condizione espressa dal teorema (6. II), relativamente a qualunque soma R_0;

c) le funzioni sopra dette «derivate improprie» godono delle proprietà che si sogliono considerare fondamentali per una derivata;

d) la conoscenza della funzione d'ultrafiltro definita dalla (12.1) equivale alla conoscenza del differenziale astratto di CARATHÉODORY, od anche (nel caso considerato dalla teoria classica) a quella della derivata nel senso di LEBESGUE-VITALI o nel senso di G. FICHERA.

Cominciamo col teorema di derivabilità.

I. *Il limite* (12.1) *esiste per ogni ultrafiltro* $\mathbf{u}$ *della totalità* $\mathbf{U}^{\mathcal{N}}_{\mathfrak{R}}$; in altre parole: *la misura F è derivabile rispetto alla misura M in tutto l'insieme* $\mathbf{U}^{\mathcal{N}}_{\mathfrak{R}}$.

Volendo dare di ciò una dimostrazione diretta, senza far uso di nozioni relative ai δ-omomorfismi, basta riprendere la dimostrazione del teorema (9.I), sostituendo quanto segue, in luogo del capoverso (2).

2′) Osserviamo che in generale la condizione

$$(12.2) \qquad \begin{cases} F(R) - yM(R) \leqq 0 & \text{per} \quad R \sqsubseteq R(y), \\ F(R) - yM(R) \geqq 0 & \text{per} \quad R \sqsubseteq R_0 - R(y), \end{cases} \qquad R \in \mathcal{R},$$

non individua univocamente il soma $R(y)$; tuttavia è sempre possibile scegliere una scala di somi $\{R(y)\}$ in guisa tale, che accanto alla (12.2) sia verificata anche la condizione di monotonia

$$(12.3) \qquad y' < y'' \quad \textit{implica} \quad R(y') \sqsubseteq R(y'').$$

Per dimostrarlo, prendiamo le mosse da *una scala di somi* $\{R(y)\}$ *verificante le* (12.2), e poniamo

$$(12.4') \qquad \overline{R}(0) = O, \quad \overline{R}(k+1) = \overline{R}(k) \sqcup R(k+1),$$
successivamente per $k = 0, 1, 2, \ldots$;

$$(12.4'') \quad \overline{R}\left(k + \frac{2h+1}{2^{n+1}}\right) = \left[\overline{R}\left(k + \frac{h}{2^n}\right) \sqcup R\left(k + \frac{2h+1}{2^{n+1}}\right)\right] \sqcap \overline{R}\left(k + \frac{h+1}{2^n}\right),$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots; h = 0, 1, \ldots, 2^n - 1),$$
successivamente per $n = 0, 1, 2, \ldots$;

$$(12.4''') \quad \overline{R}(y) = \bigsqcap_{h,k,n}^{y < k + h \cdot 2^{-n}} \overline{R}(k + h \cdot 2^{-n}), \quad (n,k = 0,1,2,\ldots; h = 0,1,2,\ldots,2^n - 1),$$
per ogni numero reale y che non sia una frazione diadica.

In questa maniera si definisce (per ricorrenza) una scala di somi $\{\bar{R}(y)\}$ che certo verifica la (12.3); dimostriamo ch'essa verifica anche le (12.2), per induzione.

i) La condizione

$$(12.5') \qquad \begin{cases} F(R) - kM(R) \leqq 0 & \text{per} \quad R \sqsubseteq \bar{R}(k)\,, \\ F(R) - kM(R) \geqq 0 & \text{per} \quad R \sqsubseteq R_0 - \bar{R}(k)\,, \end{cases} \qquad R \in \mathcal{R}\,,$$

è certo verificata per $k = 0$; supponiamola verificata per $k = 1, 2, \ldots, n$. Dato un soma $R \sqsubseteq \bar{R}(n+1)$, posto $R' = R \sqcap \bar{R}(n)$ e $R'' = R - \bar{R}(n)$, avremo $R = R' \sqcup R''$, $R' \sqcap R'' = O$, $R' \sqsubseteq \bar{R}(n)$, $R'' \sqsubseteq R(n+1)$, e quindi

$$F(R) - (n+1) \cdot M(R) \leqq [F(R') - n \cdot M(R')] + [F(R'') - (n+1)\, M(R'')] \leqq 0,$$

in virtù delle (12.2); per analoga ragione, $R \sqsubseteq R_0 - \bar{R}(n+1)$ implica $R \sqsubseteq R_0 - R(n+1)$, e quindi

$$F(R) - (n+1) \cdot M(R) \geqq 0\,.$$

Si conclude che la (12.5′) è verificata anche per $k = n+1$, e quindi per qualunque valore intero non negativo di k.

