

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

CARMELO MAMMANA

## **Determinazione dei tipi di omografie di cui una data omografia si puo' considerare come limite**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 11,  
n° 3-4 (1957), p. 249-263*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1957\\_3\\_11\\_3-4\\_249\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1957_3_11_3-4_249_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

**DETERMINAZIONE DEI TIPI  
DI OMOGRAFIE DI CUI UNA DATA OMOGRAFIA  
SI PUO' CONSIDERARE COME LIMITE**

di CARMELO MAMMANA (Catania)

È noto <sup>(1)</sup> che una omografia particolare di  $S_n$  di caratteristica di PREDELLA:

$$[(h_1^{(1)}-1, h_2^{(1)}-1, \dots, h_{i^{(1)}}^{(1)}-1)(h_1^{(2)}-1, h_2^{(2)}-1, \dots, h_{i^{(2)}}^{(2)}-1) \dots (h_1^{(v)}-1, h_2^{(v)}-1, \dots, h_{i^{(v)}}^{(v)}-1)]$$

si può considerare come limite di omografie generali di  $S_n$  di caratteristica di PREDELLA:

$$[(h_1^{(1)}-1)(h_2^{(1)}-1) \dots (h_{i^{(1)}}^{(1)}-1)(h_1^{(2)}-1)(h_2^{(2)}-1) \dots (h_{i^{(2)}}^{(2)}-1) \dots (h_1^{(v)}-1)(h_2^{(v)}-1) \dots (h_{i^{(v)}}^{(v)}-1)].$$

Per esempio in  $S_3$  una omologia speciale  $[(2, 0)]$  è limite di omologie generali  $[(2) (0)]$ ; una biassiale speciale  $[(1, 1)]$  è limite di biassiali generali  $[(1) (1)]$ ; ecc.

Ma si verifica facilmente che una omologia speciale è limite anche di biassiali speciali; una biassiale speciale è limite anche di omografie di tipo  $[(1 \ 0 \ 0)]$ ; ecc.

In questo lavoro ci proponiamo di determinare tutti i tipi di omografie di  $S_n$  di cui una data omografia  $\bar{\omega}$  di  $S_n$  si può considerare come limite.

Considereremo sempre omografie non degeneri, e, per comodità di ragionamento, ci riferiremo costantemente alla classificazione di C. SEGRE mediante gli esponenti  $e$  dei divisori elementari. Tuttavia i risultati ottenuti

<sup>(1)</sup> Cfr. PREDELLA: *Le omografie di uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni*. Annali di Matematica, 17 (2) 1889-90. BERTINI: *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*. Principato, Messina, 1923, pag. 94. ENRIQUES-CHISINI: *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Zanichelli, Bologna, 1918, Vol. II, pag. 684.

saranno anche enunciati mediante gli interi della caratteristica di PREDELLA, cioè mediante le dimensioni degli spazi fondamentali di punti uniti (semplici o multipli). Nei nn. 2, 3, 4 dimostreremo che:

*Condizione necessaria e sufficiente affinché un'omografia  $\bar{\omega}$  di  $S_n$  di caratteristica di PREDELLA :*

$$[(h_1 - 1, h_2 - 1, \dots, h_t - 1)] \quad h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_t$$

*si possa ottenere come limite di omografie di  $S_n$  di caratteristica di PREDELLA*

$$[(h_1^{(1)} - 1, h_2^{(1)} - 1, \dots, h_{t(1)}^{(1)} - 1)(h_1^{(2)} - 1, h_2^{(2)} - 1, \dots, h_{t(2)}^{(2)} - 1) \dots (h_1^{(v)} - 1, h_2^{(v)} - 1, \dots, h_{t(v)}^{(v)} - 1)]$$

*con  $h_i^{(j)} \geq h_{i+1}^{(j)}$  e  $h_1^{(i)} \geq h_1^{(i+1)}$ , è che detto  $\bar{d}_r$  il numero degli interi  $h_1, h_2, \dots, h_t$  che sono  $\geq r$  e  $d_r$  il numero degli interi  $h_i^{(j)}$  che sono  $\geq r$ , si abbia :*

$$\begin{aligned} & h_1 \geq h_1^{(1)} \\ (+) \quad & \bar{d}_1 + \bar{d}_2 + \dots + \bar{d}_r \leq d_1 + d_2 + \dots + d_r \quad (r = 1, 2, \dots, h_1^{(1)} - 1). \end{aligned}$$

