ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

FERNANDO BERTOLINI

Le funzioni additive nella teoria algebrica della misura

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 12, nº 1-2 (1958), p. 155-162

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1958_3_12_1-2_155_0>

LE FUNZIONI ADDITIVE NELLA TEORIA ALGEBRICA DELLA MISURA

Nota di Fernando Bertolini (a Roma).

Abbiamo esposto, in una nota di recente pubblicazione ([1]), i rapporti che intercedono tra la ordinaria teoria della misura e della integrazione (qual'è configurata ad es. in [2], [3], [4], [5], ecc.) e la teoria « algebrica » di C. Carathéodory ([6]), potenzialmente più generale della prima.

Ricordiamo che, in ultima analisi, la teoria algebrica della misura consiste nello studio delle funzioni non negative e numerabilmente additive su un reticolo distributivo, relativamente complementato, numerabilmente completo e dotato d'elemento nullo; nella presente nota intendiamo dimostrare che in tale teoria è implicito anche lo studio delle funzioni non negative e additive, in modo che la teoria algebrica della misura si potrebbe anche definire come lo studio delle funzioni non negative ed additive su un reticolo distributivo, relativamente complementato, e dotato di elemento nullo.

In altre parole, mentre da una parte qualunque teorema generale sulle funzioni additive (e non negative) è applicabile in particolare alle funzioni numerabilmente additive (e non negative), d'altra parte qualunque teorema generale sulle funzioni numerabilmente additive (e non negative) può esser tradotto in un teorema generale sulle funzioni additive (e non negative).

Questo fatto, che apre numerosi e interessanti problemi, rappresenta a nostro giudizio una delle caratteristiche più notevoli della teoria algebrica della misura.

1. Premesse generali. Sia assegnato un reticolo $\mathcal{R}$, distributivo relativamente complementato, e dotato d'elemento nullo; conveniamo di indicarne la *relazione d'ordine* col segno $\sqsubseteq$ (« precede »), la operazione d'*interferenza* con i segni $\sqcap$ e $\bigsqcap$ (« ultimo comune precedente ») rispettivamente nei casi finito e numerabile, l'operazione di *congiunzione* con i segni $\sqcup$ e $\bigsqcup$

(« primo comune seguente ») in modo analogo, l'operazione di *complemento relativo* col segno — (« meno »), l'elemento nullo con O [1].

Consideriamo poi la totalità X degli ultrafiltri del reticolo $\mathcal{R}$ [2], e ad ogni elemento $R \in \mathcal{R}$ associamo l'insieme A degli ultrafiltri cui R appartiene: per esprimere che A è associato ad R con tale legge, scriviamo $A = \sigma R$; infine chiamiamo $\mathcal{A}$ la classe dei sottoinsiemi di X descritta da $A = \sigma R$ al variar di R in $\mathcal{R}$.

È noto [3] che, se si assume in $\mathcal{A}$ come relazione d'ordine la relazione $\subset$ d'inclusione,

1) $\mathcal{A}$ risulta un reticolo isomorfo ad $\mathcal{R}$ rispetto alla relazione d'ordine, e quindi rispetto alla interferenza ed alla congiunzione;

2) in $\mathcal{A}$ l'interferenza e la congiunzione *finite* s'identificano rispettivamente con l'intersezione e l'unione *finite*;

3) ad $\mathcal{A}$ appartiene l'insieme vuoto $\emptyset$ come elemento nullo, quindi l'operazione di complemento relativo s'identifica in $\mathcal{A}$ con quella di differenza tra insiemi, ed inoltre

4) $\mathcal{A}$ risulta isomorfo ad $\mathcal{R}$ anche rispetto alla operazione di complemento relativo.

In conclusione, *i due reticoli* $\mathcal{R}$ *ed* $\mathcal{A}$ *sono indistinguibili in base alle loro sole proprietà intrinseche,* e per questa ragione converremo di indicare la relazione d'ordine e le operazioni del reticolo $\mathcal{A}$ con gli stessi segni già introdotti per il reticolo $\mathcal{R}$ [4]; tuttavia *il reticolo* $\mathcal{A}$ *presenta il vantaggio di essere* (secondo la nomenclatura usata in [3]) *un anello di insiemi, entro un ambiente* X.