ii) La condizione

$$(12.5'') \begin{cases} F(R) - (k + h \cdot 2^{-s}) \cdot M(R) \leqq 0 \text{ per } R \sqsubseteq \bar{R}(k + h \cdot 2^{-n}), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (k = 0, 1, \ldots;\ h = 0, 1, \ldots, 2^s - 1) \\ F(R) - (k + h \cdot 2^{-s}) \cdot M(R) \geqq 0 \text{ per } R \sqsubseteq \bar{R}_0 - R(k + h \cdot 2^{-n}), \end{cases}$$

si riduce alla (12.5′) ed è quindi soddisfatta, per $s = 0$; supponiamo che sia verificata per $s = 0, 1, 2, \ldots, n$. Dato un soma $R \sqsubseteq \bar{R}\left(k + \dfrac{2h+1}{2^{n+1}}\right)$, posto $R' = R \sqcap \bar{R}(k + h2^{-n})$ e $R'' = R - \bar{R}(k + h2^{-n})$, avremo $R = R' \sqcup R''$, $R' \sqcap R'' = O$, $R' \sqsubseteq \bar{R}(k + h2^{-n})$, $R'' \sqsubseteq R\left(k + \dfrac{2h+1}{2^{n+1}}\right)$, e quindi, con lo stesso argomento usato sopra

$$F(R) - \left(k + \frac{2h+1}{2^{n+1}}\right) \cdot M(R) \leqq 0;$$

per analoga ragione, $R \sqsubseteq R_0 - \bar{R}\left(k + \dfrac{2h+1}{2^{n+1}}\right)$ implica l'esistenza di due somi R' ed R'' con $R = R' \sqcup R''$, $R' \sqcap R'' = O$, $R' \sqsubseteq R_0 - \bar{R}\left(k + \dfrac{h+1}{2^n}\right)$,

$R'' \sqsubseteq R_0 - R\left(k + \frac{2h+1}{2^{n+1}}\right)$, e quindi

$$F(R) - \left(k + \frac{2h+1}{2^{n+1}}\right) \cdot M(R) \geqq 0 .$$

Si conclude che la (12.5″) è verificata anche per $s = n + 1$, e quindi per qualunque valore intero non negativo di s.

iii) Nel caso poi che y sia un numero positivo non del tipo diadico $k + h \cdot 2^{-n}$, dalla (12.4) abbiamo che la $R \sqsubseteq \bar{R}(y)$ implica $F(R) - r \cdot M(R) \leqq 0$ per ogni numero diadico r maggiore di y, e quindi anche

$$F(R) - y \cdot M(R) \leqq 0 ; \tag{12.5‴}$$

analogamente, se è $R \sqsubseteq R_0 - \bar{R}(y)$, esiste una successione $\{R_r\}$ di somi mutuamente disgiunti, verificanti le condizioni $R = \bigsqcup_r^{y<r} R_r$, $R_r \sqsubseteq R_0 - \bar{R}(r)$, e quindi $F(R_r) - y \cdot M(R_r) \geqq F(R_r) - r\, M(R_r) \geqq 0$ (r numero diadico maggiore di y): di qui, sommando membro a membro rispetto ad r,

$$F(R) - y\, M(R) \geqq 0 \tag{12.5^{\text{IV}}}$$

e la tesi è completamente dimostrata.

Con la sola variante di sostituire al capoverso (2) quanto ora detto, la dimostrazione del teorema (9.I) serve anche a provare il teorema (12.I).

È ora facile vedere che

II. *Dato a piacere un soma R_0 non nullo, v'è in R_0 una scala di somi $\{R(y)\}$ tali da aversi $R(y) \in \mathbf{u}$ per $\lim\limits_{R \to \mathbf{u}} \frac{F(R)}{M(R)} < y$, e $R(y) \notin \mathbf{u}$ per $\lim\limits_{R \to \mathbf{u}} \frac{F(R)}{M(R)} > y$, comunque si prenda l'ultrafiltro $\mathbf{u}$ nell'insieme $\omega_{\mathcal{N}} R_0$.*

La tesi è banale nel caso che sia $R_0 \in \mathcal{N}$, perchè in tal caso R_0 non appartiene a nessuno degli ultrafiltri della totalità $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{N}}$. Nel caso che sia $R_0 \notin \mathcal{N}$ il capoverso (2′) della dimostrazione del teorema precedente costruisce precisamente una scala di somi $\{\bar{R}(y)\}$ che verifica la condizione enunciata.

Dunque la funzione d'ultrafiltro (12.1) è definita su tutto l'insieme $\mathbf{U}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{N}}$, ed in virtù del teorema precedente verifica la condizione del teorema (6.II) relativamente a qualunque soma R_0; possiamo concludere che dato un soma non nullo R_0, su di esso si può definire una funzione $\mathcal{R}$-misurabile d'ultrafiltro avente come traccia su $\omega_{\mathcal{N}} R_0$ precisamente la funzione (12.1).

Ciò dimostra che la definizione data in questo numero, di derivata propria e di derivata impropria, non è vuota. Scrivendo

$$f = \frac{dF}{dM} \quad \text{su} \quad R_0 ,$$

intenderemo dire che la funzione d'ultrafiltro f è una derivata impropria della misura F rispetto alla misura M, sul soma R_0.