Nel n. 6 estenderemo questo risultato al caso generale dimostrando che:

*Condizione necessaria e sufficiente affinché una data omografia  $\bar{\omega}$  di  $S_n$  con una certa caratteristica di PREDELLA  $\bar{\alpha}$ , formata da  $p$  gruppi, si possa considerare come limite di omografie di  $S_n$  aventi una certa caratteristica di PREDELLA  $\alpha$ , formata da  $q$  gruppi, è che i  $q$  gruppi di  $\alpha$  si possano distribuire in  $p$  classi in corrispondenza biunivoca con i  $p$  gruppi di  $\bar{\alpha}$  e in modo che :*

1) *La somma degli  $h$  di ogni gruppo di  $\bar{\alpha}$  sia uguale alla somma degli  $h$  di tutti i gruppi di  $\alpha$  che stanno nella classe corrispondente.*

2) *Fra gli  $h$  di ogni gruppo di  $\bar{\alpha}$  e gli  $h$  dei gruppi di  $\alpha$  che stanno nella classe corrispondente valgano le relazioni analoghe alle (+).*

1. — Sia  $\omega$  una omografia (non degenera) di uno spazio  $S_n$  (proiettivo, complesso, ad  $n$  dimensioni) in sè, di equazioni

$$\varrho x'_i = \sum_{k=0}^n a_{ik} x_k \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

Chiameremo la matrice  $A = [a_{ik}]$  modulo dell'omografia  $\omega$ . Indicheremo con  $D_{n+1}(\varrho)$  il determinante  $|A - \varrho I|$  del primo membro dell'equazione ca-

ratteristica;  $\{D_n^{(s)}(\varrho)\}$  la totalità dei minori di ordine  $n$  estratti dal determinante  $D_{n+1}(\varrho)$ ;  $\{D_{n-1}^{(s)}(\varrho)\}$  la totalità dei minori di ordine  $n - 1$  estratti dal determinante  $D_{n+1}(\varrho)$ ; ecc. Tali notazioni, ed analoghe, adopereremo per tutte le omografie che considereremo nel seguito.

Inoltre, quando diremo che una omografia  $\bar{\omega}$  di modulo  $[\bar{a}_{ik}]$  è limite, per  $t \rightarrow 0$ , di una omografia  $\omega(t)$  dipendente da un parametro  $t$ <sup>(2)</sup>, intenderemo dire che il fattore di proporzionalità a meno del quale sono determinati i coefficienti di ogni omografia  $\omega(t)$  si possa scegliere in modo che, per  $t \rightarrow 0$ , i detti coefficienti tendano ai corrispondenti coefficienti  $\bar{a}_{ik}$  di  $\bar{\omega}$ . Nel seguito supporremo sempre di avere scelto in questo modo il detto fattore di proporzionalità. Pertanto, se è  $\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = \bar{\omega}$ , allora detti  $a_{ik}(t)$  i coefficienti delle equazioni di  $\omega(t)$  (col fattore di proporzionalità scelto nel modo detto sopra), si ha:

$$\lim_{t \rightarrow 0} a_{ik}(t) = \bar{a}_{ik}$$

2. — Consideriamo l'omografia  $\bar{\omega}$  (non degenera) di  $S_n$  in sè, di equazioni

$$(1) \quad \varrho x_i' = \sum_{k=0}^n \bar{a}_{ik} x_k \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad | \bar{A} | = | \bar{a}_{ik} | \neq 0$$

e supponiamo che la sua equazione caratteristica  $\bar{D}_{n+1}(\varrho) = 0$  abbia una sola radice  $\bar{\varrho}$ , e che

$$(2) \quad [(e_1, e_2, \dots, e_n)] \quad (e_i \geq e_{i+1})$$

sia la sua caratteristica<sup>(3)</sup>.