Questo risultato non va interpretato in un senso indebitamente largo; confrontando la operazione di congiunzione nel reticolo $\mathcal{A}$ e quella di unione tra insiemi, si vede che l'insieme $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$ (« il minimo insieme contenente tutti gl'insiemi $A_k \in \mathcal{A}$ ed appartenente alla famiglia $\mathcal{A}$ ») se esiste non coincide

---

(1) Per la nomenclatura rinviamo ad [1], [7], [8]; inoltre, abbiamo: « interferenza » = « Schnitt » ovvero « verbandstheoretischer Durchschnitt » (ted.) = « meet » (ingl.), « congiunzione » = « Bund » ovvero « verbandstheoretische Vereinigung » (ted.) = « join » (ingl.).

(2) Un ultrafiltro (o $\sqcap$ - ideale primo) è un insieme x d'elementi di $\mathcal{R}$, tale che: 1) $0 \notin x$; 2) se è $R_1 \in x$ ed $R_2 \in x$, allora è $R_1 \sqcap R_2 \in x$, e viceversa; 3) se è $R_1 \in x$ od $R_2 \in x$, allora è $R_1 \sqcup R_2 \in x$, e viceversa. Cfr. [7], p. 107, ovvero [8], p. 22.

(3) Cfr. [7], p. 106, teor. 20.1, ovvero [8], p. 28, teor. 5.2.

(4) Si tenga presente peraltro, che in $\mathcal{A}$ i segni $\sqsubseteq, \sqcup, \sqcap$, sono rispettivamente equivalenti ai segni $\subset, \cup, \cap$, di inclusione, di unione (finita) e di intersezione (finita) della teoria degli insiemi.

in generale con l'insieme $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ («il minimo insieme contenente tutti gli insiemi $A_k \in \mathcal{A}$»), pur contenendolo. Precisamente:

1. *Data una successione* $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ *d'insiemi non vuoti e mutuamente disgiunti della famiglia* $\mathcal{A}$, *si ha*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \neq \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k ,$$

se quest'ultimo insieme esiste.

Per dimostrarlo, consideriamo la successione $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ di elementi del reticolo $\mathcal{R}$, così definita:

$$R_n = \sigma^{-1} \bigsqcup_{k=n}^{\infty} A_k \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

ovviamente si ha

$$\emptyset \neq \bigsqcup_{k=n+1}^{\infty} A_k \subset \bigsqcup_{k=n}^{\infty} A_k , \text{ e quindi } O \neq R_{n+1} \sqsubseteq R_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Per un noto risultato di teoria dei reticoli (5), in $\mathcal{R}$ esiste almeno un ultrafiltro x, cui appartengono tutti gli elementi della successione $\{R\}_{n=1}^{\infty}$. Avremo da un lato

$$R_1 \in x \text{ e quindi } x \in \sigma R_1 = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k ,$$

mentre dall'altro, per ogni indice n, la relazione «$R_n \in x$ ed $R_{n+1} \in x$» implica successivamente

$$R_n - R_{n+1} \notin x ,$$

$$x \notin \sigma(R_n - R_{n+1}) = \sigma R_n - \sigma R_{n+1} = \bigsqcup_{k=n}^{\infty} A_k - \bigsqcup_{k=n+1}^{\infty} A_k = A_n ,$$

da cui segue subito $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, ciò che dimostra la tesi.

È immediato il corollario:

II. *Data una successione* $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ *di insiemi non vuoti e mutuamente disgiunti dalla famiglia* $\mathcal{A}$, *si ha*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \notin \mathcal{A} .$$

---

(5) Cfr. [8], p. 23, teor. 4.3.

Difatti, se fosse $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = A_0 \in \mathcal{A}$, A_0 sarebbe il minimo insieme della famiglia $\mathcal{A}$ contenente $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, e quindi avremmo $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, contro il teorema precedente.

Questi due teoremi (ai quali possono essere associati altri due analoghi, relativi ad interferenze ed intersezioni) mostrano che *la famiglia d'insiemi $\mathcal{A}$ non è un σ-anello nel senso della teoria degli insiemi* (secondo la nomenclatura adottata in [3]), *all'infuori del caso banale che essa consista d'un numero finito d'insiemi distinti.*

2. **Il primo teorema d'equivalenza.** Sia ora definita su $\mathcal{R}$ una arbitraria funzione non negativa ed additiva F, una funzione cioè tale da aversi

$$F(R) \geq 0 \text{ per ogni } R \in \mathcal{R},$$

$$F(R_1) + F(R_2) = F(R_1 \sqcup R_2) \text{ per } R_1, R_2 \in \mathcal{R} \text{ ed } R_1 \sqcap R_2 = O.$$