III. *Ogni soma non nullo R_0 è la congiunzione di una successione di somi $\{R_k\}_{k=1}^{\infty}$, tali che*

$$R_1 \in \mathcal{N}, \qquad \frac{dF}{dM} \leqq k \qquad su \quad R_k , \qquad per \quad k = 2, 3, 4, \ldots .$$

Sia $\{R(y)\}$ une scala di somi verificante le condizioni (12.2) e (12.3), e poniamo

$$R_1 = R_0 - \bigsqcup_{k=2}^{\infty} R_k , \qquad R_k = R(k) \qquad \text{per} \quad k = 2, 3, 4, \ldots .$$

Avremo $R_1 \sqsubseteq R_0 - R_k$ e quindi $F(R_1) \geqq kM(R_1)$ per $k = 2, 3, 4, \ldots$, da cui successivamente si deduce $M(R_1) = 0$, $R_1 \in \mathcal{N}$; inoltre si ha

$$\frac{dF}{dM} \leqq k \qquad \text{su} \quad R_k = R(y) \qquad \text{per} \quad k = 2, 3, 4, \ldots ,$$

per il modo con cui si definisce la *derivata impropria*.

13. **Proprietà della derivazione tra misure, nel caso generale.** Dimostriamo innanzi tutto che la definizione di derivata (propria od impropria) data al n. precedente equivale esattamente alla definizione indiretta del n. 11 per il teorema (12.II), basterà a questo fine dimostrare che

I. *Per ogni ultrafiltro* $\mathbf{u}$ *della totalità* $\mathbf{U}_{\mathfrak{R}}^{\mathcal{H}}$, *si ha*

$$\lim_{R \to \mathbf{u}} \frac{F(R)}{M(R)} = \lim_{\varrho_{\mathcal{H}} R \to \varrho_{\mathcal{H}} \mathbf{u}} \frac{\varrho_{\mathcal{H}} F(\varrho_{\mathcal{H}} R)}{\varrho_{\mathcal{H}} M(\varrho_{\mathcal{H}} R)} .$$

In virtù della (4.3) e dei teoremi (2.II) e (1.I), abbiamo

$$\lim_{\varrho_{\mathcal{H}} R \to \varrho_{\mathcal{H}} \mathbf{u}} \frac{\varrho_{\mathcal{H}} F(\varrho_{\mathcal{H}} R)}{\varrho_{\mathcal{H}} M(\varrho_{\mathcal{H}} R)} = \lim_{R \to \mathbf{u}} \frac{\alpha_{\mathcal{H}} F(R)}{M(R)} ,$$

e quindi basterà provare che è

$$\lim_{R \to \mathbf{u}} \frac{F(R)}{M(R)} = \lim_{R \to \mathbf{u}} \frac{\alpha_{\mathcal{H}}\, F(R)}{M(R)}.$$

Prendiamo ad arbitrio un soma R, appartenente all'ultrafiltro $\mathbf{u}$; in corrispondenza si può prendere un altro soma $\bar{R}$, verificante le condizioni $\bar{R} \sqsubseteq R$, $R - \bar{R} \in \mathcal{N}$, $F(\bar{R}) = \alpha_{\mathcal{H}}\, F(\bar{R})$, e di conseguenza avremo

$$\frac{F(\bar{R})}{M(\bar{R})} = \frac{\alpha_{\mathcal{H}} F(\bar{R})}{M(\bar{R})}, \quad \bar{R} \in \mathbf{u},$$

il che, per la già nota convergenza delle due variabili $F(R)/M(R)$ e $\alpha_{\mathcal{H}}\, F(R)/M(R)$ sull'ultrafiltro $\mathbf{u}$, dimostra appunto la tesi. Il soma $\bar{R}$ può costruirsi in questo modo: per ogni intero positivo k, esiste un soma R_k tale che $R - R_k \in \mathcal{N}$, $F(R_k) < \alpha_{\mathcal{H}}\, F(R) + \dfrac{1}{k}$; si ponga allora $\bar{R} = R \sqcap \bigsqcap_{k=1}^{\infty} R_k$, e per la σ-additività di F avremo esattamente $F(\bar{R}) = \alpha_{\mathcal{H}}\, F(R)$, mentre sarà $R - \bar{R} = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (R - R_k) \in \mathcal{N}$, e quindi $\alpha_{\mathcal{H}}\, F(R) = \alpha_{\mathcal{H}}\, F(\bar{R})$.

Una volta constatata l'equivalenza della definizione « diretta » con la definizione « indiretta » di derivata, i teoremi del n. 11 sono tutti dimostrati, in quanto conseguenti alla definizione « indiretta »; naturalmente, se ne può dare una dimostrazione diretta, senza usare il concetto di δ-omomorfismo, modificando in modo opportuno le dimostrazioni del n. 10. A titolo d'esempio riporto la dimostrazione del teorema della media (11.IV).

1) Poniamo per brevità $f = \dfrac{dF}{dM}$, e prendiamo un soma R_0 non appartenente al σ-ideale $\mathcal{N}$; sia $\{R(y)\}$ la scala dei somi di cui all'enunciato del teorema (12.II). Detto y un numero arbitrariamente maggiore di $\sup_{\mathbf{u}} \{ f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \omega_{\mathcal{H}}\, R_0 \}$, per ogni ultrafiltro $\mathbf{u} \in \omega_{\mathcal{H}}\, R_0$ avremo $R(y) \in \mathbf{u}$ e quindi $R_0 - R(y) \notin \mathbf{u}$; se fosse $R_0 - R(y) \notin \mathcal{N}$, per il teorema (2.III) vi sarebbe un ultrafiltro $\mathbf{u} \in \mathbf{U}^{\mathcal{H}}_{\mathfrak{R}}$ contenente $R_0 - R(y)$ come elemento, e quindi contenente R_0 ma non $R(y)$, il che è assurdo: dunque è $R_0 - R(y) \in \mathcal{N}$. Da ciò si deduce

$$\alpha_{\mathcal{N}}\, F(R_0) \leqq F[R(y)] \leqq y\, M[R(y)] = y\, M(R_0),$$

e quindi, per l'arbitrarietà di y,

$$\alpha_{\mathcal{H}}\, F(R_0) \leqq M(R_0) \cdot \sup_{\mathbf{u}} \{ f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \omega_{\mathcal{H}}\, R_0 \}.$$