I numeri:

$$(3) \quad \begin{aligned} \mu_1 &= e_1 + e_2 + \dots + e_n \\ \mu_2 &= e_2 + \dots + e_n \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \mu_n &= e_n \end{aligned}$$

<sup>(2)</sup> Il parametro  $t$  può variare con continuità oppure prendere solo una successione (tendente a zero) di valori. In quest'ultimo caso avremo una successione di omografie che tende ad  $\bar{\omega}$ .

<sup>(3)</sup> Qui ed in seguito intenderemo parlare di caratteristica di C. SEGRE di una omografia. I numeri  $e_i$  sono gli esponenti dei divisori elementari (di WEIERSTRASS) di  $\bar{D}_{n+1}(\varrho)$  considerati in ordine non crescente.











Proviamo anzitutto che:

a) Un'omografia  $\bar{\omega}$  di  $S_n$  di caratteristica

$$(14) \quad [(e_1, e_2)]$$

con  $e_1 \geq e_2 \geq 1$  si può ottenere come limite di omografie di  $S_n$  di caratteristica

$$(15) \quad [(e_1 + 1, e_2 - 1)].$$

Infatti, con una opportuna scelta del sistema di riferimento in  $S_n$  il modulo della omografia  $\bar{\omega}$  si può scrivere nella forma (canonica di JORDAN):

$$\bar{K} = [J_{e_1}, J_{e_2}]$$

dove  $[J_{e_1}, J_{e_2}]$  indica la matrice somma diretta delle matrici  $J_{e_1}$  ed  $J_{e_2}$ , e  $J_e$  è una matrice quadrata di ordine  $e$  e del tipo

$$J_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo la omografia  $\omega(t)$  che ha per modulo

$$K(t) = \left| \begin{array}{c|c} J_{e_1} & \mathbf{0} \\ \hline A & J_{e_2} \end{array} \right|$$

dove  $A$  è una matrice ad  $e_1$  righe ed  $e_2$  colonne, avente tutti gli elementi nulli tranne quello di posto (1,1) che è uguale a  $t$ .

Tale omografia  $\omega(t)$  risulta di caratteristica (15) per  $t \neq 0$ <sup>(8)</sup>, e si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = \bar{\omega}.$$

<sup>(8)</sup> Infatti posto:

$$H = \left| \begin{array}{c|c|c} 0 & & \\ \cdot & & \\ \cdot & I_{e_1} & I_{e_2-1} \\ \cdot & & \\ 0 & & \\ \hline t & 0 \dots 0 & \mathbf{0} \\ \hline & & \\ & \mathbf{0} & -tI_{e_2-1} \end{array} \right|, \quad K' = [J_{e_1+1}, J_{e_2-1}]$$

dove  $I_r$  indica la matrice identica di ordine  $r$ , si ha:  $K(t)H = HK'$ .

Dalla proprietà a) segue subito che:

a') Ogni omografia  $\bar{\omega}$  di  $S_n$  di caratteristica

$$[(e_1, e_2, \dots, e_n)]$$

si può ottenere come limite di omografie di  $S_n$  di caratteristica:

$$[(e_1, e_2, \dots, e_{r-1}, e_r + 1, e_{r+1}, \dots, e_{t-1}, e_t - 1, e_{t+1}, \dots, e_n)].$$

b) Dimostriamo ora che:

Ogni omografia  $\bar{\omega}$  di  $S_n$  di caratteristica

$$(\gamma_0) \quad [(e_1, e_2, \dots, e_n)] \quad (e_i \geq e_{i+1})$$

si può ottenere come limite di omografie di  $S_n$  di caratteristica

$$(\gamma') \quad [(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)] \quad (e'_i \geq e'_{i+1})$$

con

$$(16) \quad e_1 \leq e'_1, \sum_{i=1}^2 e_i \leq \sum_{i=1}^2 e'_i, \dots, \sum_{i=1}^{h-1} e_i \leq \sum_{i=1}^{h-1} e'_i.$$

Se le due caratteristiche  $(\gamma_0)$  e  $(\gamma')$  coincidono, la proprietà è immediata.

Se sono distinte, allora, essendo  $\sum_{i=1}^h e_i = \sum_{i=1}^h e'_i = n + 1$ , almeno uno dei numeri  $e_i$  è maggiore del corrispondente  $e'_i$ , e almeno uno degli stessi numeri  $e_i$  è minore del corrispondente  $e'_i$ .