Alla funzione F associamo la funzione τF, definita sul reticolo $\mathcal{A}$ al modo seguente:

$$\tau F(A) = F(\sigma^{-1} A) \text{ per ogni } A \in \mathcal{A};$$

evidentemente, la funzione τF è non negativa ed additiva sul reticolo $\mathcal{A}$, in quanto si ha

$$\tau F(A) = F(\sigma^{-1} A) \geq 0 \text{ per ogni } A \in \mathcal{A},$$

$$\sigma^{-1} A_1 \sqcap \sigma^{-1} A_2 = \sigma^{-1} (A_1 \sqcap A_2) = \sigma^{-1} \varnothing = O$$

$$\text{per } A_1, A_2 \in \mathcal{A}, \text{ ed } A_1 \sqcap A_2 = \varnothing,$$

quindi

$$\tau F(A_1) + \tau F(A_2) = F(\sigma^{-1} A_1) + F(\sigma^{-1} A_2) =$$

$$= F[\sigma^{-1} A_1 \sqcup \sigma^{-1} A_2] = F[\sigma^{-1}(A_1 \sqcup A_2)] = \tau F(A_1 \sqcup A_2)$$

$$\text{per } A_1, A_2 \in \mathcal{A} \text{ ed } A_1 \sqcap A_2 = \varnothing.$$

Viceversa, assegnata una funzione G non negativa ed additiva sul reticolo $\mathcal{A}$, ponendo $F(R) = G(\sigma R)$ per ogni $R \in \mathcal{R}$, si definisce una funzione non negativa ed additiva su $\mathcal{R}$, ed anzi l'unica funzione tale da aversi $G = \tau F$.

Si conclude dunque che la trasformazione τ pone una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle funzioni additive e non negative su $\mathcal{R}$ e quella delle funzioni additive e non negative su $\mathcal{A}$; è poi banale che tale trasformazione è isomorfa rispetto alle operazioni aritmetiche, a quella di combinazione lineare a coefficienti non negativi, nonchè rispetto alla relazione $\leq$.

In conclusione, i due insiemi di funzioni ora menzionati sono indistinguibili in base alle sole proprietà intrinseche. Si osservi però che

III. *In base alla proprietà* (2) *del n. 1, le funzioni additive sul reticolo* $\mathcal{A}$ *nel senso della teoria algebrica, altro non sono che le funzioni additive sulla famiglia d'insiemi* $\mathcal{A}$ *nel senso della ordinaria teoria della misura; queste ultime a loro volta, altro non sono che le funzioni numerabilmente additive sulla famiglia d'insiemi* $\mathcal{A}$ *nel senso della ordinaria teoria della misura.*

Basta dimostrare la seconda asserzione; ma se è $A_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_0 \in \mathcal{A}$, $A_k \in \mathcal{A}$, $A_h \sqcap A_k = \varnothing$ $(h, k = 1, 2, 3, \ldots; h \neq k)$, in virtù del teorema II gli insiemi A_k risultano tutti vuoti, ad eccezione d'un numero finito di essi, e quindi si ha, per ogni funzione G additiva sul reticolo $\mathcal{A}$,

$$G\,(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} G\,(A_k).$$

3. **Il secondo teorema d'equivalenza.** Nell'insieme ambiente X introduciamo ora la famiglia $\mathcal{B}$ d'insiemi, definita come la minima famiglia d'insiemi che includa $\mathcal{A}$, e che sia chiusa alle operazioni di unione e di intersezione numerabili, nonchè di differenza tra insiemi (« σ-anello d'insiemi generato da $\mathcal{A}$ », secondo la nomenclatura usata in [3]).

Se nella famiglia d'insiemi $\mathcal{B}$ si assume l'inclusione $\subset$ come relazione d'ordine, $\mathcal{B}$ risulta anch'essa un reticolo distributivo, relativamente complementato, *numerabilmente completo* e dotato d'elemento nullo; osserviamo che in questo reticolo le operazioni di interferenza e congiunzione numerabili s'identificano rispettivamente con quelle di intersezione ed unione numerabili, l'operazione di complemento relativo con quella di differenza, mentre l'elemento nullo non è che l'insieme vuoto $\varnothing$ ([6]).

Pertanto le funzioni numerabilmente additive sul reticolo $\mathcal{B}$ nel senso della teoria algebrica altro non sono che le funzioni numerabilmente additive sulla famiglia d'insiemi $\mathcal{B}$ nel senso della ordinaria teoria della misura.