2) In modo analogo, se y è un numero arbitrariamente minore di $\inf_{\mathbf{u}} \{f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \omega_{\mathcal{K}} R_0\}$, ed R' è un soma pure arbitrario, verificante la

$$(R' - R_0) \sqcup (R_0 - R') \in \mathcal{N}, \tag{13.1}$$

avremo successivamente, per ogni ultrafiltro $\mathbf{u} \in \omega_{\mathcal{K}} R_0$, $y < f(\mathbf{u})$, $R(y) \notin \mathbf{u}$, $R' \sqcap R(y) \notin \mathbf{u}$, e quindi $R' \sqcap R(y) \in \mathcal{N}$ (33); di qui si deduce, per la (13 1),

$$F[R' - R(y)] \geqq y \cdot M[R' - R(y)] = y\, M(R') = y \cdot M(R_0),$$

e quindi, al variare di R' e di y,

$$\alpha_{\mathcal{K}} F(R_0) \geqq M(R_0) \cdot \inf_{\mathbf{u}} \{f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \omega_{\mathcal{K}} R_0\}.$$

In virtù del teorema (6.III), le due diseguaglianze dimostrate corrispondono esattamente all'enunciato del teorema della media (11.IV).

Veniamo ora all'accennata generalizzazione del teorema (10.II).

II. *Sul reticolo $\mathcal{R}$ sia assegnata, accanto alle misure F e M, anche la misura M', e si ponga $\mathcal{N}' = \{R : M'(R) = 0, R \in \mathcal{R}\}$.*

Se su un soma non nullo R_0 si ha

$$g = \frac{dF}{dM'}, \quad m = \frac{dM'}{dM}, \quad h = \frac{d(\beta_{\mathcal{K}'} F)}{dM},$$

allora R_0 è decomponibile nella congiunzione d'una successione di somi, uno dei quali appartiene ad $\mathcal{N}'$, mentre su ciascuno dei rimanenti è

$$g \cdot m + h = \frac{dF}{dM}. \tag{13.2}$$

1) Il teorema è banale nel caso che R_0 appartenga ad $\mathcal{N}'$, ed è pure immediatamente verificato per $R_0 \in \mathcal{N}$, in quanto l'espressione a secondo membro della (13.2) indica su R_0 una classe di funzioni $\mathcal{N}$-equivalenti; supponiamo dunque $R_0 \notin \mathcal{N} \cup \mathcal{N}'$, e chiamiamo $\{R_g(y)\}$ e $\{R_m(y)\}$ le scale di somi relative rispettivamente alle due funzioni g e m. Posto

$$R_{hk} = R_g(h) \sqcap R_m(k), \quad R'' = R_0 - \bigsqcup_{h=1}^{\infty} R_m(h), \quad R' = R_0 - \bigsqcup_{k=1}^{\infty} R_g(k),$$

(33) Se fosse $R' \sqcap R(y) \notin \mathcal{K}$, esisterebbe un ultrafiltro $\mathbf{v} \in \mathbf{U}^{\mathcal{K}}_{\mathcal{R}}$ con $R' \sqcap R(y) \in \mathbf{v}$ (teorema 2.III), e quindi $R(y) \in \mathbf{v}$, $R' \in \mathbf{v}$, e quindi $R_0 \in \mathbf{v}$; ma nel testo s'è visto che $R_0 \in \mathbf{v}$ implica $R(y) \notin \mathbf{v}$.

avremo

$$g \leqq h \quad \text{ed} \quad m \leqq k \quad \text{su} \quad R_{hk}, \quad R_0 = R' \sqcup R'' \sqcup \bigsqcup_{h,k}^{1,\infty} R_{hk}, \quad R'' \in \mathfrak{N}, \quad R' \in \mathfrak{N}'$$

(cfr. il teorema 12.III), e con ciò la prima parte della tesi è provata.

2) In secondo luogo, sul soma R'' la (13.2) è banalmente soddisfatta, e così pure su qualunque dei somi R_{hk} che appartenga ad $\mathfrak{N}$; consideriamo allora un soma R_{hk} non appartenente ad $\mathfrak{N}$, tale quindi (teorema 2.I) che $\omega_{\mathfrak{H}} R_{hk}$ non sia vuoto.