Sia  $e_t$  l'ultimo dei numeri  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , che è maggiore del corrispondente  $e'$ . Si ha:

$$e_t - 1 \geq e'_t$$

e, se è  $t < h$ , dalla definizione di  $e_t$ , dalle (16), e dalla  $\sum_{i=1}^h e_i = \sum_{i=1}^h e'_i = n + 1$ , segue

$$e_{t+1} = e'_{t+1}, e_{t+2} = e'_{t+2}, \dots, e_h = e'_h.$$

Inoltre, essendo  $e_t - 1 \geq e'_t \geq e'_{t+1} = e_{t+1}$ , si ha anche

$$e_t - 1 \geq e_{t+1}.$$

Sia ora  $e_s$  l'ultimo dei numeri  $e_1, e_2, \dots, e_n$  che è minore del corrispondente  $e'$ . Si ha

$$e_s < e'_s$$

con  $s \leq t-1$ , e, se è  $s < t-1$ , si ha anche :

$$(17) \quad e_{s+1} \geq e'_{s+1}, e_{s+2} \geq e'_{s+2}, \dots, e_{t-1} \geq e'_{t-1}.$$

Sia infine  $e_r$  il primo dei numeri  $e_1, e_2, \dots, e_h$ , che è uguale ad  $e_s$ .  
Dalle  $e_i \geq e_{i+1}$  segue

$$e_r = e_{r+1} = \dots = e_s$$

e, se è  $r > 1$ , si ha

$$e_{r-1} \geq e_r + 1.$$

Inoltre, essendo  $e'_r \geq e'_{r+1} \geq \dots \geq e'_s > e_s$ , sarà anche

$$(18) \quad e_r + 1 \leq e'_r, e_{r+1} \leq e'_{r+1}, \dots, e_s < e'_s.$$

Dalle  $e_i \geq e_{i+1}$ ,  $e_t - 1 \geq e_{t+1}$ ,  $e_{r-1} \geq e_r + 1$  segue che la successione

$$e_1, \dots, e_{r-1}, e_r + 1, e_{r+1}, \dots, e_{t-1}, e_t - 1, e_{t+1}, \dots, e_h$$

è non crescente ed ha per somma  $n + 1$  perchè  $\sum_{i=1}^h e_i = n + 1$ . Da ciò è da  $a'$ ) segue che una omografia  $\bar{\omega}$  di caratteristica  $(\gamma_0)$  si può ottenere come limite di una omografia  $\omega^{(1)}(t)$  di caratteristica

$$(\gamma_1) \quad [(e_1, \dots, e_{r-1}, e_r + 1, e_{r+1}, \dots, e_{t-1}, e_t - 1, e_{t+1}, \dots, e_h)].$$

Proviamo ora che fra gli interi che compaiono in questa caratteristica  $(\gamma_1)$  e quelli che compaiono nella  $(\gamma')$  valgono le relazioni analoghe alle (16), e cioè la somma dei primi  $k$  numeri della caratteristica  $(\gamma_1)$  è minore od uguale alla somma dei primi  $k$  numeri della caratteristica  $(\gamma')$ , e ciò per  $k = 1, 2, \dots, h - 1$ . Ciò è vero per  $k = 1, 2, \dots, s$  per le (16) e per le (18). Se è  $s = h - 1$  la nostra proprietà è quindi vera. Se è  $s < h - 1$ , allora la proprietà è vera anche per i rimanenti valori di  $k$ , e cioè per  $k = s + 1, \dots, h - 1$ ; ciò perchè dalle (17) segue che la somma degli interi di  $(\gamma_1)$  di posto  $k + 1, \dots, h$  è maggiore od uguale a quella degli interi corrispondenti  $e'_{k+1}, \dots, e'_h$  della  $(\gamma')$ , mentre la somma di tutti gli interi della  $(\gamma_1)$  è uguale alla somma di tutti gli interi della  $(\gamma')$ .