Vogliamo dimostrare il seguente teorema fondamentale:

IV. *Ogni funzione non negativa e additiva sul reticolo* $\mathcal{A}$, *e soltanto una tale funzione, è la traccia su* $\mathcal{A}$ *d'una funzione non negativa e numerabilmente additiva sul reticolo* $\mathcal{B}$.

([6]) pertanto non sarà necessario introdurre nuovi segni per le operazioni del reticolo $\mathcal{B}$; così i segni $\cap$ e $\bigcap$ (i segni $\cup$ e $\bigcup$) indicheranno indifferentemente l'operazione d'interferenza su $\mathcal{B}$ e l'operazione d'intersezione tra insiemi (l'operazione di congiunzione su $\mathcal{B}$ e quella di unione tra insiemi), rispettivamente nel caso finito e nel caso numerabile.

Sia H un funzione non negativa e numerabilmente additiva sul reticolo $\mathcal{B}$, una funzione, cioè, tale da aversi

$$H(B) \geq 0 \text{ per ogni } B \in \mathcal{B},$$

$$H(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} H(B_k) \text{ per } B_k \in \mathcal{B}, B_h \cap B_k = \emptyset,$$

$$(h, k = 1, 2, 3, \ldots; h \neq k) \text{ (6).}$$

Evidentemente, sul reticolo $\mathcal{A}$ avremo

$$H(A) \geq 0 \text{ per ogni } A \in \mathcal{A},$$

$$H(A_1) + H(A_2) = H(A_1 \cup A_2) = H(A_1 \sqcup A_2)$$

$$\text{per } A_1, A_2 \in \mathcal{A} \text{ ed } A_1 \cap A_2 = A_1 \sqcap A_2 = \emptyset,$$

e ciò significa appunto che la traccia della funzione H su $\mathcal{A}$, chiamiamola G, è una funzione non negativa ed additiva sul reticolo $\mathcal{A}$.

Non possiamo, però, dedurre che G sia numerabilmente additiva sul reticolo $\mathcal{A}$ nel senso della teoria algebrica: in generale, dalla relazione $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$ possiamo solo concludere che è $\sum_{k=1}^{\infty} G(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} H(A_k) = H(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leqq H(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k) = G(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k)$ per $A_k \in \mathcal{A}$, $A_h \sqcap A_k = \emptyset$ $(h, k = 1, 2, \ldots; h \neq k)$, e non necessariamente $\sum_{k=1}^{\infty} G(A_k) = G(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k)$; ciò dipende dal fatto che il reticolo $\mathcal{A}$ in generale è subordinato al reticolo $\mathcal{B}$ solo *finitamente*, ma non numerabilmente (cfr. teor. I) (7).

E veniamo ora a dimostrare la seconda metà del teorema. Assegnata una funzione G non negativa ed additiva sul reticolo $\mathcal{A}$, definiamo su $\mathcal{B}$ la funzione H al modo seguente:

1) $H(B) = +\infty$, se non esiste alcuna successione d'insiemi appartenenti alla famiglia $\mathcal{A}$, l'unione dei quali contenga l'insieme B;

2) $H(B) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} G(A_k) : A_k \in \mathcal{A}\ (k = 1\ 2, \ldots), B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right\}$, se esiste qualche successione d'insiemi della famiglia $\mathcal{A}$, l'unione dei quali contenga B (8).

---

(7) Si vuol dire, che le operazioni di interferenza e congiunzione finite nel reticolo $\mathcal{B}$ subordinano le operazioni omologhe del reticolo $\mathcal{A}$; NON si può dire altrettanto nel caso numerabile, vedi teor. I.

(8) Ossia, $H(B)$ è eguale all'estremo inferiore dell'insieme numerico descritto dalla quantità $\sum_{k=1}^{\infty} G(A_k)$ al variare comunque della successione $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, purchè inclusa nella famiglia $\mathcal{A}$ e ricoprente l'insieme B.

Basterà ora osservare che la famiglia $\mathcal{A}$ d'insiemi è chiusa rispetto alla differenza, e che la funzione G per il teorema III è numerabilmente additiva sulla famiglia $\mathcal{A}$ nel senso dell'ordinaria teoria della misura, per concludere (9) che la funzione H è numerabilmente additiva sul reticolo $\mathcal{B}$, e la sua traccia su $\mathcal{A}$ altro non è che la funzione G.