Per ogni ultrafiltro $\mathbf{u} \in \omega_{\mathfrak{H}} R_{hk} \cap \omega_{\mathfrak{H}'} R_{hk}$ abbiamo

$$\text{(13.3)} \quad \lim_{R \to \mathbf{u}} \frac{F(R)}{M(R)} = \lim_{R \to \mathbf{u}} \frac{\alpha_{\mathfrak{H}'} F(R)}{M(R)} + \lim_{R \to \mathbf{u}} \frac{\beta_{\mathfrak{H}'} F(R)}{M(R)},$$

$$\text{(13.4)} \quad \lim_{R \to \mathbf{u}} \frac{\alpha_{\mathfrak{H}'} F(R)}{M(R)} = \lim_{R \to \mathbf{u}} \frac{\alpha_{\mathfrak{H}'} F(R)}{M'(R)} \cdot \lim_{R \to \mathbf{u}} \frac{M'(R)}{M(R)}, \quad \lim_{R \to \mathbf{u}} \frac{\alpha_{\mathfrak{H}'} F(R)}{M'(R)} = \lim_{R \to \mathbf{u}} \frac{F(R)}{M'(R)},$$

e quindi

$$\text{(13.5)} \qquad \left(\frac{dF}{dM}\right)_{\mathbf{u}} = g(\mathbf{u}) \cdot m(\mathbf{u}) + h(\mathbf{u}) \qquad \text{(in senso proprio).}$$

Il prodotto $g(\mathbf{u}) \cdot m(\mathbf{u})$ ha senso nella (13.5), in quanto su R_{hk} le due funzioni g e m sono limitate.

Per ogni ultrafiltro $\mathbf{u} \in \omega_{\mathfrak{H}} R_{hk} - \omega_{\mathfrak{H}'} R_{hk}$ sussiste ancora la (13.3), ma in luogo della (13.4) si ha

$$\lim_{R \to \mathbf{u}} \frac{\alpha_{\mathfrak{H}'} F(R)}{M(R)} = 0, \qquad \lim_{R \to \mathbf{u}} \frac{M'(R)}{M(R)} = 0 \text{ (}^{34}\text{)}$$

e quindi la (13.5) è ancora verificata. Poichè la (13.5) sussiste su tutto l'insieme $\omega_{\mathfrak{H}} R_{hk}$, la (13.2) sussiste sul soma R_{hk} per definizione di derivata impropria.

Ciò dimostra la tesi, assieme alla notevole formola

$$\text{(13.6)} \qquad F(R) = \beta_{\mathfrak{H}} F(R) + \int_{\check{R}} \left[\frac{dF}{dM'} \cdot \frac{dM'}{dM} + \frac{d(\beta_{\mathfrak{H}'} F)}{dM}\right] dM,$$

valida per ogni soma $R \sqsubseteq R_0 - R'$.

---

(34) Essendo $\mathbf{u} \notin \omega_{\mathfrak{H}'} R_{hk}$, tra i somi $R \in \mathbf{u}$ ve n'è uno per cui $M'(R) = 0$, e quindi $\alpha_{\mathfrak{H}'} F(R) = 0$.

In conclusione, i teoremi che abbiamo dimostrato sulla derivazione delle misure, specialmente i teoremi (11.IV), (11.V) e (13.II), provano l'equivalenza tra la nozione di derivata da noi introdotta e la nozione di differenziale astratto introdotta dal CARATHÉODORY; tuttavia le proprietà fondamentali della derivazione da noi introdotta possono essere dedotte in modo « elementare », ciò che non può dirsi per i differenziali astratti.

14. **Confronto con la teoria classica.** Vogliamo ora confrontare il procedimento di derivazione introdotto al n. 12 con i procedimenti classici di LEBESGUE VITALI, e con il procedimento di G. FICHERA. Supporremo dunque in questo numero, che il reticolo $\mathcal{R}$ sia un δ-anello d'insiemi, entro un ambiente X (35), e naturalmente identificheremo le funzioni $\mathcal{R}$-misurabili di punto con le corrispondenti funzioni d'ultrafiltro, a seconda dei nn. 3, 5 e 7.

Il teorema seguente dimostra che il procedimento di G. FICHERA è equivalente a quello da noi introdotto:

I. *Dato un soma non nullo R_0 ed una funzione non negativa f, $\mathcal{R}$-misurabile su R_0, f è su R_0 una derivata impropria della misura F rispetto alla misura M, quando e solo quando $\int_{R_0} f\,dM$ è il massimo valore che può assumere il funzionale $I(g) = \int_{R_0} g\,dM$ al variar della funzione g nella classe delle funzioni non negative, $\mathcal{R}$-misurabili sul soma R_0 e verificanti la diseguaglianza $\int_R g\,dM \leqq F(R)$ per ogni $R \sqsubseteq R_0$.*

1) Se f è una derivata impropria della F rispetto alla M, per il teorema (11.V) si ha $\int_R f\,dM = \alpha_{\mathcal{N}} F(R)$, mentre per la (4.ii) la misura $\alpha_{\mathcal{N}} F$ è la massima delle misure $\mathcal{N}$-assolutamente continue minoranti F: ciò dimostra che la condizione è necessaria.