Dopo ciò, se la caratteristica  $(\gamma_1)$  non coincide con la  $(\gamma')$ , ripetiamo il procedimento a partire da  $(\gamma_1)$  invece che dalla  $(\gamma_0)$ , e così continuiamo. Troveremo in tal modo un numero finito di caratteristiche  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m = \gamma'$  tali che ogni omografia di  $S_n$  di caratteristica  $\gamma_j$  è limite di omografie di

$S_n$  di caratteristica  $\gamma_{j+1}$ , e quindi ogni omografia  $\gamma_0$  è limite di omografie di caratteristica  $\gamma'$ .

b') Con lo stesso ragionamento fatto in b) si prova che

Ogni omografia  $\bar{\omega}$  di  $S_n$  di caratteristica

$$[(e_1, e_2, \dots, e_n)] \quad (e_i \geq e_{i+1})$$

si può ottenere come limite di omografie di  $S_n$  di caratteristica

$$[(e'_1, e'_2, \dots, e'_{h(1)})] \quad (e'_i \geq e'_{i+1})$$

con

$$h \geq h^{(1)}, e_1 \leq e'_1, \sum_{i=1}^2 e_i \leq \sum_{i=1}^2 e'_i, \dots, \sum_{i=1}^{h^{(1)}-1} e_i \leq \sum_{i=1}^{h^{(1)}-1} e'_i.$$

Basta porre  $e'_{h^{(1)}+1} = 0, e'_{h^{(1)}+2} = 0, \dots, e'_h = 0$ , e ripetere il ragionamento fatto in b).

c) Proviamo ora che:

Ogni omografia  $\bar{\omega}$  di  $S_n$  di caratteristica

$$(19) \quad \left[ \left( \sum_{i=1}^v e_1^{(i)}, \sum_{i=1}^v e_2^{(i)}, \dots, \sum_{i=1}^v e_{h(1)}^{(i)} \right) \right] \quad (e_r^{(i)} \geq e_{r+1}^{(i)})$$

si può ottenere come limite di omografie di  $S_n$  di caratteristica:

$$(20) \quad [(e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \dots, e_{h(1)}^{(1)}) (e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, \dots, e_{h(2)}^{(2)}) \dots (e_1^{(v)}, e_2^{(v)}, \dots, e_{h(v)}^{(v)})]$$

con  $h^{(1)} \geq h^{(2)} \geq \dots \geq h^{(v)}$ , ed  $e_r^{(i)} = 0$  per  $r > h^{(i)}$ .

Poniamo

$$e_1 = \sum_{i=1}^v e_1^{(i)}, e_2 = \sum_{i=1}^v e_2^{(i)}, \dots, e_{h(1)} = \sum_{i=1}^v e_{h(1)}^{(i)}$$

e ricordiamo che con una opportuna scelta del sistema di riferimento in  $S_n$ , il modulo  $\bar{k}$  della  $\bar{\omega}$  si può scrivere come somma diretta delle matrici  $J_{e_1}, J_{e_2}, \dots, J_{e_{h(1)}}$ . Indichiamo con  $H_r(t)$  la matrice somma diretta delle matrici

$$(i-1) t I_r^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, v)$$

e con  $H(t)$  la matrice somma diretta delle matrici  $H_1(t), H_2(t), \dots, H_{h(1)}(t)$ . Consideriamo l'omografia  $\omega(t)$  di  $S_n$  che ha per modulo la matrice  $\bar{K} + H(t)$ .

Si ha subito  $\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = \bar{\omega}$ . Inoltre per  $t \neq 0$ , e  $1 + (i-1)t \neq 0$  la  $\omega(t)$  ha la caratteristica (20) perchè  $J_{e_r} + H_r(t)$  è simile alla matrice somma

diretta delle matrici

$$J_{e_r^{(1)}} , (1+t) J_{e_r^{(2)}} , (1+2t) J_{e_r^{(3)}} , \dots , (1+(v-1)t) J_{e_r^{(v)}}$$

in quanto le dette due matrici hanno gli stessi divisori elementari.

Da *b'*) e *c*) segue la proprietà enunciata al principio di questo n. 3, e cioè se valgono le relazioni (13) allora ogni omografia  $\bar{\omega}$  di  $S_n$  di caratteristica (11) si può ottenere come limite di una omografia  $\omega(t)$  di  $S_n$  di caratteristica (12).