Con ciò il teorema è completamente dimostrato.

4. **Funzioni numerabilmente additive sul reticolo $\mathcal{R}$.** Il teorema d'equivalenza verrà opportunamente chiarito da un criterio di additività numerabile sul reticolo $\mathcal{R}$, che veniamo ad esporre.

Sia data una funzione F non negativa ed additiva sul reticolo $\mathcal{R}$, o, ciò che fa lo stesso, la corrispondente funzione τF sul reticolo $\mathcal{A}$; per il teorema d'equivalenza, τF è la traccia su $\mathcal{A}$ d'una funzione H non negativa e numerabilmente additiva su $\mathcal{B}$; sussiste il teorema:

V. *Affinchè la funzione F sia numerabilmente additiva sul reticolo $\mathcal{R}$, supposto numerabilmente completo, occorre e basta che, per ogni successione $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ di insiemi disgiunti della famiglia $\mathcal{A}$, si abbia*

$$H\Big(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k - \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = 0.$$

Difatti, è $H\Big(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k - \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = H\Big(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) - \sum_{k=1}^{\infty} H(A_k) = \tau F\Big(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) -$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \tau F(A_k) = F\Big(\sigma^{-1} \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) - \sum_{k=1}^{\infty} F(\sigma^{-1} A_k) = F\Big(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} \sigma^{-1} A_k\Big) - \sum_{k=1}^{\infty} F(\sigma^{-1} A_k),$$

e questo dimostra l'asserto, se si tien conto che i due reticoli $\mathcal{R}$ e $\mathcal{A}$ sono isomorfi.

5. **Conclusione.** Il risultato della presente ricerca può dunque riassumersi nel seguente enunciato:

Ogni reticolo $\mathcal{R}$ distributivo, relativamente complementato, e dotato d'elemento nullo, è, a meno d'un isomorfismo, subordinato finitamente ad analogo reticolo $\mathcal{R}'$ numerabilmente completo, in guisa tale, che ogni funzione non negativa ed additiva su $\mathcal{R}$, e soltanto una tale funzione, é la traccia d'una funzione numerabilmente additiva su $\mathcal{R}'$ e non negativa.

---

(9) Cfr. [6], pag. 236, teor. 5. D'altronde, il teorema poteva anche dimostrarsi osservando che, poichè nel senso della ordinaria teoria della misura la famiglia $\mathcal{A}$ è un anello d'insiemi e la funzione G vi è numerabilmente additiva e non negativa (teor. III), la funzione G può esser prolungata su $\mathcal{B}$ in modo classico; abbiamo però preferito non uscire dall'ambito della teoria algebrica.

Questo risultato giustifica la nostra asserzione, che nell'ambito della teoria algebrica della misura lo studio delle funzioni additive non negative è implicito nello studio delle funzioni numerabilmente additive non negative. Difatti, se $\mathcal{T}$ è un teorema valido per la generica funzione numerabilmente additiva e non negativa, su un arbitrario reticolo $\mathcal{R}$, «relativizzando» $\mathcal{T}$ (per così dire) al generico reticolo subordinato ad $\mathcal{R}$ otterremo la generalizzazione del teorema $\mathcal{T}$ al caso delle funzioni semplicemente additive e non negative.

In base a queste considerazioni, la generalizzazione (al caso della semplice additività) di teoremi classici come quelli di LEBESGUE, di RADON NIKODYM, di HAHN, eccetera, si può dire a portata di mano.

A questo studio sarà dedicata una prossima nota.

Roma, 21 Gennaio 1958

BIBLIOGRAFIA

[1] - F. BERTOLINI, *La teoria algebrica della misura e della integrazione, e suo rapporto con la teoria classica,* in « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », serie III, vol. XI, Fasc. III-IV, 1957.

[2] - S. SAKS, *Theory of the integral,* Varsavia 1937.

[3] - P. HALMOS, *Measure theory,* Londra 1950.

[4] - K. MAYRHOFER, *Inhalt und Mass.* Vienna 1952.

[5] - G. FICHERA, *Lezione sulle trasformazioni lineari,* Trieste 1954.

[6] - C. CARATHEODORY, *Mass und Integral und ihre Algebraisierung,* Basilea 1956.

[7] - H. HERMES, *Einführung in die Verbandstheorie,* Berlino 1955.

[8] - G. NOBELING, *Grundlagen der analytischen Topologie,* Berlino 1955.