2) Se f è una funzione definita su R_0 e verificante la condizione dell'enunciato, detta h una derivata impropria della F rispetto alla M su R_0, per il teorema (11.V) avremo

$$\alpha_{\mathcal{N}} F(R_0) = \int_{R_0} h\,dM \leqq \int_{R_0} f\,dM \tag{14.1}$$

---

(35) Un δ-anello d'insiemi è un sistema d'insiemi chiuso alla unione finita, alla intersezione numerabile ed alla differenza; un tale sistema è chiamato in [3] « famiglia totalmente additiva ».

e per le (4.ii)

$$\int_R f\, dM \leqq \alpha_{\mathcal{H}} F(R_0) = \int_R h\, dM \quad \text{per ogni} \quad R \sqsubseteq R_0 . \tag{14.2}$$

Consideriamo l'insieme d'ultrafiltri $\omega_{\mathcal{H}} R_0$. Se su un certo ultrafiltro $\mathbf{u}' \in \omega_{\mathcal{H}} R_0$ fosse $f(\mathbf{u}') > h(\mathbf{u}')$, con un procedimento già impiegato [36] ne dedurremo l'esistenza d'un soma R' verificante le condizioni

$$\inf_{\mathbf{u}} \{ f(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \omega_{\mathcal{H}} R' \} > \sup_{\mathbf{u}} \{ h(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \omega_{\mathcal{H}} R' \},$$

$$R' \sqsubseteq R_0 , \quad R' \in \mathbf{u}' \ (\text{e quindi } R' \notin \mathcal{N})$$

e di conseguenza avremmo $\int_{R'} f\, dM > \int_{R'} h\, dM$, contro la (14.2). Analogamente, se su un certo ultrafiltro $\mathbf{u}'' \in \omega_{\mathcal{H}} R_0$ fosse $f(\mathbf{u}'') < h(\mathbf{u}'')$, ne dedurremmo l'esistenza d'un soma R'' verificante le condizioni $R'' \sqsubseteq R_0$, $R'' \in \mathbf{u}''$ (e quindi $R'' \notin \mathcal{N}$), $\int_{R''} f\, dM < \int_{R''} h\, dM$, e quindi $\int_{R_0} f\, dM < \int_{R_0} h\, dM$, contro la (14.1).

Dunque le due funzioni f e h sono tra loro identiche sull'insieme $\omega_{\mathcal{H}} R_0$ e per il teorema (6.I) esse sono $\mathcal{N}$-equivalenti sul soma R_0. c. d. d.

Veniamo ora a considerare i procedimenti classici di derivazione alla LEBESGUE VITALI [37]. Secondo tali procedimenti, per definire la derivata della misura F rispetto alla misura M, ad ogni punto x dell'ambiente X si associa una successione (od anche un insieme «diretto») decrescente di somi $\{ R_k(x) \}_{k=1}^{\infty}$, tutti contenenti il punto x, e nessuno appartenente al σ-ideale $\mathcal{N}$ (cioè, tutti di misura M positiva); quindi si considerano le due funzioni

$$\overline{f}(x) = \lim_{k \to \infty}{}'' \frac{F[R_k(x)]}{M[R_k(x)]}, \quad \underline{f}(x) = \lim_{k \to \infty}{}' \frac{F[R_k(x)]}{M[R_k(x)]},$$

che evidentemente risultano $\mathcal{R}$-misurabili su ciascun soma, sul quale siano limitate.

Da quanto abbiamo esposto nei nn. 6 e 12, risulta che queste due funzioni $\overline{f}(x)$ ed $\underline{f}(x)$ sono (entrambe) derivate improprie di F rispetto ad

---

(36) Vedi la dimostrazione del teorema 6.1.

(37) Cfr. ad es. [6], pp. 114 e sgg.

M quando e solo quando si ha

$$\lim_{x \to \mathbf{u}} \overline{f}(x) = \lim_{x \to \mathbf{u}} \underline{f}(x) = \left(\frac{d\,F}{d\,M}\right)_{\mathbf{u}}, \quad \text{per ogni} \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U}^{\mathcal{H}}_{\mathcal{R}}. \tag{14.3}$$

Nella teoria classica, il verificarsi della (14.3) è garantito da opportune ipotesi. Precisamente, le successioni $\{R_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ si scelgono in guisa tale, da render vere queste due proposizioni:

(i) *se è* $\overline{f}(x) \geqq y$ *sul soma* R, *allora è* $F(R) \geqq y \cdot M(R)$;

(ii) *se è* $\overline{f}(x) \leqq y$ *sul soma* R, *allora è* $\alpha_{\mathcal{H}} F(R) \leqq y \cdot M(R)$;

le quali si dimostrano d'ordinario per mezzo del teorema di ricoprimento di VITALI.

Dimostriamo ora che dalle (i) e (ii) segue la limitazione

$$\lim_{x \to \mathbf{u}}{}' \underline{f}(x) \leqq \lim_{x \to \mathbf{u}}{}' \overline{f}(x) \leqq \left(\frac{d\,F}{d\,M}\right)_{\mathbf{u}} \leqq \tag{14.4}$$

$$\leqq \lim_{x \to \mathbf{u}}{}'' \underline{f}(x) \leqq \lim_{x \to \mathbf{u}}{}'' \overline{f}(x), \quad \text{per} \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U}^{\mathcal{H}}_{\mathcal{R}};$$

evidentemente basta dimostrare la seconda e la terza diseguaglianza, essendo la prima e la quarta banali: dimostreremo la terza, la seconda essendo analoga.