Infatti, se valgono le (13) allora per *b'*) ogni omografia  $\bar{\omega}$  di  $S_n$  di caratteristica (11) si può ottenere come limite di omografie di  $S_n$  di caratteristica (19), e per *c*) ogni omografia di caratteristica (19) si può ottenere come limite di omografie di caratteristica (12).

4. — Riunendo i risultati finali dei nn. 2, 3 si ha :

a) *Condizione necessaria e sufficiente affinché un'omografia  $\bar{\omega}$  di  $S_n$  di caratteristica (11) si possa ottenere come limite di omografie di  $S_n$  di caratteristica (12) è che valgano le relazioni (13).*

Le condizioni (13) si traducono subito in relazioni fra le dimensioni degli spazi fondamentali di punti uniti (distinti o no), cioè fra gli interi che compaiono nella caratteristica di PREDELLA corrispondente alla (11) e in quella corrispondente alla (12).

Basta ricordare<sup>(9)</sup> che se

$$(k_1 - 1, k_2 - 1, \dots, k_t - 1) \quad k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_t \geq 1$$

e il gruppo di PREDELLA corrispondente al gruppo di SEGRE

$$(e_1, e_2, \dots, e_h) \quad e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_h$$

allora è  $h = k_1$  ed  $e_r$  è uguale al numero degli interi  $k$  che sono  $\geq r$  ( $r = 1, 2, \dots, h$ ); in particolare è  $e_1 = t$ .

Da ciò segue che il teorema a) si può enunciare nella seguente forma :

b) *Condizione necessaria e sufficiente affinché un'omografia  $\bar{\omega}$  di  $S_n$  di caratteristica di PREDELLA*

$$(21) \quad [(h_1 - 1, h_2 - 1, \dots, h_t - 1)] \quad (h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_t)$$

<sup>(9)</sup> BERTINI, *loc. cit.* in <sup>(1)</sup> pag. 112.

si possa ottenere come limite di omografie di  $S_n$  di caratteristica di PREDELLA

$$(22) [(h_1^{(1)}-1, h_2^{(1)}-1, \dots, h_{t(1)}^{(1)}-1)(h_1^{(2)}-1, h_2^{(2)}-1, \dots, h_{t(2)}^{(2)}-1) \dots (h_1^{(v)}-1, h_2^{(v)}-1, \dots, h_{t(v)}^{(v)}-1)]$$

con  $h_i^{(j)} \geq h_{i+1}^{(j)}$  e  $h_1^{(i)} \geq h_1^{(i+1)}$ , è che detto  $\bar{d}_r$  il numero degli interi  $h_1, h_2, \dots, h_t$  che sono  $\geq r$  e  $d_r$  il numero degli interi  $h_i^{(j)}$  che sono  $\geq r$ , si abbia

$$(23) \quad h_1 \geq h_1^{(1)} \\ \bar{d}_1 + \bar{d}_2 + \dots + \bar{d}_r \leq d_1 + d_2 + \dots + d_r \quad (r = 1, 2, \dots, h_1^{(1)} - 1)$$

5. — Osserviamo che le condizioni (23) non dipendono dal modo come sono raggruppati i numeri  $h_i^{(j)}$  nella (22).

Pertanto, come immediata conseguenza del teorema b) del n. 4, si ha il teorema di PREDELLA:

*Un'omografia  $\bar{\omega}$  di  $S_n$  con un solo gruppo caratteristico è limite di omografie generali di  $S_n$  aventi gli stessi interi caratteristici (di PREDELLA) della  $\bar{\omega}$ .*

E si ha anche che:

*Se una omografia  $\bar{\omega}$  di caratteristica di PREDELLA (21) è limite di omografie di caratteristica di PREDELLA (22), allora essa è anche limite di omografie la cui caratteristica di PREDELLA differisce dalla (22) solo per il modo come sono raggruppati gli  $h_i^{(j)}$ .*

Per esempio in  $S_3$  un'omologia speciale  $[(2, 0)]$  è limite di biassiali generali  $[(1) (1)]$  ed è anche limite di biassiali speciali  $[(1, 1)]$ ; una biassiale speciale  $[(1, 1)]$  è limite di omografie generali di tipo  $[(0) (0) (0) (0)]$  ed è anche limite di omografie particolari di tipo  $[(0, 0, 0) (0)]$ .

6. — Estenderemo ora il teorema a) del n. 4 al caso in cui l'omografia  $\bar{\omega}$  abbia più gruppi caratteristici.

Siano (1) le equazioni di  $\bar{\omega}$ , siano

$$\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_p$$

le radici dell'equazione caratteristica  $\bar{D}_{n+1}(q) = 0$  di  $\bar{\omega}$ , e sia

$$(24) \quad (\bar{e}_1^{(r)}, \bar{e}_2^{(r)}, \dots, \bar{e}_{\bar{h}(r)}^{(r)}) \quad (\text{con } \bar{e}_i^{(r)} \geq \bar{e}_{i+1}^{(r)})$$

il gruppo caratteristico corrispondente alla radice  $\bar{q}_r$  ( $r = 1, 2, \dots, p$ ).

Supponiamo che la  $\bar{\omega}$  sia limite, per  $t \rightarrow 0$ , di una omografia  $\omega(t)$  la cui equazione caratteristica  $D_{n+1}(q) = 0$  abbia  $q$  radici (per  $t \neq 0$ ).

Poichè  $\lim_{t \rightarrow 0} D_{n+1}(\varrho) = \bar{D}_{n+1}(\varrho)$ , avremo che, per  $t \rightarrow 0$ , delle  $q$  radici dell'equazione  $D_{n+1}(\varrho) = 0$  un certo numero  $q_1$  tendono a  $\bar{\varrho}_1$ , un certo numero  $q_2$  tendono a  $\bar{\varrho}_2, \dots$ , un certo numero  $q_p$  tendono a  $\bar{\varrho}_p$ ; e se

$$\varrho_{r1}, \varrho_{r2}, \dots, \varrho_{rq_r}$$

sono le radici di  $D_{n+1}(\varrho) = 0$  che tendono a  $\bar{\varrho}_r$ , e

$$\mu_{r1}, \mu_{r2}, \dots, \mu_{rq_r}$$

sono le molteplicità, sarà

$$\begin{aligned} \mu_{r1} + \mu_{r2} + \dots + \mu_{rq_r} &= \bar{\mu}_r \\ q_1 + q_2 + \dots + q_p &= q \end{aligned}$$

essendo  $\bar{\mu}_r$  la molteplicità della radice  $\bar{\varrho}_r$  nell'equazione  $\bar{D}_{n+1}(\varrho) = 0$ , cioè  $\bar{\mu}_r = \sum_{i=1}^{\bar{h}^{(r)}} e_i^{(r)}$ .

Siano

$$(25) \quad (e_1^{(r1)}, e_2^{(r1)}, \dots, e_{h^{(r1)}}^{(r1)}) (e_1^{(r2)}, e_2^{(r2)}, \dots, e_{h^{(r2)}}^{(r2)}) \dots (e_1^{(rq_r)}, e_2^{(rq_r)}, \dots, e_{h^{(rq_r)}}^{(rq_r)})$$

con  $e_i^{(rj)} \geq e_{i+1}^{(rj)}$ ,  $h^{(rj)} \geq h^{(rj+1)}$ , i  $q_r$  gruppi caratteristici di  $\omega(t)$  che corrispondono ordinatamente alle radici  $\varrho_{r1}, \varrho_{r2}, \dots, \varrho_{rq_r}$ .

Ragionando su  $\bar{\varrho}_r$  e su  $\varrho_{r1}, \varrho_{r2}, \dots, \varrho_{rq_r}$  in modo analogo a come si è fatto nel n. 2, si prova che fra gli interi del gruppo (24) e quelli dei gruppi (25) valgono le relazioni analoghe alle (13), e cioè

$$\bar{h}^{(r)} \geq h^{(r1)}$$

$$\bar{e}_1^{(r)} \leq \sum_{j=1}^{q_r} e_1^{(rj)}$$

$$\bar{e}_1^{(r)} + \bar{e}_2^{(r)} \leq \sum_{j=1}^{q_r} (e_1^{(rj)} + e_2^{(rj)})$$

. . . . .

$$\bar{e}_1^{(r)} + \bar{e}_2^{(r)} + \dots + \bar{e}_{h^{(r1)}-1}^{(r)} \leq \sum_{j=1}^{q_r} (e_1^{(rj)} + e_2^{(rj)} + \dots + e_{h^{(r1)}-1}^{(rj)})$$

con  $e_i^{(rj)} = 0$  per  $i > h^{(rj)}$ .