Se, in corrispondenza d'un certo ultrafiltro $\mathbf{u} \in \mathbf{U}^{\mathcal{H}}_{\mathcal{R}}$, fosse

$$\lim_{x \to \mathbf{u}}{}'' \underline{f}(x) < \left(\frac{d\,F}{d\,M}\right)_{\mathbf{u}} = \lim_{R \to \mathbf{u}} \frac{F(R)}{M(R)}, \tag{14.5}$$

vi sarebbero due numeri positivi y' ed y'' tali che

$$\lim_{x \to \mathbf{u}}{}'' \underline{f}(x) < y' < y'' < \lim_{R \to \mathbf{u}} \frac{F(R)}{M(R)},$$

e quindi:

a) vi sarebbe un soma R_1 appartenente all'ultrafiltro $\mathbf{u}$, con

$$\underline{f}(x) < y' \quad \text{per ogni} \quad x \in R_1;$$

b) vi sarebbe un soma R_2 appartenente all'ultrafiltro $\mathbf{u}$, con

$$y'' < \frac{F(R \sqcap R_2)}{M(R \sqcap R_2)} \quad \text{per ogni} \quad R \in \mathbf{u}.$$

Dalla (b), ricordando [38] che ogni soma $R \in \mathbf{u}$ ne contiene un altro $\overline{R}$ con $\overline{R} \in \mathbf{u}$, $\overline{R} \sqsubseteq R$, $F(\overline{R}) = \alpha_{\mathcal{M}} F(\overline{R}) = \alpha_{\mathcal{M}} F(R)$, $M(\overline{R}) = M(R)$, si deduce subito $y'' \leqq \dfrac{\alpha_{\mathcal{M}} F(R_1 \sqcap R_2)}{M(R_1 \sqcap R_2)}$, mentre dalla (a) e dalla (ii) si deduce $\dfrac{\alpha_{\mathcal{M}} F(R_1 \sqcap R_2)}{M(R_1 \sqcap R_2)} \leqq y' < y''$, contraddittoriamente; dunque la (14.5) è assurda.

Dimostrata la limitazione (14.4), basterà osservare che (teorema 5.I) dev'essere

$$\lim_{x \to \mathbf{u}}{}' \underline{f}(x) = \lim_{x \to \mathbf{u}}{}'' \underline{f}(x), \quad \lim_{x \to \mathbf{u}}{}' \overline{f}(x) = \lim_{x \to \mathbf{u}}{}'' \overline{f}(x), \quad \text{per} \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U}^{\mathcal{M}}_{\mathfrak{R}},$$

per ottenere la dimostrazione della (14.3).

Si osservi per ultimo, che *le funzioni* $\overline{f}(x)$ *ed* $\underline{f}(x)$ *riusciranno* $\mathcal{N}$*-quasi-ovunque finite su ciascun soma* $R_0 \in \mathcal{R}$, se verificano la (14.3); ciò in virtù del teorema (12.III), in quanto nelle ipotesi qui fatte la congiunzione numerabile s'identifica con l'unione numerabile.

15. Osservazioni conclusive. Riassumiamo brevemente i risultati ottenuti nei nn. 9-14, ammettendo assegnati un reticolo $\mathcal{R}$ di CARATHÉODORY e due misure (assolute) F e M su di esso.

1) Nell'ambito della teoria algebrica della misura, o meglio, nell'ambito della teoria *duale*, il procedimento «elementare» di derivazione (come limite d'un rapporto incrementale) è applicabile in ciascun ultrafiltro della totalità $\mathbf{U}^{\mathcal{M}}_{\mathfrak{R}}$, e dà luogo ad una funzione d'ultrafiltro univocamente determinata, la *derivata propria*, la quale può esser considerata una funzione d'ultrafiltro sul reticolo quoziente $\mathcal{R}/\mathcal{N}$, e gode delle proprietà che si sogliono considerare fondamentali per una derivata.

2) La derivata propria della F rispetto alla M può, per ciascun soma del reticolo $\mathcal{R}$, esser prolungata in una funzione $\mathcal{R}$-misurabile sul soma stesso: la *derivata impropria* della F rispetto alla M; tutte le derivate improprie della F rispetto alla M, su un soma R di $\mathcal{R}$, formano una classe d'equivalenza modulo $\mathcal{N}$, ed anch'esse godono delle proprietà che si sogliono considerare fondamentali per una derivata.

3) Nel caso classico, i procedimenti classici di derivazione non sono direttamente confrontabili con quello qui introdotto: ciascuno dei primi, difatti, individua una determinata derivata impropria, da cui per astrazione

---

[38] Vedi la dimostrazione del teorema 13.I.

si ricava la classe d'equivalenza modulo $\mathcal{N}$; il secondo, al contrario, ci dà direttamente (con la derivata propria) la classe d'equivalenza modulo $\mathcal{N}$, dalla quale si possono ricavare (volendo) le singole derivate improprie che ne sono gli elementi.

4) La definizione qui proposta di *derivata propria* è di tipo *locale,* in quanto dipende dai singoli ultrafiltri considerati, e non dal loro complesso: le derivate improprie, poi, hanno un'ufficio del tutto secondario nella teoria, la quale si basa essenzialmente sulle derivate proprie. A questo fatto, fa riscontro nella teoria classica l'altro fatto, che in essa non le singole derivate, bensì le loro classi d'equivalenza modulo $\mathcal{N}$ hanno rilevanza: ma nella teoria classica queste classi d'equivalenza s'ottengono solo in modo indiretto; il carattere *globale* della definizione classica di derivata (messo in luce dal FICHERA) dipende appunto da questo, che in essa il procedimento di derivazione non può dipendere dai singoli punti, bensì dal loro complesso, dovendo necessariamente soddisfare la condizione (14.3). La teoria algebrica permette dunque di sceverare esattamente le proprietà *locali* dalle proprietà *globali* della derivazione.