Concludendo si ha che:

Se una omografia  $\bar{\omega}$  di  $S_n$  con certi  $p$  gruppi caratteristici è limite di una omografia  $\omega(t)$  di  $S_n$  con certi  $q$  gruppi caratteristici, allora i  $q$  gruppi di  $\omega(t)$  si possono ripartire in  $p$  classi in corrispondenza biunivoca con i  $p$  gruppi della  $\bar{\omega}$ , e in modo che:

1) La somma degli  $e$  di ogni gruppo caratteristico della  $\bar{\omega}$  sia uguale alla somma degli  $e$  di tutti i gruppi della classe corrispondente.

2) Fra gli  $e$  di ogni gruppo caratteristico di  $\bar{\omega}$  e gli  $e$  dei gruppi caratteristici di  $\omega(t)$  che stanno nella classe corrispondente valgono le relazioni analoghe alla (13).

Questo risultato si inverte facilmente; cioè affinché una omografia  $\bar{\omega}$  di  $S_n$  con una certa caratteristica  $\bar{\gamma}$  formata da  $p$  gruppi si possa ottenere come limite di omografie di  $S_n$  avente una certa caratteristica  $\gamma$  formata da  $q$  gruppi, basta che i  $q$  gruppi di  $\gamma$  si possano distribuire in  $p$  classi in corrispondenza biunivoca con i  $p$  gruppi di  $\bar{\gamma}$  e in modo che siano verificate le condizioni 1) e 2).

Infatti scegliendo opportunamente il sistema di riferimento, il modulo di  $\bar{\omega}$  si può scrivere come somma diretta di  $p$  matrici quadrate  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_p$  tali che  $\bar{A}_r$  ha per caratteristica l' $r$ -mo gruppo di  $\bar{\gamma}$  ( $r = 1, 2, \dots, p$ ). Dopo ciò, essendo verificate le 1) e 2), per quanto abbiamo visto nel n. 3 la matrice  $\bar{A}_r$  si può considerare come limite, per  $t \rightarrow 0$ , di una matrice  $A_r(t)$  avente per caratteristica i gruppi dell' $r$ -ma classe di  $\gamma$ . L'omografia  $\omega(t)$  che ha per modulo la somma diretta delle matrici  $A_1(t), A_2(t), \dots, A_p(t)$ , ha per caratteristica  $\gamma$  e si ha  $\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = \bar{\omega}$ .

Concludendo si ha:

*Condizione necessaria e sufficiente affinché una data omografia  $\bar{\omega}$  di  $S_n$ , con una certa caratteristica  $\bar{\gamma}$  formata da  $p$  gruppi, si possa considerare come limite di omografie di  $S_n$  aventi una certa caratteristica  $\gamma$  formata da  $q$  gruppi, è che i  $q$  gruppi di  $\gamma$  si possano distribuire in  $p$  classi in corrispondenza biunivoca con i  $p$  gruppi di  $\bar{\gamma}$  e in modo che:*

1) *La somma degli  $e$  di ogni gruppo caratteristico di  $\bar{\gamma}$  sia uguale alla somma degli  $e$  di tutti i gruppi della classe corrispondente.*

2) *Fra gli  $e$  di ogni gruppo caratteristico di  $\bar{\gamma}$  e gli  $e$  dei gruppi caratteristici di  $\gamma$  che stanno nella classe corrispondente valgono le relazioni analoghe alle (13).*

Per enunciare questo teorema mediante i numeri  $h$  di PREDELLA, basta cambiare  $e$  con  $h$  e in 2) sostituire alle condizioni (13), le condizioni (23).

OSSERVAZIONE. Da questo teorema segue che se una data omografia  $\bar{\omega}$  di  $S_n$  avente una certa caratteristica  $\bar{\gamma}$  si può considerare come limite di omografie di  $S_n$  aventi una certa caratteristica  $\gamma$ , allora ogni omografia di caratteristica  $\bar{\gamma}$  si può considerare come limite di omografie di caratteristica  $\gamma$ .