Ci sia consentito concludere con le seguenti osservazioni.

5) Nella presente nota abbiamo studiato la derivazione di una *misura*, ossia di una funzione *σ-additiva* di soma; in base ad una nostra osservazione [39], a questo caso può ricondursi anche lo studio della derivazione d'una funzione di soma *semplicemente additiva.*

6) Nella presente nota abbiamo considerato solamente misure *assolute*, ossia non negative; è chiara la via da seguire, se si vogliono estendere questi risultati anche alle misure *relative e* (beninteso) *a variazione limitata* su ciascun soma del reticolo.

7) Nella presente nota abbiamo considerato solamente misure *finite*; a questo caso si può ricondurre lo studio della derivazione delle misure anche non finite, ottenute per « prolungamento » di misure finite: e naturalmente bisognerà che le due misure F ed M possano ottenersi per « prolungamento », da due misure *finite su uno stesso insieme di somi*; secondo la nomenclatura di CARATHÉODORY, F ed M dovranno essere misure *regolari e della stessa specie.* D'altronde, solo per siffatte misure può esser dimostrato il teorema di HAHN, in generale.

È nostra intenzione tornare su questo argomento.

FERNANDO BERTOLINI

Roma, 19 maggio 1958.

---

(39) Cfr. [7].

BIBLIOGRAFIA

[1] F. BERTOLINI, *La teoria algebrica della misura e della integrazione, e suo rapporto con la teoria classica*, in « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », serie III, vol. XI, fasc. III-IV, 1957.

[2] C. CARATHÉODORY, *Mass und Integral und ihre Algebraisierung*, Birkhäuser, Basel 1956.

[3] G. FICHERA, *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, Trieste 1954.

[4] G. NÖBELING, *Grundlagen der analytischen Topologie*, Springer, Berlin 1954.

[5] H. HERMES, *Einführung in die Verbandstheorie*, Springer, Berlin 1955.

[6] S. SAKS, *Theory of Integral*, Warszawa 1937.

[7] F. BERTOLINI, *Le funzioni additive nella teoria algebrica della misura*, in « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », serie III, vol. XII, fasc. I-II, 1958.

ELENCO DEI SIMBOLI PRINCIPALI

$\mathcal{R}, \mathcal{S}$: reticoli di Carathéodory (= distributivi, relativam. complementati, numerabilm. $\sqcap$ - completi, dotati di soma nullo.

$\models, \sqcap, \bigsqcap, \sqcup, \bigsqcup, -, O$: vedi (1).

F, M: misure assolute, finite sul reticolo $\mathcal{R}$.

f, g, h: funzioni $\mathcal{R}$-misurabili d'ultrafiltro.

τ: δ-omomorfismo di $\mathcal{R}$ su $\mathcal{S}$, e corrispondenti operazioni di «trapianto» d'una misura e d'una funzione d'ultrafiltro da $\mathcal{R}$ su $\mathcal{S}$.

$\mathcal{N}$: σ-ideale del reticolo $\mathcal{R}$ (di solito, l'insieme dei somi sui quali la misura M è nulla, oppure il nucleo = autoinsieme dell'omomorfismo τ).

$\alpha_{\mathcal{N}} F, \beta_{\mathcal{N}} F$: parte $\mathcal{N}$-assolutamente continua e parte $\mathcal{N}$-singolare (rispettivam.) della misura F.

$\mathbf{u}_{\mathfrak{R}}\ [\mathbf{u}_{\mathfrak{S}}]$: totalità degli ultrafiltri del reticolo $\mathcal{R}$ [del reticolo $\mathcal{S}$].

$\mathbf{u}_{\mathfrak{R}}^{\mathcal{N}}$: totalità degli ultrafiltri disgiunti da $\mathcal{N}$, del reticolo $\mathcal{R}$.

ωR: totalità degli ultrafiltri cui il soma $\mathcal{R}$ appartiene.

$\omega_{\mathcal{N}} R$: totalità degli ultrafiltri disgiunti da $\mathcal{N}$, cui il soma R appartiene.

$\varrho_{\mathcal{N}} R$: totalità dei somi di $\mathcal{R}$, congruenti ad R modulo $\mathcal{N}$.

$\varrho_{\mathcal{N}} F, \omega F, \omega_{\mathcal{N}} F$
$[\varrho_{\mathcal{N}} f, \omega f, \omega_{\mathcal{N}} f]$: «trapianti» della misura F [della funzione d'ultrafiltro f] dal reticolo $\mathcal{R}$, risp. sui reticoli $\varrho_{\mathcal{N}} \mathcal{R} = \mathcal{R}/\mathcal{N}$, $\omega \mathcal{R}$, $\omega_{\mathcal{N}} \mathcal{R}$, indotti risp. dagli omomorfismi $\varrho_{\mathcal{N}}, \omega, \omega_{\mathcal{N}}$.